УДК 372.851

ПРИМЕНЕНИЕ IT-ТЕХНОЛОГИЙ В ПРЕПОДАВАНИИ ГЕОМЕТРИИ

Чернявская С.В., Коваленок Н.В., Арабей О.А.
Белорусский национальный технический университет,
Минск, Беларусь, iifomobntu@bntu.by

Информационные технологии являются одной из основ современного образовательного процесса. Сегодня школьники и студенты не могут обойтись без компьютера и интернета и их огромных возможностей по поиску и систематизации нужной информации во «всемирной копилке» научных знаний и достижений прогресса. Информатизация в овладении знаниями и навыками является важнейшим направлением модернизации системы образования, поскольку применение компьютерных технологий в обучении, и особенно в обучении техническим дисциплинам, позволяет качественным образом видоизменить процесс преподавания, усилить заинтересованность обучающихся, интенсифицировать и разнообразить занятия, усовершенствовать один из важнейших этапов обучения – самостоятельную работу с учебным материалом. От того, насколько интересно, продуктивно и динамично подан материал, напрямую зависит желание разобраться в нем, освоить и принять на вооружение.

Компьютерные технологии предоставляют огромные возможности в разработке современных сред управления процессом познавательной деятельности. Одним из составляющих компонентов такой среды является комплекс программных средств, обеспечивающих методическое сопровождение процессов обучения. Одним из направлений научно-методической деятельности кафедры естественнонаучных и творческих дисциплин БНТУ является разработка электронных учебных материалов и задачников для реализации программы дополнительного образования детей и молодежи в форме очно-заочной школы юных. Занятия в школе в основном проходят в форме индивидуального онлайн консультирования и во многом ориентированы на самостоятельное освоение больших объемов учебного материала. Сложным для изучения является раздел планиметрии, связанный со взаимным расположением окружностей и свойствами хорд и секущих. Нами разрабатывается электронное руководство по решению задач указанной тематики, в котором реализован авторский подход к решению, начинающийся с анализа условия и построения чертежа, что особенно важно для многовариантных задач. В качестве решения строится цепь рассуждений, наводящих вопросов и подсказок, подводящих ученика к принятию собственного решения на основе имеющихся у него знаний. В качестве примера можно привести следующие задания с уже готовыми чертежами и стратегией решения.

Задача 1. В треугольнике ABC угол B равен 90°, $AB = 4$. На стороне BC взята точка D так, что $BD = 1$. Окружность радиуса $\frac{\sqrt{5}}{2}$ проходит через точки B и D и касается в точке B окружности, описанной около треугольника ABC. Найдите радиус большей окружности.

Решение.

Пусть S – центр меньшей, O – центр большей из окружностей. Верно ли, что $O \in AC$, причем $AO = OC = OB = R_{ABC}$? Какие свойства прямоугольного треугольника были при этом применены?

Проведите прямую BO. *Запомните, что при внутреннем касании двух окружностей прямая, соединяющая точку касания с центром большей окружности, всегда проходит через центр меньшей.*

Задача сводится к нахождению гипотенузы AC треугольника ABC, для чего нужно сначала найти катет BC. Чтобы его найти, проведите прямую $SK \perp BD$ и рассмотрите треугольник BSD. Докажите, что он равнобедренный, и найдите SK – медиану и высоту треугольника

BSD (вспомните, что по условию $BS = \frac{\sqrt{5}}{2}$). Получилось ли у вас $SK = 1$? Если нет, вспомните свойства равнобедренного треугольника и теорему Пифагора.

А теперь вычислите $\mathrm{tg}\angle SBK$ ($\mathrm{tg}\angle SBK = \frac{SK}{BK} = 2$); докажите подобие треугольников BSD и BOC; найдите $\mathrm{tg}\angle OCB$ ($\angle OCB = \angle SBK$) и из треугольника ABC найдите BC (используйте тот факт, что отношение противолежащего катета к прилежащему равно тангенсу угла):

$$BC = \frac{AB}{\mathrm{tg}\angle OCB} = 2.$$

Теперь легко найти AC ($AC = 2\sqrt{5}$) и $AO = \frac{1}{2}AC = R_{ABC}$. Получим $R_{ABC} = \sqrt{5}$.

Ответ: $\sqrt{5}$.

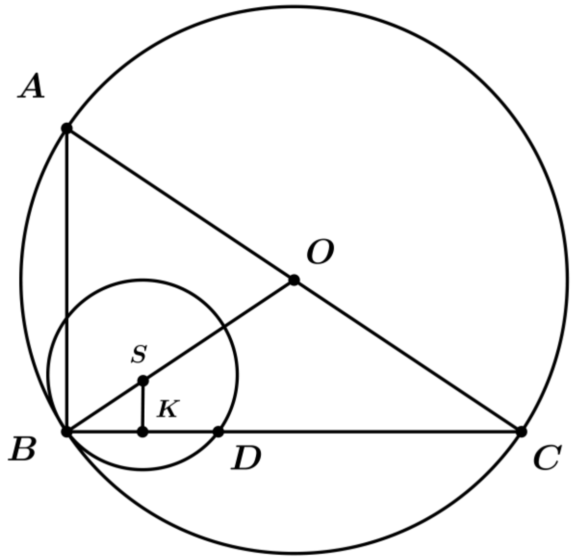

Рисунок 1

Задача 2. Две окружности с радиусами 2 и 6 касаются внешним образом и имеют общую касательную, не проходящую через точку касания данных окружностей. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными окружностями и их общей касательной.

Решение.

Сделайте рисунок самостоятельно, обозначьте центры большей и меньшей окружностей через O_1 и O_2, точки касания окружностей и внешней касательной – через A и B.

Площадь заштрихованной фигуры найдем как разность площадей трапеции ABO_2O_1 и секторов AO_1M и BO_2M.

Для нахождения площади трапеции ABO_2O_1 проведем прямую $O_1C \parallel AB$ ($C \in O_2B$); $O_2C = 6 - 2 = 4$. Рассмотрите треугольник O_1O_2C и найдите O_1C ($O_1C = 4\sqrt{3}$); объясните, почему $O_1C = AB$.

Теперь найдите площадь трапеции ABO_2O_1 ($S_{ABO_2O_1} = 16\sqrt{3}$).

Для нахождения площадей круговых секторов AO_1M и BO_2M вспомним формулу $S_{\text{сект.}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360°}$ и найдем центральные углы AO_1M и BO_2M. Объясните, почему $\angle CO_1O_2 = 30°$ (вспомните, что $CO_2 = 4$, $O_1O_2 = 8$).

Верно ли, что $S_{\text{сект.}AO_1M} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 120°}{360°} = \frac{4\pi}{3}$, а $S_{\text{сект.}BO_2M} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 60°}{360°} = 6\pi$?

Найдите разность площадей трапеции и двух секторов.

Получилось $S_{\text{фигуры}} = 16\sqrt{3} - \left(\frac{4\pi}{3} + 6\pi\right) = \frac{2}{3}\left(24\sqrt{3} - 11\pi\right)$ кв.ед.

Ответ: $\frac{2}{3}\left(24\sqrt{3} - 11\pi\right)$ ед^2.

Задача 3. В равнобедренной трапеции лежат две окружности. Одна из них, радиуса 1, вписана в трапецию, а вторая касается двух сторон трапеции и первой окружности. Расстояние от вершины угла, образованного двумя сторонами трапеции, касающимися второй окружности, до точки касания окружностей вдвое больше диаметра второй окружности. Найти площадь трапеции.

Решение.

Возможны два варианта расположения вписанной в угол окружности.

1) Рассмотрите первый случай, когда окружность с центром O_1 вписана в тупой угол BCD или CBA (заметим, что это равные углы, так как трапеция равнобедренная).

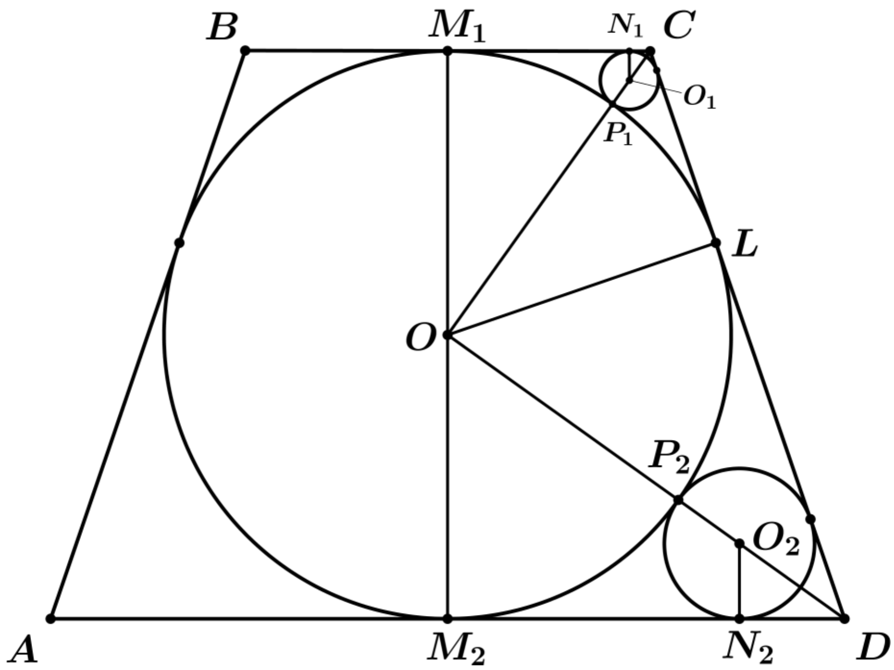

Рисунок 2

Запомните, что *при внешнем касании двух окружностей центры данных окружностей и точка касания всегда лежат на одной прямой*.

Пусть $O_1P_1 = r_1$. По условию $\frac{CP_1}{2O_1P_1} = 2$, следовательно, $CP_1 = 4O_1P_1 = 4r_1$.

Рассмотрите треугольник O_1N_1C: $O_1C = 3r_1$, $O_1N_1 = r_1$.

Вычислите $\operatorname{tg}\angle O_1CN_1$ $\left(\operatorname{tg}\angle O_1CN_1 = \frac{r_1}{3r_1} = \frac{1}{3}\right)$.

Вспомните табличные значения тангенса углов: $\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{3}$ $\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30°\right) \Rightarrow \angle O_1CN_1 < 30°, \angle BCD < 60°$, т.е. является острым, значит, окружность с центром O_1 не удовлетворяет условию задачи.

2) Рассмотрите второй случай, когда окружность с центром O_2 вписана в острый угол CDA или BAD.

Пусть $O_2P_2 = r_2$. Рассмотрите треугольники OM_2D и O_2N_2D (вспомните признаки подобия треугольников).

Можно заключить, что $\Delta OM_2D \sim \Delta O_2N_2D$ (по двум углам).

Подставляя значения, получаем $\frac{1}{r_2} = \frac{4r_2+1}{3r_2} \Rightarrow 3r_2 = r_2(4r_2 + 1)$. Решив уравнение, получим $r_2 = \frac{1}{2}$.

Далее найдите $OD = 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 3$.

В треугольнике OM_2D примените теорему Пифагора для нахождения M_2D: $M_2D = \sqrt{8} \Rightarrow AD = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$.

Вспомните, что отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны (т.е. $M_2D = DL$) и тот факт, что если трапеция описана около окружности, то треугольники COD и BOA прямоугольные.

Теперь рассмотрите треугольник COD: $OL^2 = DL \cdot LC$ (свойство высоты в прямоугольном треугольнике), т.е. $1 = \sqrt{8} \cdot LC \Rightarrow LC = CM_1 = \frac{1}{\sqrt{8}}$.

Вспомните формулу площади трапеции

$$S_{\text{тр.}} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot M_1M_2 = \frac{1}{2}\left(4\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{8}}\right) \cdot 2 = \frac{9\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ ед^2.

Задача 4. На отрезках $AB = 4$ и $AC = 2$, угол BAC между которыми равен 120°, как на диаметрах, построены окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно. Найдите наибольший среди радиусов окружностей, вписанных в фигуру, образовавшуюся при пересечении этих окружностей.

Решение.

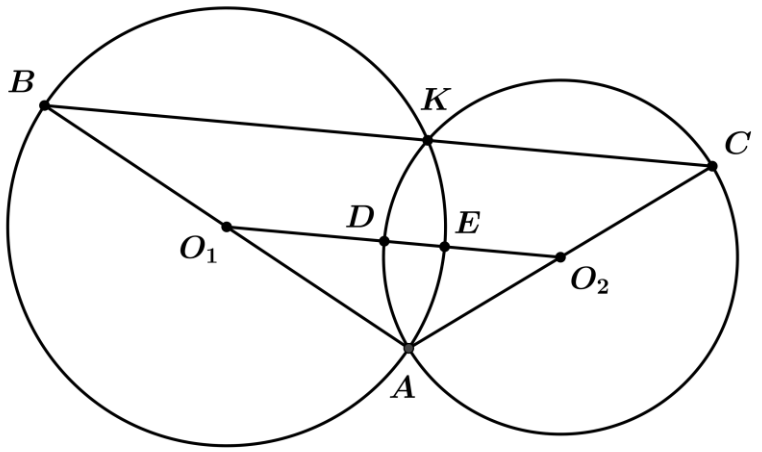

Рисунок 3

Исходя из условия задачи, постройте окружности с центрами O_1 и O_2, где $R_1 = \frac{AB}{2} = 2, R_2 = \frac{AC}{2} = 1$. Точка A будет являться общей точкой двух окружностей (отрезок AK называется общей хордой двух пересекающихся окружностей).

Рассмотрите треугольник O_1AO_2 и вспомните теорему косинусов, т.е. $O_1O_2 = \sqrt{2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{7}$.

Центр наибольшей окружности, вписанной в фигуру, образовавшуюся при пересечении окружностей, будет лежать на отрезке DE (почему?), где D и E – точки пересечения окружности и отрезка O_1O_2.

Теперь легко найти искомый радиус $R = \frac{DE}{2}$:

$DE = O_1E - O_1D = O_1E - (O_1O_2 - O_2D) = 2 - \sqrt{7} + 1 = 3 - \sqrt{7}$. Значит, $R = \frac{3-\sqrt{7}}{2}$.

Ответ: $\frac{3-\sqrt{7}}{2}$.

Задача 5. Внешняя касательная двух окружностей радиусов 5 и 2 в 1,5 раза больше их внутренней касательной. Определите расстояние между центрами этих окружностей.

Решение.

Если одна окружность лежит вне другой, то окружности имеют четыре общих касательных: две из них называются внутренними (одна из них на нашем чертеже обозначена CD), две другие общие касательные – внешние (одна из них на чертеже AB). Подумайте, как могут располагаться две другие касательные. Если обозначить отрезок $CD = x$, тогда $AB = \frac{3}{2}x$.

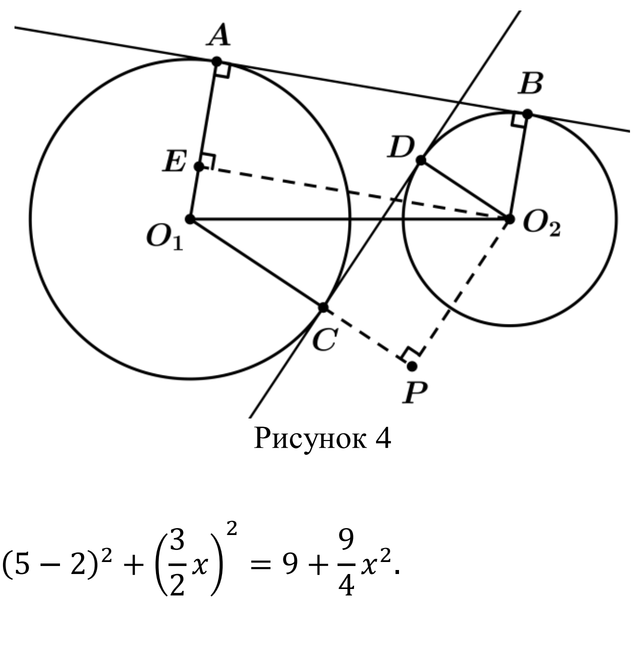

Рисунок 4

Опустите из точки O_2 перпендикуляр на AO_1 (O_1A – радиус большей окружности). $O_2E \parallel AB$ по построению. Примените теорему Пифагора для треугольника O_1EO_2:

$$(O_1O_2)^2 = (O_1E)^2 + (EO_2)^2 = (5-2)^2 + \left(\frac{3}{2}x\right)^2 = 9 + \frac{9}{4}x^2.$$

Затем из центра O_2 проведите прямую, параллельную CD, (данная прямая пересечет O_1C в точке P).

Теперь примените теорему Пифагора для треугольника O_1PO2.

$$(O_1O_2)^2 = (O_1P)^2 + (PO_2)^2 = (5+2)^2 + x^2 = 49 + x^2.$$

Составьте уравнение, приравняв отрезки O_1O_2, полученные из двух треугольников:

$$(O_1O_2)^2 = 9 + \frac{9}{4}x^2 = 49 + x^2 \Rightarrow x^2 = 32.$$

Тогда

$$(O_1O_2)^2 = 49 + 32 = 81 \Rightarrow O_1O_2 = 9.$$

Ответ: 9.

Решая любую задачу нашего пособия, учащийся может самостоятельно построить чертеж, пользуясь электронными аналогами чертежных принадлежностей или получить уже готовый рисунок на экране при затруднениях с самостоятельным построением. Далее решение организовано таким образом, что появляется на экране постепенно, в форме советов, вопросов или небольших подсказок, причем его можно приостановить или полностью исключить, оставив промежуточные ответы, которые покажут, в правильном ли направлении двигается ученик при автономном решении. При таком подходе расширяются возможности и виды учебной деятельности по усвоению новых знаний и способов действий. Учащийся получает, по сути, индивидуальный урок-исследование с помощью обучающей программы, которая дает возможность развивать навыки самостоятельной исследовательской деятельности. Рекомендуется решать задания в предложенном порядке, переходя от уже решенной задачи к следующей, более сложной. Все задачи логически связаны, используют общую методику, теоретические сведения и алгоритмы решения. При обнаружении проблем, с которыми ученик не в состоянии справиться самостоятельно, он может прибегнуть к помощи преподавателя кафедры в режиме онлайн консультации.

В заключение отметим, что применение информационных технологий в обучении геометрии способствует повышению качества знаний, усилению интереса к поисковой, творческой и исследовательской деятельности, расширяет горизонты школьной математики, а следовательно, помогает найти новые перспективы для более внимательного и творческого отношения к предмету, обеспечивает доступность получения лучшего образования любому ученику, независимо от места его проживания относительно крупных образовательных центров.

Список литературы:

1. Азаров, А. И. Математика: тематический тренажер: планиметрия: для подготовки к централизованному тестированию / А. И. Азаров. – Минск : «Аверсэв», 2008. – 112 с.
2. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / В. К. Егерев [и др.] ; под ред. М. И. Сканави. – 6-е изд. – М. : ООО «Издательство Оникс», 2009. – 608 с.
3. В.В.Амелькин, В.Л. Рабцевич, В.Л. Тимохович «Геометрия на плоскости. Теория, задачи, решения. Учебное пособие по математике» – Москва, Изд-во «Оникс, 21 век», 2003. – 590 с.
4. Шлыков, В.В. «Геометрия. Учебное пособие для 9 класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения» – Мн., Народная асвета, 2012. – 165 с.
5. Орехова, А.И. «Задачи на готовых чертежах. Геометрия в 3-х частях. Часть 3» – Мозырь, Белый ветер, 2011. – 59 с.
6. И.Г. Арефьева, И.Ю. Семина, Т.В. Ячейко «Повторяем математику за курс базовой школы. Пособие для учащихся 9-10 классов» – Минск : «Аверсэв», 2011. – 399 с.
7. А.И. Азаров, В.И. Булатов, А.И. Жук и др. «Математика. Пособие для подготовки к централизованному тестированию» – Минск : «Аверсэв», 2012. – 495 с.