Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 2»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ ДЛЯ СТУДЕНТОВ 1-го КУРСА

Минск
БНТУ
2011

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я7
М 54

С о с т а в и т е л и:
Е.В. Емеличева, *С.Ю. Лошкарева*, *Л.Д.Матвеева*

Р е ц е н з е н т ы:
В.В. Карпук, *Н.А. Шавель*

Издание предназначено для студентов инженерно-педагогических и инженерных специальностей 1 курса и содержит подробные решения типовых примеров. Задачи для самостоятельного решения составлены так, чтобы студенты могли полностью усвоить изучаемый материал и справиться самостоятельно с подобными задачами.

© БНТУ, 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

ТЕМА 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

1.1. Раскрытие неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-7x^3+1}{3x^4-15}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^3+1}{3x^4-15}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^4}{x^4}-\dfrac{3x^3}{x^4}+\dfrac{1}{x^4}}{\dfrac{3x^4}{x^4}-\dfrac{15}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^4}}{3-\dfrac{15}{x^4}}=$$

$$=\frac{1-0+0}{3-0}=\frac{1}{3}.$$

Задание 1. Вычислить пределы.

1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+3}{3x^3-4x^2+5}$.

1.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+4x-15}{3x^2+121}$.

1.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+3x^3-2x^2+4}{x^4+5x}$.

1.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-3x^3+5}{x^2+4x+10}$.

1.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^2+4x+15}{x^3-3x^2+4x+5}$.

1.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6-3x^3+9}{2x^6+14x^2-7}$.

1.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+5}{3x^4-4x^2+6x+1}$.

1.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x-5x^3}{2x^3+4x-5}$.

1.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2-3x+5}{10x^2+x+11}$.

1.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-2x^3}{4x^2+7x+10}$.

1.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+3x^2-4}{10x^4-4x+1}$.

1.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-6x^3}{3x^3+4x^2-7x+1}$.

1.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+x^2-5x-1}{x^4+2x^2-3}$.

1.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x-5}{5+8x-2x^2}$.

1.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7-4x^5+x^3+4}{x^6+2x^2+1}$.

1.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4-7x^5}{2x^2-x^4+x^5}$.

1.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^5-5x^3+4}{2x^5+x^4-3x}$.

1.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x^2-6x}{11x^3+4x+3}$.

1.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x+1}{x^2+5x-1}$.

1.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+4x^4-3x+1}{2x^7-4x^3+7}$.

1.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x^2+1}{7x^4+10x-4}$.

1.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+5x+3}{2x^3-3x^2+5}$.

1.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-15x^2}{3x^2+4x+7}$.

1.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-5x^2+2x-3}{2x^3+4x^2+x-2}$.

1.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-x^2}{5x^4+x^2+2x-3}$.

1.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-5x^3+4x^2}{x^3+5x^2+4x+7}$.

1.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{9x^3+7x^2+4x-1}}{\sqrt[3]{3x^3-2x^2+5x+4}}$.

1.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{16x^4+2x^2+1}}{\sqrt[3]{8x^6+3x^3+2}}$.

1.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{25x+4}}{\sqrt{x+11}}$.

1.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+2x+3}}{x+14}$.

1.2. Раскрытие неопределенности вида $\infty-\infty$

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+11}-\sqrt{x^2-9}\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+11}-\sqrt{x^2-9}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+11}-\sqrt{x^2-9}\right)\left(\sqrt{x^2+11}+\sqrt{x^2-9}\right)}{\sqrt{x^2+11}+\sqrt{x^2-9}}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+11-x^2+9}{\sqrt{x^2+11}+\sqrt{x^2-9}} = \lim_{x\to\infty} \frac{20}{\sqrt{x^2+11}+\sqrt{x^2-9}} = 0.$$

Задание 2. Вычислить пределы.

2.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2+x}\right)$.

2.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+4x+1}-\sqrt{2x^2+5}\right)$.

2.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2+3x}\right)$.

2.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\left(\sqrt{x^2+10}-\sqrt{x^2+1}\right)\right)$.

2.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2+2x+2}\right)$.

2.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2+x+1}-\sqrt{3x^2-2}\right)$.

2.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-\sqrt{2n^2-4n}\right)$.

2.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-4x}\right)$.

2.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-3x+5}\right)$.

2.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-4x}\right)$.

2.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

2.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-\sqrt{x^2+16x-1}\right)$.

2.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x-1}-x^2\right)$.

2.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

2.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+2x-3}\right)$.

1.3. Раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$

Пример 3.1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-4x+3}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-1)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x-1}=\frac{6}{2}=3.$$

Задание 3. Вычислить пределы.

3.1. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$.

3.2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}$.

3.3. $\lim\limits_{x\to -1/2}\frac{2x^2-5x-2}{4x^2-18x-10}$.

3.4. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+10x-24}{x^2-4}$.

3.5. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^2-4x+4}$.

3.6. $\lim\limits_{x\to 10}\frac{x^2-10x}{x^2-11x+10}$.

3.7. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x^2-9}$.

3.8. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-5x+4}$.

3.9. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x^2-8x+7}{x^2-6x-7}$.

3.10. $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x^2-4x-12}{x^2-36}$.

3.11. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-3x-10}{x^2-6x+5}$.

3.12. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2+2x-8}$.

3.13. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+x^2-4x-4}{2x+4}$.

3.14. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+8x+15}{x^2+6x+9}$.

3.15. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x^2-3x+2}$.

3.16. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-4x+3}$.

3.17. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-5x-6}{x^3+1}$.

3.18. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2+2x-8}$.

3.19. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{x^3+1}$.

3.20. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$.

3.21. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+x-2}{x^3-1}$.

3.22. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x^2+4x-5}$.

3.23. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$.

3.24. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^3+8}$.

3.25. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2+x-2}$.

3.26. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{x^3+8}$.

3.27. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-6x+9}$.

3.28. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^4-2x^2+1}$.

3.29. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+6x+8}{x^2+2x-8}$.

3.30. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+x^2-4x-4}{2x+4}$.

Пример 3.2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2-3x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2-3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{\left(x^2-3x\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x\left(x-3\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(x-3\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=-\frac{1}{12}.$$

Задание 4. Вычислить пределы.

4.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

4.2. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{x^2-10x+9}$.

4.3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x-8}{\sqrt{x}-2}$.

4.4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{\sqrt{3x-2}-2}$.

4.5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{10+x}+3x}{x^2+x}$.

4.6. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{x^2-10x+9}$.

4.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{\sqrt{x^2+4}-2}$.

4.8. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}$.

4.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x^3+2x}$.

4.10. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{6x+1}-5}$.

4.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{3x+4}-2}$.

4.12. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{14+x}-4}$.

4.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x^2-x}$.

4.14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^4-16}$.

4.15. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

4.16. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{6-x}-2}$.

4.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$.

4.18. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{4x}-4}{x^2-5x+4}$.

4.19. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{x+6}-3}$.

4.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$.

4.21. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5-x}{\sqrt{5x}-5}$.

4.22. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{12-x}-\sqrt{-4x}}{x^2+x-12}$.

4.23. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2+x}-1}{x^2+2x+1}$.

4.24. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{x^2-3x+2}$.

4.25. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{12+x}-\sqrt{6-x}}{x^2+3x}$.

4.26. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$.

4.27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2-6x}$.

4.28. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-3}-\sqrt{2x-7}}{x^2-6x+8}$.

4.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2-4x}}{x}$.

4.30. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$.

ТЕМА 2. ПЕРВЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Следствием являются формулы: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{kx}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx}{\sin kx}=1$.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot 3x\cdot 2}{\sin 3x\cdot 2x\cdot 3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.$$

Задание 5. Вычислить пределы.

5.1. $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{ctg}3x$.

5.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 6x}}{\mathrm{tg}2x}$.

5.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$.

5.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{1-\cos 6x}$.

5.5. $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\dfrac{4}{x}$.

5.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{3x^2}$.

5.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot\sin 3x}{4x^2}$.

5.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$.

5.9. $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$.

5.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{x^2}$.

5.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\mathrm{tg}7x}$.

5.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 2x}$.

5.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 8x}{x^2}$.

5.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$.

5.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 3x}$.

5.16. $\lim\limits_{x\to 0}\sin 5x\cdot\mathrm{ctg}2x$.

5.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}3x}{\sin x}$.

5.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\mathrm{tg}7x}$.

5.19. $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin x\cdot \operatorname{ctg}^2 2x$. 5.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\operatorname{tg}5x}$. 5.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\operatorname{ctg}3x}{\sin 5x}$.

5.22. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}3x\cdot\operatorname{ctg}2x$. 5.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}4x}$. 5.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 5x}$.

5.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-\sin 6x}{2x}$. 5.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{3}}{x^2}$. 5.27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\operatorname{ctg}3x}{\sin 5x}$.

5.28. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}4x\cdot\operatorname{ctg}9x$. 5.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}4x}{\sin x}$. 5.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{\sin 7x\cdot\sin 9x}$.

ТЕМА 3. ВТОРОЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

Второй замечательный предел применяется для раскрытия неопределенности вида 1^∞.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$, а $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. Тогда имеем

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=\left(1^\infty\right)=\lim_{x\to a}\left[\left(1+\left(f(x)-1\right)\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{\left(f(x)-1\right)\cdot g(x)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-1\right)\cdot g(x)}.$$

Пример 3.1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x-5\right)^{\frac{2x}{x^2-4}}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 2}\left(3x-5\right)^{\frac{2x}{x^2-4}}=\left(1^\infty\right)=\lim_{x\to 2}\left[\left(1+\left(3x-6\right)\right)^{\frac{1}{3x-6}}\right]^{(3x-6)\cdot\frac{2x}{x^2-4}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 2}(3x-6)\cdot\frac{2x}{x^2-4}}=$$

$$
=\left|\lim_{x\to 2}(3x-6)\cdot\frac{2x}{x^2-4}=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 2}\frac{(3x-6)\cdot 2x}{x^2-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\right.
$$

$$
\left.=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)\cdot 2x}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{6x}{x+2}=\frac{12}{4}=3\right|=e^3.
$$

Пример 3.2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{4}{3x^2}}$.

Решение. Имеем

$$
\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{4}{3x^2}}=\left(1^\infty\right)=\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2 x\right)^{\frac{4}{3x^2}}=
$$

$$
=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\left(-2\sin^2 x\right)\right)^{\frac{1}{-2\sin^2 x}}\right]^{-2\sin^2 x\cdot\frac{4}{3x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{8\sin^2 x}{3x^2}\right)}=
$$

$$
=e^{-\frac{8}{3}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}=e^{-\frac{8}{3}}.
$$

Пример 3.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+8}{3x+2}\right)^x$.

Решение. Имеем

$$
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+8}{3x+2}\right)^x=\left(1^\infty\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(3x+2)+6}{3x+2}\right)^x=
$$

$$
=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{6}{3x+2}\right)^{\frac{1}{\frac{6}{3x+2}}}\right]^{\frac{6}{3x+2}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x}{3x+2}}=e^2.
$$

Пример 3.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)\left(\ln(2x-1)-\ln(2x+3)\right)$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty}(x-1)\cdot\left(\ln(2x-1)-\ln(2x+3)\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{x-1}=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{x-1}=$$

$$=\left|\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{x-1}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{-4}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{-4}}\right]^{\frac{-4}{2x+3}\cdot(x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4x+1}{2x+3}}=e^{-2}\right|=$$

$$=\ln e^{-2}=-2.$$

Замечание. Отметим, что, например,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+3}{2x-1}\right)^{x}=\left(\frac{5}{2}\right)^{\infty}=\infty,\qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{5x+4}\right)^{x}=\left(\frac{3}{5}\right)^{\infty}=0.$$

Задание 6. Найти предел функции.

6.1. $\lim\limits_{x\to1}(3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$. 6.2. $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin 4x)^{\frac{5}{3x}}$.

6.3. $\lim\limits_{x\to0}(\cos 3x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$. 6.4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-7)\cdot\left(\ln(3x+4)-\ln 3x\right)$.

6.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+2}\right)^{\frac{x^2}{x+2}}$. 6.6. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-4)\cdot\left(\ln(2x-2)-\ln(2x+5)\right)$.

6.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3}{4x+6}\right)^{x-6}$. 6.8. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3)\cdot\left(\ln(x+2)-\ln(x-7)\right)$.

6.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{2x}$. 6.10. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+1)\cdot\left(\ln(x-2)-\ln(x+2)\right)$.

6.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+2x}{3+2x}\right)^{-x}$. 6.12. $\lim\limits_{x\to+\infty}(4x-2)\cdot\left(\ln(3x+8)-\ln(3x+4)\right)$.

6.13. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\operatorname{ctg}2x}$. 6.14. $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{4}{\sin 8x}}$.

6.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{3-2x}$. 6.16. $\lim\limits_{x\to 4}(9-2x)^{\frac{3}{x^2-16}}$.

6.17. $\lim\limits_{x\to 2}(\cos 5x)^{1/x^2}$. 6.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+1}$.

6.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}$. 6.20. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}4x)^{\frac{5}{x}}$.

6.21. $\lim\limits_{x\to 5}(6-x)^{\frac{3}{2x-10}}$. 6.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{-4x}$.

6.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{2x-3}$. 6.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x+2}\right)^{x-2}$.

6.25. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\arcsin 8x)^{\frac{4}{5x}}$. 6.26. $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{x^2-4}$.

6.27. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 5x)^{\frac{2}{\sin^2 x}}$. 6.28. $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{8+x}{x}}$.

6.29. $\lim\limits_{x\to+\infty}(4x-2)\cdot\left(\ln(5x+7)-\ln 5x\right)$.

6.30. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+4)\cdot\left(\ln 8x-\ln(8x-3)\right)$.

ТЕМА 4. НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ

Пример 4.1. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\frac{x-1}{x+3}.$$

Решение. Область определения данной функции $D(f)=\{x\mid x+3\neq 0\}=R\setminus\{-3\}$. Следовательно $x_0=-3$ – точка разрыва. Выясним характер точки разрыва. Имеем

$$\lim_{x\to-3-0}\frac{x-1}{x+3}=\left|\text{т.к. } x\to-3-0, \text{ то } x<-3\Rightarrow x+3<0\right|=\frac{-4}{-0}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to-3+0}\frac{x-1}{x+3}=\left|\text{т.к. } x\to-3+0, \text{ то } x>-3\Rightarrow x+3>0\right|=\frac{-4}{+0}=-\infty.$$

Следовательно, $x_0=-3$ – точка разрыва второго рода.

Пример 4.2. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}4x, & x\le 0,\\ \ln x, & 0<x\le 3,\\ x^2+4, & x>3.\end{cases}$$

Решение. Область определения данной функции $D(f)=R$. Поскольку функция задана различными выражениями, проверить на непрерывность надо точки «стыка», т.е. $x_1=0$, $x_2=3$.

Исследуем точку $x_1=0$. Здесь $f(0)=0$. Вычислим $\lim\limits_{x\to0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to0-0}4x=0$, $\lim\limits_{x\to0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to0+0}\ln x=-\infty$. Имеем $x_1=0$ – точка разрыва второго рода.

Исследуем точку $x_2=3$. Здесь $f(3)=\ln 3$. Вычислим $\lim\limits_{x\to3-0}f(x)=\lim\limits_{x\to3-0}\ln x=\ln 3$, $\lim\limits_{x\to3+0}f(x)=\lim\limits_{x\to3+0}\left(x^2+4\right)=13$.

Так как $\lim\limits_{x\to3-0}f(x)\ne\lim\limits_{x\to3+0}f(x)$, но эти пределы существуют и конечны, то $x_2=3$ - точка разрыва первого рода.

Пример 4.3. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}2^{\frac{5}{x+5}}, & x\le 0,\\ x^2+2, & 0<x<\pi,\\ \sin 4x, & x\ge\pi.\end{cases}$$

Решение. Область определения данной функции $D(f) = R \setminus \{-5\}$. Следовательно $x_1 = -5$ – точка разрыва.

Кроме этого, функция может иметь разрыв в точках «стыка» $x_2 = 0$, $x_3 = \pi$. Исследуем точку $x_1 = -5$. Вычислим

$$\lim_{x \to -5-0} f(x) = \lim_{x \to -5-0} 2^{\frac{5}{x+5}} = 2^{\frac{5}{-0}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to -5+0} f(x) = \lim_{x \to -5+0} 2^{\frac{5}{x+5}} = 2^{\frac{5}{+0}} = 2^{+\infty} = +\infty.$$

Следовательно, точка $x_1 = -5$ – точка разрыва второго рода.

Исследуем точку $x_2 = 0$. Имеем $f(0) = 2$. Вычислим

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} 2^{\frac{5}{x+5}} = 2, \quad \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \left(x^2 + 2\right) = 2.$$

Так как $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = f(0) = 2$, то $x_2 = 0$ – точка непрерывности.

Исследуем точку $x_3 = \pi$. Имеем $f(\pi) = 0$. Вычислим

$$\lim_{x \to \pi-0} f(x) = \lim_{x \to \pi-0} \left(x^2 + 2\right) = \pi^2 + 2,$$

$$\lim_{x \to \pi+0} f(x) = \lim_{x \to \pi+0} \sin 4x = \sin 4\pi = 0.$$

Так как $\lim\limits_{x \to \pi-0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to \pi+0} f(x)$, но эти пределы существуют и конечны, то $x_3 = \pi$ – точка разрыва первого рода.

Задание 7. Исследовать на непрерывность функцию.

7.1. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$. 7.2. $f(x) = \dfrac{9}{2 - x^2}$. 7.3. $f(x) = \dfrac{x-3}{|x-3|}$.

7.4. $f(x) = 3^{\frac{1}{x+1}}$. 7.5. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$. 7.6. $f(x) = arctg\,\dfrac{1}{2-x}$.

7.7. $f(x)=\begin{cases} x^2-2, & x<1, \\ 2x-3, & 1\le x\le 4, \\ e^{5x}, & x>4. \end{cases}$ 7.8. $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x<0, \\ x^2+4, & 0<x\le 5, \\ \dfrac{8}{10-2x}, & x>5. \end{cases}$

7.9. $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg} x, & x\le 1, \\ x^2+x+5, & 1<x\le 2, \\ 3^{\frac{1}{x-2}}, & x>2. \end{cases}$ 7.10. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{3}-x, & x\le 0, \\ 2^{\frac{1}{x-1}}, & x>0. \end{cases}$

7.11. $f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}+1.$ 7.12. $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg} x, & x\le 1, \\ x^2+x+5, & 1<x\le 2, \\ 3^{\frac{1}{x-2}}, & x>2. \end{cases}$

7.13. $f(x)=\begin{cases} -1, & x<0, \\ \cos x, & 0\le x\le \pi, \\ 1-x, & x>\pi. \end{cases}$ 7.14. $f(x)=5^{\frac{2}{x-3}}-1.$

7.15. $f(x)=\dfrac{x+2}{x-5}.$ 7.16. $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le 0, \\ 1, & 0<x\le 2, \\ x^2-2, & x>2. \end{cases}$

7.17. $f(x)=\begin{cases} 2, & x<-1, \\ 1-x, & -1\le x\le 1, \\ \ln x, & x>1. \end{cases}$ 7.18. $f(x)=\dfrac{3x}{x-4}.$

7.19. $f(x)=7^{\frac{1}{5-x}}+1.$ 7.20. $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le 0, \\ 1, & 0<x\le 2, \\ x^2-2, & x>2. \end{cases}$

7.21. $f\left(x\right)=\dfrac{x+5}{2x-7}.$

7.22. $f\left(x\right)=4^{\frac{2}{1-x}}-3.$

7.23. $f\left(x\right)=\begin{cases}x^3, & x<-1,\\ -x+5, & x>3\end{cases}.$

7.24. $f\left(x\right)=\dfrac{\left|x^2-4\right|}{x-2}.$

7.25. $f\left(x\right)=\begin{cases}1, & x\le 0,\\ 2^x, & 0<x\le 3,\\ x^3-2, & x>3.\end{cases}$

7.26. $f\left(x\right)=5^{\frac{4}{3-x}}+2.$

7.27. $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\le 0,\\ 0, & 0<x\le 4,\\ x-2, & x>4.\end{cases}$

7.28. $f\left(x\right)=\dfrac{x+1}{x^2-4}.$

7.29. $f\left(x\right)=\dfrac{\sin\left(x-3\right)}{x^2-9}.$

7.30. $f\left(x\right)=\dfrac{2x}{x^2-1}.$

ТЕМА 5. ПРОИЗВОДНАЯ. ПРАВИЛА И ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Пример. Найти производную функции $y=x^4\left(1-\dfrac{x}{5}+5x^5\right).$

Решение.

$$y'=\left(x^4\right)'\left(1-\frac{x}{5}+5x^5\right)+x^4\left(1-\frac{x}{5}+5x^5\right)'=4x^3\left(1-\frac{x}{5}+5x^5\right)+$$

$$+x^4\left(-\frac{1}{5}+25x^4\right)=4x^3-x^4+45x^8$$

Задание 8. Пользуясь таблицей производных и правилами дифференцирования найти производные следующих функций:

8.1. $y = x^3\left(x^4 - 3x^3 + 2x - 1\right)$.

8.2. $y = \dfrac{x}{10}\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{3x^3}\right)$.

8.3. $y = \sqrt{x} + \dfrac{5}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{5x^3}$.

8.4. $y = \dfrac{11}{3\sin x - 5\cos x}$.

8.5. $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

8.6. $y = \dfrac{4x^4}{\cos x}$.

8.7. $y = \dfrac{5x^2}{\sin x}$.

8.8. $y = \dfrac{4\sqrt{x}}{\mathrm{tg}x}$.

8.9. $y = \dfrac{x^3}{5+x^3}$.

8.10. $y = \dfrac{x^5}{3\cos x}$.

8.11. $y = \dfrac{\mathrm{tg}x}{5x^4}$.

8.12. $y = \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$.

8.13. $y = 4x^2\mathrm{ctg}x$.

8.14. $y = 3e^x\sin x$.

8.15. $y = \dfrac{1-\sqrt{x}}{\arcsin x}$.

8.16. $\dfrac{\mathrm{arctg}x}{\sqrt{x}}$.

8.17. $y = 5x^3\mathrm{ctg}x$.

8.18. $y = \dfrac{x^2-3}{x^2+3}$.

8.19. $y = \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$.

8.20. $y = e^x\left(x - 2\sqrt{x}\right)$.

8.21. $y = 3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x^3} + 4$.

8.22. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

8.23. $y = -3\cos x\cdot\mathrm{ctg}x$.

8.24. $y = \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)\ln x$.

8.25. $y = \dfrac{\ln x}{x^3+2}$.

8.26. $\left(x^2 - 2x\right)\mathrm{tg}x$.

8.27. $y = \dfrac{x^3+3}{\ln x}$.

8.28. $y = \dfrac{5x^2+1}{\ln x}$.

8.29. $y = \left(x^3 - \sqrt{x}\right)\mathrm{ctgx}$.

8.30. $y = \left(\dfrac{5}{2x^2} - \dfrac{2x^2}{5}\right)e^x$.

ТЕМА 6. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Пример. Найти производную функции $y = 3^{tg^4\left(x^2+5x\right)}$.
Решение.

$$y' = 3^{tg^4\left(x^2+5x\right)} \cdot \ln 3 \cdot 4tg^3\left(x^2+5x\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\left(x^2+5x\right)} \cdot \left(2x+5\right).$$

Задание 9. Найти производные сложных функций:

9.1. $y = \left(1+5x\right)^3$. 9.2. $y = \sin\left(5x+2\right)$. 9.3. $y = \cos x^2$.

9.4. $y = \mathrm{tg}^2 2x$. 9.5. $y = \sqrt[3]{2+x^5}$. 9.6. $y = \left(2+3x\right)^5$.

9.7. $y = \mathrm{ctg} 4x$. 9.8. $y = \cos\left(\sin x\right)$. 9.9. $\sin^3 x^5$.

9.10. $\arcsin\frac{x}{2}$. 9.11. $\mathrm{arctg}\frac{x}{5}$. 9.12. $y = 2^{\mathrm{ctg}^3\frac{1}{x}}$.

9.13. $y = \arcsin\left(\sin x\right)$. 9.14. $y = 5e^{-x^2}$. 9.15. $y = \ln \mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

9.16. $y = \ln \mathrm{arctg}\sqrt{x}$. 9.17. $y = \sin^3\left(x^2+3x+1\right)$.

9.18. $y = \ln\ln \mathrm{tg} x$. 9.19. $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$. 9.20. $y = \ln\sqrt{\sin x}$.

9.21. $y = \arccos\frac{x}{6}$. 9.22. $y = \left(\arcsin\sqrt{x}\right)^4$. 9.23. $y = 2^{\mathrm{tg}\frac{1}{x}}$.

9.24. $y = \ln \mathrm{arctg}\sqrt{1+x^2}$. 9.25. $y = \cos^5\left(3x^3+2x^2+2x-1\right)$.

9.26. $y = \ln\ln\sqrt{x}$. 9.27. $y = \ln^3 x^2$. 9.28. $y = \ln\ln\ln x$

9.29. $y = \arccos\sqrt{1-x^2}$. 9.30. $y = \mathrm{tg}^5\left(2-5x\right)$.

ТЕМА 7. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Пример. Найти производную функции $y = 3^{\frac{x}{\ln x}}$.

Решение. $y' = 3^{\frac{x}{\ln x}} \cdot \ln 3 \cdot \left(\dfrac{x}{\ln x} \right)' = 3^{\frac{x}{\ln x}} \cdot \ln 3 \cdot \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$.

Задание 10. Найти производные следующих функций.

10.1. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{1-x^2}$. 10.2. $y = \dfrac{e^{-x^2}}{1+e^{2x}}$. 10.3. $y = \ln \sqrt{\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}}$.

10.4. $y = \sin^3 2x \cdot \cos 8x^5$. 10.5. $y = \ln(x-3) \cdot \operatorname{arctg}^2 2x$.

10.6. $y = 2^{\sin x} \cdot \operatorname{arctg}^3 x$. 10.7. $y = 5^{-\sin x} \cdot \operatorname{arctg} 4x$.

10.8. $y = 3^{\cos x} \cdot \ln\left(x^2 - 2x + 8\right)$ 10.9. $y = 5^{-x^2} \cdot \arccos 4x^4$.

10.10. $y = \cos\left(\ln^3 3x\right) \cdot e^{-2x}$. 10.11. $y = (2x+3)^{11} \cdot \arccos \sqrt{3x}$.

10.12. $y = \operatorname{ctg}^3 4x \cdot \operatorname{arctg} 2x^3$. 10.13. $y = \cos \sqrt[5]{x} \cdot \operatorname{arcctg} x^5$

10.14. $\dfrac{2^{-\sin x}}{\arcsin^5 6x}$. 10.15. $y = \dfrac{\arcsin 7x^5}{(x-8)^{10}}$. 10.16. $y = \dfrac{(x-5)^3}{e^{\operatorname{arctg} 3x}}$.

10.17. $y = \dfrac{e^{\arccos 3x}}{\sqrt{x^2+3}}$. 10.18. $y = \dfrac{e^{-x^2}}{(2x+8)^{10}}$. 10.19. $y = \dfrac{e^{\sin 6x}}{(2-3x)^3}$.

10.20. $y = \dfrac{\sqrt{3x^2+2x-1}}{e^{5x}}$. 10.21. $y = \dfrac{e^{\operatorname{tg}x}}{\sqrt{x^2-5x-2}}$.

10.22. $y = \sqrt{\arccos 2x} \cdot 2^{-3x}$. 10.23. $y = (x-1)^2 \cdot 9\operatorname{arcctg}(x+7)$.

10.24. $y = \dfrac{\arcsin^2 4x}{\ln^2(2x+1)}$. 10.25. $y = \dfrac{2\ln(2x-5)}{(x+2)^5}$.

10.26. $y=\dfrac{\lg\left(x^2+2x\right)}{\left(x+1\right)^8}$. 10.27. $y=\dfrac{\left(x-8\right)^8}{\lg\left(2x-3\right)}$.

10.28. $y=\dfrac{5^{2x}}{2+\sqrt{2+5^{2x}}}$. 10.29. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\cos 3x}{1-\cos 3x}}$

10.30. $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-8}{x+8}}\cdot\arccos\left(3x+8\right)$.

ТЕМА 8. ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Пример. Найти производную функции $y=x^x$.

Решение. Применяя логарифмическое дифференцирование, находим:

$$\ln y=x\ln x;\quad \frac{y'}{y}=x'\ln x+x\left(\ln x\right)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1;$$
$$y'=y\left(\ln x+1\right)=x^x\left(\ln x+1\right).$$

Задание 11. Найти производные следующих функций:

11.1. $y=\left(\sin x\right)^x$. 11.2. $y=x^{\frac{1}{x}}$. 11.3. $y=\left(\cos x\right)^{\sin 2x}$.

11.4. $y=\left(\mathrm{ctg}x\right)^{x^3}$. 11.5. $y=\left(\cos x\right)^{x^2}$. 11.6. $y=\left(\sin 4x\right)^{2x}$.

11.7. $y=\sqrt{\dfrac{x\left(x-1\right)}{x-2}}$. 11.8. $y=x^{\mathrm{tg}x}$ 11.9. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x\left(1+x^2\right)}{\left(1-x\right)^2}}$.

11.10. $y=\dfrac{x^3\left(x^2+1\right)^2}{\sqrt{x\left(x-1\right)}}$. 11.11. $y=\dfrac{x\left(x^2+1\right)}{\sqrt{1-x^2}}$. 11.12. $y=x^{e^x}$.

11.13. $y=\left(\sin 3x\right)^{x^2+1}$. 11.14. $y=\left(\cos 2x\right)^{x^2}$. 11.15. $y=x^{e^{2x}}$.

11.16. $\left(\mathrm{ctg}2x\right)^{x^2}$. 11.17. $\left(\sin 5x\right)^{1+x^2}$. 11.18. $y=\left(\ln 5x\right)^{x}$.

11.19. $y=x^{\arcsin x}$. 11.20. $y=\left(\ln x\right)^{2x}$. 11.21. $y=x^{\mathrm{arctg}x}$.

11.22. $y=x^{\mathrm{ctg}x}$. 11.23. $y=\left(\cos 5x\right)^{x^2}$. 11.24. $y=\left(\mathrm{tg}x\right)^{2x}$.

11.25. $y=\dfrac{x\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2+3}}$. 11.26. $y=\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2x}$. 11.27. $y=\left(\mathrm{ctg}x\right)^{\sin x}$.

11.28. $y=x^{2\mathrm{tg}x}$. 11.29. $y=x^{e^{5x}}$. 11.30. $y=x^{\frac{1}{2x}}$.

ТЕМА 9. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ

Пример. Найти производную функции, заданной параметрически $x=10t,\quad y=t^2$.

Решение. Находим $x'_t=10,\ y'_t=2t$. По формуле $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$ находим производную $y'_x=\dfrac{2t}{10}=\dfrac{1}{5}t$.

Задание 12. Найти производные функций, заданных параметрически:

12.1. $x=t^2,\ y=t^3$. 12.2. $x=a\cos t,\ y=a\sin t$.

12.3. $x=t^3,\ y=t^3+t$. 12.4. $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$.

12.5. $x=t^2+2t,\ y=\ln\left(t+1\right)$. 12.6. $x=3\cos t,\ y=3\sin t$.

12.7. $x=a\cos t,\ y=b\sin t$. 12.8. $x=\cos^2 t,\ y=\sin^2 t$.

12.9. $x=a\sin t,\ y=a\cos t$. 12.10. $x=a\sin^3 t,\ y=a\cos^3 t$.

12.11. $x=2t,\ y=3t^2-5t$. 12.12. $x=\ln t,\ y=\sin 2t$.

12.13. $x=t\cos t,\ y=t\sin t$. 12.14. $x=a\left(1-\cos t\right),\ y=at$.

12.15. $x=t(1-\sin t),\ \ y=t\cos t$. 12.16. $x=e^{2t},\ \ y=\cos 2t$.

12.17. $x=e^{-t}\sin t,\ \ y=e^{t}\cos t$. 12.18. $x=\dfrac{a-t}{a+t},\ \ y=\dfrac{t}{a+t}$.

12.19. $x=t^3+3t+2,\ y=3t^5+5t^3+3$. 12.20. $x=t^2,\ y=\dfrac{t^3}{2-t}$.

12.21. $x=3\cos^3 3t,\ y=4\sin^2 t$. 12.22. $x=t^2+1,\ \ y=e^{t^2}$.

12.23. $x=t^2+t+1,\ \ y=t^3+t$. 12.24. $x=\sin\dfrac{t}{2},\ \ y=\cos t$.

12.25. $x=t-\sin t,\ \ y=1-\cos t$. 12.26. $x=\mathrm{ctg}t,\ \ y=\dfrac{1}{\cos^2 2t}$.

12.27. $x=t\cos t,\ \ y=3t\sin t$. 12.28. $x=\cos\dfrac{t}{2},\ \ y=t-\sin t$.

12.29. $x=\cos at,\ y=\sin at$. 12.30. $x=\mathrm{tg}t+\mathrm{ctg}t,\ y=3\ln\mathrm{ctg}t$.

ТЕМА 10. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Пример. Найти производную неявной функции

$$x^3-2x^2y^2+5x+y-5=0.$$

Решение. Дифференцируя по x обе части уравнения, получаем

$$3x^2-4xy^2-2x^2 2yy'+5+y'=0\text{, т. е. } y'=\frac{-3x^2+4xy^2-5}{1-4x^2y}.$$

Задание 13. Найти производные неявных функций.

13.1. $y^2-2x=0$ 13.2. $x^2+y^2-5=0$ 13.3. $\ln y-2x=0$.

13.4. $e^x+x+y=0$. 13.5. $xy^2-4=0$. 13.6. $\mathrm{arctg}y-y+x=0$.

13.7. $e^x+e^y-3^{xy}-1=0$. 13.8. $x^2+y^2-4x-10y+4=0$.

13.9. $5x^2y+3xy-2y^2+2=0$. 13.10. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

13.11. $\sqrt[x]{y} = \sqrt[y]{x}$. 13.12. $y = \operatorname{tg}(x+y)$.

13.13. $e^x - e^y = y - x$. 13.14. $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 3 = 0$.

13.15. $x^3 + y^3 - 4xy = 0$. 13.16. $y + \ln y = x + 3$.

13.17. $x^2 + 5xy + y^2 - 7 = 0$. 13.18. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{3}$.

13.19. $4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 2y + 10 = 0$.

13.20. $x^2 + 3xy + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$. 13.21. $y^2 + xy + \sin y = 0$.

13.22. $e^{-y} - e^y + 3xy = 0$. 13.23. $x^y - y^x = 0$.

13.24. $e^{xy} - x^3 - y^3 = 4$. 13.25. $xy - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} = 3$.

13.26. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} - 9 = 0$. 13.27. $2^x + 2^y = 2^{x+y}$.

13.28. $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$. 13.29. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{8} = 1$.

13.30. $3x^3 + \ln 3y - x^2 e^y = 0$.

ТЕМА 11. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пример 11.1. Исследовать на непрерывность функцию

Дана функция $y = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 7$.

Вычислить $f''(-1)$, $f''(0)$.

Решение. Находим общие выражения для производных первого и второго порядка:

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 4x - 5,$$

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = (4x^3 - 9x^2 + 4x - 5)' = 12x^2 - 18x + 4.$$

Подставляя в последнее выражение $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, получаем

$$f''(-1) = 34, \quad f''(0) = 4.$$

Пример 11.2. Дана функция $x = t^2, \quad y = t^3$. Найти вторую производную в точке $M_0(1;1)$.

Решение. Воспользуемся формулами

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \; y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} \Rightarrow x'_t = 2t, \quad y'_t = 3t^2 \Rightarrow y'_x = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2}t.$$

Имеем $\left(y'_x\right)'_t = \frac{3}{2}$, следовательно $y''_{xx} = \frac{\frac{3}{2}}{2t} = \frac{3}{4t}$.

При $x_0 = y_0 = 1$ получаем $t_0 = 1$. Тогда $y''_{xx}\Big|_M = \frac{3}{4 \cdot 1} = \frac{3}{4}$.

Пример 11.3. Вычислить значение второй производной неявной функции $e^x + x \cdot y = 0$ в точке $M(1, -e)$.

Решение. Находим производную первого порядка неявной функции, заданной уравнением $e^x + x \cdot y = 0$: $e^x + y + x \cdot y' = 0$.

Разрешая последнее уравнение относительно y', получаем $y' = -\frac{e^x + y}{x}$. Дифференцируя данное уравнение вторично, получаем

$$y'' = \left(-\frac{e^x + y}{x}\right)' = -\frac{\left(e^x + y'\right) \cdot x - \left(e^x + y\right)}{x^2}.$$

Имеем $x_0 = 1, \quad y_0 = -e$.

Находим $y'\big|_M$: $y'\big|_M = -\frac{e^1 - e}{1} = 0$.

Вычисляем $y''\big|_M = -\frac{\left(e^1 + 0\right) \cdot 1 - \left(e^1 - e\right)}{1^2} = -e$.

Задание 14. Вычислить значение второй производной в указанной точке.

14.1. $y = x^5 + 5^{2x}, \quad x_0 = 0.$

14.2. $y = x^2 \cdot \ln\frac{1}{x}, \quad x_0 = 1.$

14.3. $y = \ln ctg 4x, \quad x_0 = \frac{\pi}{16}.$

14.4. $y = \arccos\frac{2}{x}, \quad x_0 = 4.$

14.5. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \quad t_0 = \pi.$

14.6. $\begin{cases} x = e^{t^2}, \\ y = \sqrt{4 - t^2}, \end{cases} \quad t_0 = 1.$

14.7. $\begin{cases} x = t + \frac{1}{2}\sin 2t, \\ y = \cos^3 t, \end{cases} \quad t_0 = 0.$

14.8. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{2}.$

14.9. $tg\, y = x + 3y, \quad M(0,\ 0).$

14.10. $\begin{cases} x = t + \ln\cos t, \\ y = t - \ln\sin t, \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{4}.$

14.11. $x \cdot y^2 - 4 = 0, \quad M(1,\ 2).$

14.12. $\begin{cases} x = 2t - t^5, \\ y = t^3 - 8t - 1, \end{cases} \quad t_0 = 1.$

14.13. $x^2 + y^2 - 25 = 0, M(3,4).$

14.14. $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = e^{t^2}, \end{cases} \quad t_0 = 2.$

14.15. $f(x) = \frac{1 - 2x}{1 + \sqrt[3]{2x}}, \quad x_0 = 4.$

14.16. $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t, \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{4}.$

14.17. $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x}}, \ x_0 = 1.$

14.18. $f(x) = \ln\left(1 + 4^{-2x}\right), x_0 = 0.$

14.19. $f(x) = e^{-x} \cdot \cos 3x, \ x_0 = 0.$

14.20. $2y = 1 + xy^3, \ x_0 = 4, y_0 = 1.$

14.21. $ye^y = e^{x+1}, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1.$

14.22. $y = \ln\left(x^2 - 4\right), \quad x_0 = 3.$

14.23. $y=(x+y)^3-27(x-y),\quad x_0=2,\quad y_0=1.$

14.24. $y^2=x+\ln\left(\dfrac{y}{x}\right),\quad x_0=y_0=1.$

14.25. $e^y=4x-7y,\quad x_0=\dfrac{1}{4},\quad y_0=0.$

14.26. $arctg\, y=5x+4y,\quad x_0=\ y_0=0.$

14.27. $3y=7+xy^3,\quad x_0=-4,\quad y_0=1.$

14.28. $\ln y-\dfrac{y}{x}=2,\quad x_0=-\dfrac{1}{2},\quad y_0=1.$

14.29. $x^2y^2+x=5y,\quad x_0=y_0=0.$

14.30. $y^2-x=\cos y,\quad x_0=-1,\quad y_0=0.$

ТЕМА 12. КАСАТЕЛЬНАЯ И НОРМАЛЬ К ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

Пример 12.1. Составить уравнение касательной и нормали к линии $y=x^3-5x^2+10x-7$ в точке $M(1,-1)$.

Решение. Воспользуемся уравнениями касательной и нормали к плоской кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ соответственно:

$$y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0), \tag{12.1}$$

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0). \tag{12.2}$$

Находим производную $f(x)$: $f'(x)=3x^2-10x+10$.

Вычисляем значение $f'(x)$ в точке $x_0=1$: $f'(1)=3$.

Подставляя эти значения в формулы (12.1) и (12.2) (учитывая, что $y_0=-1$) получаем: $y-(-1)=3\cdot(x-1)$ или $3x-y-4=0$ – уравнение касательной; $y-(-1)=-\dfrac{1}{3}(x-1)$ или $x+3y+2=0$ – уравнение нормали.

Пример 12.2. Составить уравнение касательной к линии, заданной параметрическими уравнениями $x = t,\ \ y = t^2$ в точке $t_0 = 2$.

Решение. Имеем $x_0 = 2, \quad y_0 = 4$.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t};\ \ x'_t = 1,\ \ y'_t = 2t \Rightarrow y'_x = \frac{2t}{1} = 2t.$$

Вычисляем $y'(x_0) = 2 \cdot 2 = 4$. Составляем уравнения по формулам (12.1), (12.2):

$y - 4 = 4 \cdot (x - 1)$ или $4x - y = 0$ – уравнение касательной,

$y - 4 = -\frac{1}{4} \cdot (x - 1)$ или $x + 4y - 17 = 0$ – уравнение нормали.

Пример 12.3. Составить уравнения касательной и нормали к линии, заданной неявным уравнением $9x^2 + 4xy + 6y^2 - 8x + 16y - 50 = 0$ в точке $M(2;1)$.

Решение. Дифференцируем данное уравнение

$$18x + 4y + 4xy' + 12y \cdot y' - 8 + 16y' = 0.$$

Выражаем y': $\quad y' = \dfrac{8 - 18x - 4y}{4x + 12y + 16}$.

Вычисляем $y'\big|_M$ при $x_0 = 2,\ y_0 = 1$: $y'_M = -\dfrac{8}{9}$.

Составляем уравнения:

$y - 1 = -\frac{8}{9} \cdot (x - 2)$ или $8x + 9y - 25 = 0$ – уравнение касательной,

$y - 1 = \frac{9}{8} \cdot (x - 2)$ или $9x - 8y - 10 = 0$ – уравнение нормали.

Задание 15. Составить уравнения касательной и нормали к линии в заданной точке.

15.1. $y = 3x - x^2 + 7,\ M(5;-3)$. 15.2. $y = x^3 + 4x + 6,\ M(-1;1)$.

15.3. $y = x \cdot e^{-x}, \quad M(0;0)$. 15.4. $y = x + \ln(x^2 + 4),\ M(0;\ln 4)$.

15.5. $y=\cos^3 x,\ \ M\left(\pi;-1\right).$ 15.6. $y=\ln^2 x,\quad M\left(e;1\right).$

15.7. $\left(x+2\right)^2+\left(y-6\right)^2=34,\quad M\left(1;\ 1\right).$

15.8. $y=x^2-7x+3,\quad M\left(1;-3\right).$

15.9. $y^2+x\cdot y+\sin y=0,\ M\left(0;0\right).$

15.10. $x=t+1,\ \ y=\dfrac{1}{t-2},\ \ t_0=1.$ 15.11. $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases},\quad t_0=\pi.$

15.12. $y=4\sin 6x,\quad M\left(\dfrac{\pi}{2};4\right).$ 15.13. $\begin{cases} x=t^2+1 \\ y=e^{t^2} \end{cases},\quad t_0=2.$

15.14. $x^2+y^2-25=0,\ M\left(3;4\right).$ 15.15. $\begin{cases} x=\arcsin\dfrac{t}{2} \\ y=\sqrt{4-t^2} \end{cases},\ \ t_0=0.$

15.16. $2y=1+xy^3,\quad M\left(1;1\right).$ 15.17. $xy^2-2=0,\quad M\left(2;1\right).$

15.18. $y^2=25x-9,\quad M\left(1;4\right).$ 15.19. $\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=\sqrt[5]{t} \end{cases},\quad t_0=3.$

15.20. $y=x+\operatorname{arctg} y,\ \ M\left(1;1\right).$ 15.21. $\begin{cases} x=e^{-2t} \\ y=e^{4t} \end{cases},\quad t_0=1.$

15.22. $y=4e^y+4x,\ \ M\left(-1;0\right).$ 15.23. $\begin{cases} x=5\cos^2 t \\ y=3\sin^2 t \end{cases},\ \ t_0=\dfrac{\pi}{4}.$

15.24. $y^2+x^2=\sin y,\ M\left(0;0\right).$ 15.25. $\begin{cases} x=\arccos t \\ y=\sqrt{1-t^2} \end{cases},\ \ t_0=0.$

15.26. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2,\quad M\left(1;1\right).$ 15.27. $\begin{cases} x=6t^2-4 \\ y=3t^5 \end{cases},\quad t_0=1.$

15.28. $y=\sin\left(x^3+\pi\right), \quad x_0=\sqrt[3]{\pi}.$

15.29. $y=x\cdot\arccos x, \quad x_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

15.30. $x^2+y^2=\sin y, \qquad M\left(1;1\right).$

ТЕМА 13. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ–БЕРНУЛЛИ

Если $y=f\left(x\right)$ и $y=\varphi\left(x\right)$ – дифференцируемые бесконечно малые или бесконечно большие функции при $x\to a$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)}{\varphi\left(x\right)}=\lim_{x\to a}\frac{f'\left(x\right)}{\varphi'\left(x\right)}. \qquad (13.1)$$

Формулой (13.1) выражается **правило Лопиталя–Бернулли**.

Пример 13.1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\cdot\cos x-1}{x^2+5x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Раскроем эту неопределенность с помощью правила Лопиталя – Бернулли. По формуле (13.1) получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cdot\cos x-1}{x^2+5x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x\cdot\cos x-1\right)'}{\left(x^2+5x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cdot\cos x-e^x\cdot\sin x}{2x+5}=\frac{1}{5}.$$

Пример 13.2. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2e^x}{\left(x-1\right)^2}$.

Решение. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$ в этом примере, правило Лопиталя–Бернулли необходимо применить два раза

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-2e^x}{(x-1)^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\left(2x-2e^x\right)'}{\left((x-1)^2\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2-2e^x}{2(x-1)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\left(2-2e^x\right)'}{\left(2(x-1)\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{-2e^x}{2}=-1.$$

Пример 13.3. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^4}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(x^4\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{4x^3}=0$.

Пример 13.4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{e^{2x}-1}\right)$.

Решение. Это неопределенность вида $\infty-\infty$. Приведя выражение в скобках к общему знаменателю, получим неопределенность вида $\frac{0}{0}$, после чего применяем правило Лопиталя–Бернулли:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{e^{2x}-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-2x}{x\left(e^{2x}-1\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x}-1-2x\right)'}{\left(x\cdot\left(e^{2x}-1\right)\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-2}{e^{2x}-1+2x\cdot e^{2x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(2e^{2x}-2\right)'}{\left(e^{2x}-1+2x\cdot e^{2x}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}}{2e^{2x}+2e^{2x}+4x\cdot e^{2x}}=\frac{4}{4}=1.$$

Задание 16. Найти предел функции, пользуясь правилом Лопиталя–Бернулли.

16.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\cos 3x-e^{-x}}.$ 16.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}.$

16.3. $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left(4^{\frac{1}{x}}-1\right).$ 16.4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5^{\ln x}-x}{5\ln x}.$

16.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\mathrm{arctg}x}{x^3}.$ 16.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\mathrm{arctgx}^2-\pi}.$

16.7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{\mathrm{ctg}\pi x}.$ 16.8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{ctg}x-\dfrac{1}{\sin x}\right).$

16.9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{tg}x-\dfrac{1}{\cos x}\right).$ 16.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 5x}{\ln\sin 2x}.$

16.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}.$ 16.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin 5x)}.$

16.13. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}2x}.$ 16.14. $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\sin\left(\dfrac{3}{x}\right).$

16.15. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right).$ 16.16. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}.$

16.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{4x-\sin x}$.

16.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{\mathrm{tg}^2 2x}$.

16.19. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{3}{x^2-x-6}\right)$.

16.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$.

16.21. $\lim\limits_{x\to \pi}(\pi-x)\cdot\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$.

16.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{5-5e^{-3x}}$.

16.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos e^{x^2}-1}{\cos x-1}$.

16.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-2^{\sin x}}{x^3}$.

16.25. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\mathrm{tg}x}-1}{2\sin^2 x-1}$.

16.26. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x^3e^{-x}\right)$.

16.27. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x+7)}{\sqrt[7]{x-3}}$.

16.28. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-e^{2x}\right)\cdot\mathrm{ctg}x$.

16.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{\mathrm{tg}2x}$.

16.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi/x}{\mathrm{ctg}\frac{\pi x}{2}}$.

ТЕМА 14. ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

Пример 14.1. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x)=9x-3x^3$

Решение. Данная функция определена при всех $x\in(-\infty,+\infty)$. Производная этой функции $f'(x)=9-9x^2$ обращается в ноль в точках $x_1=-1,\ x_2=1$, которые делят область определения на три интервала: $(-\infty,-1),\ (-1,1),\ (1,+\infty)$.

Поскольку $f'(x)=9(1-x)(1+x)<0$ при $x<-1$, то функция убывает на промежутке $(-\infty,-1)$. Так как $f'(x)>0$ при $-1<x<1$, то функция возрастает на промежутке $(-1,1)$.

Аналогично устанавливаем, что на промежутке $(1,+\infty)$ функция убывает (ибо $f'(x)<0$ при $x>1$).

Пример 14.2. Найти экстремумы функции $f(x)=x^5-5x^4+5x^3+2$.

Решение. Производная данной функции $f'(x)=5x^4-20x^3+15x^2$ определена для всех x и обращается в ноль при $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=3$. Исследуем эти критические точки с помощью второй производной $f''(x)=20x^3-60x^2+30x$.

Поскольку $f''(1)=-10<0$, то $x_2=1$ – точка максимума; так как $f''(3)=90>0$, то $x_3=3$ – точка минимума.

В точке $x_1=0$ $f''(0)=0$, поэтому для исследования точки $x_1=0$ используем первое правило.

Так как $f'(x)>0$ при $-\infty<x<0$ и $f'(x)>0$ при $0<x<1$, то $x_1=0$ не является точкой экстремума.

Вычисляем значения экстремумов:

$$\max f(x)=f(1)=3,\quad \min f(x)=f(3)=-25.$$

Пример 14.3. Найти экстремумы функции $f(x)=\sqrt[3]{1-x^3}$.

Решение. Находим производную функции $f(x)=\left(1-x^3\right)^{\frac{1}{3}}$.

$f'(x)=\frac{1}{3}\left(1-x^3\right)^{1/3}\cdot\left(-3x^2\right)=-\frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}}$ и критические точки $x_1=0$, $x_2=1$.

(При $x_1 = 0$ $f'(x) = 0$, при $x_2 = 1$производная терпит разрыв).

Исследуем критические точки с помощью первого правила.

Так как $f'(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0;1) \cup (1; +\infty)$, то есть функция $f(x)$ убывает, то точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ не являются точками экстремума и, следовательно, данная функция не имеет экстремумов.

Пример 14.4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 12x + 5$ на отрезке $[0;3]$.

Решение. Находим производную функции: $f'(x) = 3x^2 - 12$ и критические точки $x_1 = -2$; $x_2 = 2$. Точка $x_1 = -2$ не принадлежит отрезку $[0;3]$.

Вычисляем значения функции в критической точке $x_2 = 2$ и на концах отрезка:

$$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 5 = -11; \; f(0) = 5; \; f(3) = 3^3 - 12 \cdot 3 + 5 = -4.$$

Следовательно, наименьшее значение функции на данном отрезке равно -11, а наибольшее равно 5.

Задание 17. Найти промежутки возрастания и убывания функции.

17.1. $f(x) = x^3 + 4x - 7.$

17.2. $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3.$

17.3. $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5.$

17.4. $f(x) = 5x^2 - x^4 - 6.$

17.5. $f(x) = x + \sqrt{x-1}.$

17.6. $f(x) = (x-4) \cdot \sqrt[3]{x^2}.$

17.7. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}.$

17.8. $f(x) = \ln\left|\dfrac{x+3}{x-3}\right|.$

17.9. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3+1}.$

17.10. $f(x) = \dfrac{1}{3} x\sqrt{x}.$

Задание 18. Найти экстремумы функции.

18.1. $f(x)=x^3-3x+5.$ 18.2. $f(x)=x^3+3x^2-4.$

18.3. $f(x)=x^4-10x^2+15.$ 18.4. $f(x)=13x^2-x^4+30.$

18.5. $f(x)=x^6-6x^4+9x^2.$ 18.6. $f(x)=x^2\cdot\ln x.$

18.8. $f(x)=\dfrac{\left(e^x-e^{-x}\right)}{2}.$ 18.8. $f(x)=x^3\cdot e^{-4x}.$

18.9. $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}.$ 18.10. $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4x+5}.$

Задание 19. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[a,\ b]$.

19.1. $f(x)=x^3+3x^2-6,\quad a=-2,\quad b=2.$

19.2. $f(x)=\dfrac{1}{x}+4x^2,\quad a=\dfrac{1}{4},\quad b=3.$

19.3. $f(x)=\dfrac{3-x^2}{x+2},\quad a=0,\quad b=4.$

19.4. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1},\quad a=-\dfrac{1}{2},\quad b=\dfrac{1}{2}.$

19.5. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+4},\quad a=-1,\quad b=3.$

19.6. $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x},\quad a=-\dfrac{1}{4},\quad b=\dfrac{1}{4}.$

19.7. $f(x)=x+\ln(x^2+4),\quad a=0,\quad b=3.$

19.8. $f(x)=2^{\frac{x}{\ln x}},\quad a=2,\quad b=2e.$

19.9. $f(x)=x\cdot e^x,\quad a=-2,\quad b=0.$

19.10. $f(x)=8x^2\cdot e^{-x^2},\quad a=-1,\quad b=1.$

Учебное издание

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ ДЛЯ СТУДЕНТОВ 1-го КУРСА

Составители:
ЕМЕЛИЧЕВА Елена Владимировна
ЛОШКАРЕВА Светлана Юрьевна
МАТВЕЕВА Людмила Дмитриевна

Подписано в печать 18.04.2011.
Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 2,21. Уч.-изд. л. 1,73. Тираж 200. Заказ 1042.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.