

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Автомобили»

РЕШЕНИЕ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

Лабораторные работы
по дисциплине «Компьютерные модели автомобилей»

Минск
БНТУ
2011

УДК 629.113:681.3(075.8)

ББК 39.33я7

P47

Составители:

Л.А. Молибошко, О.С. Руктешель, Г.А. Дыко

Рецензенты:

Г.М. Кухаренок, С.А. Сидоров

P47 Решение инженерных задач численными методами: лабораторные работы по дисциплине «Компьютерные модели автомобилей» / сост.: Л.А. Молибошко, О.С. Руктешель, Г.А. Дыко. – Минск: БНТУ, 2011. – 63 с.

Лабораторные работы предназначены для приобретения студентами всех форм обучения специальности 1-37 01 02 «Автомобилестроение» навыков по решению с помощью компьютера различных практических задач, возникающих перед конструктором при проектировании и расчете автомобиля, оценке и анализе полученных результатов.

ВВЕДЕНИЕ

Лабораторные работы составлены в соответствии с программой дисциплины «Компьютерные модели автомобилей» и предназначены для приобретения студентами навыков по решению с помощью компьютера различных практических задач, возникающих перед конструктором при проектировании и расчете автомобиля, по оценке и анализу полученных результатов.

Выполнение лабораторных работ базируется на общетехнических дисциплинах: вычислительной технике и информатике, высшей математике, теоретической механике. Кроме того, от студентов требуются знания конструкции автомобиля.

Знания, полученные студентами при выполнении лабораторных работ, используются в дальнейшем при выполнении курсовых работ и проектов, а также дипломного проекта и будут способствовать полноценной подготовке современного инженера в области конструирования, исследования и испытания автомобильной техники.

Лабораторная работа № 1 ПРОСТЫЕ АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Цель работы: решение численными методами несложных математических задач и анализ результатов расчета.

Задание

Составить схему алгоритма, Паскаль-программу и решить численным методом одну из задач следующего раздела. Номер задачи, варианта и исходные данные определяет преподаватель. Требования к содержанию отчета изложены в разделе «Требования к выполнению и оформлению лабораторных работ».

Программа должна отвечать следующим требованиям:

- при составлении программы массивы не использовать;
- исходные данные вводятся с клавиатуры;
- исходные данные и результаты расчета занести в результирующий файл;
- результирующий файл должен иметь заголовок, фамилию и инициалы студента, номер группы;
- исходные данные и результаты расчета вывести на монитор с комментариями.

Задачи

1. Найти длину (периметр) и площадь геометрической фигуры, которая соответствует уравнению:

1.1. $x^2 + y^2 = R^2$ – окружность.

1.2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – эллипс.

1.3. $y = a \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} \cdot x\right)$, $x = 0 \dots L$.

$$1.4. \quad y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}, \quad x = 0 \dots 3a.$$

$$1.5. \quad y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}; \quad x = -3\sigma \dots + 3\sigma.$$

$$1.6. \quad y = a \cdot e^{-bx^2}; \quad x = 0 \dots \sqrt{3/b}.$$

$$1.7. \quad y = a \cdot e^{bx-cx^2}; \quad x = 0 \dots \frac{2b}{c}.$$

$$1.8. \quad y = a \cdot e^{-bx} \sin x; \quad x = 0 \dots 0,5\pi.$$

При расчете длины кривая заменяется короткими отрезками прямых (выполняется кусочно-линейная аппроксимация) (рис. 1.1). Длина одного отрезка

$$l_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} = \sqrt{h^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}.$$

Вся длина равна $L = \sum_{i=1}^n l_i$, где n – количество отрезков.

Площадь геометрической фигуры, ограниченная кривой и осями координат, заменяется суммой трапеций, каждая из которых равна

$$a_i = 0,5(x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{i+1} + y_i) = 0,5h \cdot (y_{i+1} + y_i).$$

Общая площадь $A = L = \sum_{i=1}^n a_i$.

В отчете привести график геометрической фигуры.

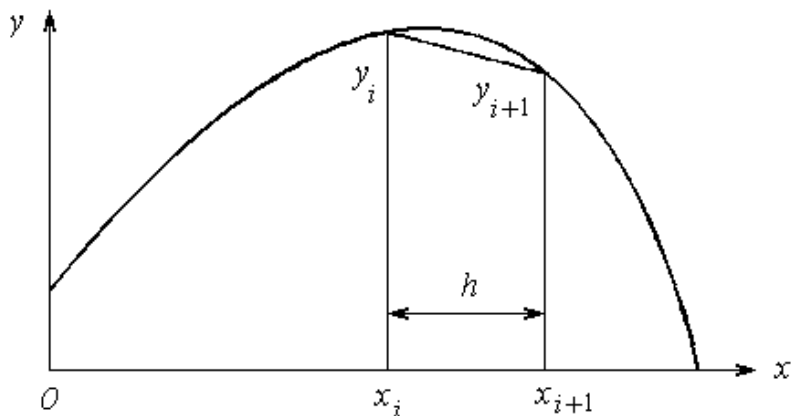


Рис. 1.1. Схема к определению длины кривой и площади под ней

Точное решение можно получить из следующих интегралов:

длина $L = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \sqrt{1 + (y')^2} dx$; площадь $A = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} y dx$.

2. Найти и распечатать простые числа в диапазоне $0 \dots N$.

3. Найти экстремум следующей функции:

3.1. $y = \frac{a \cdot (x - b)^2}{c \cdot (x - d)^2 + e}$, $x = 0 \dots 2d + e$.

3.2. $y = a \cdot e^{-kx} \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right)$, $x = 0 \dots L$.

3.3. $y = y = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-a)^2}$, $x = 0 \dots 2$.

3.4. $y = a \cdot e^{-kx} \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right)$, $x = 0 \dots L$.

3.5. $y = a \cdot e^{bx - cx^2}$, $x = 0 \dots 2b/c$.

3.6. $y = a \cdot x^b \cdot e^{-cx}$, $x = 0 \dots 2b/c$.

В отчете привести график геометрической фигуры.

4. Заданы три точки с координатами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Найти на оси абсцисс точку, сумма расстояний от которой до точек A , B , C будет минимальной.

В отчете поместить соответствующий рисунок.

5. Найти радиус трения муфты сцепления по формуле

$$r_{\mu} = \frac{\int_R^r \rho^2 d\rho}{\int_r^R \rho d\rho} = \frac{\sum \rho_i^2 \Delta\rho}{\sum \rho_i \Delta\rho},$$

где r и R – соответственно внутренний и внешний радиусы фрикционной накладки.

Точное решение: $r_{\mu} = \frac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$

6. Найти момент инерции J_x плоской фигуры:

6.1. Прямоугольника со сторонами a и b относительно оси симметрии, параллельной a .

6.2. Квадрата со стороной a относительно диагонали.

6.3. Круга диаметром D относительно оси симметрии.

6.4. Эллипса с осями a и b относительно большой оси a .

Точное решение:

6.1. $J_x = a \cdot b^3 / 12.$

6.2. $J_x = a^4 / 12.$

6.3. $J_x = \pi \cdot D^4 / 64.$

6.4. $J_x = \pi \cdot a \cdot b^3 / 64.$

Расчет проводить по формуле $J_x = \int_{y_1}^{y_2} xy^2 dy = \sum_{i=1}^n x_i y_i^2 \Delta y.$

7. Найти момент инерции стальной детали относительно оси симметрии:

7.1. Сплошного цилиндра.

7.2. Полого цилиндра.

7.3. Четырехугольной пластины $a \times b \times h$.

7.4. Тонкого стержня.

Точное решение (ρ – плотность, кг/м^3):

$$7.1. J = 0,5 \cdot m \cdot r^2 = \rho \cdot \frac{\pi}{32} \cdot D^4 \cdot L.$$

$$7.2. J = m(R^2 - r^2) = \rho \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) L.$$

$$7.3. J = \frac{ml^2}{12} = \rho \frac{abh}{12} (b^2 + h^2).$$

$$7.4. J = \frac{ml^2}{12} = \rho \frac{abh}{12} (b^2 + h^2).$$

Расчет проводить по формуле $J = \int_0^{m_0} r^2 dm = \sum_1^n r_i^2 \cdot \Delta m_i$.

8. С помощью генератора случайных сигналов найти площадь следующей геометрической фигуры:

8.1. $x^2 + y^2 = R^2$ – окружность.

8.2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – эллипс.

8.3. $y = a \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} \cdot x\right)$; $x = 0 \dots L/2$.

8.4. $y = a \cdot e^{-x} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} \cdot x\right)$; $x = 0 \dots L/2$.

8.5. $y = a(1 - e^{-kx})$; $x = 0 \dots 3/k$.

Геометрическая фигура ограничивается прямоугольником (квадратом) с известной площадью A_{Π} . Затем подсчитывается количество попаданий случайных точек в границы геометрической фигуры. Площадь фигуры

$$A = \frac{n}{m} \cdot A_{\Pi},$$

где m – общее количество точек в границах прямоугольника;
 n – общее количество точек в границах геометрической фигуры.

Содержание отчета

1. *Цель работы.*
2. *Постановка задачи.* Сформулировать решаемую задачу, условия ее решения, привести исходные данные.
3. *Теоретическая часть.* Описать алгоритм решения указанного номера задачи. Привести соответствующий рисунок, поясняющий процесс решения указанного номера задачи.
4. *Схема алгоритма.* Привести схему алгоритма и краткий комментарий к ней. Схему нарисовать в соответствии с действующими стандартами и с помощью чертежных приспособлений.
5. *Паскаль-программа.* Привести Паскаль-программу, распечатанную на принтере или аккуратно написанную от руки. Дать краткий комментарий к ней. Программа и схема алгоритма должны соответствовать одна другой. Сформировать выполняемый файл с расширением exe.
6. *Результаты расчета.* Распечатать результирующий файл, который должен содержать название работы, фамилию студента, номер группы, исходные данные, результаты расчета. Нарисовать, если нужно, соответствующий график.

7. *Анализ результатов расчета.* Сопоставить полученные результаты с точным решением, если оно есть. Рассчитать относительную погрешность:

$$\varepsilon = \left| \frac{y_M - y_T}{y_T} \right| 100 \%,$$

где y_M и y_T – соответственно машинное и точное решение. При отсутствии точного решения приближенно оценить полученные результаты. Построить график зависимости погрешности решения ε от числа отрезков, на которые разбивается фигура.

8. *Литература.*

Лабораторная работа № 2

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: изучение численных методов решения алгебраических и трансцендентных уравнений и анализ результатов расчета.

Задание

Составить схему алгоритма, Паскаль-программу и найти вещественный корень (или все корни) одного из уравнений следующего раздела. Задачу решить двумя численными методами. Номер задачи, исходные данные и численные методы определяет преподаватель.

Программа должна отвечать следующим требованиям:

- исходные данные вводятся с клавиатуры;
- исходные данные и результаты расчета занести в результирующий файл;
- результирующий файл должен иметь заголовок, фамилию и инициалы студента, номер группы;
- исходные данные и результаты расчета вывести на монитор с комментариями;
- на монитор и в результирующий файл вывести все итерации при нахождении корня заданного уравнения;
- массивы в программе не использовать;
- погрешность расчетов принять равной 0,1 %;
- максимальное число итераций принять равным 20.

Задачи

№	Уравнение	Исходные данные			
		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
1	$a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0$	1	2	3	4

Окончание табл.

№	Уравнение	Исходные данные			
		a	b	c	d
2	$a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0$	1	-6	11	-6
3	$a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0$	1	-10	31	-30
4	$a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0$	1	5	2	15
5	$a \cdot x^b + c \cdot e^x - d = 0$	1	2	2	10
6	$a^x - b \cdot x^c - d = 0$	3	2	2	8
7	$a \cdot x^b + c \cdot e^{\sqrt{x}} - d = 0$	1	3	1	15
8	$a \cdot x^b - c \cdot e^{-x} - d = 0$	2	2	5	10
9	$a\sqrt{b+x^2} + c - dx^3 = 0$	2	5	2	1
10	$ax^3 - b\sqrt{c+x^2} + d = 0$	1	4	9	5
11	$ax^2 - b\sqrt{c+x^2} - d = 0$	5	3	9	1
12	$ax^3 - b\sqrt{c+x} - d = 0$	2	1	7	3
13	$ax^2 - b\sqrt{c+x} \operatorname{tg}(x) + d = 0$	2	1	3	4
14	$ax^2 - c(b+x) \operatorname{tg}(\sqrt{x}) + d = 0$	3	2	3	5
15	$ax - b\sqrt{c+x} \operatorname{tg}(x) + d = 0$	5	1	3	2
16	$ax^2 + b\sqrt{c+x} \operatorname{tg}(x) - d = 0$	1	2	1	10
17	$x = \sqrt{a}$	100	-	-	-
18	$x = \sqrt[3]{a}$	64	-	-	-
19	$x = \frac{1}{a}$	50	-	-	-
20	$x = \sqrt{\frac{1}{a}}$	10	-	-	-

Примечания к табл.

1. В вариантах 1...4 первый (вещественный) корень x_1 найти указанными численными методами, остальные – решением квадратного уравнения:

$$x^2 + b_1 \cdot x + b_2 = 0,$$

где $b_1 = \left(\frac{a_1}{a_0} \right) + x_1$;

$$b_2 = - \left(\frac{a_3}{a_0} \right) \frac{1}{x_1}.$$

2. В вариантах 17...20 необходимо сначала вывести итерационную формулу, используя метод Ньютона.

Теоретическая часть

Уравнение называют *трансцендентным*, если хотя бы одна его составляющая не является алгебраической функцией.

Уравнение называют *алгебраическим*, если каждая его составляющая является алгебраической функцией. Алгебраические уравнения содержат суммы целых степеней x . Из всякого алгебраического уравнения может быть путем алгебраических преобразований получено уравнение в *канонической* форме

$$F(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (2.1)$$

Показатель n называется степенью уравнения. Иногда такие уравнения называют *полиномиальными*.

Нахождение корней уравнения – одна из наиболее часто встречающихся в самых разнообразных областях науки и техники математических задач.

В общем случае, если имеется некоторая функция $F(x)$, то корнями уравнения являются такие значения аргумента x , для которых $F(x) = 0$.

Численный метод, в котором производится последовательное, шаг за шагом, уточнение грубого первоначального приближения, называется *методом итераций*. Каждый шаг в таком методе называется *итерацией*. Если при последовательных итерациях получаются значения, которые все ближе и ближе приближаются к истинному значению корня, то говорят, что метод итераций *сходится*. Ниже рассмотрены четыре итерационных метода: последовательных приближений, Ньютона, половинного деления и хорд.

Метод последовательных приближений

Предположим, что уравнение (2.1) преобразовано к виду

$$x = f(x).$$

Это преобразование можно сделать различными путями. Например, можно прибавить к правой и левой частям x .

При нахождении корня сначала задаются первоначальным значением $x = x^{(0)}$ и находят первое приближение:

$$x^{(1)} = f[x^{(0)}].$$

В качестве следующего приближения принимают:

$$x^{(2)} = f[x^{(1)}].$$

Аналогично находят следующие приближения:

$$x^{(i+1)} = f[x^{(i)}].$$

Расчет завершается, если относительная погрешность становится меньше заданной ε :

$$\left| \frac{x^{(n+1)} - x^{(n)}}{x^{(n+1)}} \right| \leq \varepsilon.$$

Процесс сходится, если $\left| f'(x) \right| = \left| \frac{df(x)}{dx} \right| < 1$.

Следует отметить, что это условие не является необходимым, т. к. существуют функции, для которых это условие не выполняется, но для которых тем не менее можно найти их корни.

Графическая интерпретация метода итераций показана на рис. 2.1. Точное решение соответствует пересечению функции $f(x)$ с биссектрисой $y = x$.

Кривая $y = f(x)$ может представлять собой какую угодно функцию. Примем, что производная этой кривой положительна и меньше 1, т. е. $0 < f'(x) < 1$. Пусть $x = x^*$ — значение x в точке пересечения; тогда x^* является корнем этого уравнения. Естественно, до решения задачи он не известен.

Зададимся некоторым первоначальным значением $x^{(0)}$. Значение $x^{(1)}$ равно $f(x^{(0)})$. Так как $OA = f(x^{(0)})$, то найти $x^{(1)}$ можно следующим образом: проведем через точку A горизонтальную линию до пересечения с прямой $y = x$ в точке B , как показано на рисунке. Значение $x^{(2)} = f(x^{(1)})$ можно найти, проведя через точку B вертикальную линию до пересечения с кривой $y = f(x)$. При этом мы получаем отрезок $OC = f(x^{(1)})$ и, проводя через точку C горизонтальную линию до пересечения с прямой $y = x$, получаем $x^{(2)}$. Процесс продолжается в том же порядке и дальше. Последовательность операций показана стрелками. На рис. 2.1 видно, как последовательные значения x сходятся к $x = x^*$.

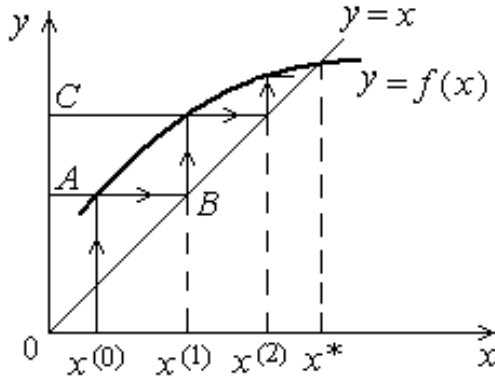


Рис. 2.1. Геометрическое представление метода последовательных приближений для сходящегося процесса ($0 < f'(x) < 1$)

Пример 1. Найти методом последовательных приближений корень квадратного уравнения

$$x^2 + 4x - 5 = 0,$$

приняв в качестве первоначального приближения $x^{(0)} = 0$.

Решение. Для данного квадратного уравнения можно составить две формулы вида $x = f(x)$. Первая формула

$$x = 0,25(5 - x^2)$$

имеет производную $f'(x) = -0,5x$. Следовательно, если $x < 2$, то процесс сходится и корень уравнения может быть найден с помощью данной формулы. Действительно, последовательные приближения к истинному корню $x^* = 1$ равны:

$$x^{(1)} = f[x^{(0)}] = 1,25;$$

$$x^{(2)} = f[x^{(1)}] = 0,86;$$

$$x^{(3)} = f[x^{(2)}] = 1,065;$$

$$x^{(4)} = f[x^{(3)}] = 0,97\dots$$

Поскольку производная от $f(x)$ отрицательная, то процесс приближения к истинному корню идет с двух сторон. Истинное значение $x^* = 1$.

Для второй итерационной формулы

$$x = \sqrt{5 - 4x}$$

производная функции равна $f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{5-4x}}$ и процесс сходится при $x > 0,25$:

$$x^{(1)} = f[x^{(0)}] = 2,24; \quad x^{(2)} = f[x^{(1)}] = \sqrt{-3,94} \dots$$

Таким образом, выбирать итерационную формулу всегда следует на основе анализа ее сходимости. Рассмотренный метод иногда называют методом простой итерации.

Метод Ньютона

Метод Ньютона, известный еще как метод касательных, также является итерационным. Иногда еще его называют методом Ньютона–Рафсона. Особенно удобен данный метод для алгебраических уравнений типа

$$F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0. \quad (2.2)$$

Итерационная формула рассматриваемого метода имеет вид:

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - \frac{F[x^{(i)}]}{F'[x^{(i)}]},$$

где $F'(x) = \frac{dF}{dx}$ – производная функции $F(x)$.

Например, для уравнения (2.2)

$$F'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1}.$$

Процесс решения уравнения (2.2) методом Ньютона показан стрелками на рис. 2.2.

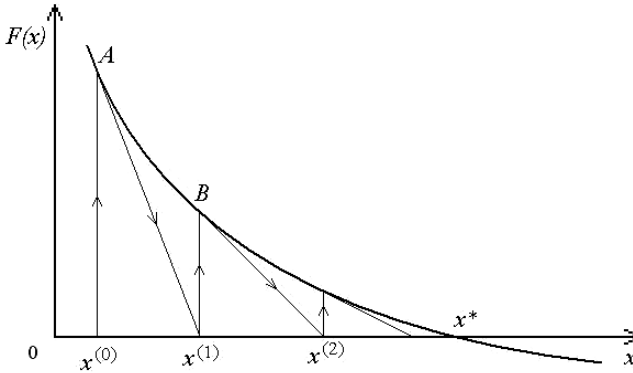


Рис. 2.2. Графическая интерпретация метода Ньютона

Истинное значение корня x^* соответствует точке пересечения функции $F(x)$ с осью абсцисс. Задавшись первоначальным значением $x = x^{(0)}$, восстанавливаем из этой точки перпендикуляр до пересечения с кривой (точка A). Затем проводим касательную к кривой в точке A . Точка пересечения с осью x дает первое уточненное значение $x^{(1)}$. Аналогично получают следующие приближения. Процесс, как и ранее, заканчивается при достижении заданной точности.

Пример 2. Для примера 1 найти корень уравнения методом Ньютона.

Решение. Итерационная формула имеет следующий вид:

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - \frac{x^{(i)2} + 4x^{(i)} - 5}{2x^{(i)} + 4}.$$

Пусть $x^{(0)} = 0$. Тогда

$$x^{(1)} = 1,25; \quad x^{(2)} = 1,01; \dots$$

Как видим, процесс быстро сходится к истинному значению $x^* = 1$.

Метод половинного деления

Процедура нахождения корня методом половинного деления показана на рис. 2.3.

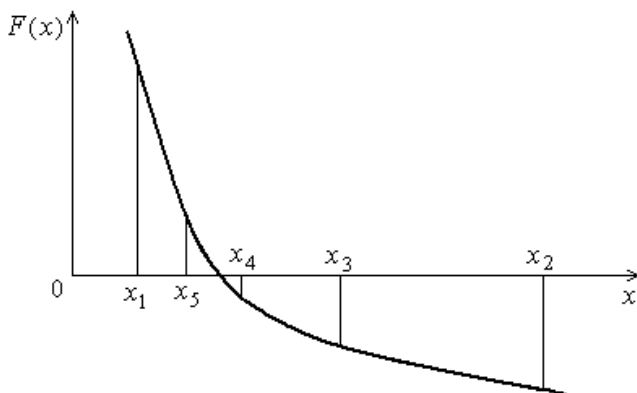


Рис. 2.3. Графическая интерпретация метода половинного деления

Метод состоит из следующих операций. Сначала вычисляются значения функции в точках, расположенных через равные интервалы до тех пор, пока не будут найдены два последовательных значения $F(x_n)$ и $F(x_{n+1})$, имеющие разные знаки, что указывает на наличие корня в диапазоне $x = x_n \dots x_{n+1}$. Затем вычисляется среднее значение x_{cp} в указанном интервале:

$$x_{cp} = 0,5(x_n + x_{n+1})$$

и находится функция $F(x_{cp})$. Если знак $F(x_{cp})$ совпадает со знаком $F(x_n)$, то далее вместо $F(x_n)$ используется $F(x_{cp})$. Если же знак $F(x_{cp})$ совпадает со знаком $F(x_{n+1})$, то $F(x_{n+1})$ заменяется на $F(x_{cp})$. В результате интервал, в котором находится корень x^* , сужается. При достижении заданной точности расчет прекращается.

После определения интервала, в котором находится корень уравнения, ширина этого интервала на каждом последующем шаге уменьшается вдвое.

Метод хорд

В основе метода лежит линейная интерполяция функции по двум ее значениям, имеющим разные знаки. Метод обычно обеспечивает более быструю сходимость, чем метод половинного деления. Процедура нахождения корня показана на рис. 2.4. Начало расчета аналогично предыдущему методу. После определения интервала, в котором находится корень уравнения, отыскивается точка пересечения с осью абсцисс прямой, соединяющей значения функции на концах интервала

$$x_{n,n+1} = x_n - F(x_n) \frac{x_{n+1} - x_n}{F(x_{n+1}) - F(x_n)}.$$

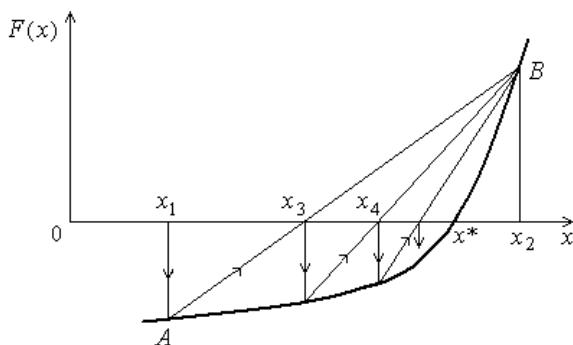


Рис. 2.4. Графическая интерпретация метода хорд

Стрелками показан процесс приближения текущего значения x в найденном интервале к истинному значению корня x^* .

Содержание отчета

1. *Цель работы.*

2. *Постановка задачи.* Сформулировать решаемую задачу, условия ее решения, привести исходные данные.

3. *Теоретическая часть.* Описать использованные численные методы на примере решаемого уравнения.

4. *Схема алгоритма.* Привести схему алгоритма и краткий комментарий к ней. Схему нарисовать в соответствии с действующими стандартами и с помощью чертежных приспособлений.

5. *Паскаль-программа.* Разработать Паскаль-программу, распечатать ее на принтере или написать от руки и написать к ней краткий комментарий. Программа и схема алгоритма должны соответствовать одна другой. Сформировать выполняемый файл с расширением exe.

6. *Результаты расчета.* Распечатать результирующий файл, который должен содержать название работы, фамилию студента, номер группы, исходные данные, результаты расчета. Построить график функции, на котором показать итерации.

7. *Анализ результатов расчета.* Подставить найденный корень в уравнение и убедиться в правильности решения. Рассчитать относительную погрешность.

8. *Литература.*

Лабораторная работа № 3

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: изучение методов решения с помощью компьютера обыкновенных дифференциальных уравнений численными методами и анализ результатов расчета.

Задание

Составить схему алгоритма, Паскаль-программу и решить одно из уравнений следующего раздела. Номер задачи и исходные данные определяет преподаватель.

Программа должна отвечать следующим требованиям:

- исходные данные ввести из файла исходных данных;
- исходные данные и результаты расчета занести в результирующий файл;
- файл исходных данных и результирующий файл должны иметь заголовок, фамилию и инициалы студента, номер группы;
- исходные данные и результаты расчета вывести на монитор с комментариями;
- вывести на монитор график решения дифференциального уравнения.

Время счета должно быть больше времени достижения выходной координатой установившейся величины. Если процесс колебательный, то время счета должно быть не меньше двух периодов колебаний.

Задачи

№	Уравнение	Исходные данные			
		m	b	c	F
1	$my'' + by' + cy = F$	1	0,5	4	8
2	$my'' + by' + cy = F$	2	1	32	32

Продолжение табл.

№	Уравнение	Исходные данные			
		m	b	c	F
3	$my'' - by' + cy = F$	3	1	12	6
4	$my'' - by' + cy = F$	1	0,8	9	15
5	$my'' + by' + cy^2 = F$	4	1	8	8
6	$my'' + by' + c\sqrt{y} = F$	1	0,2	5	10
7	$my'' + b \cdot \operatorname{sgn}(y) + cy = F$	3	1	15	15
8	$my'' + by' + c \cdot \operatorname{tg}(y) = F$	1	0,3	2	1
9	$my'' + by' + c \cdot \sin(y) = F$	1	0,5	3	3
10	$my'' + b(y^2 - 1)y' + cy = F$	2	0,2	4	8
11	$my'' - b(y^2 - 1)y' + cy = F$	1	0,1	5	1
12	$my'' + b \cdot \cos(y) + cy = F$	2	1	2	4
13	$my'' - b \cdot \cos(y) + cy = F$	3	0,4	12	6
14	$my'' + b \cdot \sin(y) + cy = F$	1	1	4	10
15	$my'' + by' + c \cdot \cos(y) = F$	1	0,1	5	2
16	$my'' + by' + c \cdot \operatorname{tg}(y) = F$	2	0,5	1	1
17	$my'' - by' + c \cdot \operatorname{tg}(y) = F$	1	0,5	2	2
18	$my'' + by' + c\sqrt{\operatorname{tg}(y)} = F$	2	1	3	2
19	$my'' - by' + c\sqrt{\operatorname{tg}(y)} = F$	3	0,2	6	4
20	$my'' + b \cdot \operatorname{tg}(y') + cy = F$	1	0,4	4	3
21	$my'' - b \cdot \operatorname{tg}(y') + cy = F$	2	0,5	2	2
22	$y''' + my'' + by' + cy = F$	1	4	4	8
23	$y''' + my'' + by' + cy = F$	2	3	3	6
24	$y''' + my'' + by' + cy = F$	3	2	1	2
25	$y''' + my'' + by' + cy = F$	4	1	5	5
26	$my''' + by'' + cy' + y = F$	4	3	1	2

Окончание табл.

№	Уравнение	Исходные данные			
		m	b	c	F
27	$my''' + by'' + cy' + y^2 = F$	1	2	2	3
28	$my''' + by'' + cy' + \operatorname{tg}(y) = F$	2	3	4	3
29	$my''' + by'' + cy' + \sqrt{ y } = F$	1	2	1	2
30	$my''' + by'' + c(y -1)y' + y = F$	1	2	3	1

Теоретическая часть

Численными методами решается уравнение первого порядка в виде

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y) \quad (3.1)$$

с начальными условиями x_0, y_0 , где x и y – соответственно независимая и зависимая переменные. В дальнейшем будем считать такое уравнение записанным в стандартном виде.

Уравнения более высоких порядков приводят к системе уравнений первого порядка введением дополнительных переменных. Например, для уравнения третьего порядка

$$y''' = f(x, y, y', y'')$$

примем $v = y', u = v'$. Тогда $y''' = u'$ и имеем систему уравнений

$$\begin{cases} u' = f(x, y, v, u); \\ y' = v; \\ v' = u. \end{cases}$$

Существует большое количество методов решения уравнения (3.1).

Метод с использованием *ряда Тейлора* теоретически пригоден для решения любых дифференциальных уравнений, но с вычислительной точки зрения не представляет практического интереса. Его ценность заключается в том, что он дает некоторый эталон для сравнения между собой различных практических удобных методов.

Предположим, что значение функции $y(x)$ в некоторой точке $x = x_n$ известно (задано) и требуется найти ее следующее значение.

Разложение функции $y(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = x_n$ имеет вид:

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n + \frac{h^2}{2} y''_n + \frac{h^3}{6} y'''_n + \dots \quad (3.2)$$

Чем больше членов ряда (3.2) будет взято для вычисления y_{n+1} , тем точнее будет приближение. Значение первой производной y'_n известно из (3.1). Вычисление производных второго и более высоких порядков затруднительно, а зачастую и вообще невозможно. Таким образом, с точки зрения практических вычислений этот метод неудобен.

Однако ряд Тейлора позволяет сравнивать между собой различные практически применяемые методы, хотя эти методы вообще не предусматривают вычисления производных от функции $f(x, y)$. Под *порядком метода* понимается максимальный порядок производной ряда Тейлора, учитываемый в численном методе. Численный метод n -го порядка согласуется с разложением в ряд Тейлора вплоть до членов с производными n -го порядка.

Метод Эйлера является простейшим методом решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Он основан на разложении функции в ряд Тейлора (3.2).

Его точность невелика, и поэтому на практике им пользуются сравнительно редко. Если h мало, то члены, содержащие h во второй и более высоких степенях, являются малыми более высоких порядков и ими можно пренебречь. Тогда

$$y_{n+1} \approx y_n + hy'_n = y_n + hf(x_n, y_n).$$

Графическая интерпретация метода Эйлера показана на рис. 3.1. Известной является функция y_0 в точке x_0 . Решение находится для ряда значений независимой переменной x с шагом h :

$$x_1 = x_0 + h; \quad x_2 = x_1 + h; \quad \dots \quad x_{n+1} = x_n + h.$$

Значение функции y_1 в точке x_1 (см. рис. 3.1) находится на пересечении прямой, проведенной из точки (x_0, y_0) под углом

$$\alpha_0 = \arctg(y'_0) = \arctg[f(x_0, y_0)],$$

и перпендикуляра, проведенного к оси абсцисс из точки x_1 .

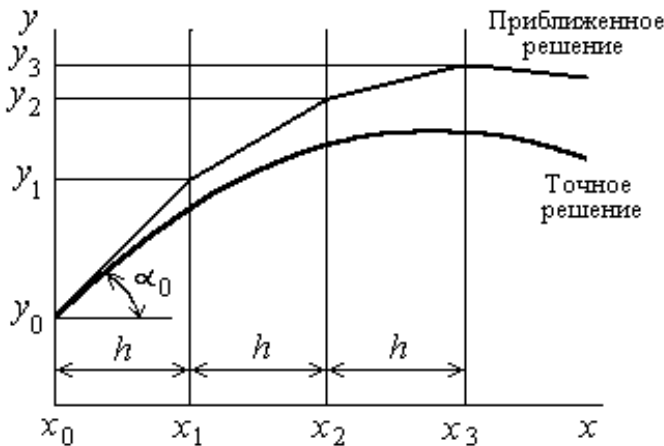


Рис. 3.1. Графическая интерпретация метода Эйлера

описываются константы, переменные и массивы. Блок 3 реализует процедуру вычисления правых частей решаемых дифференциальных уравнений, которые приведены к стандартному виду, т. е. к системе уравнений первого порядка. В блоке 4 реализована процедура численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений. В приведенном ниже примере использован метод Рунге-Кутты четвертого порядка. В блоке 5 осуществляется начало выполнения программы: открываются для чтения файл исходных данных и для записи результирующий файл. В блоке 6 задаются начальные условия, организуется цикл для решения уравнений и вывода результатов. С помощью блока 7 результаты решения выводятся в графическом виде на экран монитора. Блок 8 представляет собой главную программу, состоящую, в основном, из перечня рассмотренных выше процедур.

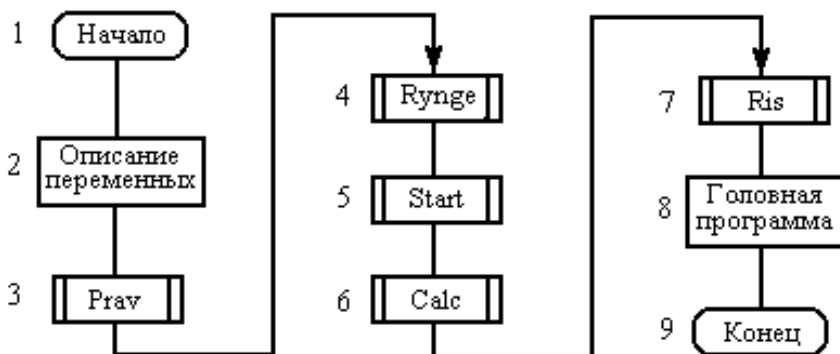


Рис. 3.2. Структурная схема программы решения дифференциальных уравнений

Вариант структурной схемы процедуры Calc показан на рис. 3.3. Блоки 1 и 9 соответствуют началу и концу выполнения процедуры Calc.

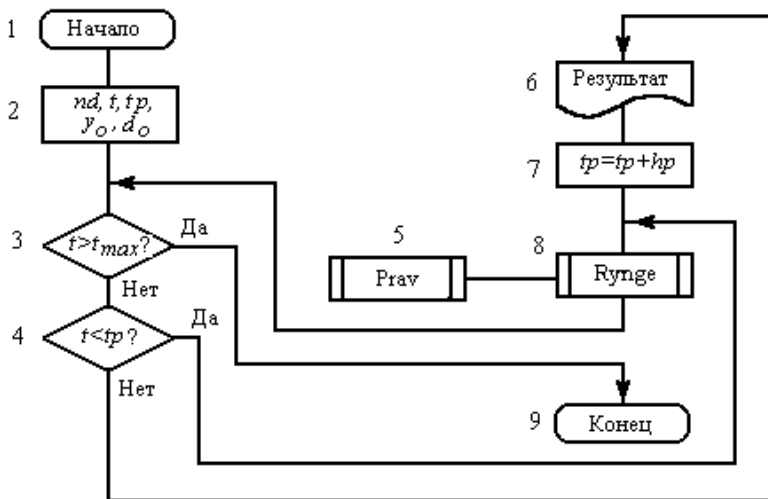


Рис. 3.3. Вариант структурной схемы процедуры Calc

В блоке 3 осуществляется проверка времени счета. Если $t > t_{max}$, то выполнение программы заканчивается. Блок 4 выполняет проверку печати результатов расчета. Если текущее время t равно времени печати t_p , то результаты выводятся на печать (блок 6), время печати увеличивается на шаг печати (блок 7) и идет обращение к процедуре Runge (блок 8). Если $t < t_p$, то следующим выполняется блок 8.

При составлении программы расчета необходимо учитывать следующее. Шаг счета h и шаг печати h_p различен, и часто шаг печати в 10 и более раз больше шага счета. Если нет особой необходимости, то не следует хранить в оперативной памяти компьютера результаты промежуточных расчетов переменных. Обычно эти результаты в процессе расчета сразу выводятся в табличном виде в файл и в графическом виде на экран монитора. В этом случае каждому выходному параметру будет соответствовать одна переменная, а не массив.

Начало Pascal-программы (вариант) для решения дифференциального уравнения второго порядка

$$m \cdot x'' + b \cdot x' + c \cdot x = F$$

показано ниже.

```

Program DIFUR;
Uses Crt,Dos,Lib,Graph;
type mas = array[1..10] of real;

Var
Rez:text;
d,y1:mas;
Filerez,text,Sxmax,Sxst,Stmax           :string;
m,b,c,F,h,hp,t,tp,tmax,xmax,xst,nx,ny,nmax :real;
n:integer;
KL,nd,j:byte;
Procedure Prav(var y,d:mas);
  { y[1] = x' - скорость массы      }
  { y[2] = x  - перемещение массы  }
  { d[1] = x''- ускорение массы    }
  { d[2] = x' - скорость массы     }
begin
d[1] := (F - b*y[1] - c*y[2])/m;
d[2] := y[1];
end;
Procedure Rynge;
Var
  j      :byte;
  yy,k   :array[1..nd] of real;
begin
      Prav(y,d);
For j:=1 to nd do begin
yy[j]:=y[j];
k[j]:=h*d[j];
y1[j]:=yy[j] + 0.5*k[j];
y[j]:=y[j] + k[j]/6;
end;
t:=t+0.5*h;

```

```

                                Prav(y1,d);
For j:=1 to nd do begin
k[j]:=h*d[j];
y1[j]:=yy[j] + 0.5*k[j];
y[j]:=y[j] + k[j]/3;
end;
                                Prav(y1,d);
For j:=1 to nd do begin
k[j]:=h*d[j];
y1[j]:=yy[j] + k[j];
y[j]:=y[j] + k[j]/3;
end;
t:=t+0.5*h;
                                Prav(y1,d);
For j:=1 to nd do begin
k[j]:=h*d[j];
y[j]:=y[j] + k[j]/6;
end;
end;
Procedure Start; ...

```

Процедура Prav (var y,d:max) предназначена для вычисления правых частей уравнений. Используемые в ней массивы типа max: y – вектор-решение (выходные параметры); d – производные вектор-решения (производные выходных параметров).

Процедура Runge реализует метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

Содержание отчета

1. *Цель работы.*
2. *Постановка задачи.* Сформулировать решаемую задачу, условия ее решения, привести исходные данные.
3. *Теоретическая часть.* Привести общие сведения о численном решении ОДУ. Теоретические положения пояснить на

решаемом дифференциальном уравнении. Описать алгоритм решения задачи.

4. *Схема алгоритма.* Нарисовать схему алгоритма и написать к ней краткий комментарий. Схему нарисовать в соответствии с действующими стандартами и с помощью чертежных приспособлений.

5. *Паскаль-программа.* Распечатать на принтере или написать от руки Паскаль-программу и дать краткий комментарий к ней. Программа и схема алгоритма должны соответствовать одна другой.

6. *Результаты расчета.* Распечатать результирующий файл, который должен содержать название работы, фамилию студента, номер группы, исходные данные, таблицу с результатами расчета. Построить график функции.

7. *Анализ результатов расчета.* Сопоставить полученные результаты с начальными условиями, временем переходного процесса, установившимся значением, частотой колебаний, которые можно получить из теоретического анализа уравнений.

8. *Литература.*

Лабораторная работа № 4 КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ ПОДВЕСКИ АВТОМОБИЛЯ

Цель работы: разработка компьютерной модели подвески автомобиля, расчет частотных, кинематических и силовых характеристик.

Задание

1. Составить уравнения движения с помощью уравнений Лагранжа II рода.
2. Рассчитать парциальные и собственные частоты.
3. Записать уравнения движения в стандартном виде.
4. Составить схему алгоритма.
5. Разработать Паскаль-программу для нахождения изменяющихся во времени ускорения массы m_1 , сил F_p и $F_{ш}$ при переезде автомобилем единичной неровности q со скоростью v . Принять $q_0 = 10$ см. Найти максимальные и минимальные значения указанных переменных.

Динамическая модель и исходные данные приведены в следующем разделе. Варианты задания определяет преподаватель.

Программа должна отвечать следующим требованиям:

- исходные данные ввести из файла с расширением `dat`;
- исходные данные и результаты расчета вывести на экран и занести в результирующий файл;
- результирующий файл должен иметь заголовок, фамилию и инициалы студента, номер группы.

Динамическая модель и исходные данные

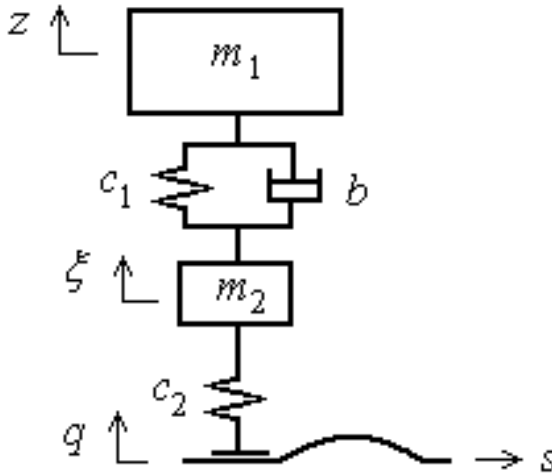


Рис. 4.1. Двухмассовая динамическая модель подвески

Таблица 4.1

Параметры динамической модели подвески

Номер вари- анта	Параметры						
	кг, 10^3		Н/см, 10^3		Н·с/см, 10^2	см	м/с
	m_1	m_2	c_1	c_2	b	s_0	v
1	12,0	2,0	12	30	70	40	5,0
2	10,0	1,8	11	28	65	35	4,5
3	8,0	1,6	10	26	60	25	4,0
4	6,0	1,4	9	24	55	30	3,5
5	5,0	1,2	8	22	50	35	3,0
6	4,0	1,0	7	20	45	40	2,5
7	3,0	0,9	6	18	40	45	2,0
8	2,0	0,8	5	16	35	50	1,5
9	9,0	1,6	11	25	70	45	2,0
10	7,0	1,5	12	24	60	35	2,5
11	13,0	2,5	10	25	50	40	3,0

Окончание табл. 4.1

Номер вари- анта	Параметры						
	кг, 10^3		Н/см, 10^3		Н·с/см, 10^2	см	м/с
	m_1	m_2	c_1	c_2	b	s_0	v
12	11,0	2,0	9	20	45	25	3,5
13	9,0	1,8	8	18	40	30	4,0
14	7,0	1,7	8	17	35	50	4,5
15	5,0	1,6	7	16	30	60	5,0
16	3,0	1,3	8	15	25	45	5,5
17	10,5	1,8	12	30	80	55	6,0
18	9,5	2,0	11	25	70	50	6,5
19	11,5	1,4	9	22	60	30	3,0
20	7,5	1,5	10	20	40	65	2,0

Варианты неровностей дороги

- 1) $q = q_0(1 - \exp(-s/s_0))$;
- 2) $q = q_0 \cdot \sin(s/s_0)$, при $s/s_0 > \pi$ $q = 0$;
- 3) $q = q_0 \cdot \sin(s/s_0)$, при $s/s_0 > \pi/2$ $q = q_0$;
- 4) $q = q_0 \cdot (1 - \cos(s/s_0))$, при $s/s_0 > \pi$ $q = 2q_0$;
- 5) $q = q_0 \cdot (1 - \cos(s/s_0))$, при $s/s_0 > 2\pi$ $q = 0$;
- 6) $q = -q_0 \cdot (1 - \cos(s/s_0))$, при $s/s_0 > 2\pi$ $q = 0$;
- 7) $q = q_0 \cdot \exp(-3 \cdot (1 - s/s_0)^2)$, при $s > s_0$ $q = 0$;
- 8) $q = -q_0 \cdot (1 - \cos(s/s_0))$, при $s/s_0 > \pi$ $q = 2q_0$;
- 9) $q = q_0 \sqrt{s/s_0}$, при $s > s_0$ $q = q_0$;
- 10) $q = q_0 \cdot s/s_0$, при $s > s_0$ $q = q_0$.

Теоретическая часть

Уравнения Лагранжа II порядка имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial E_{\text{к}}}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_j} = Q_j, \quad (4.1)$$

где $E_{\text{к}}$ и $E_{\text{п}}$ – соответственно кинетическая и потенциальная энергии системы;

Φ – диссипативная функция;

Q_j – обобщенная сила, действующая вдоль обобщенной координаты x_j .

$$E_{\text{к}} = \frac{m_1 \dot{z}^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\zeta}^2}{2}; \quad E_{\text{п}} = \frac{c_1 (\zeta - z)^2}{2} + \frac{c_2 (q - \zeta)^2}{2}; \quad \Phi = \frac{b \cdot (\dot{\zeta} - \dot{z})^2}{2}.$$

После дифференцирования $E_{\text{к}}$, $E_{\text{п}}$, Φ и подстановки в (4.1) получим:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z} + b \dot{z} + c_1 z - b \dot{\zeta} - c_1 \zeta &= 0; \\ m_2 \ddot{\zeta} + b \dot{\zeta} + (c_1 + c_2) \zeta - b \dot{z} - c_1 z &= c_2 q. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Разделим уравнение (4.2) соответственно на m_1 и m_2 :

$$\begin{aligned} \ddot{z} + \frac{b}{m_1} \dot{z} + \frac{c_1}{m_1} z - \frac{b}{m_1} \dot{\zeta} - \frac{c_1}{m_1} \zeta &= 0; \\ \ddot{\zeta} + \frac{b}{m_2} \dot{\zeta} + \frac{c_1 + c_2}{m_2} \zeta - \frac{b}{m_2} \dot{z} - \frac{c_1}{m_2} z &= \frac{c_2}{m_2} q. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Запишем уравнения (4.3) в операторном виде:

$$\begin{aligned}
 (s^2 + \frac{b}{m_1} s + \frac{G_1}{m_1}) z(s) - (\frac{b}{m_1} s + \frac{G_1}{m_1}) \zeta(s) &= 0; \\
 -(\frac{b}{m_2} s + \frac{G_1}{m_2}) z(s) + (s^2 + \frac{b}{m_2} s + \frac{G_1 + G_2}{m_2}) \zeta(s) &= \frac{G_2}{m_2} q(s).
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= s^2 + \frac{b}{m_1} s + \frac{G_1}{m_1}; & R_2 &= s^2 + \frac{b}{m_2} s + \frac{G_1 + G_2}{m_2}; \\
 r_{12} &= \frac{b}{m_1} s + \frac{G_1}{m_1} = \frac{bs + G_1}{m_1}; & r_{21} &= \frac{b}{m_2} s + \frac{G_1}{m_2} = \frac{bs + G_1}{m_2},
 \end{aligned}$$

где R_1 и R_2 – характеристические уравнения парциальных систем (типа 2), которые показаны на рис. 4.2;

r_{12} и r_{21} – коэффициенты связи одной парциальной системы с другой.

С учетом сказанного уравнения (4.4) принимают вид:

$$\begin{aligned}
 R_1 z(s) - r_{12} \zeta(s) &= 0; \\
 -r_{21} z(s) + R_2 \zeta(s) &= \frac{G_2}{m_2} q(s).
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

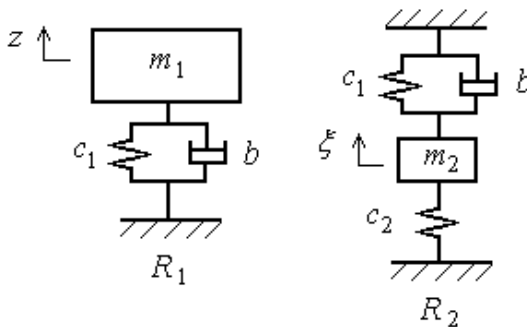


Рис. 4.2. Парциальные системы подвески автомобиля

Для расчета парциальных частот примем $b = 0$ и заменим s^2 на $-\omega^2$.

Тогда получим:

$R_1 = \lambda_1 - \omega^2$; $R_2 = \lambda_2 - \omega^2$ – частотные уравнения парциальных систем;

$r_{12} = \frac{c_1}{m_1}$; $r_{21} = \frac{c_1}{m_2}$ – коэффициенты связи одной парциальной системы с другой;

$\lambda_1 = \rho_1^2 = \frac{c_1}{m_1}$; $\lambda_2 = \rho_2^2 = \frac{c_1 + c_2}{m_2}$ – квадраты парциальных частот.

Из уравнений (4.5) получаем частотный определитель системы:

$$R(\omega^2) = \begin{vmatrix} R_1 & -r_{12} \\ -r_{21} & R_2 \end{vmatrix} = R_1 R_2 - \gamma_{12},$$

где $\gamma_{12} = r_{12} \cdot r_{21}$.

Для нахождения собственных частот нужно решить частотное уравнение

$$R(\omega^2) = (\lambda_1 - \omega^2)(\lambda_2 - \omega^2) - \gamma_{12} = 0$$

или

$$\omega^4 - (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \omega^2 + \lambda_1 \cdot \lambda_2 - \gamma_{12} = 0. \quad (4.6)$$

Силы в упругих звеньях c_1 и c_2 при отклонении координат от равновесного режима равны:

$$F_1 = c_1 \cdot (\zeta - z); \quad F_2 = c_2 \cdot (q - \zeta).$$

С учетом статической нагрузки силы в упругих звеньях c_1 и c_2 равны:

$$F_p = F_1 + 9,81 m_1; \quad F_{ш} = F_2 + 9,81 (m_1 + m_2).$$

Принять начальные условия: при $t = 0$ $z_0 = 0$, $\zeta_0 = 0$, $v_1 = 0$, $v_2 = 0$.

Условие отрыва колес от опорной поверхности: если $F_{ш} < 0$, то принять $F_{ш} = 0$.

Содержание отчета

1. *Цель работы.*

2. *Постановка задачи.* Сформулировать решаемую задачу, условия ее решения, привести исходные данные.

3. *Теоретическая часть.* Вывести уравнения движения с помощью уравнений Лагранжа II рода. Рассчитать парциальные и собственные частоты. Записать уравнения в стандартном виде.

4. *Схема алгоритма.* Привести схему алгоритма и краткий комментарий к ней. Схему нарисовать в соответствии с действующими стандартами и с помощью чертежных приспособлений.

5. *Паскаль-программа.* Распечатать на принтере или написать от руки Паскаль-программу и дать краткий комментарий к ней. Программа и схема алгоритма должны соответствовать одна другой.

6. *Результаты расчета.* Распечатать результирующий файл, который должен иметь название работы, фамилию и инициалы студента, номер группы, исходные данные, таблицу с результатами расчета. Построить или распечатать график функции переходного процесса, на котором должны быть q , z' , F_1 , F_2 , F_p и $F_{ш}$. График выполнить в соответствии с действующими стандартами.

7. *Анализ результатов расчета.* Найти по графику частоты колебаний и сопоставить их с собственными, рассчитанными по уравнению (4.6). Рассчитать относительную погрешность и объяснить несоответствие частот.

8. *Литература.*

Лабораторная работа № 5 СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Цель работы: изучение методов расчета собственных частот динамических моделей различной конфигурации.

Задание

Составить схему алгоритма, Паскаль-программу и рассчитать собственные частоты одной из динамических моделей следующего раздела.

Программа должна отвечать следующим требованиям:

- исходные данные вводятся из файла исходных данных (*.dat);
- исходные данные и результаты расчета занести в результирующий файл;
- результирующий файл должен иметь заголовок, фамилию и инициалы студента, номер группы;
- исходные данные, динамическую модель и результаты расчета вывести на дисплей. Вывести на монитор график изменения частотной функции (рис. 5.1) заданной динамической модели.

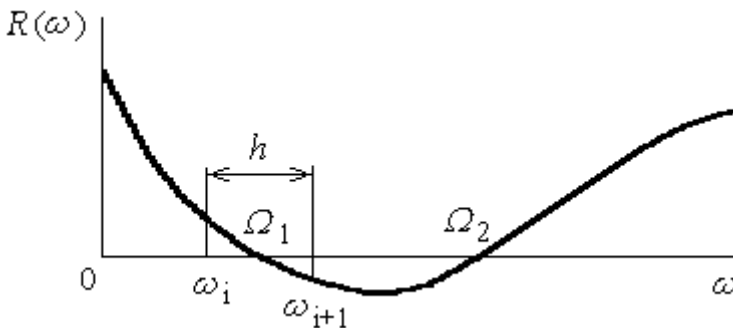


Рис. 5.1. График изменения частотной функции $R(\omega)$

Исходные данные

Варианты динамических моделей показаны в табл. 5.1. Данные для расчета приведены в табл. 5.2.

Теоретическая часть

Собственными называют периодические колебания консервативной системы, совершающиеся исключительно под воздействием инерционных и упругих сил. Для возбуждения таких колебаний достаточно приложить к системе какое-нибудь начальное возмущение, т. е. вывести ее из состояния равновесия. После прекращения действия возмущения в системе устанавливаются собственные колебания. Углы поворота масс описываются уравнением

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \sin(\Omega_j t + \alpha_j),$$

где i – номер массы;

j – порядковый номер собственной частоты;

α_j – фазовый угол;

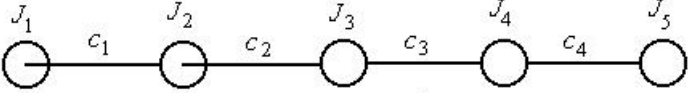
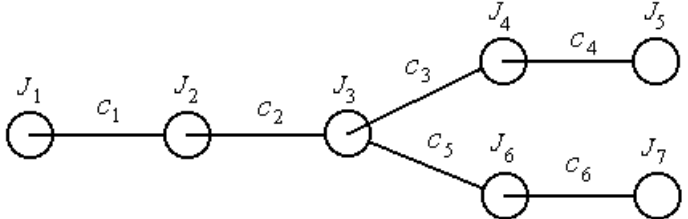
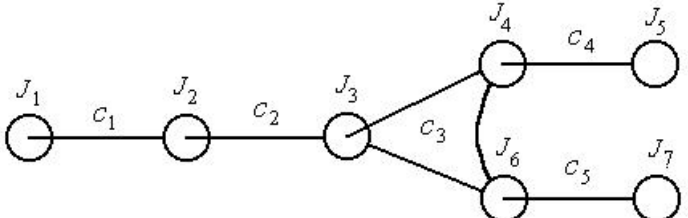
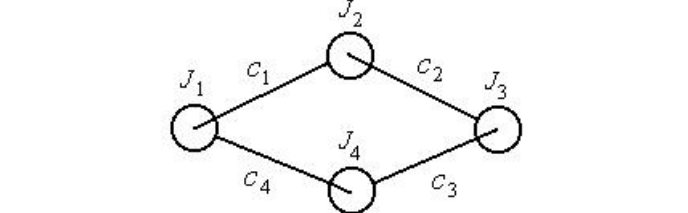
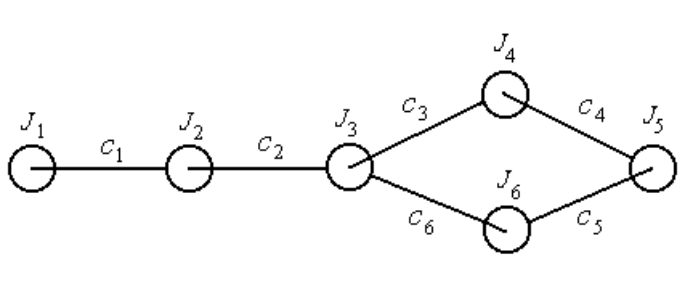
A_{ij} – амплитуда колебаний i -й массы на j -й собственной частоте.

Из формулы следует, что в общем случае все массы системы совершают сложное колебательное движение, называемое *полигармоническим*.

Для нахождения собственных частот Ω_i объекта нужно записать его частотное уравнение $R(\omega)$ как функцию инерционных и упругих параметров. Корни этого уравнения являются собственными частотами колебаний. Собственные частоты нумеруют в порядке возрастания, начиная с Ω_1 .

Таблица 5.1

Варианты динамических моделей

№ варианта	Динамическая модель
1	 <p>A linear chain of five nodes labeled J_1, J_2, J_3, J_4, J_5 from left to right. Edges connect $J_1 \rightarrow J_2$ (labeled c_1), $J_2 \rightarrow J_3$ (labeled c_2), $J_3 \rightarrow J_4$ (labeled c_3), and $J_4 \rightarrow J_5$ (labeled c_4).</p>
2	 <p>A linear chain of nodes J_1, J_2, J_3 with edges c_1 and c_2. From node J_3, two edges branch out: c_3 to node J_4 and c_5 to node J_6. Node J_4 is connected to J_5 (edge c_4), and node J_6 is connected to J_7 (edge c_6).</p>
3	 <p>A linear chain of nodes J_1, J_2, J_3 with edges c_1 and c_2. From node J_3, two edges branch out: c_3 to node J_4 and c_3 to node J_6. Node J_4 is connected to J_5 (edge c_4), and node J_6 is connected to J_7 (edge c_5).</p>
4	 <p>A diamond-shaped network with four nodes: J_1 (left), J_2 (top), J_3 (right), and J_4 (bottom). Edges connect $J_1 \rightarrow J_2$ (c_1), $J_1 \rightarrow J_4$ (c_4), $J_2 \rightarrow J_3$ (c_2), and $J_4 \rightarrow J_3$ (c_3).</p>
5	 <p>A linear chain of nodes J_1, J_2, J_3 with edges c_1 and c_2. From node J_3, two edges branch out: c_3 to node J_4 and c_6 to node J_6. Node J_4 is connected to J_5 (edge c_4), and node J_6 is connected to J_5 (edge c_5).</p>

Продолжение табл. 5.1

№ варианта	Динамическая модель
6	
7	
8	
9	
10	

№ варианта	Динамическая модель
11	<p>Diagram 11: A linear chain of nodes J_1, J_2, J_3 with edges c_1, c_2. Node J_3 is connected to nodes J_4 and J_5 with edges c_3.</p>
12	<p>Diagram 12: A linear chain of nodes J_1, J_2, J_3, J_4 with edges c_1, c_2. Node J_3 is connected to node J_5 with edges c_3.</p>
13	<p>Diagram 13: A linear chain of nodes J_1, J_2, J_3, J_4 with edges c_1, c_2. Node J_1 is connected to node J_6 with edges c_1. Node J_3 is connected to node J_5 with edges c_3.</p>
14	<p>Diagram 14: A linear chain of nodes J_1, J_2, J_3 with edges c_1, c_2. Node J_1 is connected to node J_6 with edges c_1. Node J_3 is connected to nodes J_4 and J_5 with edges c_3, c_4.</p>
15	<p>Diagram 15: A linear chain of nodes J_1, J_2, J_3 with edges c_1, c_2. Node J_2 is connected to node J_6 with edges c_2. Node J_3 is connected to nodes J_4 and J_5 with edges c_3, c_4.</p>

Таблица 5.2

Варианты исходных данных динамических моделей

№ варианта	Моменты инерции масс, кг·м ²							Жесткости, Н·м/рад					
	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
1	3,5	0,2	0,7	1,1	1,8	9,3	3,5	3,2	4,3	5,2	2,1	4,3	2,4
2	8,3	0,3	0,3	4,2	4,3	7,7	8,3	6,7	1,3	4,2	7,2	1,3	0,4
3	5,7	0,8	0,1	2,3	1,2	2,7	5,7	4,1	1,1	3,2	2,2	1,1	0,3
4	6,2	0,2	0,4	4,3	3,4	4,1	6,2	2,7	3,3	3,4	4,2	3,3	0,8
5	2,9	0,7	0,3	3,7	4,2	6,1	2,9	4,2	6,1	4,2	5,7	6,1	0,9
6	4,7	0,4	0,8	8,3	1,3	3,6	4,7	3,1	4,2	3,1	4,1	4,2	0,1
7	7,3	0,3	0,9	1,4	5,4	4,3	7,3	7,3	4,8	1,3	6,1	4,8	0,2
8	2,8	0,3	0,1	3,4	4,2	3,8	1,1	1,2	3,0	2,4	3,7	2,4	0,5
9	4,8	0,4	0,2	2,4	3,2	6,4	4,2	3,8	2,2	3,2	7,1	3,2	0,6
10	2,4	0,5	0,5	2,8	4,2	4,7	2,3	6,2	5,7	1,1	4,3	1,1	2,3
11	3,8	0,4	0,6	6,2	2,8	7,5	4,3	6,3	2,1	4,3	4,1	4,3	4,3
12	9,4	0,6	0,7	2,3	7,3	4,5	3,7	2,2	7,1	4,2	2,2	4,2	3,7
13	5,7	0,4	0,4	4,3	4,2	8,1	8,3	4,2	2,3	6,1	7,7	6,1	8,3
14	3,8	0,3	0,4	2,3	1,3	5,9	1,4	5,7	3,8	1,1	3,1	1,1	1,4
15	5,7	0,3	0,1	1,3	4,1	6,1	3,4	1,1	3,1	3,9	4,2	3,9	3,4

Частотное уравнение $R(\omega)$ легко получается из передаточной функции рассматриваемой динамической модели объекта. Для этого достаточно приравнять нулю знаменатель передаточной функции и принять равными нулю коэффициенты демпфирования, т.е. считать систему консервативной.

Форма записи частотного уравнения $R(\omega)$ может быть различной: в виде определителя, полиномиального уравнения, рекуррентных уравнений, цепной дроби и т.д. График изменения $R(\omega)$ от частоты ω показан на рис. 5.1. Точки пересечения $R(\omega)$ с осью абсцисс соответствуют собственным частотам. Критерием нахождения собственной частоты в интервале $\omega_i \dots \omega_{i+1}$ является знак произведения

$$z = R(\omega_i) \cdot R(\omega_{i+1}) < 0,$$

который должен быть отрицательным или $z = 0$.

Используя линейную интерполяцию, находим j -ю собственную частоту модели

$$\Omega_j = \omega_j + h \cdot \frac{R(\omega_j)}{R(\omega_j) - R(\omega_{j+1})},$$

где h – шаг счета.

При расчете находятся или все собственные частоты, число которых обычно известно, или расположенные в определенном частотном диапазоне. Таким образом, в первом случае для нахождения собственных частот сначала нужно записать частотное уравнение и, увеличивая ω от ω_{\min} (обычно $\omega_{\min} = 0$), найти нужное количество пересечений функции $R(\omega)$ с частотной осью ω . Во втором случае собственные частоты ищутся в определенном частотном диапазоне.

Для записи частотного уравнения используют различные методы.

В общем случае для рассчитываемой консервативной модели составляются уравнения движения, которые сначала записываются в операторном виде (в преобразованиях Лапласа), а затем – в систематизированном виде. В результате получается система алгебраических уравнений, по которой составляют характеристический определитель системы $R(s)$. Полученный характеристический определитель $R(s)$ преобразовывают в частотный определитель $R(\omega)$ заменой оператора s^2 на $-\omega^2$. Таким образом, получают уравнение частот собственных колебаний, записанное в виде определителя. Например, для динамической модели с четырьмя парциальными системами:

$$R(\omega) = \begin{vmatrix} R_1 & -r_{12} & -r_{13} & -r_{14} \\ -r_{21} & R_2 & -r_{23} & -r_{24} \\ -r_{31} & -r_{32} & R_3 & -r_{34} \\ -r_{41} & -r_{42} & -r_{43} & R_4 \end{vmatrix} = 0,$$

где $R_i = \lambda_i - \omega_i$, $i = 1, 4$ – частотные функции парциальных систем;

λ_i – квадраты собственных частот парциальных систем;

r_{ij} – коэффициенты связи одной парциальной системы с другой.

Описанный выше метод нахождения частотного уравнения известен в литературе как *матричный*.

Логическим развитием матричного метода является метод *декомпозиции* или *последовательного расщепления* [1]. Метод отличается наглядностью, простотой и не требует составления уравнений движения.

Сначала динамическая модель делится на две подсистемы с повторением какой-нибудь массы J_k . Частотное уравнение всей системы равно произведению частотных уравнений этих подсистем минус коэффициент связи $\gamma_{k-1,k}$ между ними, умноженный на частотные уравнения подсистем, которые получаются из исходной модели, если отбросить массу J_k и разорвать упругие звенья C_{k-1} и C_k . Аналогичным методом выполняется дальнейшее расщепление системы. Если расщепление выполняется на массу, которая связана с несколькими упругими звеньями, то учитываются все возможные пути прохождения сигналов из одной подсистемы в другую.

На рис. 5.2 процесс последовательного расщепления показан на примере 5-массовой неразветвленной динамической модели.

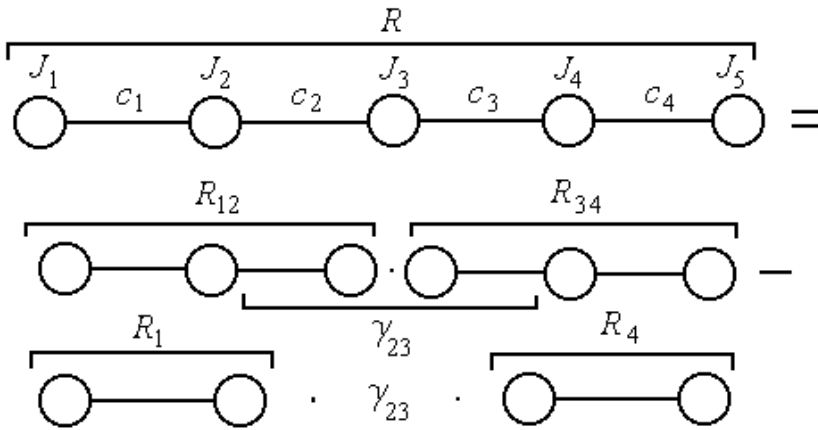


Рис. 5.2. Графическая интерпретация метода последовательного расщепления неразветвленной динамической модели

Сначала динамическая модель расщепляется, например, на массе J_3 . В результате получаются две подсистемы с частотными уравнениями R_{12} и R_{34} . Эти две подсистемы связаны между собой коэффициентом связи $\gamma_{23} = c_2 c_3 / J_3^2$. Отсюда уравнение частот модели оказывается равным

$$R = R_{1234} = R_{12} R_{34} - \gamma_{23} R_1 R_4 = 0. \quad (5.1)$$

Аналогичным образом расщепляются подсистемы с частотными уравнениями R_{12} и R_{34} :

$$R_{12} = R_1 R_2 - \gamma_{12}; \quad R_{34} = R_3 R_4 - \gamma_{34}. \quad (5.2)$$

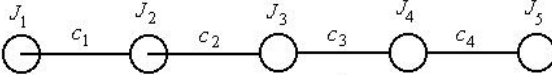
После подстановки уравнений (5.2) в (5.1) получается уравнение частот рассматриваемой динамической модели:

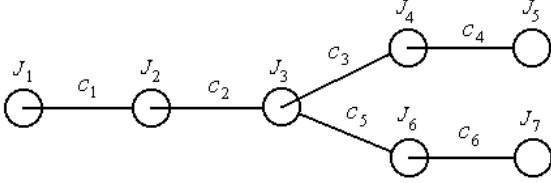
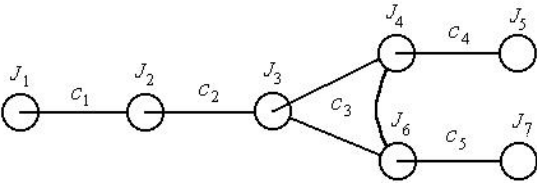
$$R = (R_1 R_2 - \gamma_{12}) \cdot (R_3 R_4 - \gamma_{34}) - \gamma_{23} R_1 R_4 = 0.$$

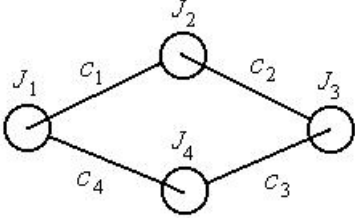
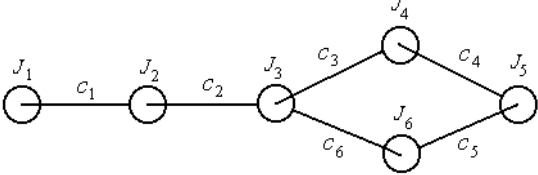
В качестве примера в табл. 5.3 приведены уравнения частот собственных колебаний динамических моделей различных типов. Нижние индексы соответствуют номерам упругих звеньев, верхние в круглых скобках – номерам неподвижно закрепленных масс, верхние без скобок – номерам масс, на которых произведено расщепление кольцевой модели.

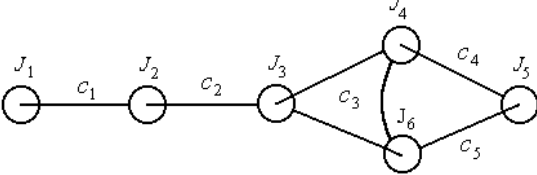
Таблица 5.3

Уравнения частот собственных колебаний динамических моделей различных типов

Динамическая модель	Схема, уравнение
а) Неразветвленная	 $R = R_{12} R_{34} - \gamma_{23} R_1 R_4 = (R_1 R_2 - \gamma_{12}) \times \\ \times (R_3 R_4 - \gamma_{34}) - \gamma_{23} R_1 R_4;$ $R_j = \lambda_j - \omega^2; \quad \lambda_j = c_j \left(\frac{1}{J_j} + \frac{1}{J_{j+1}} \right);$ $\gamma_{j,j+1} = \frac{c_j c_{j+1}}{J_{j+1}^2}$

Динамическая модель	Схема, уравнение
<p>б) Разветвленная</p>	 <p> $R = R_{12} R_{3456} - \gamma_{23} R_1 R_4 R_{56}^{(3)} -$ $- \gamma_{25} R_1 R_6 R_{34}^{(3)}; \quad R_{3456} = R_{34} R_{56} - \gamma_{35} R_4 R_6;$ $R_i = \lambda_i - \omega^2; \quad R_{34}^{(3)} = R_3^{(3)} R_4 - \gamma_{34};$ $R_{56}^{(3)} = R_5^{(3)} R_6 - \gamma_{56}; \quad R_3^{(3)} = \frac{C_3}{J_4} - \omega^2;$ $R_5^{(3)} = \frac{C_5}{J_6} - \omega^2; \quad \gamma_{12} = \frac{G_1 C_2}{J_2^2}; \quad \gamma_{23} = \frac{C_2 C_3}{J_3^2};$ $\gamma_{25} = \frac{C_2 C_5}{J_3^2}; \quad \gamma_{34} = \frac{C_3 C_4}{J_4^2}; \quad \gamma_{56} = \frac{C_5 C_6}{J_6^2}$ </p>
<p>в) С дифференциальным разветвлением</p>	 <p> $R = R_{12} R_{345} - \gamma_{23} R_1 R_4 R_5;$ $R_{345} = R_{34} R_5 - \gamma_{35} R_4;$ $R_i = \lambda_i - \omega^2; \quad R_{12} = R_1 R_2 - \gamma_{12};$ $R_{34} = R_3 R_4 - \gamma_{34}; \quad \lambda_3 = c_3 \left(\frac{1}{J_3} + \frac{1}{J_4} + \frac{1}{J_6} \right)$ </p>

Динамическая модель	Схема, уравнение
	$\gamma_{12} = \frac{G_1 C_2}{J_2^2}; \quad \gamma_{23} = \frac{C_2 C_3}{J_3^2}; \quad \gamma_{34} = \frac{C_3 C_4}{J_4^2};$ $\gamma_{34} = \frac{C_3 C_4}{J_4^2}; \quad \gamma_{35} = \frac{C_3 C_5}{J_6^2}$
<p>г) Кольцевая неразветвленная</p>	 $R = R_{1234}^1 - \gamma_{14} R_{23} - 2 \frac{G_{1234}}{J_{1234}} = (R_1 R_2 - \gamma_{12}) \times$ $\times (R_3 R_4 - \gamma_{34}) - \gamma_{14} R_{23} - 2 \frac{G_{1234}}{J_{1234}}$
<p>д) Кольцевая разветвленная</p>	 $R = R_{123456}^5 - \gamma_{45} R_{1236} - 2 \frac{C_{3456}}{J_{3456}} R_{12}^{(3)};$ $R_{1236} = R_2 R_{36} -$ $- R_1 \left[\gamma_{23} R_6^{(3)} + \gamma_{26} R_3^{(3)} \right];$ $R_{123456}^5 = R_{12} R_{3456} -$ $- R_1 \left[\gamma_{23} R_4 R_{56}^{(3)} + \gamma_{26} R_5 R_{34}^{(3)} \right];$

Динамическая модель	Схема, уравнение
	$R_i = \lambda_j - \omega^2; \quad R_{12}^{(3)} = R_1 R_2^{(3)} - \gamma_{12};$ $R_{3456} = R_{34} R_{56} - \gamma_{36} R_4 R_5;$ $R_{34}^{(3)} = R_3^{(3)} R_4 - \gamma_{34};$ $R_{56}^{(3)} = R_5^{(3)} R_6 - \gamma_{56}$
д) С дифференциальным разветвлением	 $R = R_{12} R_{345} - \gamma_{23} R_1 R_{45};$ $R_{345} = R_{345}^5 - \gamma_{45} R_3; \quad R_i = \lambda_j - \omega^2;$ $R_{12} = R_1 R_2 - \gamma_{12}; \quad R_{45} = R_4 R_5 - \gamma_{45};$ $\lambda_3 = c_3 \left(\frac{1}{J_3} + \frac{1}{J_4} + \frac{1}{J_6} \right);$ $R_{345}^5 = R_{34} R_5 - \gamma_{35} R_4;$ $\gamma_{12} = \frac{c_1 c_2}{J_2^2}; \quad \gamma_{23} = \frac{c_2 c_3}{J_3^2}; \quad \gamma_{34} = \frac{c_3 c_4}{J_4^2}$

У разветвленных динамических моделей возможны два пути прохождения сигнала из одной подсистемы в другую. В связи с этим в уравнениях частот появляются дополнительные слагаемые (со знаком минус). При разветвлении на массу (табл. 5.3, б, д) в этих слагаемых присутствуют подсистемы с заземленной массой, на которой происходит разветвление. При дифференциальном разветвлении (табл. 5.3, в, е) таких

подсистем нет. Это связано с тем, что при прохождении сигнала соответствующие координаты становятся равными нулю, что равнозначно разрыву упругих звеньев и заземлению масс.

Содержание отчета

1. *Цель работы.*

2. *Постановка задачи.* Сформулировать решаемую задачу, условия ее решения, привести динамическую модель и исходные данные.

3. *Теоретическая часть.* В кратком виде описать два метода нахождения собственных частот: матричный и последовательного расщепления. Для заданного варианта записать частотное уравнение методом последовательного расщепления.

4. *Схема алгоритма.* Привести схему алгоритма и краткий комментарий к ней. Схему нарисовать в соответствии с действующими стандартами и с помощью чертежных приспособлений.

5. *Паскаль-программа.* Распечатать на принтере или написать от руки Паскаль-программу и краткий комментарий к ней. Программа и схема алгоритма должны соответствовать одна другой. Сформировать выполняемый ехе-файл.

6. *Результаты расчета.* Распечатать результирующий файл, который должен иметь название работы, фамилию студента, номер группы, исходные данные, парциальные и собственные частоты, коэффициенты связи. Вывести в графическом и табличном виде частотную функцию $R(\omega)$.

7. *Анализ результатов расчета.* Подставить полученные результаты в частотное уравнение и убедиться в правильности решения.

8. *Литература.*

Лабораторная работа № 6

УПРОЩЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Цель работы: ознакомление с основными понятиями, используемыми при разработке динамической модели, принципами и методами их составления и упрощения; упрощение цепной динамической модели, используемой в расчетах автомобиля.

Задание

Составить схему алгоритма, Паскаль-программу и упростить до двухмассовой исходную 6-массовую динамическую модель (рис. 6.1).

Программа должна отвечать следующим требованиям:

- исходные данные ввести из файла исходных данных (*.dat);
- исходные данные и результаты расчета занести в результирующий файл;
- результирующий файл должен иметь заголовок, фамилию и инициалы студента, номер группы;
- исходные данные, динамическую модель и результаты расчета вывести на дисплей. Вывести на монитор график с собственными частотами динамической модели для всех этапов упрощения.

Исходные данные

Исходная 6-массовая динамическая модель показана на рис. 6.1. Данные для расчета приведены в табл. 6.1.

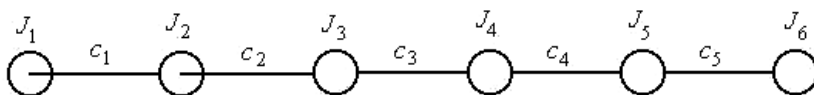


Рис. 6.1. Исходная 6-массовая динамическая модель

Таблица 6.1

Исходные данные 6-массовой динамической модели

Вариант	Момент инерции J , кг·м ²						Податливость e , рад / Н·м				
	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
1	3,5	0,2	0,7	1,1	1,8	9,3	3,2	4,3	5,2	2,1	4,3
2	8,3	0,3	0,3	4,2	4,3	7,7	6,7	1,3	4,2	7,2	1,3
3	5,7	0,8	0,1	2,3	1,2	3,7	4,1	1,1	3,2	2,2	1,1
4	6,2	0,2	0,4	4,3	3,4	4,1	2,7	3,3	3,4	4,2	3,3
5	2,9	0,7	0,3	3,7	4,2	6,1	4,2	6,1	4,2	5,7	6,1
6	4,7	0,4	0,8	8,3	1,3	3,6	3,1	4,2	3,1	4,1	4,2
7	7,3	0,3	0,9	1,4	5,4	4,3	7,3	4,8	1,3	6,1	4,8
8	2,8	0,3	0,1	3,4	4,2	3,8	1,2	3,0	2,4	3,7	2,4
9	4,8	0,4	0,2	2,4	3,2	6,4	3,8	2,2	3,2	7,1	3,2
10	2,4	0,5	0,5	2,8	4,2	4,7	6,2	5,7	1,1	4,3	1,1
11	3,8	0,4	0,6	4,2	2,8	7,5	6,3	2,1	4,3	4,1	4,3
12	9,4	0,6	0,7	2,3	7,3	4,5	2,2	7,1	4,2	2,2	4,2
13	5,7	0,4	0,4	4,3	4,2	8,1	4,2	2,3	6,1	7,7	6,1
14	3,8	0,3	0,4	2,3	1,3	5,9	5,7	3,8	1,1	3,1	1,1
15	5,7	0,3	0,1	1,3	4,1	6,1	1,1	3,1	3,9	4,2	3,9
16	4,2	1,1	2,4	0,9	0,9	7,5	0,7	1,4	0,9	1,3	7,2
17	5,3	3,3	2,8	1,1	0,1	4,5	0,3	3,4	0,4	2,4	2,2
18	4,3	2,2	3,2	0,2	1,2	8,1	0,5	2,4	0,6	3,2	4,2
19	2,3	3,1	2,3	0,5	0,5	5,9	0,8	2,8	0,9	1,1	5,7
20	5,3	1,1	4,3	0,6	0,6	6,1	1,6	4,2	1,3	4,3	4,1

Теоретическая часть

Упрощение выполняется с целью ускорения и облегчения расчетов при практически неизменной точности.

Из теории колебаний известно, что собственные частоты объекта, которые в 4 раза больше анализируемого частотного диапазона, практически не влияют на точность расчетов. Этот постулат является основой для выполнения упрощения.

Наибольшее распространение имеет метод парциальных систем, который включает ряд этапов.

1. Модель разбивается на парциальные системы двух типов (рис. 6.2). Парциальная система получается из динамической модели, если принять во внимание только одну координату, а остальные приравнять к нулю. Если обобщенными координатами являются моменты в упругих звеньях или их деформации, то получаются парциальные системы первого типа; если углы поворота масс – парциальные системы второго типа.

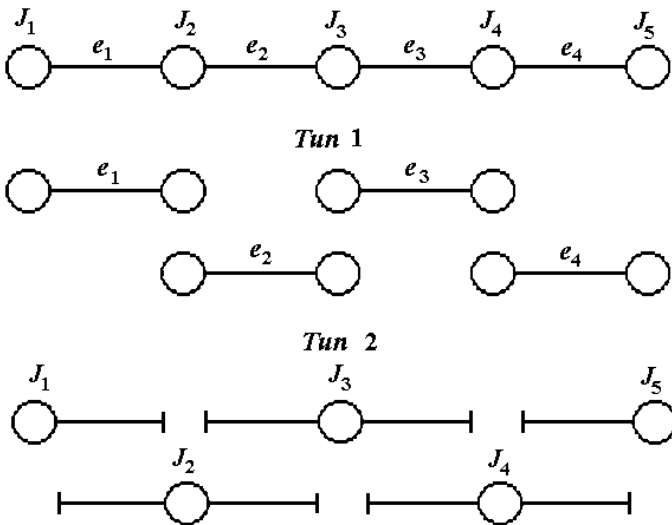


Рис. 6.2. Разбивка динамической модели на парциальные системы двух типов

2. Рассчитываются квадраты парциальных (собственных) частот этих систем ρ_i^2 и q_i^2 (рис. 6.3).

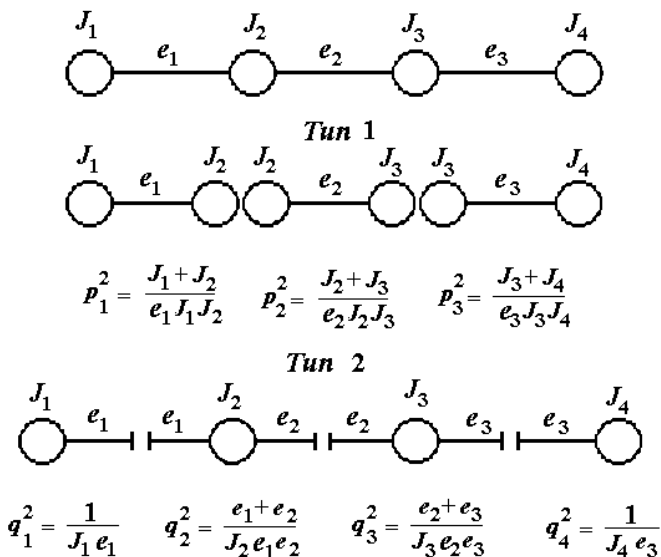


Рис. 6.3. Значения квадратов парциальных (собственных) частот парциальных систем двух типов

3. Находится парциальная система с максимальной частотой p_{\max} или q_{\max} .
4. Найденная парциальная система преобразовывается в эквивалентную парциальную систему другого типа (рис. 6.4).
5. Преобразованная система встраивается в упрощаемую динамическую модель вместо системы с p_{\max} или q_{\max} .
6. Однотипные параметры модели суммируются, в результате чего получается упрощенная модель с меньшим на единицу количеством масс.
7. Выполняется проверка возможности дальнейшего упрощения модели, и при положительном результате процесс повторяется.

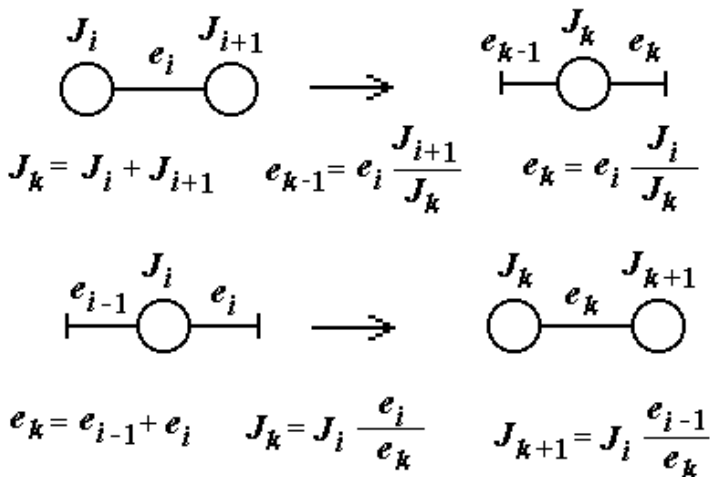


Рис. 6.4. Преобразование частичной системы одного типа в частичную систему другого типа

Содержание отчета

1. *Цель работы.*

2. *Постановка задачи.* Сформулировать решаемую задачу, условия ее решения, привести упрощаемую модель и исходные данные.

3. *Теоретическая часть.* Описать алгоритм упрощения динамической модели и нарисовать соответствующую схему алгоритма. Схему нарисовать в соответствии с действующими стандартами и с помощью чертежных приспособлений.

4. *Схема алгоритма.* Привести схему алгоритма и краткий комментарий к ней. Схему нарисовать в соответствии с действующими стандартами и с помощью чертежных приспособлений.

5. *Паскаль-программа.* Распечатать на принтере или написать от руки Паскаль-программу и краткий комментарий к ней. Программа и схема алгоритма должны соответствовать одна другой. Сформировать выполняемый ехе-файл.

6. *Результаты расчета.* Распечатать результирующий файл, который должен содержать таблицу с параметрами, парциальными и собственными частотами исходной модели и для всех этапов упрощения. Построить график, на котором нанести собственные частоты исходной модели и для всех этапов упрощения.

7. *Анализ результатов расчета.* Просуммировать моменты инерции и податливости исходной и упрощенной моделей. Сопоставить полученные результаты.

8. *Литература.*

ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

1. Работа должна быть выполнена на стандартных листах писчей бумаги с соблюдением действующих стандартов. Как образец использовать техническую литературу последних лет издания.
2. Рисунки должны быть выполнены с помощью чертежных приспособлений.
3. Листы работы должны быть пронумерованы.
4. Рисунки и таблицы должны иметь номера и подписи, на графиках должна быть нанесена масштабная сетка.
5. При вычислениях сначала необходимо записывать в общем виде формулу, затем подставлять численные значения переменных и записывать ответ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Молибошко, Л.А. Компьютерное моделирование автомобилей: учебное пособие для вузов / Л.А. Молибошко. – Минск: ИВЦ Минфина Респ. Беларусь, 2007. – 280 с.
2. Молибошко, Л.А. Компьютерные модели автомобилей / Л.А. Молибошко, О.С. Руктешель, Г.А. Дыко. – Минск: БНТУ, 2004. – 75 с.
3. Применение ЭВМ при конструировании и расчете автомобиля / А.И. Гришкевич [и др.]; под общ. ред. А.И. Гришкевича. – Минск: Вышэйшая школа, 1978. – 264 с.
4. Автомобили. Конструкция, конструирование и расчет. Трансмиссия / А.И. Гришкевич [и др.]; под общ. ред. А.И. Гришкевича. – Минск: Вышэйшая школа, 1985. – 240 с.
5. Тарасик, В.П. Математическое моделирование технических систем / В.П. Тарасик. – Минск: ДизайнПРО, 2004. – 640 с.
6. Гришкевич, А.И. Автомобили. Теория / А.И. Гришкевич. – Минск: Вышэйшая школа, 1986. – 208 с.
7. Тарасик, В.П. Теория движения автомобиля / В.П. Тарасик. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 478 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
Лабораторная работа № 1 ПРОСТЫЕ АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ.....	4
Лабораторная работа № 2 ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ.....	11
Лабораторная работа № 3 ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.....	22
Лабораторная работа № 4 КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ ПОДВЕСКИ АВТОМОБИЛЯ.....	33
Лабораторная работа № 5 СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ.....	40
Лабораторная работа № 6 УПРОЩЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ.....	54
ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ.....	60
ЛИТЕРАТУРА.....	61

Учебное издание

РЕШЕНИЕ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ
ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

Лабораторные работы
по дисциплине «Компьютерные модели автомобилей»

Составители:

МОЛИБОШКО Леонид Александрович
РУКТЕШЕЛЬ Олег Степанович
ДЫКО Геннадий Александрович

Редактор Е.О. Коржуева
Компьютерная верстка Д.А. Исаева

Подписано в печать 15.02.2011.

Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная.

Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 3,66. Уч.-изд. л. 2,86. Тираж 200. Заказ 1058.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Белорусский национальный технический университет.

ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.

Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.