

## ТЕРМОУПРУГИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ МЕТАЛЛОПОЛИМЕРНОЙ ПЛАСТИНЕ ПРИ КОЛЬЦЕВЫХ НАГРУЗКАХ

<sup>1</sup>Плескачевский Ю.В., <sup>2</sup>Журавков М.А., <sup>3</sup>Старовойтов Э.И.

<sup>1</sup>Белорусский национальный технический университет

<sup>2</sup>Белорусский государственный университет

<sup>3</sup>Белорусский государственный университет транспорта

Стержни, пластины и оболочки, имеющие слоистую структуру, при относительно малом весе способны обеспечить заданную прочность, жёсткость и противостоять ряду других физических воздействий. Поэтому создание расчетных моделей подобных элементов конструкций является актуальной проблемой.

На сегодняшний день создание общей теории квазистатического деформирования трехслойных элементов конструкций еще не завершено и интенсивно продолжается. В первую очередь это связано с необходимостью учета физически нелинейного деформирования материалов слоев и комплексного термосилового воздействия.

В монографиях [1–3] рассмотрены различные математические модели статического и динамического деформирования многослойных и трехслойных элементов конструкций, приведены постановки краевых задач, изложены методы их расчета. В статьях [4–7] исследовано деформирование слоистых балок и пластин при изотермических нагрузках. Работы [8–13] посвящены изучению термосилового нагружения трехслойных оболочек, стержней и пластин. Постановка и методика решения краевой задачи о циклическом нагружении упругопластических композитных тел в нейтронном потоке приведены в [14].

Здесь приведена постановка и получено аналитическое решение краевой задачи о термосиловом деформировании трехслойной круговой пластины в температурном поле. Численная апробация решения проведена в случае металлополимерного стержня.

**1. Постановка краевой задачи.** Рассматривается несимметричная по толщине трехслойная круговая пластина (рисунок 1). Постановка задачи и ее решение проводится в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ . Срединная плоскость заполнителя принимается за координатную, ось  $z$  направим ей перпендикулярно вверх (рис. 1). Для тонких внешних несущих слоев толщиной  $h_1 \neq h_2$  принимаются гипотезы Кирхгофа, для толстого жесткого заполнителя ( $h_3 = 2c$ ), воспринимающего нагрузку в тангенциальном направлении, справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали.

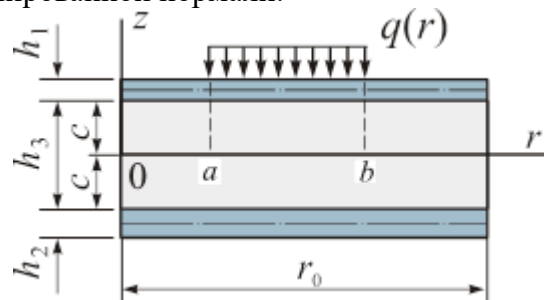


Рис. 1. Схема нагружения

Считаем, что к наружной поверхности первого несущего слоя приложены осесимметричные распределенные нагрузки  $q(r)$ ,  $p(r)$  и подводится тепловой поток  $q_t$ . Считаем поверхность  $z = -c - h_2$  и контур пластины теплоизолированными. Это

позволяет неоднородное температурное поле  $T(z)$ , отсчитываемое от некоторой начальной температуры  $T_0$ , вычислять с достаточной точностью по формуле [1]:

$$T = \frac{qH}{\lambda} \left\{ \tau + \frac{1}{2} \left( s + \frac{c+h_2}{H} \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left[ \pi n \left( s + \frac{c+h_2}{H} \right) \right] e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right\}, \quad (1)$$

$$\tau = \frac{at}{H^2}, \quad a = \frac{\sum_{k=1}^3 \lambda_{tk} h_k}{\sum_{k=1}^3 \rho_k C_k h_k}, \quad H = \sum_{k=1}^3 h_k.$$

где  $\lambda_{tk}$ ,  $C_k$ ,  $\rho_k$  – теплопроводность, теплоемкость и плотность материала  $k$ -го слоя.

В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют:  $u_{\varphi}^{(k)} = 0$  ( $k$  – номер слоя), а прогиб пластины  $w$ , относительный сдвиг в заполнителе  $\psi$  и радиальное перемещение координатной поверхности  $u$  не зависят от координаты  $\varphi$ , то есть  $w = w(r)$ ,  $u = u(r)$ ,  $\psi = \psi(r)$ . В дальнейшем эти функции считаем искомыми. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев ( $\psi = 0$  при  $r = 1$ ). Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее радиусу  $r_0$ .

Из гипотезы прямолинейности нормали заполнителя следует, что

$$2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_{r,z}^{(3)} + w_{,r} = \psi.$$

После интегрирования этого выражения получим формулы выражающие радиальные перемещения в слоях  $u_r^{(k)}$  через искомые функции:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r}, \quad c \leq z \leq c + h_1, \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r}, \quad -c \leq z \leq c, \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r}, \quad -c - h_2 \leq z \leq -c, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $z$  – координата рассматриваемого волокна, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Деформации в слоях следуют из (2) и соотношений Коши. Используя компоненты тензора напряжений  $\sigma_{\alpha}^{(k)}$  ( $\alpha = r, \varphi$ ),  $\sigma_{rz}^{(3)}$  введем обобщенные внутренние усилия и моменты в пластине:

$$T_{\alpha} \equiv \sum_{k=1}^3 T_{\alpha}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha}^{(k)} dz, \quad M_{\alpha} \equiv \sum_{k=1}^3 M_{\alpha}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha}^{(k)} z dz, \quad (3)$$

$$H_{\alpha} = M_{\alpha}^{(3)} + c(T_{\alpha}^{(1)} - T_{\alpha}^{(2)}), \quad Q = \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} dz.$$

Для связи деформаций и напряжений воспользуемся термоупругими соотношениями закона Гука в девiatorно-шаровой форме

$$\begin{aligned} s_{\alpha}^{(k)} &= 2G_k(T_k) \varepsilon_{\alpha}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k(T_k) (\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} T_k) \quad (k=1,2,3), \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_k(T_k) \varepsilon_{rz}^{(3)} \quad (\alpha = r, \varphi), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $s_{\alpha}^{(k)}$ ,  $\varepsilon_{\alpha}^{(k)}$  – девiatorные,  $\sigma^{(k)}$ ,  $\varepsilon^{(k)}$  – шаровые части тензоров напряжений и деформаций;  $G_k(T_k)$ ,  $K_k(T_k)$  – температурно-зависимые модули сдвига и объемного деформирования;  $T_k$  – известная температура (1);  $\alpha_{0k}$  – коэффициент линейного температурного расширения материала  $k$ -го слоя.

Уравнения равновесия в усилиях рассматриваемой пластины получены вариационным методом. Температура явным образом в них не входит, поэтому они формально совпадают с аналогичными уравнениями для случая изотермических нагрузок [2]. Выразив во внутренних усилиях напряжения через деформации с помощью закона Гука (4), и далее через перемещения (2), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно искомым перемещений:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= -p, \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_3 w_{,r}) - 2cG_3 \psi &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$L_3(a_3u + a_5\psi - a_6w_{,r}) = -q .$$

Здесь дифференциальные операторы  $L_2$  (*оператор Бесселя*),  $L_3$  определяются формулами:

$$L_2(g) \equiv \left( \frac{1}{r}(rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}. \quad (6)$$

Коэффициенты  $a_i$  определяются интегральными соотношениями, т.к. модули упругости материалов в слоях изменяются по их толщине вместе с температурой:

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 K_{k0}, \quad a_2 = c(K_{10} - K_{20}), \quad a_3 = \sum_{k=1}^3 K_{k1}, \quad a_4 = K_{32} + c^2(K_{10} + K_{20}), \quad (7)$$

$$a_5 = K_{32} + c(K_{11} + K_{21}), \quad a_6 = \sum_{k=1}^3 K_{k2}, \quad K_{km} = \int_{h_k} \left[ K_k(T_k) + \frac{4}{3}G_k(T_k) \right] z^m dz \quad (m = 0, 1, 2).$$

Зависимость параметров упругости материалов слоев описывается формулой Белла [1]. Если температурное поле усреднено по толщине  $k$ -го слоя пластины, то значения упругих параметров постоянно внутри слоя:

$$G_k(T_k) \equiv G_k(T_{0k}), \quad K_k(T_k) \equiv K_k(T_{0k}), \quad T_{0k}(t) = \frac{1}{h_k} \int_{h_k} T_k(z, t) dz .$$

В этом случае, после интегрирования выражений [7] получим формулы для коэффициентов, формально совпадающие с приведенными в [1], но с пониженными по величине упругими постоянными материалов слоев за счет действия температуры.

Краевая задача определения функций  $u(r)$ ,  $\psi(r)$ ,  $w(r)$  замыкается присоединением к системе уравнений (5) силовых или кинематических граничных условий:

- при заделке контура пластины
 
$$(u = \psi = w = w_{,r} = 0 \text{ при } r = 1), \quad (8)$$
- при шарнирном опирании пластины
 
$$(u = \psi = w = M_r = 0 \text{ при } r = 1).$$

**2. Общее решение краевой задачи.** Используя полученное первое и третье уравнения из системы (10), можно исключить из второго уравнения этой же системы радиальное перемещение  $u(r)$  и прогиб  $w(r)$ . В результате получим неоднородное модифицированное уравнение Бесселя для нахождения функции  $\psi(r)$ :

$$L_2(\psi) - \beta^2\psi = f . \quad (9)$$

где

$$\beta^2 = \frac{2cb_3G_3}{b_1b_3 - b_2^2}, \quad b_1 = \frac{a_1a_4 - a_2^2}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1a_5 - a_2a_3}{a_1}, \quad b_3 = \frac{a_1a_6 - a_3^2}{a_1},$$

$$f(r) = \frac{b_3}{b_1b_3 - b_2^2} \left[ \frac{p(a_2b_3 - a_3b_2)}{a_1b_3} + \frac{b_2}{b_3r} \left( \int qr dr - C_1 \right) \right],$$

где в константу интегрирования  $C_1$  включены числовые множители.

Решение полученного уравнения можно представить в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения  $\psi_r$  неоднородного уравнения (9). В результате получаем

$$\psi_r = C_2 I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r) + \psi_r,$$

$$\psi_r = -K_1(\beta r) \int I_1(\beta r) f(r) r dr + I_1(\beta r) \int K_1(\beta r) f(r) r dr . \quad (10)$$

где  $I_1(\beta r)$  – модифицированная функция Бесселя первого порядка;  $K_1(\beta r)$  – функция Макдональда;  $C_2, C_3$  – константы интегрирования.

После этого прогиб и радиальное перемещение следуют из оставшихся уравнений системы (5). В итоге

$$w = \frac{b_2}{b_3} \int \psi dr - \frac{a_3}{b_3 a_1} \int L_2^{-1}(p) dr + \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(q) dr + \frac{1}{4} C_1 r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5 r^2}{4 b_3} + C_6 \ln r + C_4, \quad (11)$$

$$u = \frac{a_3}{a_1} w_{,r} - \frac{a_2}{a_1} \psi - \frac{1}{a_1} L_2^{-1}(p) + \frac{C_7 r}{2} + \frac{C_8}{r}.$$

Здесь  $L_2^{-1}$ ,  $L_3^{-1}$  – линейные интегральные операторы, обратные дифференциальным операторам (6)

$$L_2^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \int f dr dr, \quad L_3^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int r f dr dr dr.$$

Исходя из условия гладкости решения в центре пластины ( $r = 0$ ) для сплошных пластин при непрерывных нагрузках необходимо в выражениях (10), (11) положить  $C_1 = C_3 = C_6 = C_8 = 0$ . Остальные четыре константы интегрирования определяются из граничных условий (8).

В результате точное решение задачи теории термоупругости о деформировании сплошной круглой трехслойной пластины принимает вид:

$$\psi = C_2 I_1(\beta r) - K_1(\beta r) \int I_1(\beta r) f(r) r dr + I_1(\beta r) \int K_1(\beta r) f(r) r dr,$$

$$w = \frac{1}{b_3} \left[ b_2 \left( \frac{C_2}{\beta} I_0(\beta r) + \int \psi_r dr \right) - \int \left( \frac{a_3}{a_1} L_2^{-1}(p) - L_3^{-1}(q) \right) dr + \frac{C_3 r^2}{4} + C_4 \right], \quad (12)$$

$$u = \frac{a_3}{a_1 a_6 - a_3^2} \left[ L_3^{-1}(q) - \frac{a_6}{a_3} L_2^{-1}(p) + \left( a_5 - \frac{a_2 a_6}{a_3} \right) \psi + C_7 r \right].$$

Если контур пластинки заделан, то, удовлетворяя условиям (8), получим следующие константы интегрирования:

$$C_2 = - \frac{\psi_r}{I_1(\beta)} \Big|_{r=1}, \quad C_4 = - b_2 \left( \frac{C_2}{\beta} I_0(\beta) + \int \psi_r dr \Big|_{r=1} \right) + \int \left( \frac{a_3}{a_1} L_2^{-1}(p) - L_3^{-1}(q) \right) dr \Big|_{r=1} - \frac{C_5}{4},$$

$$C_5 = 2 \left( \frac{a_3}{a_1} L_2^{-1}(p) - L_3^{-1}(q) \right) \Big|_{r=1}, \quad C_7 = \left( \frac{a_6}{a_3} L_2^{-1}(p) - L_3^{-1}(q) \right) \Big|_{r=1}.$$

В этом случае решение (12) не зависит явно от температуры. Она будет влиять только на значения модулей упругости материалов.

**3. Изгиб кольцевой нагрузкой.** Рассмотрим деформирование круговой трехслойной пластины кольцевой нагрузкой. Для удобства аналитической записи воспользуемся функцией Хэвисайда нулевого порядка:

$$H_0(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (13)$$

Пусть на пластину действует локальная нагрузка, равномерно распределенная по кольцу относительного радиуса  $a \leq r \leq b$  (см. рисунок 1), перпендикулярно внешнему слою. Тогда ее можно записать так:

$$q = q_0 (H_0(b-r) - H_0(a-r)), \quad p = 0. \quad (14)$$

Так, интегральные операторы третьей степени от функций Хэвисайда, входящих в (14) будут:

$$L_3^{-1}(H_0(b-r)) = \left( \frac{r^3}{16} - \frac{b^4}{16r} - \frac{b^2 r}{4} \ln \left( \frac{r}{b} \right) \right) H_0(b-r),$$

$$L_3^{-1}(H_0(a-r)) = \left( \frac{r^3}{16} - \frac{a^4}{16r} - \frac{a^2 r}{4} \ln \left( \frac{r}{a} \right) \right) H_0(a-r). \quad (15)$$

Сдвиг в заполнителе следует из (10), с учетом (15):

$$\psi = C_2 I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r) + \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(b-r) \left[ \frac{b^2}{r} - r + 2b(K_1(\beta b)I_1(\beta r) - I_1(\beta b)K_1(\beta r)) \right] - \\
& - \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(a-r) \left[ \frac{a^2}{r} - r + 2a(K_1(\beta a)I_1(\beta r) - I_1(\beta a)K_1(\beta r)) \right] + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2 r}.
\end{aligned}$$

Прогиб  $w(r)$  и радиальное перемещение  $u(r)$  круговой трехслойной пластины формально сохраняют вид (12), однако входящие в них интегралы от нагрузки (14) будут:

$$\begin{aligned}
\int L_3^{-1}(q) dr &= q_0 \left[ \frac{r^4 - 5b^4}{64} - \frac{b^4}{16} \ln\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{b^2 r^2}{8} \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{b^2 r^2}{16} \right] H(b-r) - \\
& - q_0 \left[ \frac{r^4 - 5a^4}{64} - \frac{a^4}{16} \ln\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{a^2 r^2}{8} \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \frac{a^2 r^2}{16} \right] H(a-r), \\
\int \Psi dr &= \frac{C_2 I_0(\beta r)}{\beta} - \frac{C_3 K_0(\beta r)}{\beta} + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2} \ln(r) + \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(b-r) \times \\
& \times \left[ \frac{b^2 - r^2}{2} + b^2 \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{2b}{\beta} (K_1(\beta b)I_0(\beta r) + I_1(\beta b)K_0(\beta r)) - \frac{2}{\beta^2} \right] - \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} \times \\
& \times H_0(a-r) \left[ \frac{a^2 - r^2}{2} + a^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \frac{2a}{\beta} (K_1(\beta a)I_0(\beta r) + I_1(\beta a)K_0(\beta r)) - \frac{2}{\beta^2} \right].
\end{aligned}$$

Константы интегрирования при защемленном контуре пластины следующие:

$$C_1 = -\frac{q_0(b^2 - a^2)}{2}, \quad C_2 = \frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2 I_1(\beta)} \left( \frac{b^2 - a^2}{2} - bK_1(\beta)I_1(\beta b) + aK_1(\beta)I_1(\beta a) \right),$$

$$C_3 = \frac{q_0 \gamma_1}{\beta^2} (bI_1(\beta b) - aI_1(\beta a)),$$

(17)

$$C_4 = -\frac{b_2 \gamma_1 q_0}{b_3 \beta^4 I_1(\beta)} \left( \frac{I_0(\beta) \beta (b^2 - a^2)}{2} - bI_1(\beta b) + aI_1(\beta a) \right) + \frac{q_0(b^4 - a^4)}{32b_3} + \frac{q_0(b^2 - a^2)}{16b_3},$$

$$C_5 = \frac{q_0}{8} (2b^2 - b^4 - 2a^2 + a^4), \quad C_6 = \frac{q_0}{16b_3} (b^4 - a^4), \quad C_7 = \frac{a_3 q_0}{4b_3 a_1} (b^2 - a^2), \quad C_8 = 0.$$

Константы интегрирования при шарнирном опирании контура:

$$C_4 = \frac{b_2}{b_3} \left( -\frac{C_2 I_0(\beta)}{\beta} + \frac{C_3 K_0(\beta)}{\beta} \right) - \frac{1}{4b_3} (C_1 + C_5),$$

$$C_5 = q_0 \frac{a_3^2 - a_1 b_3 + a_7 a_1}{4a_1(a_6 + a_7)} \left( b^2 \left( 1 - \frac{b^2}{2} \right) - a^2 \left( 1 - \frac{a^2}{2} \right) \right) - \frac{6b_3}{a_6 + a_7} \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} \int_{h_k} K_k T_k z dz,$$

$$C_7 = \frac{2a_3}{a_1(a_6 + a_7)} \left( 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} \int_{h_k} K_k T_k z dz + \frac{q_0 b^2}{4} \left( 1 - \frac{b^2}{2} \right) - \frac{q_0 a^2}{4} \left( 1 - \frac{a^2}{2} \right) \right).$$

В последнем случае решение явно зависит от температуры через константу  $C_5$ . Константы интегрирования  $C_1, C_2, C_3, C_6, C_8$  сохраняют вид (17).

*Численные результаты* получены для круговой трехслойной несимметричной по толщине пластины шарнирно опертой по контуру, слои которой набраны из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т, соответствующие механические характеристики материалов приведены в [15]. Величина интенсивности нагрузки  $q_0 = 1$  МПа, относительные толщины слоев  $h_1 = 0,02$ ;  $h_2 = 0,06$ ;  $h_3 = 0,4$ .

На рис. 2 а, б показано изменение относительного сдвига в заполнителе и прогиба пластины вдоль ее радиуса. Кривые построены при различных значениях радиуса  $b$  пятна локальной равномерно распределенной поверхностной нагрузки ( $a = 0$ ): 1–  $b = 0,5$ ; 2 –  $b = 0,75$ ; без штриха –  $T = 293$  К, со штрихом –  $T = 323$  К.

С ростом пятна нагрузки экстремум на графике относительного сдвига в заполнителе (см. рис. 2 а) сдвигается к контуру пластины. При нагревании перемещения увеличиваются пропорционально.

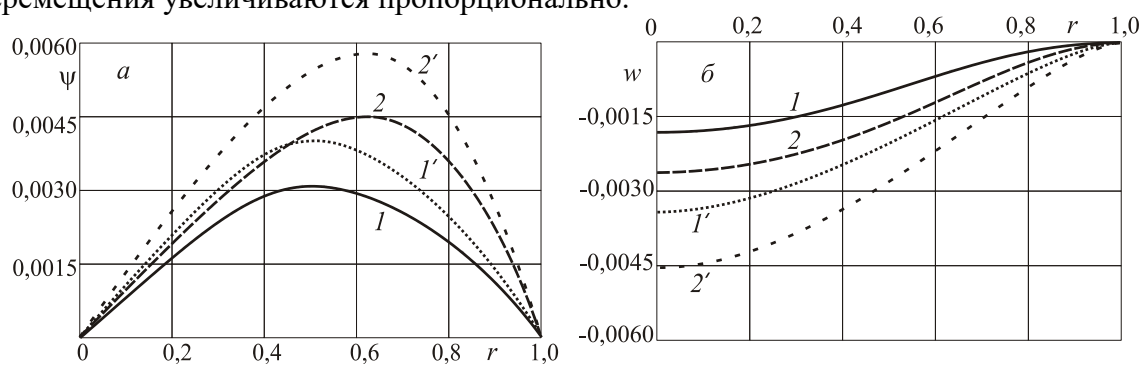


Рис. 2. Зависимость перемещений от радиуса пятна локальной нагрузки

Рис. 3 иллюстрирует зависимость максимального прогиба рассматриваемой пластины от радиуса  $b$  пятна поверхностной нагрузки при различных температурах ( $a = 0$ ): 1 –  $T = 293$  К, 2 –  $T = 323$  К. С увеличением пятна нагрузки прогиб растет нелинейно, достигая максимума при нагрузке, действующей на всю поверхность пластины.

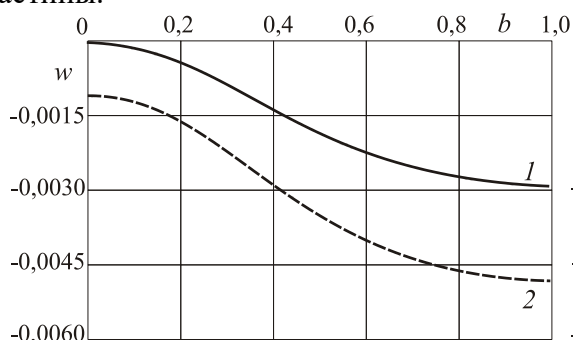


Рис. 3. Зависимость максимального прогиба от радиуса пятна нагрузки

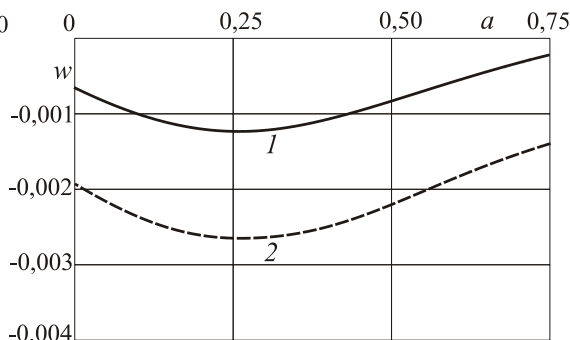


Рис. 4. Зависимость прогиба пластины от положения кольца нагрузки

На рис. 4 показано изменение прогиба пластины в зависимости от положения кольцевого пятна нагрузки постоянной ширины  $b - a = 0,25$ , при продвижении его к контуру: 1 –  $T = 293$  К, 2 –  $T = 233$  К. При  $a = 0$  нагрузка распределена по кругу радиуса  $b$ , при  $a = 0,75$  кольцо нагрузки примыкает к контуру пластины. Максимум прогиба наблюдается в случае кольцевой нагрузки при внутреннем радиусе  $a = 0,25$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (проект T18P-090).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Плескачевский, Ю. М. Деформирование металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая – Минск: Бел. наука. 2004. – 342 с.
2. Плескачевский, Ю. М. Динамика металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – Минск: Бел. наука. 2004. – 386 с.
3. Старовойтов, Э.И. Трехслойные стержни в терморадикационных полях / Э.И. Старовойтов, М.А. Журавков, Д.В. Леоненко // – Минск: Бел. наука, 2017. – 275 с.
4. Старовойтов, Э. И. О переменном нагружении вязко-пластических трехслойных пологих оболочек / Э. И. Старовойтов // Вестник МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. – 1980. – № 2. – С. 92–96.

5. Москвитин, В.В. К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагрузжениях / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 1. – С. 116–121.
6. Москвитин, В.В. Деформация и переменные нагрузки двухслойных металлополимерных пластин / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // Механика композитных материалов. – 1985. – № 3. – С. 409.
7. Starovoitov, É.I. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation / É.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. 2007. Vol. 43, N 4. P. 451-459.
8. Старовойтов, Э.И. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Прикладная механика. – 2008. – 44, № 9. – С. 94–103.
9. Leonenko, D. V. Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. – 2012. – Vol. 47, № 1. – P. 111–118.
10. Старовойтов Э.И. Упругопластическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле / Э.И. Старовойтов // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2012. – № 3. – С. 91-98.
11. Старовойтов, Э. И. Bending of a Sandwich Beam by Local Loads in the Temperature Field / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 69–83. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-69-83.
12. Плескачевский, Ю. М. Деформирование трехслойного упругого стержня нагрузками различных форм в температурном поле / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник.– Мн.: 2017. – Вып. 32. – С. 5–12.
13. Плескачевский, Ю.М. Локальные нагрузки трехслойной балки со сжимаемым наполнителем в температурном поле / Ю.М. Плескачевский, М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник.– Мн.: БНТУ, 2018. – Вып. 33. – С. 12–17.
14. Горшков, А. Г. Циклические нагрузки упругопластических тел в нейтронном потоке / А.Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А.В. Яровая // Изв РАН, Механика твердого тела. – 2001. – № 1. – С. 79–85.
15. Старовойтов, Э. И. К описанию термомеханических свойств некоторых конструкционных материалов // Пробл. прочности. – 1988.– № 4. – С. 11–15.