Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

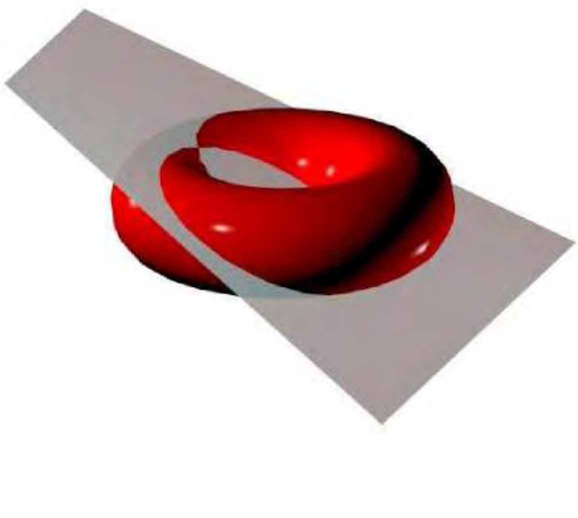
Кафедра «Инженерная графика строительного профиля»

# НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

*Конспект лекций*

**В 2 частях**

**Часть 1**



**Минск 2009**

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Инженерная графика строительного профиля»

# НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

*Конспект лекций*

В 2 частях

Ч а с т ь 1

## МЕТОД МОНЖА. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

М и н с к 2 0 0 9

УДК 515.18(075.8)
ББК 22.151.3я7
Н 36

А в т о р ы:
*Ю.И. Садовский*, *М.Н. Петрович*,
*В.В. Тарасов*, *Е.А. Телеш*

Под редакцией В.В. Тарасова

Р е ц е н з е н т ы:
В.А. Столер, П.В. Зеленый

Н 36 Начертательная геометрия: конспект лекций: В 2 ч. / Ю.И. Садовский [и др.]. – Минск: БНТУ, 2009. – Ч. 1: Метод Монжа. Позиционные задачи». – с.

ISBN 978-985-525-125-6 (Ч.1).

Настоящий конспект лекций разработан коллективом авторов кафедры «Инженерная графика строительного профиля» и предназначен для студентов строительных специальностей.

В нем рассмотрены основные теоретические вопросы курса начертательной геометрии в соответствии с многолетней практикой работы кафедры и увязкой с методикой проведения практических занятий, решены многие типовые задачи, вызывающие у студентов наибольшие трудности.

УДК 515.18(075.8)
ББК 22.151.3я7

ISBN 978-985-525-125-6 (Ч.1)
ISBN 978-985-525-317-5

# ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Точки в пространстве – прописные буквы латинского алфавита *A*, *B*, *C* или цифры 1, 2, 3 … .

Произвольные линии в пространстве – строчные буквы латинского алфавита *a*, *b*, *c* … .

Прямые, параллельные плоскостям проекций – горизонтали *h*, фронтали *f*, профильные прямые *p*.

Плоскости общего положения, поверхности – заглавные буквы греческого алфавита Ψ, Ω, Σ … .

Плоскости проекций – буква греческого алфавита П с добавлением нижнего индекса 1,2,3…

Основные плоскости проекций: горизонтальная $\Pi_1$, фронтальная $\Pi_2$, профильная $\Pi_3$.

Проекции точек, прямых и плоскостей на чертеже обозначаются теми же буквами, что и в пространстве, с добавлением подстрочного индекса 1, 2, 3, соответствующего плоскости проекций, на которой они получены.

Обозначение основных операций:

совпадение отмечается знаком $\equiv$;

взаимная принадлежность – знаком $\subset$;

пересечение отмечается знаком $\cap$;

результат построения (логическое следствие) – знаком $\Rightarrow$.

Лекция 1

# 1. ВВЕДЕНИЕ В НАЧЕРТАТЕЛЬНУЮ ГЕОМЕТРИЮ

Роль, предмет и основные задачи начертательной геометрии. Метод проекций и его виды. Ортогональное параллельное проецирование. Метод Монжа. Комплексный чертеж точки

## 1.1. Роль, предмет и основные задачи курса начертательной геометрии

Геометрия (греч. γη — Земля, μετρηω — мерить) является разделом математики, изучающим пространственные отношения объектов материального мира и их обобщения.

В геометрии выделяют несколько разделов.

Элементарная геометрия — геометрия точек, прямых и плоскостей, а также фигур на плоскости и тел в пространстве. Включает в себя планиметрию и стереометрию. Традиционно считается, что родоначальниками геометрии являются древние греки, перенявшие у египтян ремесло землемерия и измерения объёмов тел и превратившие его в науку. Превращение это произошло путем абстрагирования от всяких свойств тел, кроме взаимного положения и величины. Наукой геометрия стала, когда началось установление общих закономерностей. Греки составили первые систематические и доказательные труды по геометрии. Центральное место среди них занимают составленные около 300 лет до н.э. «Начала» Евклида. Этот труд и поныне остаётся образцовым изложением аксиоматического метода — все положения выводятся логическим путём из небольшого числа явных и недоказываемых предположений — аксиом. Геометрия греков, называемая сегодня евклидовой, занималась изучением простейших форм: прямых, плоскостей, отрезков, правильных многоугольников и многогранников, конических сечений, а также шаров, цилиндров, призм, пирамид и конусов.

Проблема полной аксиоматизации элементарной геометрии — одна из проблем геометрии, возникшая в Древней Греции и связанная с попыткой построить полную систему аксиом так, чтобы все утверждения евклидовой геометрии следовали из этих аксиом чисто логическим выводом. Первую такую полную систему аксиом создал Д. Гильберт в 1899 г, она состоит из 20 аксиом, разбитых на 5 групп.

Средние века не много дали геометрии, следующим великим событием в ее истории стало открытие Декартом в XVII веке координатного метода. Точкам сопоставляются наборы чисел, это позволяет изучать отношения между формами с помощью методов алгебры. Так появилась аналитическая геометрия. Аналитическая геометрия — геометрия координатного метода. Изучает линии, векторы, фигуры и преобразования, которые задаются алгебраическими уравнениями в аффинных или декартовых координатах, методами алгебры.

Одновременно Паскалем и Дезаргом было начато исследование свойств плоских фигур, не меняющихся при проектировании с одной плоскости на другую. Этот раздел геометрии получил название проективной геометрии. Метод координат лежит в основе появившейся несколько позже дифференциальной геометрии, где фигуры и преобразования задаются в координатах, но уже произвольными достаточно гладкими функциями. Дифференциальная геометрия изучает линии и поверхности, задающиеся дифференцируемыми функциями, а также их отображения.

Дифференциальная геометрия возникла и развивалась в тесной связи с математическим анализом, который сам в значительной степени вырос из задач геометрии. Многие геометрические понятия предшествовали соответствующим понятиям анализа. Так, например, понятие касательной предшествовало понятию производной, понятие площади и объема — понятию интеграла и т.д.

Возникновение дифференциальной геометрии относится к XVIII веку и связано с именами Эйлера и Монжа. Первое сводное сочинение по теории поверхностей написано Монжем («Приложение анализа к геометрии», 1795 г.). В 1827 Гаусс опубликовал работу «Общее исследование о кривых поверхностях», в которой заложил основы теории поверхностей. С тех пор дифференциальная геометрия перестала быть только приложением анализа и заняла самостоятельное место в математике.

Огромную роль в развитии всей геометрии, в том числе и дифференциальной, сыграло открытие неевклидовых геометрий – в первую очередь гиперболической геометрии (геометрии Лобачевского) и эллиптической (геометрии Римана).

Геометрия Лобачевского — геометрическая теория, основанная на тех же основных посылках, что и обычная евклидова геометрия, за исключением аксиомы о параллельных прямых (так называемого пятого постулата Евклида), которая заменяется на гиперболическую аксиому о параллельных прямых (аксиому Лобачевского). Теория создана и разработана Н. И. Лобачевским, который впервые сообщил о ней 23 февраля 1826. Ранее независимо от него и друг от друга к аналогичным выводам приходили Карл Гаусс и Янош Бойяи, но их труды не получили своевременной известности.

Риманова геометрия — это раздел дифференциальной геометрии, главным объектом изучения которого являются римановы многообразия. Родоначальником римановой геометрии является немецкий математик Бернхард Риман, который изложил её основные понятия в 1854 году.

В ряду геометрических наук особое место занимает начертательная (дискриптивная) геометрия – один из разделов геометрии, особенностью которого, отличающей его от других направлений геометрической науки, является графический метод отображения и исследования геометрических задач и закономерностей с помощью чертежа, т.е. в начертательной геометрии именно чертеж является основным средством, с помощью которого изучаются свойства фигур.

Исключительное значение чертежа в начертательной геометрии обусловливает ряд требований, предъявляемых к нему.

Наиболее существенными из них являются следующие:

1) обратимость – свойство чертежа (изображения), позволяющее по нему однозначно восстановить действительную форму и размеры предмета, а также его положение в пространстве;

2) наглядность – свойство чертежа, дающее возможность легко составить по нему пространственное представление о предмете;

3) единство условностей, принятых при выполнении изображения: они должны быть такими, чтобы каждый человек мог прочесть чертеж, выполненный другим лицом;

4) геометрическая равноценность с оригиналом, т.е. чертеж должен обеспечивать возможность выполнения на изображении тех же геометрических операций, которые выполнимы на самом предмете.

5) точность графических решений.

Содержание курса начертательной геометрии сводится к следующим основным задачам.

1. Исследование и изучение законов перехода от пространственного представления геометрических фигур к ее планиметрическому изображению (чертежу) на плоскости.

2. Исследование и изучение законов воспроизведения в пространстве элементов геометрической формы по данному планиметрическому изображению (чертежу).

3. Изучение и исследование методов графического решения пространственных задач с помощью изображений (чертежей).

В связи с этим определение предмета начертательной геометрии можно сформулировать так: начертательная геометрия является математической наукой о методах построения плоских геометрических моделей трехмерного пространства и способах решения задач геометрического характера (позиционных, метрических и конструктивных) с их помощью.

Позиционными задачами называются задачи на взаимную принадлежность и пересечение геометрических тел, метрическими – на определение натуральных величин линейных или угловых параметров фигур. Построение геометрических тел, отвечающих заданным условиям, составляет содержание конструктивных задач.

Геометрических фигур много, однако к основным (базовым) фигурам геометрического пространства относятся обычно всего лишь три: точка, прямая и плоскость. Геометрическим пространством в геометрии принято называть совокупность однородных объектов. Чаще всего оно состоит из множества точек, прямых и плоскостей. В зависимости от особенностей объектов геометрическое пространство наделяется различными свойствами. Так, евклидово пространство использует систему аксиом Евклида–Гильберта.

Любая геометрическая фигура любой степени сложности может быть представлена как совокупность базовых фигур: точки могут быть вершинами, прямые – ребрами, отсеки плоскостей – гранями. Часть плоскости, ограниченная лежащей в ней замкнутой линией, называется отсеком.

## 1.2. Метод проекций и его виды

Законы перехода от пространственного представления о предмете к его плоскому изображению (чертежу) и от чертежа к натуральным формам предмета в пространстве составляют суть метода проекций. Чертежи, построенные с помощью этого метода, называют проекционными.

Метод проекций предполагает наличие плоскости, на которой строится изображение – плоскости проекций, геометрической фигуры, проецирующих лучей.

Построение проекционного изображения фигуры сводится к двум основным операциям – проецирование и сечение.

Операция проецирования состоит в замене оригинала геометрической фигуры совокупностью проецирующих прямых, проходящих через центр проекций $S$.

Операция сечения состоит в пересечении пучка проецирующих лучей плоскостью проекций, т.е. получению плоского сечения.

Проекции, полученные при помощи пучка проецирующих лучей, выходящих из одной точки – центра проекций, называются центральными или коническими. Изображения предметов, построенные в центральных проекциях, ближе всего к действительному зрительному восприятию, т.к. соответствуют физике человеческого зрения. Но на таких изображениях многие элементы предмета искажаются. Центральные проекции широко применяются в архитектуре, аэрофотогеодезии.

При удалении центра проецирования в бесконечность проецирующие лучи будут взаимно параллельны. Проекции, полученные при помощи параллельных проецирующих лучей, называются параллельными или цилиндрическими и являются частным видом центральных проекций.

Для того, чтобы получить изображение точки на плоскости необходимо через нее провести проецирующий луч и найти точку пересечения его с плоскостью проекций (рис. 1.1). Это изображение называется проекцией точки.

$$A' = l \cap \Pi'.$$

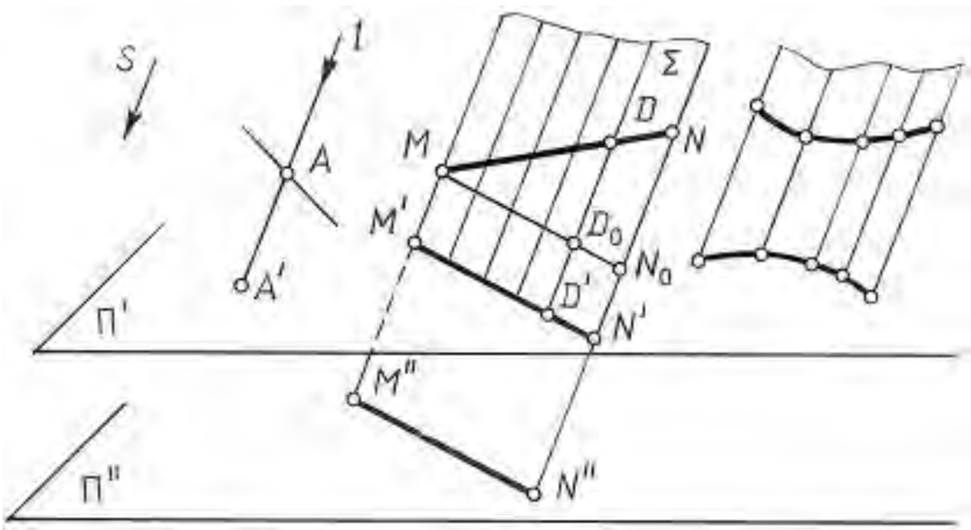


Рис. 1.1

В зависимости от угла между проецирующими лучами и плоскостью проекций параллельные проекции делятся на прямоугольные и косоугольные.

Если направление проецирующего луча изменить, то на той же плоскости П′ можно построить множество проекций одной и той же точки. Очевидно, что для того, чтобы одной точке пространства отвечало единственное изображение, надо задать определенное направление проецирующего луча.

Если направление проецирования перпендикулярно П' – прямоугольное, если не перпендикулярно – косоугольное.

Параллельные проекции предмета вместе с осями прямоугольных координат, к которым отнесен предмет, называют аксонометрическими (или параллельной аксонометрией). Аксонометрические изображения являются достаточно наглядным изображением предмета, на них размеры предметов искажаются в меньшей степени, чем в центральных.

Параллельная прямоугольная проекция предмета на плоскость называется ортогональной проекцией, при этом направление проецирования перпендикулярно плоскости проекций. Ортогональные проекции в свою очередь являются частным случаем параллельных проекций. Эти проекции являются основным методом построения изображений во всех отраслях техники благодаря простоте построений и измерений по ним.

В геодезии и топографии находят применение проекции с числовыми отметками, представляющие собой параллельные прямоугольные проекции на одну плоскость, при этом каждая проекция точки снабжается числом, характеризующим удаление точек изображаемого предмета от плоскости проекций.

Кроме указанных выше четырех видов проекционных изображений, получивших наибольшее распространение в большинстве отраслей техники, существуют специальные виды проекций, появление которых связано со специфическими требованиями, отсутствующими в рассмотренных типах проекций.

К их числу относятся стереографические (в картографии), векторные или федоровские (в горном деле и кристаллографии), а также применяемые в этих же областях циклографические проекции.

Для определения положения предмета в пространстве, т.е. получения обратимого чертежа, в разных видах проекций необходимы дополнительные условия, например, наличие еще одной или даже двух дополнительных проекций.

Чертеж, состоящий из нескольких связанных между собой проекций фигуры, называется комплексным чертежом. Если присутствуют две проекции, чертеж называется двухкартинным, если одна – однокартинным.

Перспективные, аксонометрические проекции и проекции с числовыми отметками относятся к однокартинным чертежам, ортогональные же проекции являются двухкартинными чертежами.

Рассмотрение методов проецирования начнем с ортогонального параллельного проецирования, являющегося основой построения современных технических изображений.

### 1.3. Ортогональное параллельное проецирование

Для того, чтобы построить параллельную проекцию геометрической фигуры, необходимо через каждую ее точку провести проецирующие лучи, параллельные заданному направлению, и найти точки их пересечения с плоскостью проекций.

Отметим некоторые основные свойства параллельных проекций.

1. Проекция точки – точка.

2. Проекция прямой в общем случае является прямой (рис. 1.1). В частном случае, если направление прямой совпадает с направлением проецирования, проекция прямой – точка.

Множество проецирующих лучей, проходящих через точки прямой, будет представлять собой плоскость, которую называют проецирующей.

Пересечение проецирующей плоскости с плоскостью проекций и есть проекция прямой.

Совокупность проецирующих лучей может представлять собой и проецирующую поверхность – цилиндрическую или призматическую, если направление образующих поверхности совпадает с направлением проецирования.

3. Если точка принадлежит прямой, то и ее проекция принадлежит проекции этой прямой.

4. Отношение отрезков прямой равно отношению проекций этих отрезков. Свойство следует из подобия треугольников $MNN_0$ и $MDD_0$ (где $MN_0 // M'N'$).

5. Проекции параллельных прямых параллельны, а длины их находятся в том же соотношении, что и длины самих отрезков (рис. 1.2).

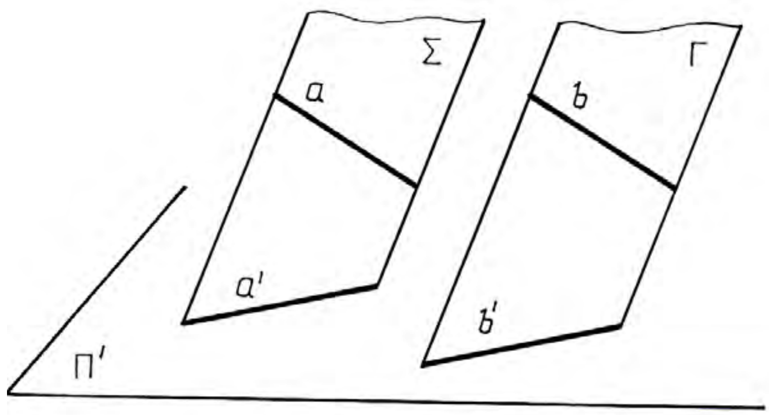



Рис. 1.2

Поскольку проецирующие плоскости Σ и Г параллельны, то и линии пересечения их плоскостью проекций – тоже параллельны, т.е. $a // b \Rightarrow a' // b'$.

6. При параллельном перемещении плоскости проекций величина проекции прямой не меняется. На рис. 1.1 параллельные плоскости П' и П'' пересекаются плоскостью Σ по параллельным прямым.

7. Любая фигура, расположенная в плоскости, параллельной плоскости проекций, проецируется на эту плоскость в натуральную величину.

## 1.4. Метод Монжа. Комплексный чертеж точки

Способ построения обратимого чертежа на основе ортогонального параллельного проецирования был предложен французским ученым Гаспаром Монжем.

Для построения проекций геометрической фигуры выбираются две взаимно перпендикулярные плоскости проекций, одна из которых вертикальна, вторая – горизонтальна.

Обозначение этих плоскостей проекций:

$\Pi_1$ – горизонтальная плоскость проекций;

$\Pi_2$ – фронтальная плоскость проекций.

Линия их пересечения $OX$ называется осью координат (абсцисс).

Эти две плоскости делят все пространство на 4 части или четверти. Порядок отсчета дан на рис. 1.3.

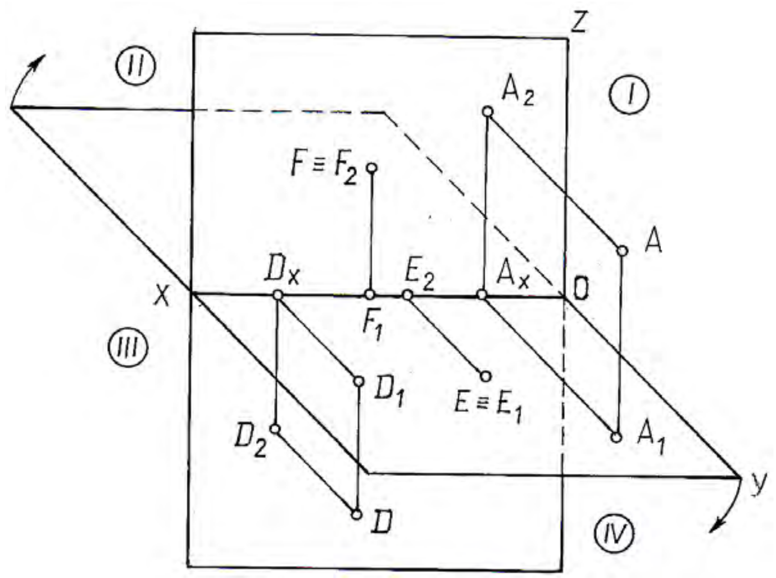



Рис. 1.3

Направление проецирования при этом принимают перпендикулярным соответствующей плоскости проекций.

Спроецируем некоторую точку $A$ на плоскости $\Pi_1$ и $\Pi_2$, получим проекции $A_1$ – горизонтальную, $A_2$ – фронтальную.

Проецирующие прямые $AA_1$ и $AA_2$ будут определять проецирующую плоскость, перпендикулярную $\Pi_1$ и $\Pi_2$, а, следовательно, и $OX$, отсюда $A_1A_x \perp XO$ и $A_2A_x \perp XO$.

Отрезок $A_1A_x = AA_2$ показывает расстояние точки до плоскости $\Pi_2$, отрезок $A_2A_x = AA_1$ – до плоскости $\Pi_1$.

Если заданы проекции $A_1$ и $A_2$ точки $A$, то по ним можно найти единственную точку $A$ пространства. Для этого из каждой проекции к плоскостям проекций $\Pi_1$ и $\Pi_2$ надо восставить перпендикуляры, которые пересекутся в единственной точке $A$. Итак, две проекции вполне определяют положение геометрической фигуры в пространстве, а следовательно, могут заменить эту фигуру.

Для того, чтобы получить плоский чертеж или эпюр (от фр. epure), совместим плоскость $П_1$ с плоскостью $П_2$, вращая $П_1$ вокруг оси $XO$ по направлению, указанному на чертеже. В результате совмещения плоскостей проекций получим эпюр Монжа, или комплексный чертеж точки, состоящий из двух проекций $A_1$ и $A_2$, которые будут лежать на одной прямой, перпендикулярной оси $XO$ (рис. 1.4).

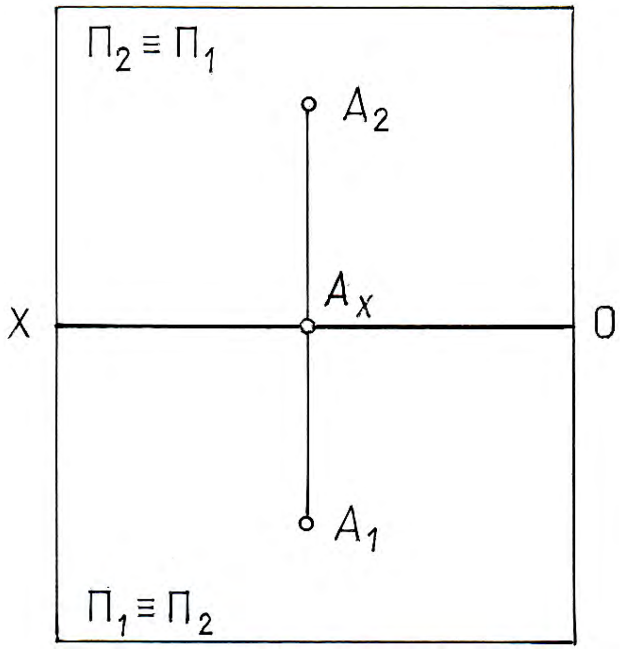



Рис. 1.4

Таким образом, под методом Монжа понимается параллельное ортогональное проецирование фигуры на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций, одна из которых вертикальна, а вторая горизонтальна, с последующим поворотом горизонтальной плоскости на 90° до совмещения с вертикальной.

Линия $A_1A_2$, соединяющая на чертеже две проекции одной и той же точки, называется линией связи. $A_1A_2 \perp XO$.

Такой чертеж является обратимым, т.к. повернув плоскость $П_1$ в обратном направлении и произведя операции, обратные проецированию, восстановим единственное положение точки $A$.

Необходимо отметить, что сама точка-оригинал на чертеже отсутствует. Ортогональное проецирование точки пространства на взаимно перпендикулярные плоскости проекций и последующее совмещение этих плоскостей с одной плоскостью чертежа создает комплексный чертеж, являющийся плоскостной моделью пространства и обладающий всеми свойствами самостоятельного пространства.

В зависимости от положения точки в пространстве ее эпюр будет видоизменяться. Так, если точка во второй четверти, то на чертеже ее проекции располагаются выше оси *XO* (рис. 1.5). Эпюр точки, расположенной в третьей четверти показан на рис. 1.6, в четвертой – на рис. 1.7.

Если же она принадлежит плоскости $П_1$ – рис. 1.8, или $П_2$ – рис. 1.9, оси *XO* – рис. 1.10.

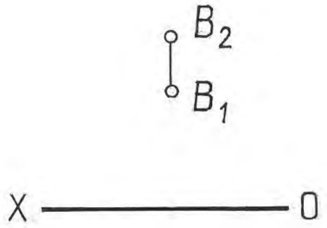



Рис. 1.5

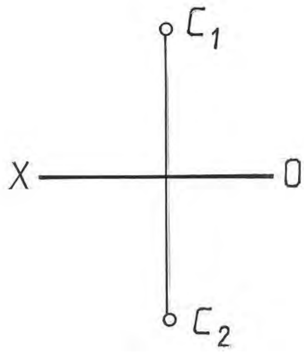



Рис. 1.6

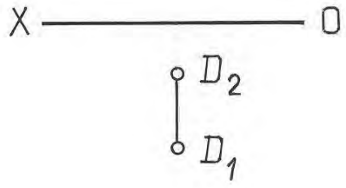



Рис. 1.7

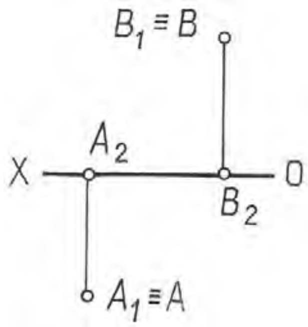



Рис. 1.8

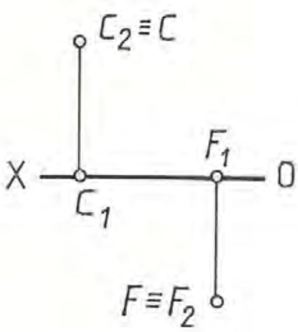



Рис. 1.9

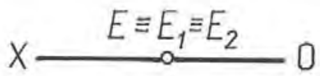



Рис. 1.10

Таким образом, зная, как расположены проекции точки относительно оси *XO*, можно по чертежу определить, в какой четверти расположена точка и насколько она удалена от плоскостей проекций.

В некоторых случаях для обеспечения большей наглядности проекций и облегчения понимания формы предмета прибегают к использованию третьей плоскости проекций. Эта плоскость, перпендикулярная к двум имеющимся, называется профильной и обозначается $П_3$. Три плоскости проекций делят пространство на восемь трехгранных углов, называемых октантами, порядок нумерации которых приведен на рис. 1.11.

Показанные на этом рисунке координатные оси *OX*, *OУ* и *OZ* имеют положительные направления. Они соответствуют правой или европейской системе расположения проекций. Ось *OX* направлена от начала координат влево, *OУ* – вперед к наблюдателю, *OZ* – вверх. Обратные направления координатных осей считают отрицательными.

При построении комплексного чертежа в системе трех плоскостей горизонтальная плоскость проекций совмещается с фронтальной плоскостью проекций так, как указано выше, а профильная плоскость совмещается с фронтальной вращением против часовой стрелки вокруг оси Z ( если смотреть сверху).

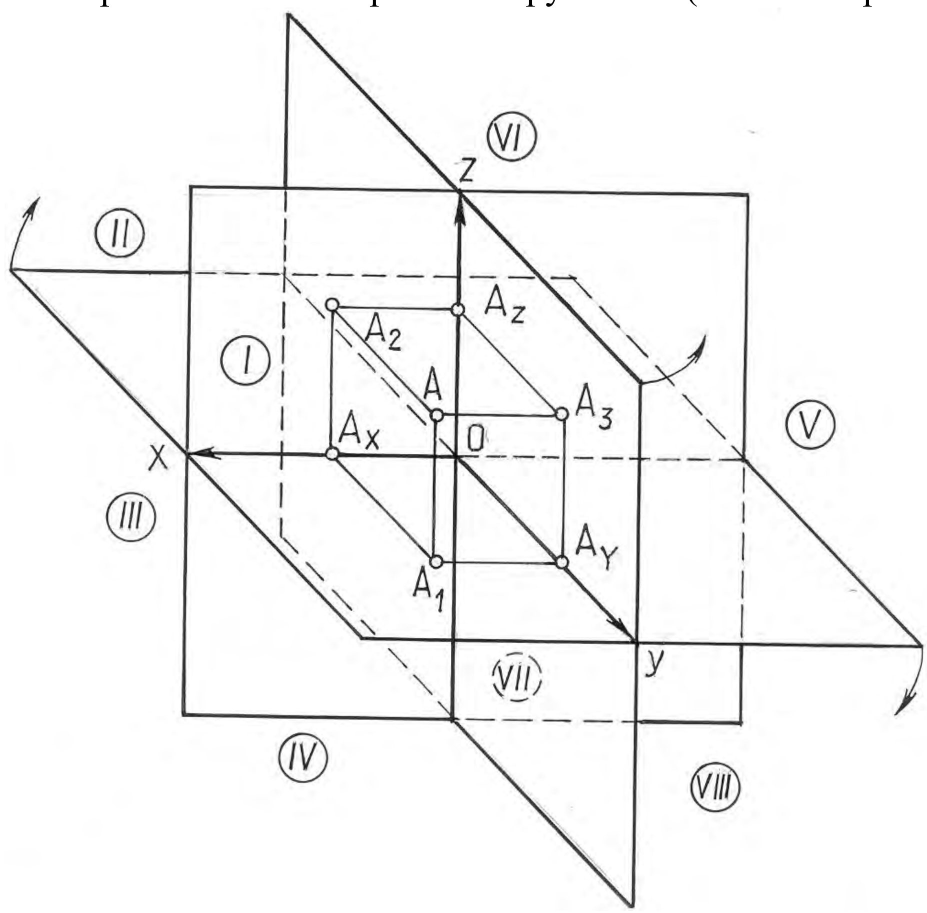



Рис. 1.11

Несмотря на то, что точки могут располагаться в разных октантах, для простоты построения чертежей обычно пользуются только первым октантом.

Комплексный чертеж точки, лежащей в 1-м октанте, в системе трех проекций показан на рис. 1.12. По нему видно, что по двум любым ортогональным проекциям точки можно построить третью проекцию этой точки. Комплексный чертеж в системе трех проекций является трехкартинным.

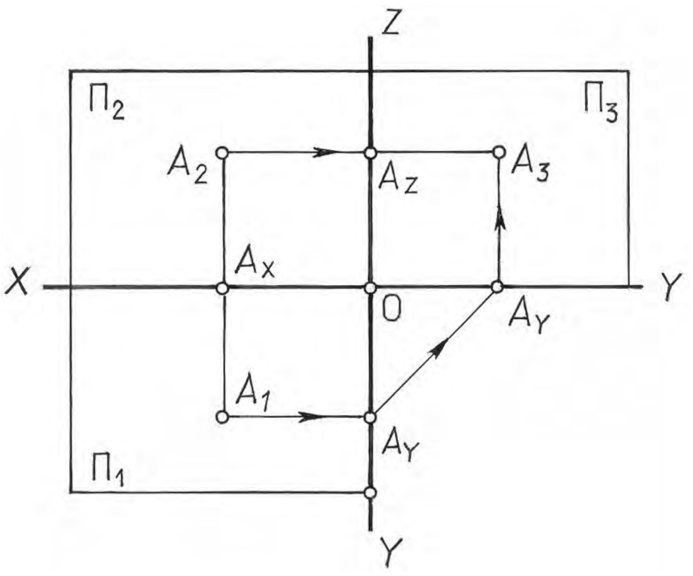



Рис. 1.12

На комплексном чертеже положение точки в пространстве определяется при помощи отрезков прямых, графически показывающих расстояние от точки до соответствующей плоскости проекций. Длины этих отрезков, измеренные установленной единицей длины, называют координатами точки.

Расстояние от точки до плоскости $\Pi_1$ $A_2A_x = A_3A_y = Z$ – аппликата.

Расстояние от точки до плоскости $\Pi_2$ $A_1A_x = A_3A_z = Y$ – ордината.

Расстояние от точки до плоскости $\Pi_3$ $A_2A_z = A_1A_y = X$ – абсцисса.

Три координаты точки в совокупности составляют определитель точки, условная запись которого $A$ $(X, Y, Z)$. Положение соответствующей проекции точки определяют две координаты.

Фронтальную проекцию на плоскости $\Pi_2$ определяют координаты $X$ и $Z$ – $A_2$ $(X, Z)$; горизонтальную проекцию на плоскости $\Pi_1$ – координаты $X$ и $Y$ – $A_1$ $(X, Y)$; профильную проекцию на плоскости $\Pi_3$ – координаты $Y$ и $Z$ – $A_3$ $(Y, Z)$.

Две точки, которые принадлежат одному проецирующему лучу, называют конкурирующими. На рис. 1.13 это точки $C$ и $M$, лежащие на одной горизонтально проецирующей прямой. Они могут использоваться для определения видимости элементов.

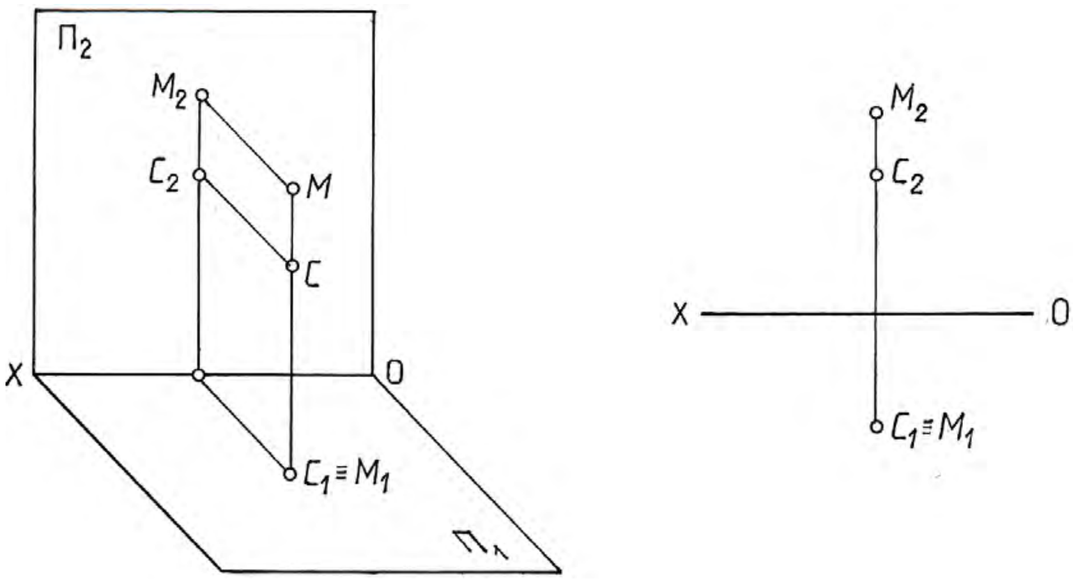



Рис. 1.13

Из двух горизонтально-конкурирующих точек на горизонтальной проекции видима та, которая в пространстве расположена выше.

Это означает, что для того, чтобы определить видимость горизонтально-конкурирующих точек, необходимо через точку, в которой совпадают горизонтальные проекции, провести вертикальную линию связи до пересечения с фронтальными проекциями этих точек. Видимой на горизонтальной проекции будет та точка, фронтальная проекция которой будет выше. На рис. 1.13 на виде сверху видимой является точка *M*.

Из двух фронтально-конкурирующих точек на фронтальной плоскости проекций будет видна та, которая расположена ближе к наблюдателю, стоящему лицом к фронтальной плоскости проекций.

Поэтому, чтобы определить видимость конкурирующих точек на фронтальной проекции, необходимо через точку, в которой совпадают их фронтальные проекции, провести вертикальную линию связи до пересечения с горизонтальными проекциями этих точек. Видимой на фронтальной проекции будет та точка, горизонтальная проекция которой будет удалена дальше от плоскости $П_2$.

Лекция 2

# 2. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ КАК ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Проекции прямой. Прямые общего и частного положения. Следы прямой. Относительное положение двух прямых. Плоскость. Способы задания плоскости

## 2.1. Проекции прямой линии

Прямая линия в пространстве определяется двумя точками, а так как проекция прямой – прямая, то на чертеже она может быть задана проекциями двух ее точек (рис. 2.1).

Очевидно, что пара проекций прямой $a_1$ и $a_2$ определяет в пространстве единственную прямую. Действительно, если $a_1 = \Sigma \cap \Pi_1$ и $a_2 = \Gamma \cap \Pi_2$ , то $a = \Sigma \cap \Gamma$ (рис. 2.2).

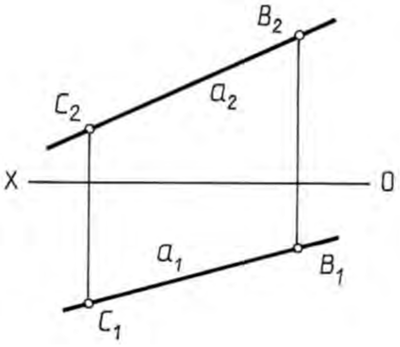



Рис. 2.1

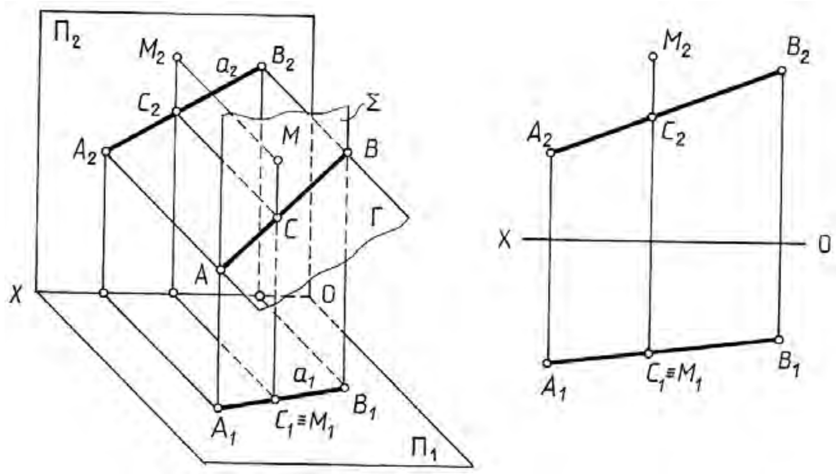



Рис. 2.2

Если точка принадлежит прямой, то ее горизонтальная проекция будет принадлежать горизонтальной проекции прямой, а фронтальная проекция – фронтальной проекции прямой (см. рис. 2.2), т.е. $A_1 \subset a_1$, $A_2 \subset a_2$ и $A_1A_2 \perp XO$. Если же хотя бы одна проекция точки не совпадает с соответствующей проекцией прямой, то данная точка не принадлежит прямой.

На рис. 2.2 точка $M$ не принадлежит отрезку $AB$, т.к. ее фронтальная проекция $M_2$ не принадлежит фронтальной проекции отрезка $A_2B_2$.

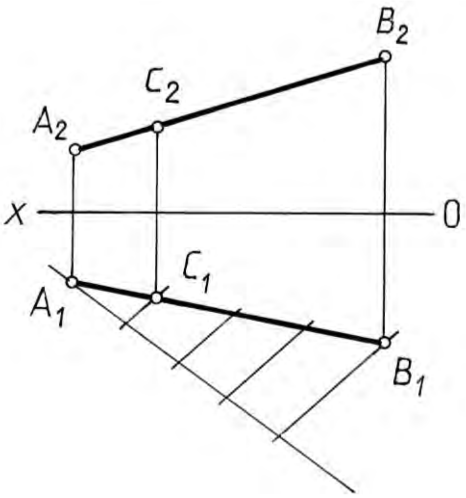



Рис. 2.3

Точка, лежащая на прямой, делит ее в том же соотношении, в каком проекции точки делят соответствующие проекции прямой. Согласно этому свойству параллельного проецирования $AC : CB = A_1C_1 : C_1B_1$, но и $AC : CB = A_2C_2 : C_2B_2$, тогда $A_1C_1 : C_1B_1 = A_2C_2 : C_2B_2$ (рис. 2.3). Следовательно, для того, чтобы найти на чертеже проекцию точки, которая в пространстве делит отрезок $AB$ в отношении 1 : 3, достаточно разделить только одну проекцию.

В зависимости от положения прямых относительно плоскостей проекций сами прямые делятся на прямые общего и частного положения.

Прямые общего положения наклонены ко всем плоскостям проекций, частного – параллельны одной или двум плоскостям проекций.

Прямые, параллельные одной плоскости проекций, называются прямыми уровня, параллельные двум и, как следствие, перпендикулярные третьей плоскости проекций – проецирующими.

Чертеж прямой частного положения отличается от чертежа прямой общего положения. На рис. 2.4 показана прямая $a$, параллельная горизонтальной плоскости проекций – горизонталь. Ее определяющим признаком является фронтальная проекция, расположенная параллельно оси $X$. Таким образом, если прямая $h$ // $П_1$, то $h_2$ // $OX$.

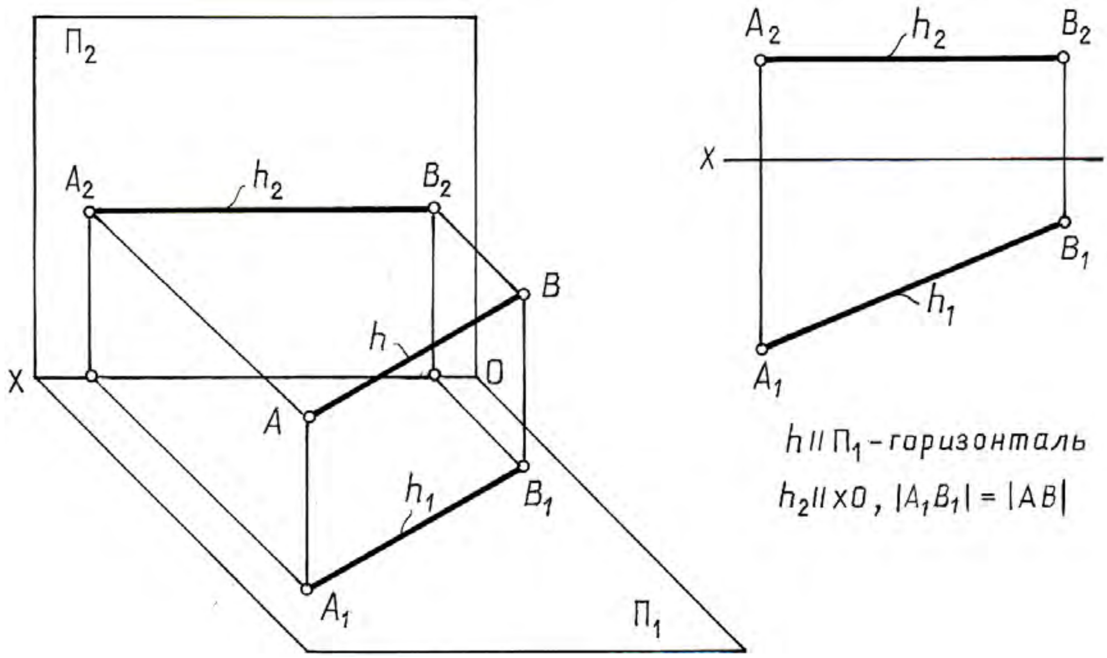



Рис. 2.4

На рис. 2.5 показана вторая часто встречающаяся линия частного положения – фронталь, которая параллельна плоскости $П_2$. Ее горизонтальная проекция параллельна оси $OX$.

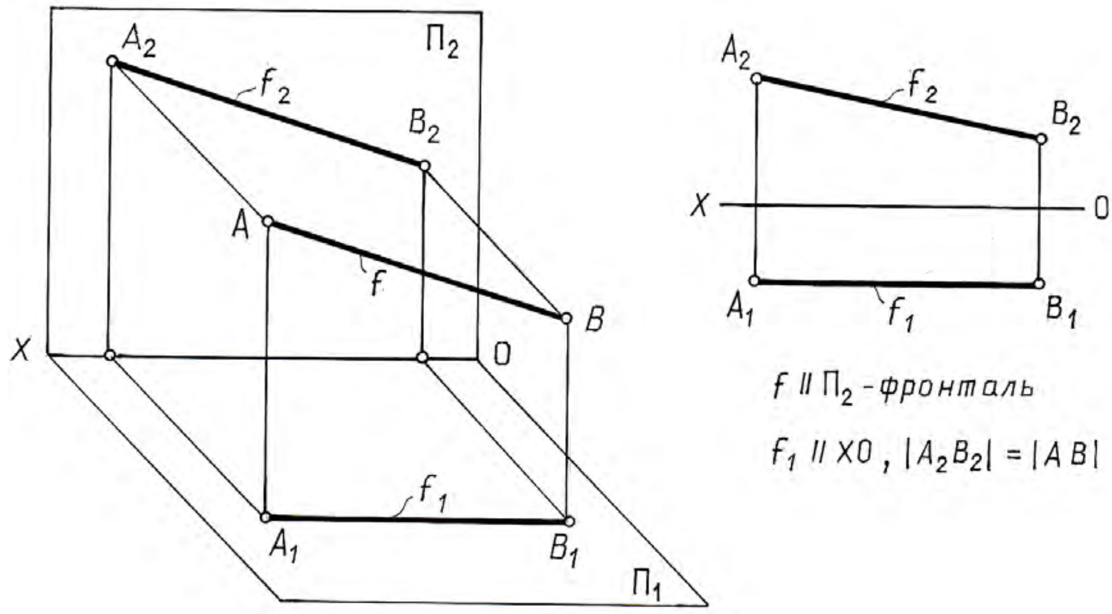


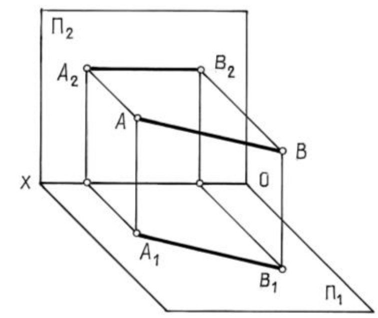
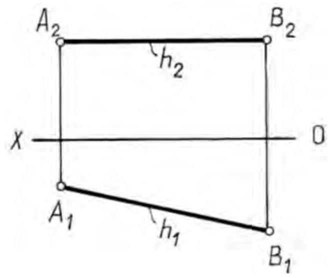
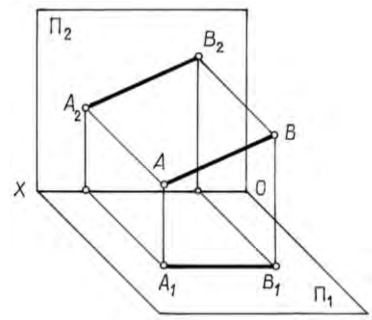
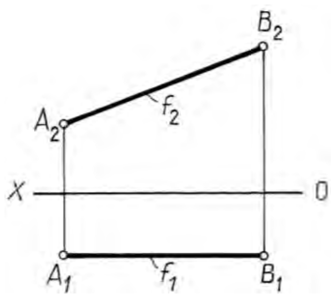
Рис. 2.5

Следовательно, если прямая $f$ // $\Pi_2$, то ее горизонтальная проекция $f_1$ // $OX$.

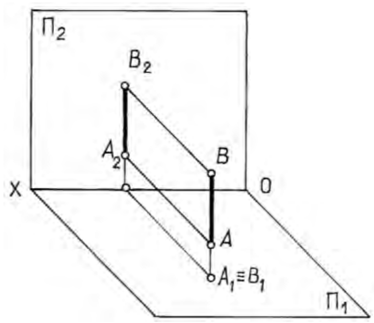
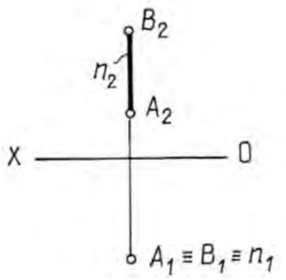
Таким образом, у прямой уровня направление одной из проекций всегда параллельно оси координат.

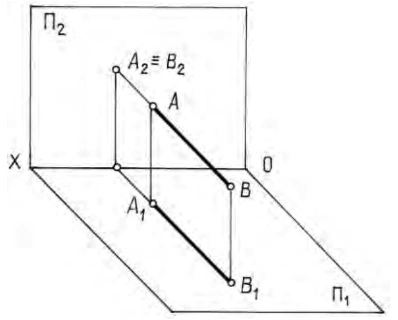
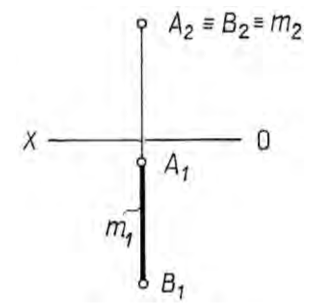
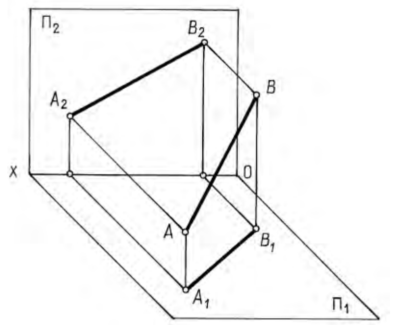
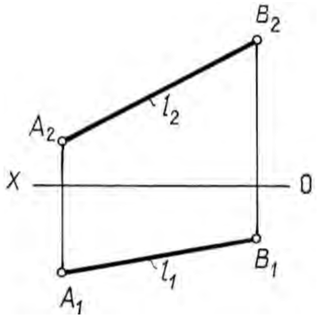
В табл. 2.1 приведены названия, наглядные изображения, чертежи и характерные признаки прямых частного положения.

Таблица 2.1

| **Положение прямой в пространстве** | **Наглядное изображение** | **Чертеж** | **Характерный признак на чертеже** |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| $h$ // $\Pi_1$ – горизонтальная прямая |   |   | $A_2B_2$ // $XO$<br>$A_1B_1$ // $AB$<br>$\|A_1B_1\| = \|AB\|$ |
| $f$ // $\Pi_2$ – фронтальная прямая |   |   | $A_1B_1$ // $XO$<br>$A_2B_2$ // $AB$<br>$\|A_2B_2\| = \|AB\|$ |

Окончание табл. 2.1

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| $n \perp \Pi_1$ – горизонтально проецирующая прямая |   |   | $A_2B_2 \perp XO$<br>$A_1 \equiv B_1$<br>$\|A_2B_2\| = \|AB\|$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $m \perp \Pi_2$ – фронтально проецирующая прямая |  |  | $A_1B_1 \perp XO$<br>$A_2 \equiv B_2$<br>$\lvert A_1B_1 \rvert = AB$ |
| $l$ – прямая общего положения |  |  | $A_1B_1$ – произвольно;<br>$A_2B_2$ – произвольно |

## 2.2. Следы прямой

Следами прямой называются точки пересечения ее с плоскостями проекций (рис. 2.6).

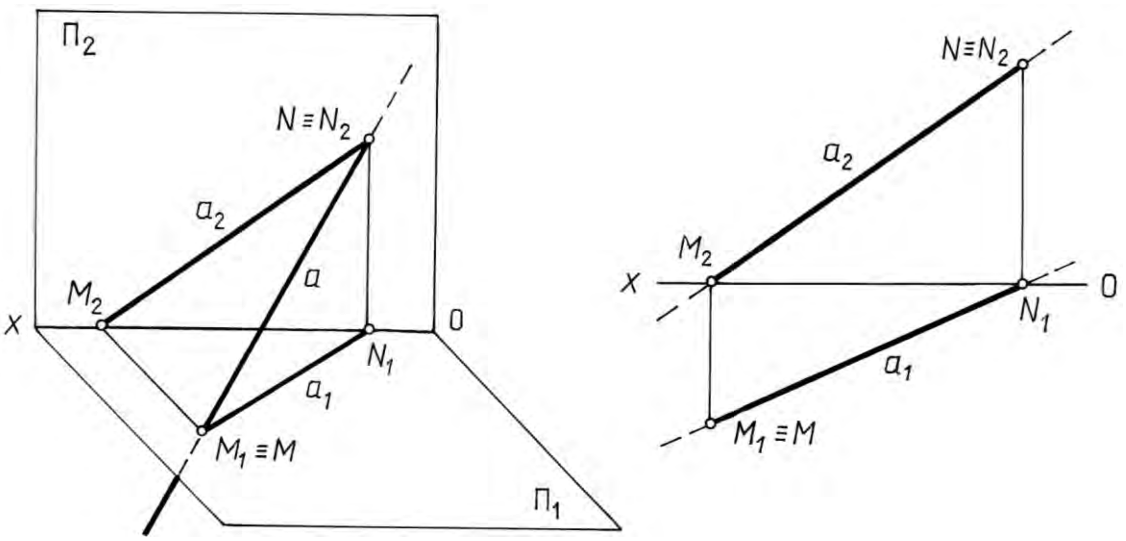



Рис. 2.6

В общем случае прямая общего положения в системе трех плоскостей проекций может иметь три следа (горизонтальный, фронтальный и профильный ) – три точки пересечения с плоскостями $\Pi_1$, $\Pi_2$ и $\Pi_3$ соответственно.

Прямые частного положения имеют два (прямые уровня) или даже один след (проецирующие прямые).

Для того, чтобы найти точку пересечения прямой общего положения с плоскостью $\Pi_1$ – горизонтальный след, необходимо:

1) продлить фронтальную проекцию прямой до пересечения с осью $OX$.

$$a_2 \cap OX = M_2;$$

2) провести перпендикуляр к оси $OX$ до пересечения с горизонтальной проекций прямой

$$M_2M \perp OX; \quad M_2M \cap a_1 = M_1.$$

Проекции $M_1$ и $M_2$ – определяют положение горизонтального следа, при этом сам след совпадает со своей горизонтальной проекцией.

Для нахождения фронтального следа необходимо:

1) продлить горизонтальную проекцию прямой до пересечения с осью $OX$.

$$a_1 \cap XO = N_1;$$

2) провести перпендикуляр к оси $OX$ до пересечения с фронтальной проекций прямой

$$N_1N \perp XO; \quad N_1N \cap a_2 = N_2.$$

где $N_1$ и $N_2$ – проекции фронтального следа, при этом сам след совпадает со своей фронтальной проекцией.

## 2.3. Относительное положение двух прямых

Две прямые в пространстве могут пересекаться, быть параллельными или скрещиваться, т.е. не пересекаться и не быть параллельными.

Судить по эпюру об относительном расположении прямых в каждом отдельном случае можно по следующим признакам.

1. Если прямые параллельны, то одноименные проекции их на любую плоскость также параллельны $l \parallel m \Rightarrow l_1 \parallel m_1$, $l_2 \parallel m_2$. Справедливо и обратное: если на эпюре одноимённые проекции двух прямых параллельны, то параллельны и сами прямые в пространстве $l_1 \parallel m_1 \wedge l_2 \parallel m_2 \Rightarrow l \parallel m$.

На рис. 2.7 дан эпюр параллельных прямых, занимающих в пространстве общее положение относительно плоскостей проекций.

На рис. 2.8 показан частный случай: прямые лежат в горизонтальной проецирующей плоскости (т. е. в плоскости, перпендикулярной плоскости $\Pi_1$).

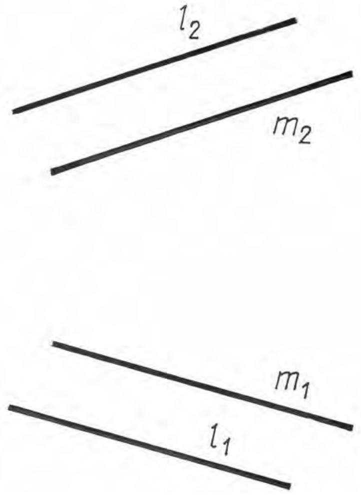



Рис. 2.7

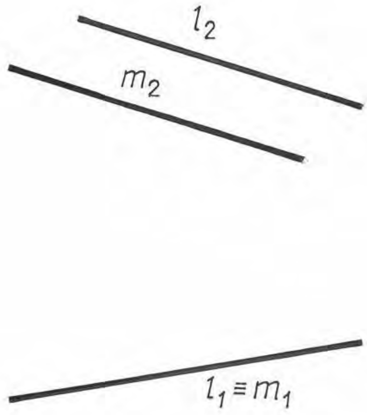



Рис. 2.8

Для того, чтобы судить по эпюру о параллельности прямых, достаточно двух проекций каждой прямой. Только в случае профильных прямых могут возникнуть затруднения. Действительно, фронтальные и горизонтальные проекции профильных прямых (рис. 2.9) всегда параллельны, но отсюда не следует, что и сами прямые параллельны: необходимо еще, чтобы и их профильные проекции были параллельны. На рис. 2.9 отрезки прямых *АВ* и *СД* параллельны.

2. Если прямые пересекаются, то точки пересечения их одноимённых проекций ($K_1$ и $K_2$) лежат на одном перпендикуляре к оси *XO* (рис. 2.10) Это следует из того, что $K_1$ и $K_2$ являются проекциями одной и той же точки $K$, общей для обеих прямых.

Если $l_1 \cap m_1$, $l_2 \cap m_2$ и $K_2K_1 \perp XO$, то $l \cap m$.

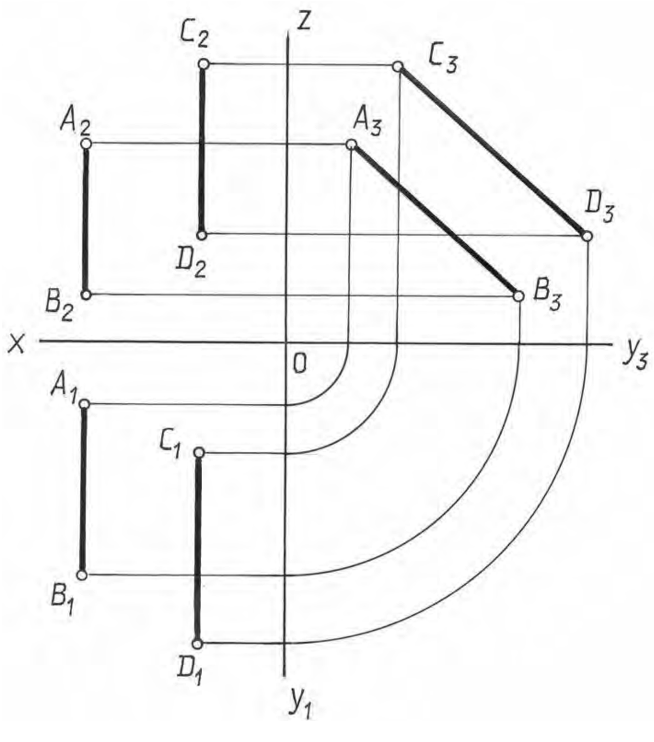



Рис. 2.9

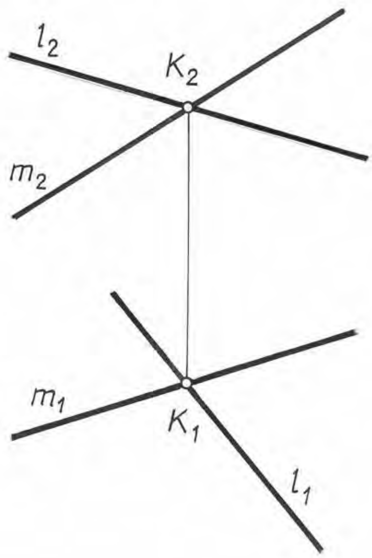



Рис. 2.10

В частном случае одна пара одноименных прямых проекций двух пересекающихся прямых может совпадать. Это значит, что плоскость, которую определяют обе прямые, перпендикулярна к соответствующей плоскости проекций (рис. 2.11).

Угол, образованный пересекающимися прямыми, проецируется без искажения только тогда, когда его плоскость параллельна плоскости проекций. Прямой же угол проецируется без искажения и тогда, когда только одна его сторона параллельна плоскости проекций, а вторая не перпендикулярна (теорема о проекциях прямого угла).

3. Как известно, скрещивающиеся прямые не пересекаются и не параллельны. Следовательно, если на эпюре ни один из признаков пересечения или параллельности не выполняется, то мы имеем дело с эпюром скрещивающихся прямых. Так, на эпюре (рис. 2.12) одноименные проекции прямых $l$ и $m$ пересекаются в точках $N_2$ и $K_1$, лежащих на различных перпендикулярах к оси *XO.* Прямые же в пространстве не пересекаются, но и не параллельны.

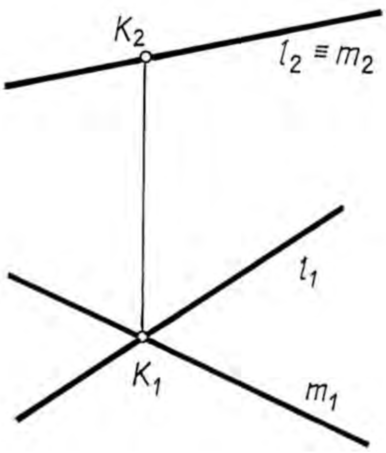



Рис. 2.11

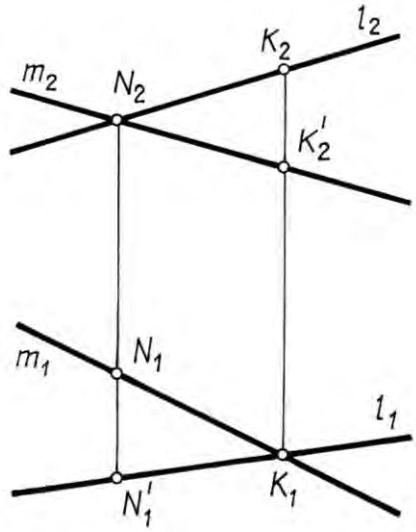



Рис. 2.12

Точки $N_2$ и $K_1$ являются здесь проекциями разных точек. В точку $N_2$ проецируются точки $N$ и $N'$, из которых одна принадлежит прямой ($l_1$, $l_2$), другая – прямой $m$ ($m_1$, $m_2$), в точку $K_1$ проецируются точки $K$ и $K'$, тоже находящиеся на разных прямых.

Точки скрещивающихся прямых, лежащие попарно на проецирующих прямых, называются конкурирующими. Они используются для определения видимости элементов.

Для того, чтобы определить видимость на горизонтальной проекции двух скрещивающихся прямых, необходимо через точку пересечения горизонтальных проекций этих прямых провести линию связи до пересечения с фронтальными проекциями этих же прямых. Точки пересечения будут фронтальными проекциями конкурирующих точек. Видимой будет та точка, фронтальная проекция которой выше.

Чтобы определить видимость на фронтальной проекции двух скрещивающихся прямых, необходимо через точку пересечения фронтальных проекций этих прямых провести линию связи до пересечения с горизонтальными проекциями этих же прямых. Точки пересечения будут горизонтальными проекциями конкурирующих точек. Видимой будет та точка, горизонтальная проекция которой будет удалена дальше от плоскости $\Pi_2$.

## 2.4. Плоскость. Способы изображения плоскости

Плоскость можно представить как совокупность последовательных положений непрерывно движущейся прямой линии $m$, проходящей через неподвижную точку $A$ пространства и скользящей по некоторой неподвижной прямой линии $l$.

$$\Delta\ (A,\ l). \quad m_i \supset A,\ \ m \cap l. \quad i = 1, 2, 3 \ldots$$

Укажем свойства плоскости.

1. Прямая, проходящая через две различные точки плоскости, лежит в этой плоскости.
2. Через три точки, не принадлежащие одной прямой, проходит одна и тольо одна плоскость.
3. Если две различные плоскости имеют одну общую точку, то их пересечение есть прямая.

Если множество точек некоторой плоскости $\Delta$ спроецировать на плоскости проекций, то никакого изображения не получится.

В частном случае, когда проецирующие лучи направлены вдоль изображаемой плоскости, можно получить изображение плоскости посредством проецирования всех ее точек (рис. 2.13, *а*).

Такую плоскость называют проецирующей. Ее проекция имеет вид прямой линии. При ортогональном проецировании (рис. 2.13, *б*) плоскость изобразится в виде прямой линии только тогда, когда изображаемая плоскость расположена перпендикулярно к плоскости проекций.

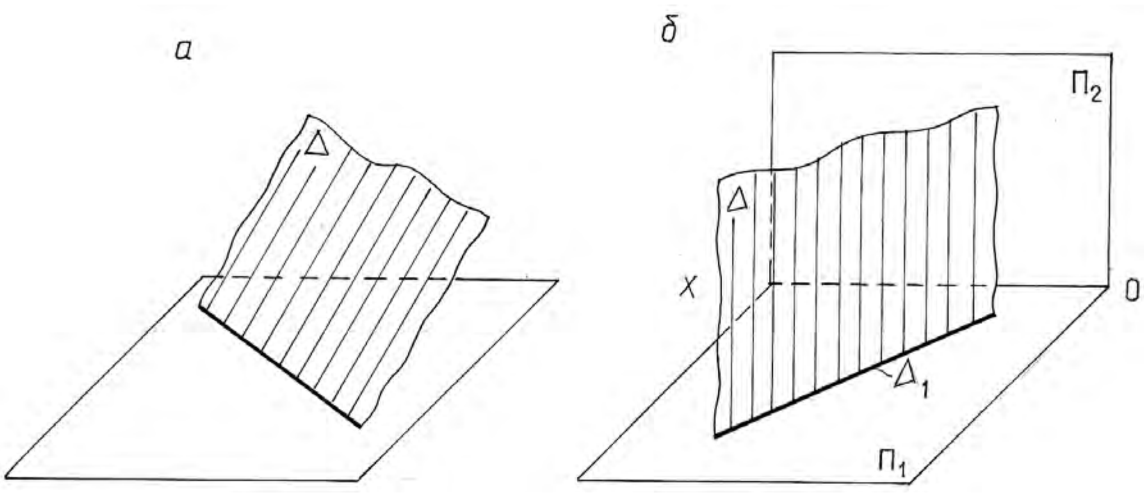



Рис. 2.13

Для построения эпюра плоскости общего положения используется понятие определителя плоскости.

Определителем называется совокупность условий, необходимых и достаточных для определения геометрической фигуры в пространстве.

Из свойства плоскости известно, что через три точки, не принадлежащие одной прямой, проходит одна и только одна плоскость. В этом случае плоскость определяется определителем $\Delta$ (*A*, *B*, *C*) (рис. 2.14, *а*).

Из этого свойства следует:

1) через прямую и не принадлежащую ей точку можно провести одну и только одну плоскость. Определитель в этом случае $\Omega$ (*A*, *l*) (рис. 2.14, *б*);

2) через две различные параллельные прямые можно провести только одну плоскость. Определитель плоскости будет $\Gamma$ ($a \parallel b$) (рис. 2.14, *в*);

3) через две пересекающиеся прямые можно провести одну и только одну плоскость $\Sigma$ ($a \cap b$) (рис. 2.14, *г*).

Поэтому проекции упомянутых сочетаний точек и прямых можно рассматривать как проекции определителей плоскости (рис. 2.14).

Каждый из перечисленных способов задания плоскости можно свести к любому из остальных. Так, например, задание тремя точками *A*, *B* и *C* (рис. 2.14, *а*) равносильно заданию той же плоскости двумя пересекающимися прямыми (например, *AB* и *BC*) или двумя параллельными прямыми. Для чего достаточно через одну из заданных точек провести прямую, параллельную прямой, проходящей через остальные две точки. Во многих случаях практики подобные переходы одного способа задания к другому позволяют упрощать графические пост-роения на плоскости.

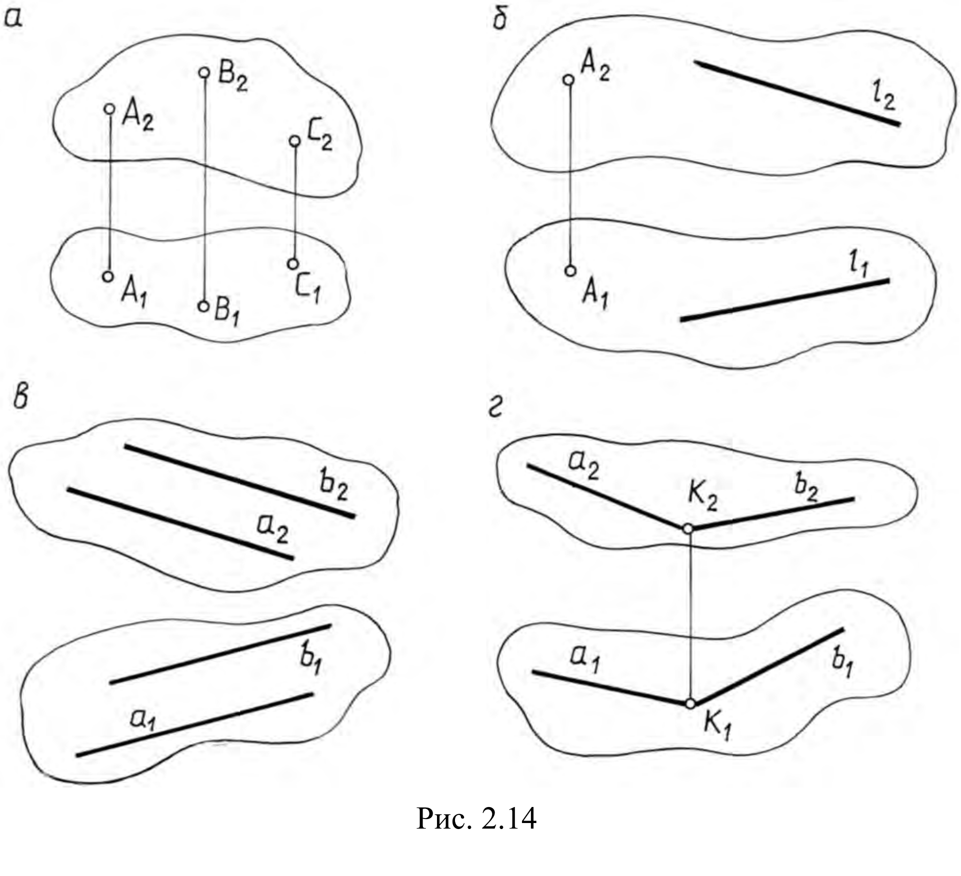



Рис. 2.14

Плоскость, будучи неограниченной, в общем случае пересекает обе плоскости проекций (рис. 2.15).

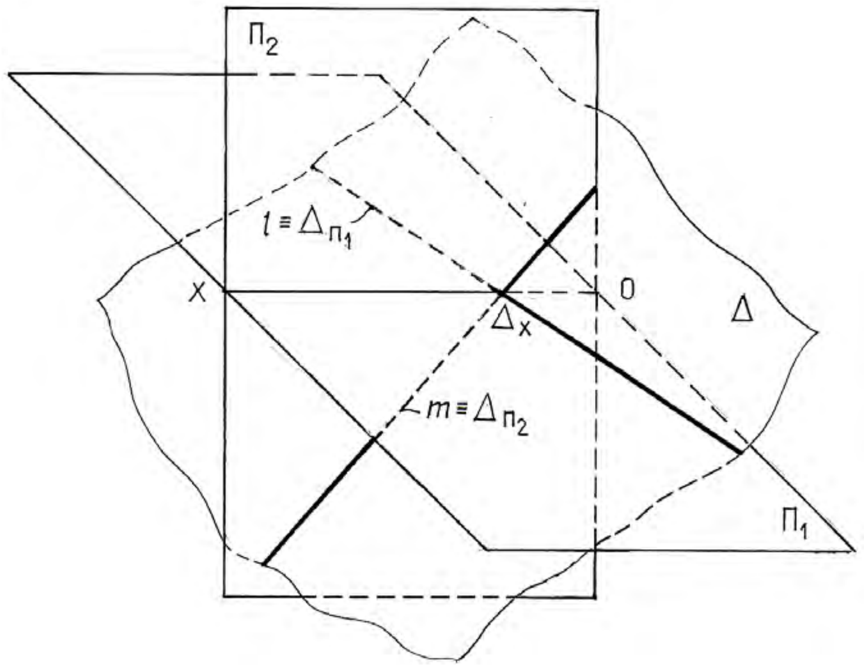



Рис. 2.15

Получающиеся при этом линии пересечения носят название горизонтального следа $l \equiv \Delta_{\Pi 1} = \Delta \cap \Pi_1$ и фронтального следа $m \equiv \Delta_{\Pi 2} = \Delta \cap \Pi_2$ плоскости.

Точку пересечения следов будем называть точкою схода следов и обозначать $\Delta_x$.

Следы плоскости, в зависимости от ее положения относительно плоскостей проекций, либо пересекаются (см. рис. 2.15), либо параллельны друг другу и оси проекций (рис. 2.16). В последнем случае плоскость является профильно-проецирующей.

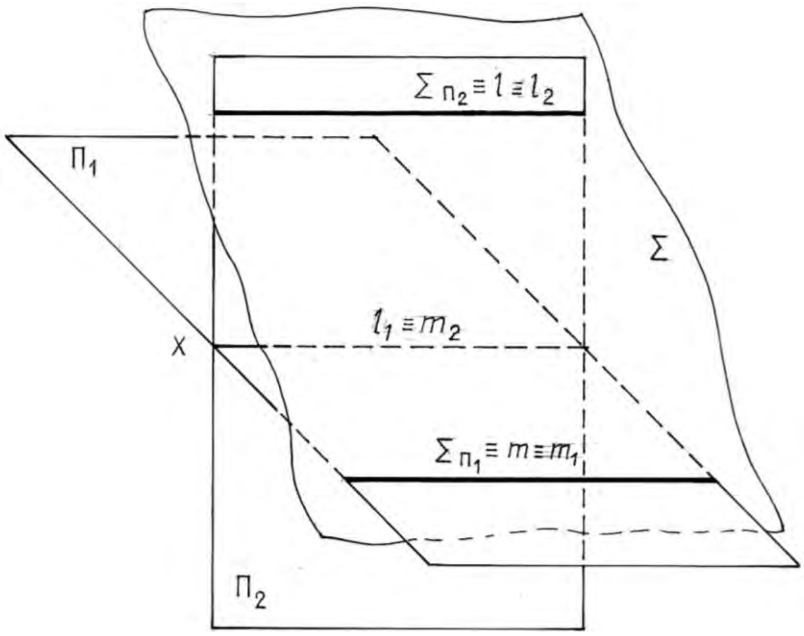



Рис. 2.16

Таким образом, следы представляют собой случай задания плоскости двумя пересекающимися прямыми $\Delta\ (l \cap m)$ или параллельными прямыми $\Gamma\ (l \,//\, m)$. Эпюры плоскостей, изображенных на рис. 2.15 и 2.16, будут иметь вид, указанный на рис. 2.17 и 2.18.

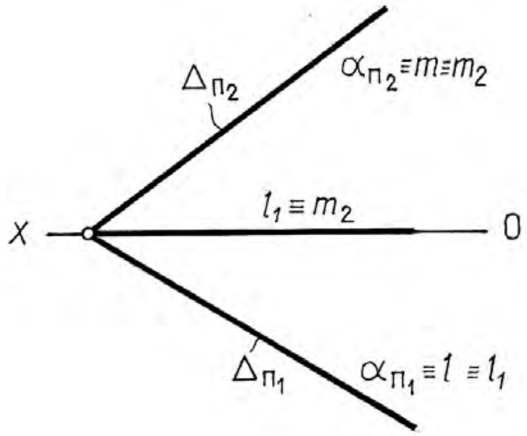



Рис. 2.17

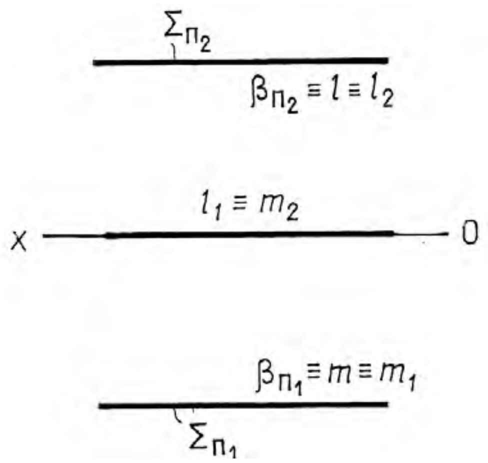



Рис. 2.18

Если рассматривать плоскость в системе трех плоскостей проекций $П_1$, $П_2$, $П_3$, то в общем случае плоскость пересекает каждую из плоскостей проекций (рис. 2.19), а прямая $\Gamma_{П3} = \Gamma \cap П_3$ называется профильным следом плоскости.

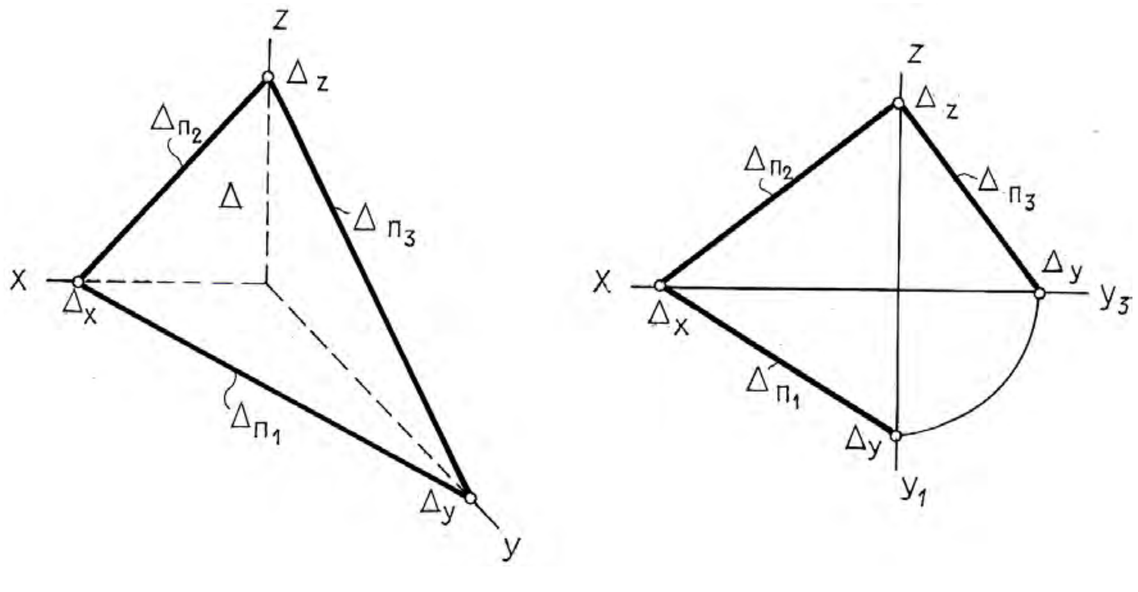



Рис. 2.19

Любые два следа плоскости, как две пересекающиеся или параллельные прямые, вполне определяют положение плоскости в пространстве. Третий след плоскости всегда можно построить по двум данным.

Таким образом, на чертеже плоскость может быть задана проекциями трех точек, не лежащих на одной прямой, проекциями прямой и точки вне этой прямой, проекциями двух пересекающихся или двух параллельных прямых, которые могут быть следами плоскости, а также проекциями любой плоской фигуры.

# 3. ГРАФИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НА ПЛОСКОСТИ. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ВЗАИМНОГО ПОЛОЖЕНИЯ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Прямые и точки в плоскости. Главные линии в плоскости. Плоскости общего и частного положения. Частные случаи взаимного положения двух прямых, а также прямой и плоскости

## 3.1. Прямые линии и точки, расположенные в плоскости.

Основными графическими операциями, выполняемыми на плоскости, являются построение принадлежащих ей прямых линий и отдельных точек.

Принадлежит ли прямая данной плоскости можно определить на основании аксиомы, связанной с понятием принадлежности: прямая, проходящая через две различные точки плоскости, лежит в этой плоскости.

$$A \subset \Sigma,\ B \subset \Sigma \Rightarrow (AB) \subset \Sigma.$$

Прямая также лежит в плоскости, если она проходит через точку, лежащую в плоскости, и параллельна прямой, находящейся в этой же плоскости.

З а д а ч а 1. Достроить недостающую проекцию прямой $l$, принадлежащей плоскости $\Sigma$, заданной двумя пересекающимися прямыми $m$ и $n$ (рис. 3.1).

$$\Sigma\ (m \cap n),\ l \subset \Sigma.\ l_1 = ?$$

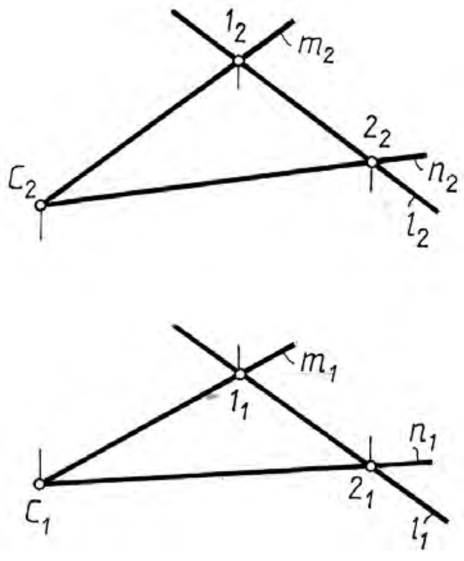



Рис. 3.1

На основании аксиомы принадлежности на заданных прямых $m$ и $n$ отмечаем точки пересечения заданной фронтальной проекции прямой $l$, лежащей в плоскости $\Sigma$, с прямыми, задающими эту плоскость ($1 \subset m$ и $2 \subset n$).

Опуская линии связи на горизонтальные проекции линий $m$ и $n$, получаем горизонтальные проекции точек $1_1$ и $2_1$, которые и определяют горизонтальную проекцию искомой прямой $l$.

З а д а ч а 2. Достроить фронтальную проекцию прямой $l$, лежащей в плоскости $\Psi$, заданной двумя пересекающимися прямыми $m$ и $n$ $\Psi$ ($m \cap n$) (рис. 3.2).

На проекции прямой $n_1$ отмечаем точку $1_1$ ее пересечения с горизонтальной проекцией прямой $l$. Достраиваем фронтальную проекцию этой точки $1_2$.

Через нее проводим проекцию прямой $l_2$ параллельно фронтальной проекции прямой $m_2$, задающей плоскость.

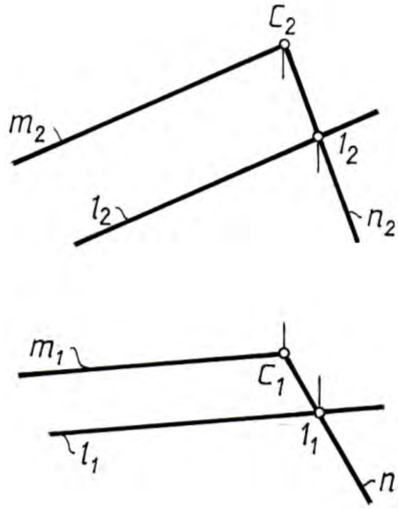



Рис. 3.2

Условие принадлежности точки плоскости также вытекает из известной аксиомы планиметрии – точка принадлежит плоскости, если она лежит на любой прямой данной плоскости.

З а д а ч а 3. Дана горизонтальная проекция точки $A$, лежащей в плоскости $\Omega$ ($m \,//\, n$). Построить недостающую проекцию точки $A$ (рис. 3.3).

$\Omega$ ($m \,//n$), $A_1$. $A_2$ = ?

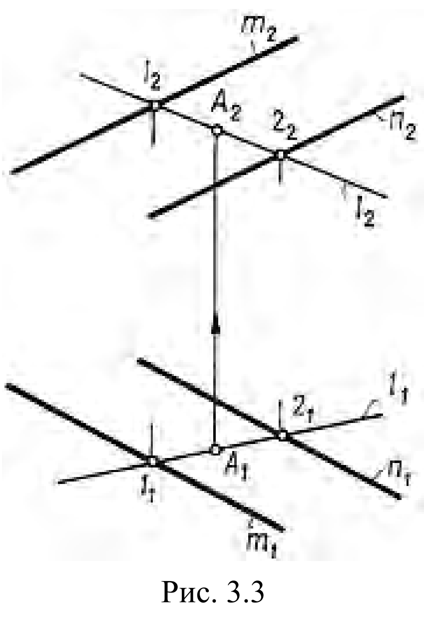



Рис. 3.3

Через проекцию точки $A_1$ проводим произвольную прямую $l_1$. Строим ее фронтальную проекцию $l_2$ по точкам пересечения с прямыми $m$ и $n$, задающим плоскость. С помощью линии связи находим $A_2 \subset l_2$.

Из решения данной задачи следует, что для любой точки плоскости можно на чертеже задать произвольно только одну ее проекцию. Вторая проекция строится с помощью вспомогательной прямой.

## 3.2. Главные линии плоскости

На любой плоскости можно провести бесчисленное множество прямых в самых различных направлениях.

Среди этих линий особое место занимают прямые уровня следующих направлений:

а) горизонтали – прямые, лежащие в плоскости и параллельные горизонтальной плоскости проекций (рис. 3.4). Фронтальная проекция горизонтали плоскости как линии, параллельной плоскости $П_1$ – параллельна оси $OX$ (перпендикулярна линиям связи);

б) фронтали – прямые, расположенные в плоскости и параллельные плоскости $П_2$ (рис. 3.5). Горизонтальная проекция фронтали плоскости как линии, параллельной плоскости $П_2$, параллельна оси $OX$ (перпендикулярна линиям связи);

в) профильные прямые – прямые, которые находятся в данной плоскости и параллельны плоскости $П_3$ (рис. 3.6);

г) линии наибольшего наклона к плоскостям $П_1$, $П_2$ и $П_3$ – это прямые, расположенные в плоскости и перпендикулярные к горизонталям, фронталям и профильным линиям плоскости соответственно. Линии наибольшего наклона к плоскости $П_1$ называют линиями ската.

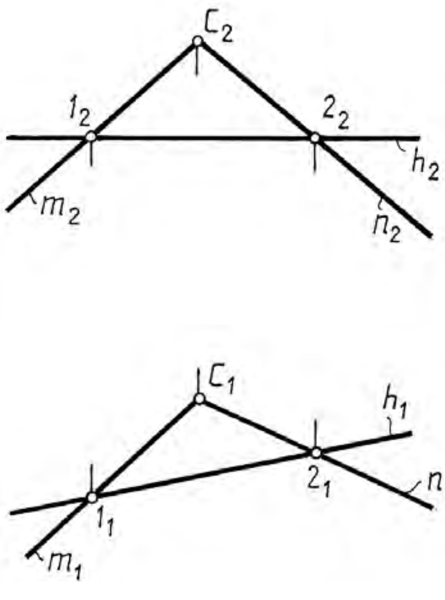



Рис. 3.4

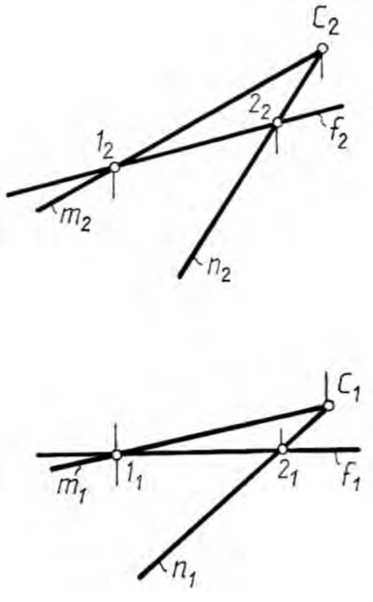



Рис. 3.5

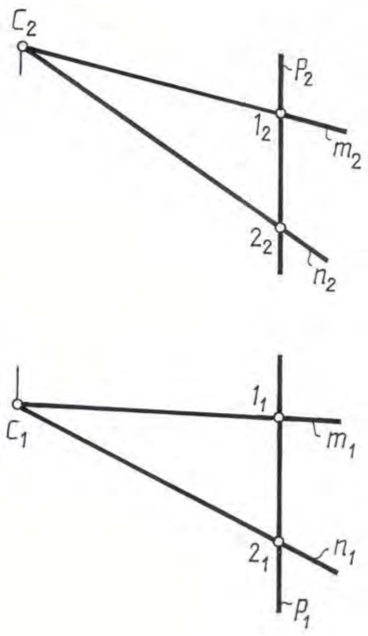



Рис. 3.6

Перечисленные прямые называют главными линиями плоскости. На любой плоскости можно провести бесчисленное множество главных линий. Все горизонтали плоскости параллельны между собой, все фронтали плоскости также параллельны друг другу и т. д.

Следует заметить, что следы плоскости также можно отнести к главным линиям. Горизонтальный след – это горизонталь плоскости, фронтальный – фронталь, профильный – профильная линия плоскости.

## 3.3. Плоскости общего и частного положения

Плоскости в зависимости от положения относительно плоскостей проекций делятся на плоскости общего и частного положения. Плоскости, которые не перпендикулярны ни одной из плоскостей проекций, носят название плоскостей общего положения.

К плоскостям частного положения относятся плоскости, перпендикулярные одной (проецирующие плоскости) или двум (плоскости уровня) плоскостям проекций.

Проекция такой плоскости вырождается в прямую линию на ту плоскость, к которой она перпендикулярна. На этой прямой лежат проекции всех точек, линий и фигур, принадлежащих данной проецирующей плоскости.

### *3.3.1. Плоскости, перпендикулярные к одной плоскости проекций*

1. Плоскость $\Delta$, перпендикулярная плоскости $\Pi_1$, – горизонтально-проецирующая плоскость (рис. 3.7). Горизонтальная проекция такой плоскости представляет собой прямую линию, которая одновременно является горизонтальным следом $\Delta_{\Pi 1}$ плоскости.

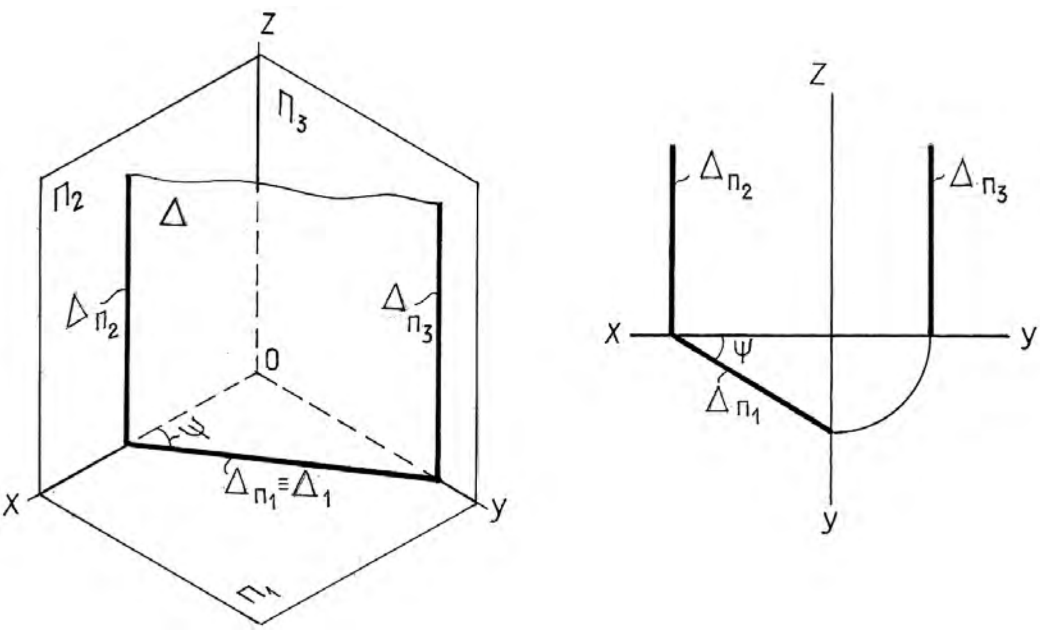



Рис. 3.7

Горизонтальные проекции всех точек и любых фигур, лежащих в этой плоскости, совпадают с вырожденной горизонтальной проекцией $\Delta_1$ плоскости. Угол $\psi$, который образуется между плоскостями $\Delta$ и $\Pi_2$, проецируются на $\Pi_1$ без искажения.

Плоскость $\Sigma$, перпендикулярная плоскости $\Pi_2$, – фронтально-проецирующая плоскость (рис. 3.8). Фронтальная проекция такой плоскости представляет прямую, которая совпадает с фронтальным следом $\Sigma_{\Pi 2}$ плоскости. Угол $\varphi$ между плоскостями $\Sigma$ и $\Pi_1$ проецируется на $\Pi_2$ без искажения.

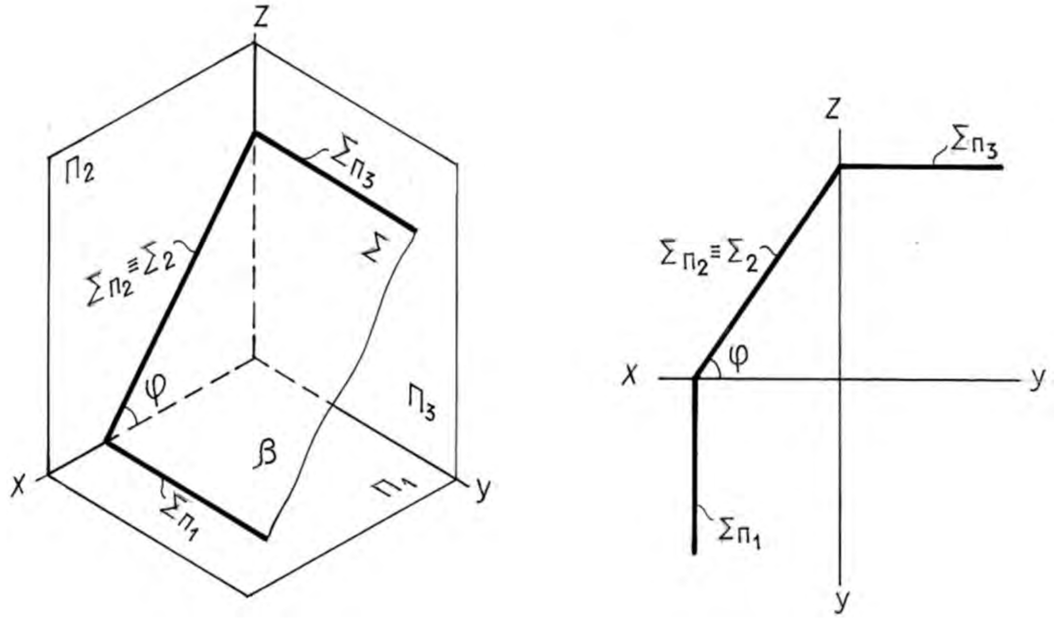



Рис. 3.8

На рис. 3.9 изображена плоскость $\Theta$, перпендикулярная плоскости $\Pi_3$, – профильно-проецирующая плоскость. Профильная проекция плоскости прямая линия $\Theta_3 \equiv \Theta_{\Pi 3}$. Угол $\alpha$ между плоскостями $\Theta$ и $\Pi_2$ проецируется на плоскость $\Pi_3$ в натуральную величину.

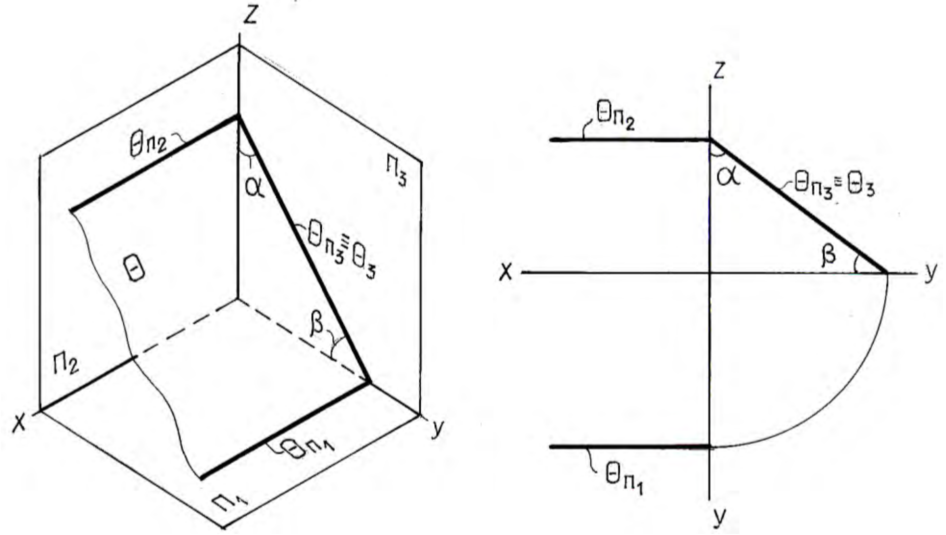



Рис. 3.9

### *3.3.2. Плоскости, перпендикулярные к двум плоскостям проекций*

Плоскости, перпендикулярные к двум плоскостям проекций, называются плоскостями уровня.

Плоскости, параллельные горизонтальной плоскости проекций $\Pi_1$, называются горизонтальными плоскостями уровня. На рис. 3.10 такая плоскость, заданная треугольником *ABC*, перпендикулярна двум плоскостям проекций $\Pi_2$ и $\Pi_3$. Фронтальная и профильная проекции такой плоскости – горизонтальные прямые, совпадающие со своими одноименными следами. Любая фигура, расположенная в такой плоскости, на горизонтальную плоскость проекций $\Pi_1$ проецируется без искажения.

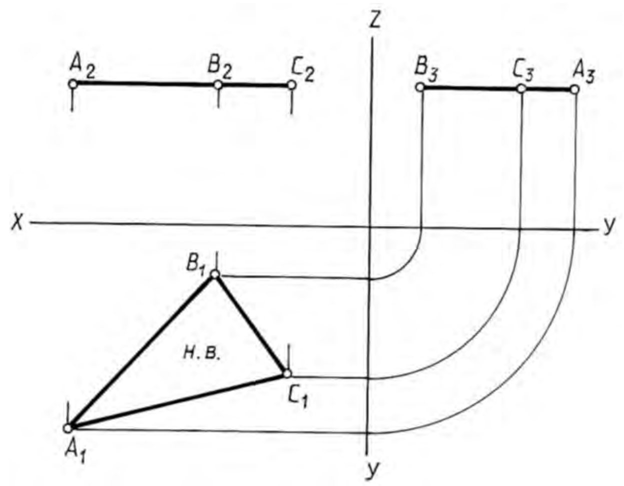



Рис. 3.10

Плоскости, параллельные фронтальной плоскости проекций $\Pi_2$, называется фронтальными плоскостями уровня (рис. 3.11). Такие плоскости перпендикулярны к плоскостям $\Pi_1$ и $\Pi_3$. Горизонтальная и профильная проекции такой плоскости – прямые линии, совпадающие со своими одноименными следами. Любая фигура, расположенная в такой плоскости, на фронтальную плоскость проекций $\Pi_2$ проецируется без искажения.

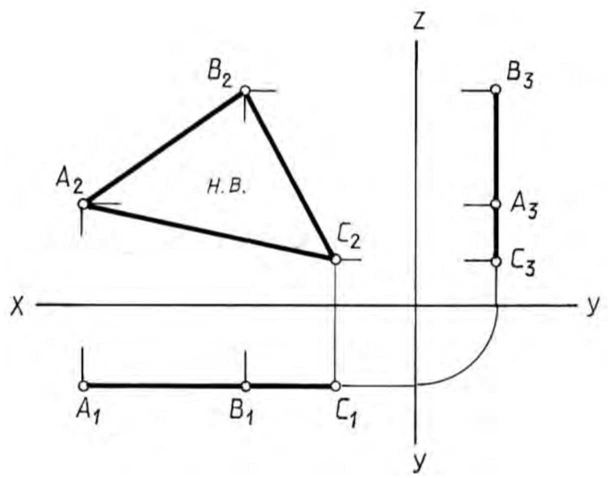



Рис. 3.11

Плоскости, параллельные профильной плоскости проекции $\Pi_3$, называются профильными плоскостями уровня. Их фронтальные и горизонтальные проекции – прямые линии, перпендикулярные оси *OX* (рис. 3.12). Любая фигура, расположенная в этой плоскости, проецируется на плоскость $\Pi_3$ в натуральную величину.

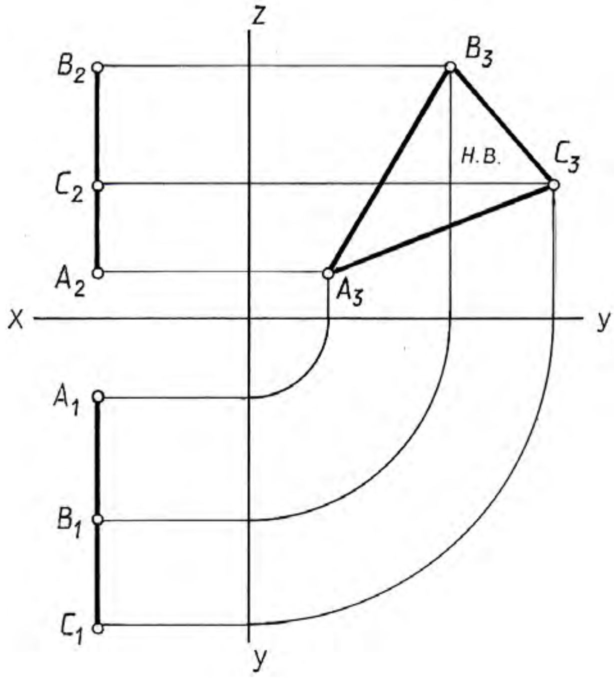



Рис. 3.12

## 3.4. Частные случаи взаимного положения прямой и плоскости, а также двух плоскостей

Прямая линия и плоскость в пространстве могут быть параллельны (в частном случае совпадая друг с другом) либо пересекаться. Прямая линия, перпендикулярная плоскости, представляет собой частный случай пересекающихся прямой и плоскости.

Две плоскости в пространстве могут быть либо взаимно параллельными (в частном случае совпадая друг с другом), либо пересекающимися. Взаимно перпендикулярные плоскости представляют собой частный случай пересекающихся плоскостей.

Вопросы пересечения двух плоскостей, а также прямой и плоскости под произвольным углом будут рассмотрены далее, здесь же рассмотрим лишь случаи частного взаимного положения этих элементов – перпендикулярность и параллельность прямой и плоскости, а также двух плоскостей.

### *3.4.1. Прямая линия, перпендикулярная плоскости*

Из стереометрии известна аксиома: «Если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то эта прямая и плоскость взаимно перпендикулярны».

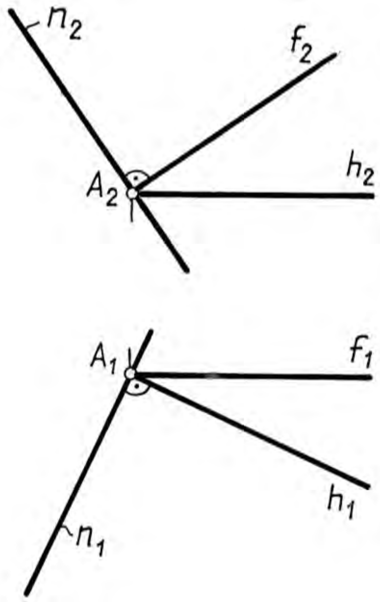


Рис. 3.13

Отсюда следует, что для построения плоскости, перпендикулярной данной прямой $n$ ($n_1$, $n_2$), достаточно построить две пересекающиеся прямые, перпендикулярные данной прямой. В качестве этих прямых целесообразно взять прямые уровня (рис. 3.13).

В этом случае теорема о перпендикуляре к плоскости будет формулироваться так: если прямая перпендикулярна к плоскости, то горизонтальная проекция этой прямой перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали плоскости, а фронтальная проекция – фронтальной проекции фронтали той же плоскости.

Если $h_1 \perp n_1$ ^ $f_2 \perp n_2 \rightarrow n \perp \Sigma\,(h \cap f)$.

Или если $n \perp \Sigma\,(h \cap f) \rightarrow n_1 \perp h_1$ ^ $n_2 \perp f_2$.

При профильно-проецирующей плоскости этого признака недостаточно. Это и понятно: прямая, перпендикулярная к двум параллельным прямым плоскости, не обязательно должна быть перпендикулярна к самой плоскости. В этом случае надо обязательно рассмотреть взаимное положение прямой и плоскости на третьей, профильной плоскости проекций.

З а д а ч а 4. Опустить перпендикуляр из точки *A* на плоскость $\Delta$ (*ABC*).

Строим проекции фронтали и горизонтали плоскости $h$ ($h_1$, $h_2$) $f$ ($f_1$, $f_2$), проходящей через вершину *A* (рис. 3.14).

Опускаем перпендикуляр $n$. $n_2 \perp f_2$ и $n_1 \perp h_1$.

Если плоскость задана следами, то $n_1$ перпендикулярна горизонтальному следу, а $n_2$ – фронтальному следу плоскости.

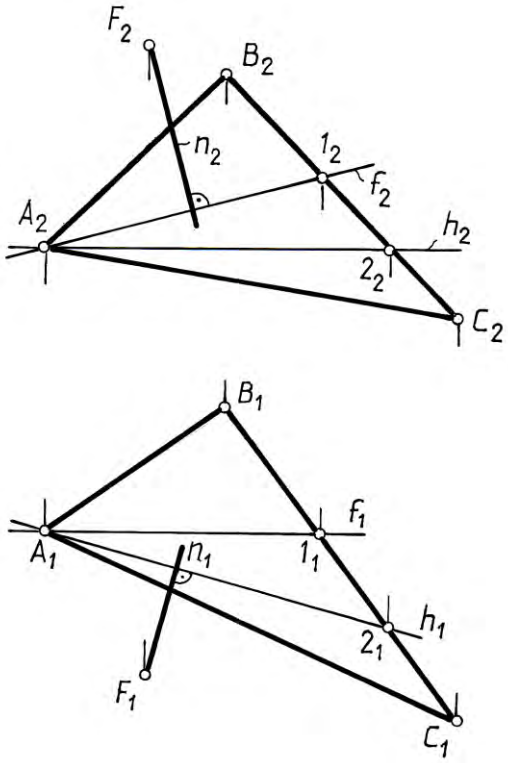


Рис. 3. 14

### *3.4.2. Взаимно перпендикулярные плоскости*

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой.

З а д а ч а 5. Построить плоскость Δ, проходящую через точку *A* и перпендикулярную к плоскости Σ, заданной двумя пересекающимися прямыми ($h \cap f$) (рис. 3.15).

Поскольку задача имеет множество решений, т.к. через один перпендикуляр можно провести пучок плоскостей, необходимо дополнительное условие, обеспечивающее единственность решения.

Примем, что одна из прямых, задающих плоскость должна быть параллельна прямой $f$, задающей плоскость.

Проводим перпендикуляр из точки *A* к плоскости Δ.

Через точку *A* проводим прямую $m$, параллельную $f$. Эти две прямые $m$ и $n$ и определяют искомую плоскость Δ, перпендикулярную Σ.

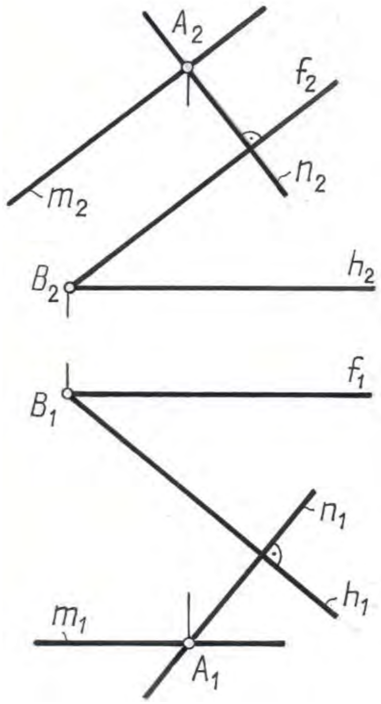



Рис. 3. 15

### *3.4.3. Прямая линия, параллельная плоскости*

Признак параллельности прямой и плоскости вытекает из известной аксиомы: «Прямая параллельна плоскости, если она параллельна одной из прямых, лежащих в этой плоскости».

Через данную точку пространства можно провести бесчисленное множество прямых, параллельных данной плоскости, поэтому для единственного решения требуются дополнительные условия.

З а д а ч а 6. Через точку $M$ провести прямую $l \parallel \Sigma (ABC)$ и плоскости проекций $\Pi_1$ (рис. 3.16).

Прямая, параллельная двум плоскостям проекций одновременно, параллельна линии их пересечения. Линией пересечения плоскости общего положения с горизонтальной плоскостью проекций является горизонталь.

Строим горизонталь, проходящую через вершину С.

Через проекции точки $M$ проводим проекции прямой $l$ параллельно соответствующим проекциям построенной горизонтали.

$$l_2 \parallel h_2 \text{ и } l_1 \parallel h_1.$$

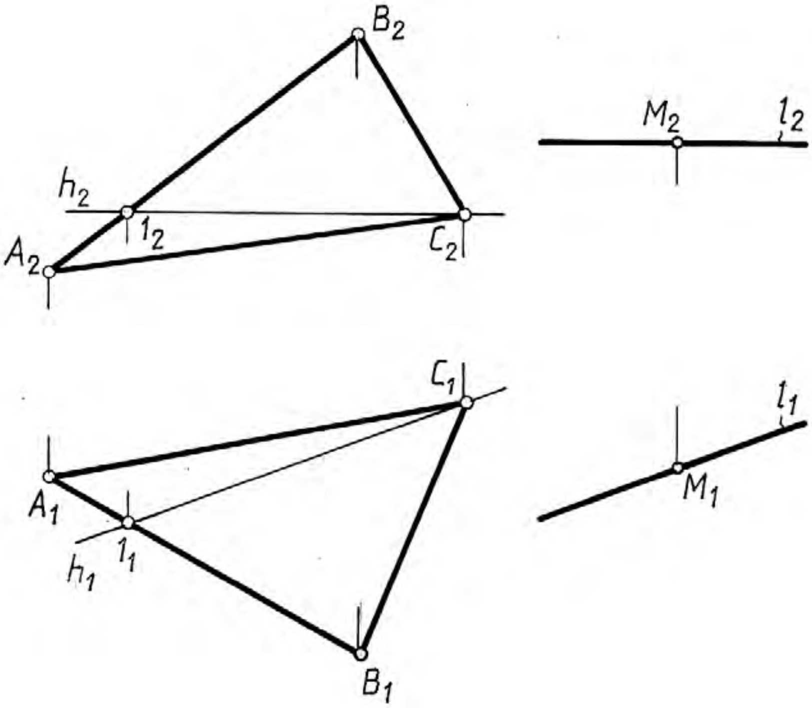



Рис. 3. 16

### *3.4.4. Две взаимно параллельные плоскости*

Две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

У параллельных плоскостей одноименные линии уровня взаимно параллельны.

Задача построения плоскости, параллельной заданной, решается в следующей последовательности.

1. В заданной плоскости строим или выделяем две пересекающиеся прямые.

2. Через заданную точку $A$ вне плоскости строим две прямые, параллельные выделенным прямым.

З а д а ч а 7. Через точку А провести плоскость $\Omega$ ($a \cap b$), параллельную плоскости $\Sigma$ ($m \parallel n$) (рис. 3.17).

В плоскости $\Sigma$ строим две проекции произвольной прямой $l$. На основании аксиомы о параллельности двух плоскостей через проекции точки $A$ проводим соответствующие проекции двух прямых $a$ и $b$, параллельных прямым $m$ и $l$ плоскости $\Sigma$ соответственно. Эти прямые и задают искомую плоскость $\Omega$.

$$\Omega\,(a \cap b) \,//\, \Sigma\,(m \,//\, n).$$

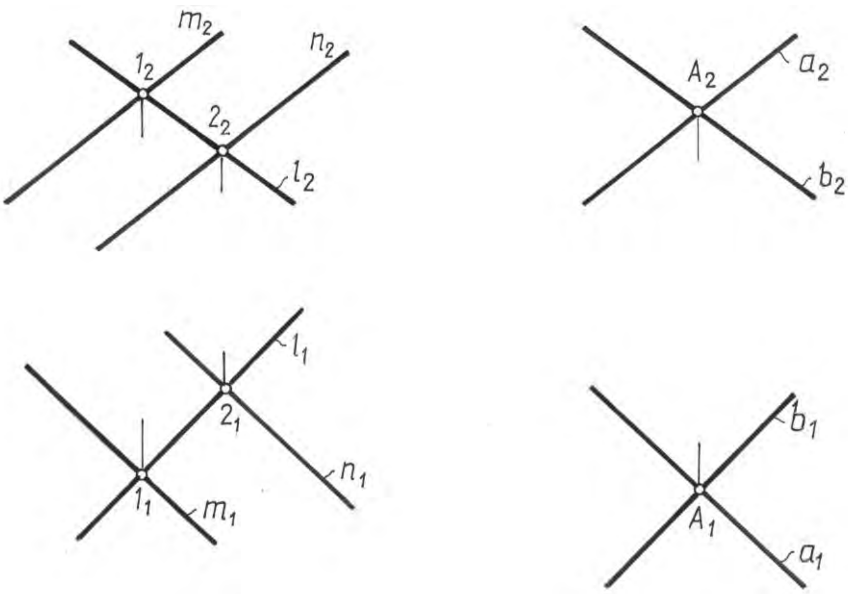



Рис. 3.17

З а д а ч а 8. Через точку $A$ провести плоскость $\Delta$, параллельную плоскости $\Sigma$ (рис. 3.18).

Через точку $A$ проводим горизонталь $h$ параллельно плоскости $\Sigma$ ($h_1 \,//\, \Sigma_1$). $N$ – фронтальный след горизонтали. Поэтому след $\Delta_2$ пройдет через точку $N$ параллельно $\Sigma_2$, а $\Delta_1$ – через точку $\Delta_x$ параллельно следу $\Sigma_1$.

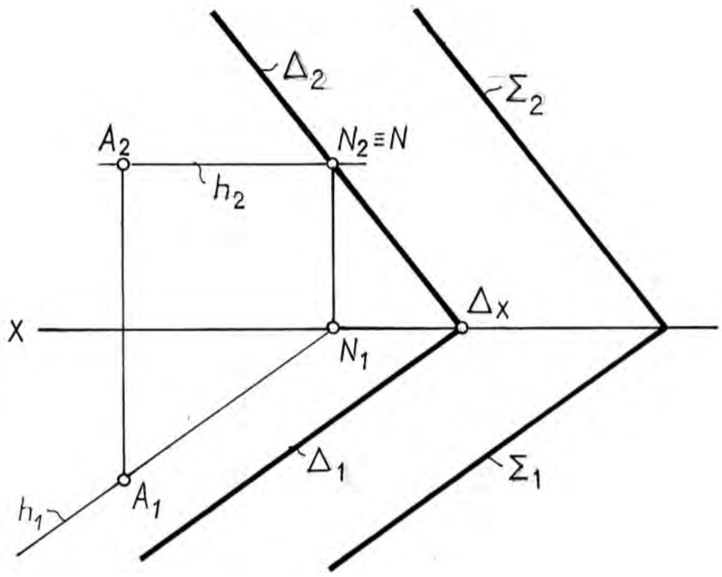



Рис. 3.18

Плоскости взаимно параллельны, если их одноименные следы взаимно параллельны.

# 4. КРИВЫЕ ЛИНИИ

Виды кривых. Касательные к кривым линиям. Замена кривой линии. Особые точки кривой. Цилиндрическая винтовая линия. Спрямление кривой линии.

## 4.1. Виды кривых

Кривые линии повсеместно встречаются в окружающем мире (очертания различных пространственных форм, линии пересечения поверхностей, графическое выражение различных функциональных математических зависимостей и т.п.).

Кривую линию будем рассматривать как траекторию движущейся точки, т.е. будем задавать кинематическим образом.

Кривые линии разделяются на плоские, все точки которых лежат в одной плоскости (например, эллипс, окружность, парабола и т.п.), и пространственные, точки которых в одной плоскости не лежат (например, винтовая линия).

Совокупность лучей, проецирующих плоскую или пространственную кривую на какую-либо плоскость проекций, образует в общем случае цилиндрическую поверхность, которая в пересечении с плоскостью проекций дает кривую линию. Таким образом, в общем случае проекцией плоской или пространственной кривой линии является плоская кривая (рис. 4.1).

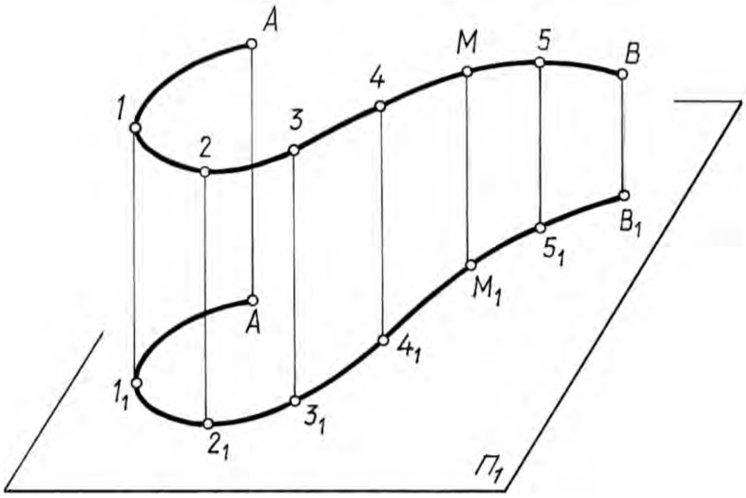



Рис. 4.1

Если точка принадлежит кривой линии, то ее проекции принадлежат одноименным проекциям этой кривой.

Проекции множества точек, принадлежащих кривой линии на чертеже, определяют положение кривой в пространстве.

Если известен математический закон образования кривой линии, то любую ее точку можно считать заданной. Такая кривая называется закономерной. Ее проекции могут быть построены с любой доступной точностью.

Если кривая задана конечным числом точек, то она называется каркасной, а задающие ее точки – каркасом кривой линии. Участки кривой между точками каркаса могут быть определены лишь приближенно.

Кривые, заданные их проекциями и не подчиненные какому-либо закону, называются графическими. Например, горизонтали – линии пересечения горизонтальных плоскостей с рельефом местности.

Каркасные и графические линии являются незакономерными, т.к. не подчинены известным математическим законам.

Если хотя бы одна проекция кривой дважды пересекается с линией проекционной связи, проведенной через произвольную точку кривой, то чертеж не определяет положение кривой в пространстве. В этом случае необходимо задать на проекциях кривой несколько точек и указать последовательность расположения их на кривой (рис. 4.2).

Кривая $a$ может быть задана чертежом только в пределах, определяемых граничными точками $A$ и $B$. Точки $M$ и $N$ относительно плоскости проекций $\Pi_2$ и точки $S$ и $T$ относительно плоскости проекций $\Pi_1$, называются конкурирующими. Точки $M_2 \equiv N_2$ и $S_1 \equiv T_1$ называются точками кажущегося самопересечения.

На рис. 4.3 изображена самопересекающаяся кривая $a$. Так как проекции точки $M$ располагаются на одной линии связи, то в этой точке кривая $a$ пересекается сама с собой.

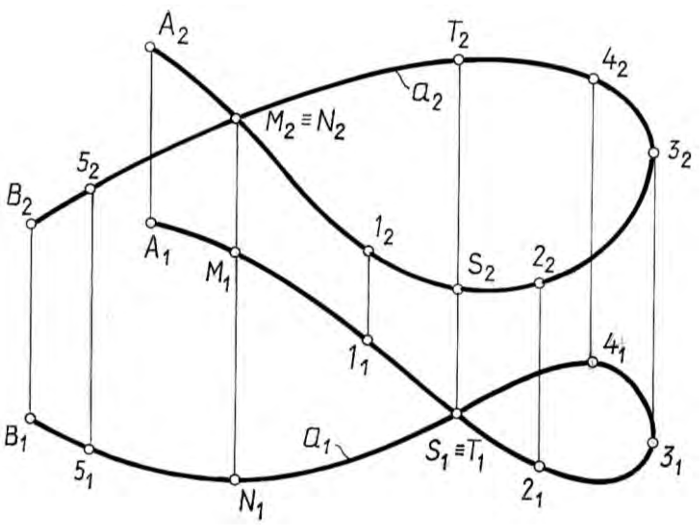



Рис. 4.2

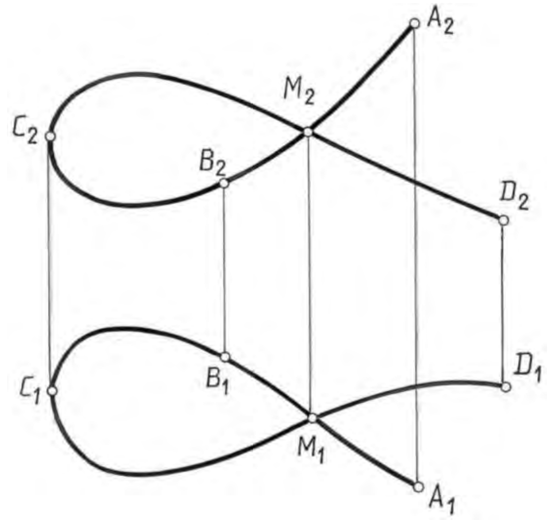



Рис. 4.3

Для создания обратимости чертежа кривой линии необходимо задать несколько точек, принадлежащих этой кривой ($A$, $B$, $C$, $D$). Чтобы установить, является кривая линия плоской или пространственной, следует взять четыре точки кривой и проверить, лежат ли они в одной плоскости (рис. 4.4). Выберем на кривой $a$ четыре точки $A$ , $B$, $C$, $D$ и проверим, лежат ли они в одной плоскости. Соединим точки $A$ и $C$, $B$ и $Д$ прямыми линиями. Если точки $A$, $B$, $C$, $D$ лежат в одной плоскости, то прямые $AC$ и $BD$ также принадлежат этой плоскости и будут пересекаться. В этом случае точки пересечения одноименных проекций прямых должны лежать на одной линии связи. На чертеже прямые $AC$ и $BD$ –

скрещивающиеся, следовательно, кривая линия *a* – пространственная кривая. Но если четыре точки кривой и лежат в одной плоскости, это еще не значит, что кривая плоская, так как именно в этих точках она может пересекать плоскость. Поэтому нужно взять пятую точку и проверить, лежит ли она в плоскости ранее взятых четырех точек, а затем шестую, седьмую и т.д., доведя проверку до необходимой точности.

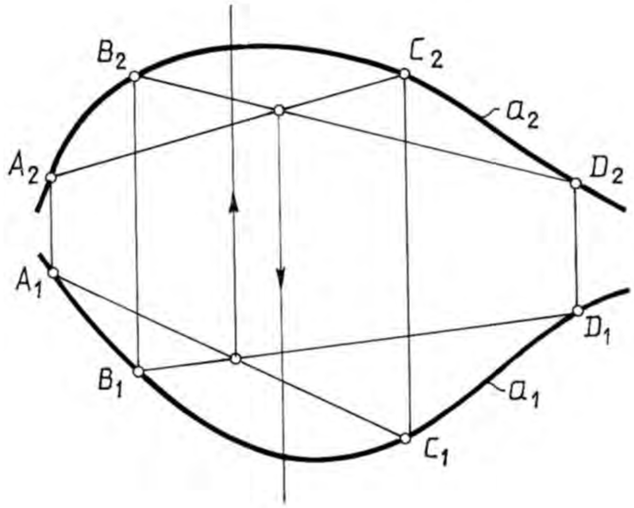



Рис. 4.4

### 4.2. **Касательные к кривым линиям**

Касательной *t* к кривой *a* в точке *A* называется предельное положение секущей, проходящей через точки *A* и *B*, когда *B*, непрерывно перемещаясь по кривой *a*, стремится к точке *A* (рис. 4.5).

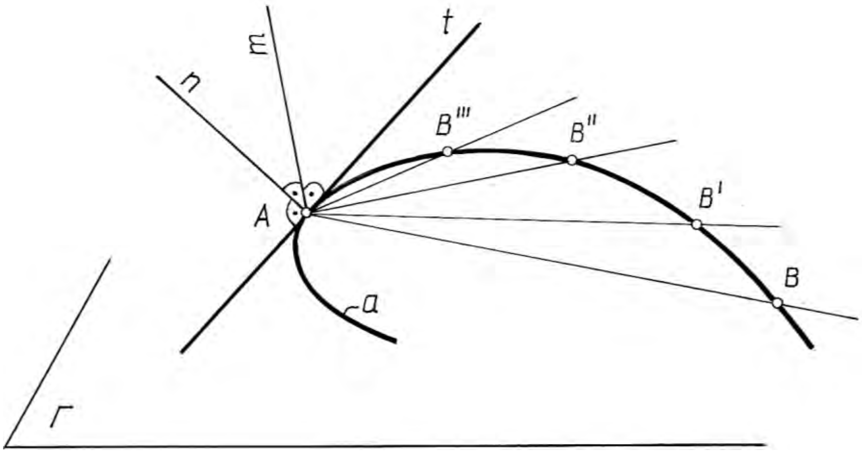



Рис. 4.5

Прямая *n*, лежащая в плоскости кривой линии и перпендикулярная к касательной *t* в точке касания *A*, называется нормалью к этой кривой в данной точке. Прямая *m*, перпендикулярная к плоскости *Г*, в любой точке кривой *a*, называется бинормалью этой кривой в рассматриваемой точке. Бинормаль *m* и касательная *t* образуют плоскость, касательную к кривой в точке *A*.

З а д а ч а  1. Построить касательную $t$ к кривой $a$ через точку $A$, не лежащую на кривой.

Из точки $A$ (рис. 4.6) проводим ряд хорд $1–1^1$, $2–2^1$, $3–3^1$, $4–4^1$ и т.д., середины которых соединяем плавной кривой. Эта кривая (кривая ошибок) пересечет данную кривую в точке $T$ – это и есть точка касания. Прямая $AT$ будет касательной к данной кривой, а прямая, перпендикулярная к $AT$ в точке $T$, будет нормалью.

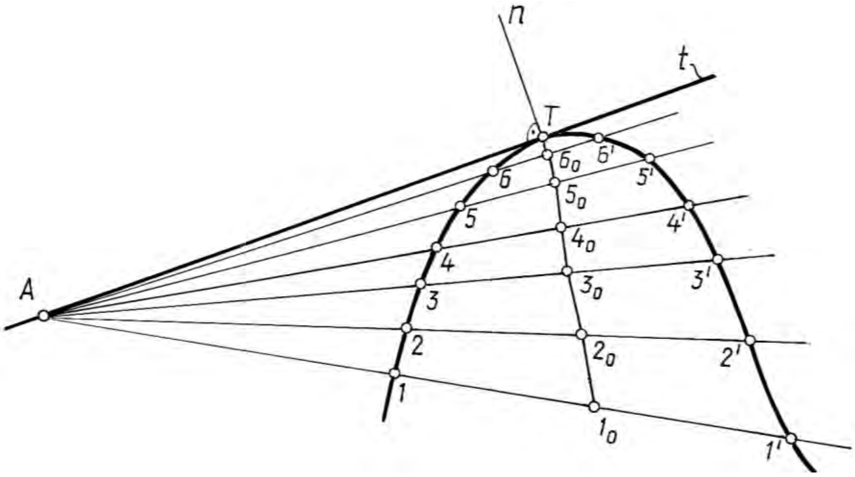



Рис. 4.6

З а д а ч а  2. Провести касательную к кривой через точку $T$, лежащую на кривой (рис. 4.7).

Проведем произвольную прямую $l$ (примерно перпендикулярно к предполагаемому направлению касательной), а через точку Т ряд хорд Т–1, Т–2, Т–3, Т–4, Т–5, пересекающих прямую $l$ в точках $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$. На этих хордах откладываем отрезки $Т–1 = 1' – 1_0$; $Т–2 = 2' – 2_0$; $Т–3 = 3' – 3_0$; $Т–4 = 4' – 4_0$; $Т–5 =$ $= 5' – 5_0$. Соединяем полученные точки $1_0$, $2_0$, $3_0$,$4_0$, $5_0$ плавной кривой (кривой ошибок), которая пересекает взятую прямую $l$ в точке $K$. Прямая $TK$ и будет искомой касательной.

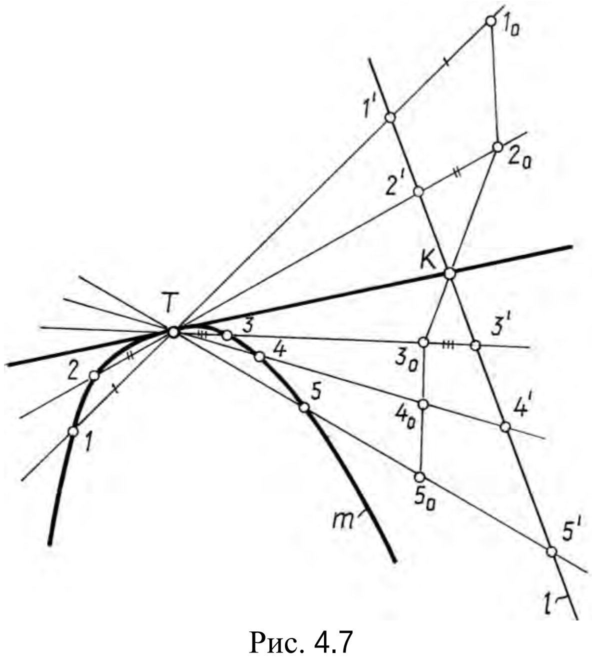



Рис. 4.7

З а д а ч а 3. Построить касательную $t$ к кривой $a$, параллельно заданном направлению $S$ (рис. 4.8).

Проводим ряд хорд параллельных заданному направлению $S$, рассекающих кривую $a$, в точках 1, 2, 3; 1', 2', 3' и т.д. Через середины полученных хорд 1–1', 2–2', 3–3' проводим кривую ошибок, которая пересечет кривую $a$ в точке $M$, точке касания. Проведем прямую через $M$ параллельно заданному направлению. Это и будет искомая касательная t.

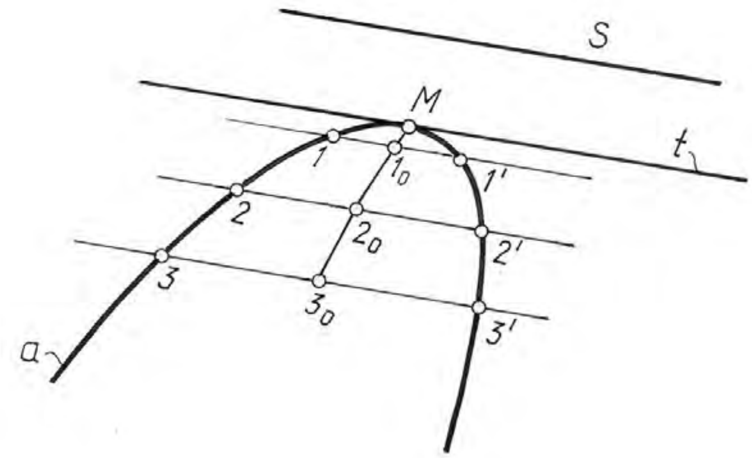



Рис. 4.8

### 4.3. Замена кривой линии кривой, состоящей из дуг окружностей

Заменяя отдельные части кривой дугами окружности, получают новую кривую, которая очень близко подходит по своему очертанию к данной кривой. Кривые, состоящие из дуг окружностей, носят название коробовых. Коробовые кривые могут быть как плоские, так и пространственные.

З а д а ч а 4. Кривую $l$ заменить коробовой кривой (рис. 4.9).

Возьмем на кривой ряд точек $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ и заменим части кривой $AB$, $BC$, $CD$ и $DE$ дугами окружности. Центры дуг определяем как пересечение соседних нормалей, проведенных через $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ соответственно. Радиус $AO_1$ опишет дугу $AB$ из центра $O_1$; радиус $BO_2$ – дугу $BC$ из центра $O_2$ и так далее. В результате кривая $l$ будет заменена на коробовую кривую.

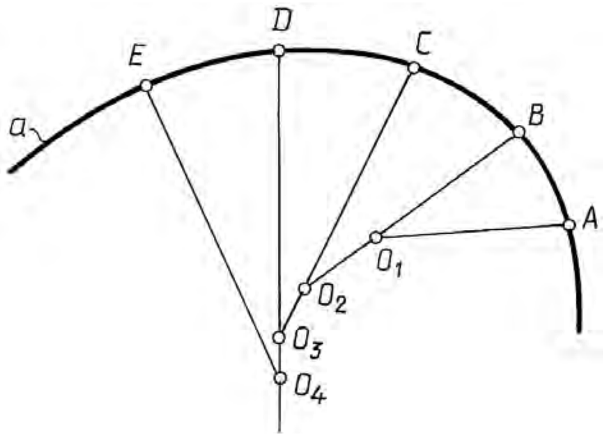



Рис. 4.9

## 4.4. **Особые точки кривой**

Точка кривой, в которой можно провести единственную касательную, называют гладкой. Кривая, состоящая из одних гладких точек, называется гладкой кривой.

Различают обыкновенные и особые точки кривой линии.

Точку кривой называется обыкновенной, если при ее движении по кривой линии направление этого движения и направления поворота касательной не изменяются (рис. 4.10).

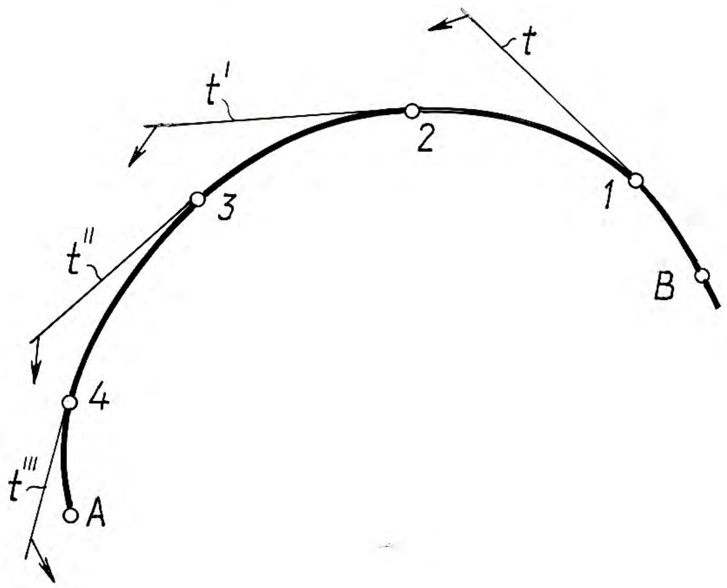



Рис. 4.10

Точки, не отвечающие этим требованиям, называются особыми. Такие точки могут получиться на чертеже при проецировании пространственных кривых и при построении линии пересечения поверхностей.

К особым точкам можно отнести следующие:

1. Точка перегиба, в которой кривая, касаясь прямой, переходит с одной ее стороны на другую.

2. Точка возврата (точка заострения) первого либо второго рода, в которую кривая возвращается по другую сторону касательной, либо по ту же сторону касательной, и направление касательной не меняется для обеих ветвей кривой.

3. Двойная точка (узел), в которой кривая пересекает сама себя. Могут быть тройные, четверные и т.д. точки. В этих точках можно провести одну, две, три и большее число касательных к заданной кривой (рис. 4.11).

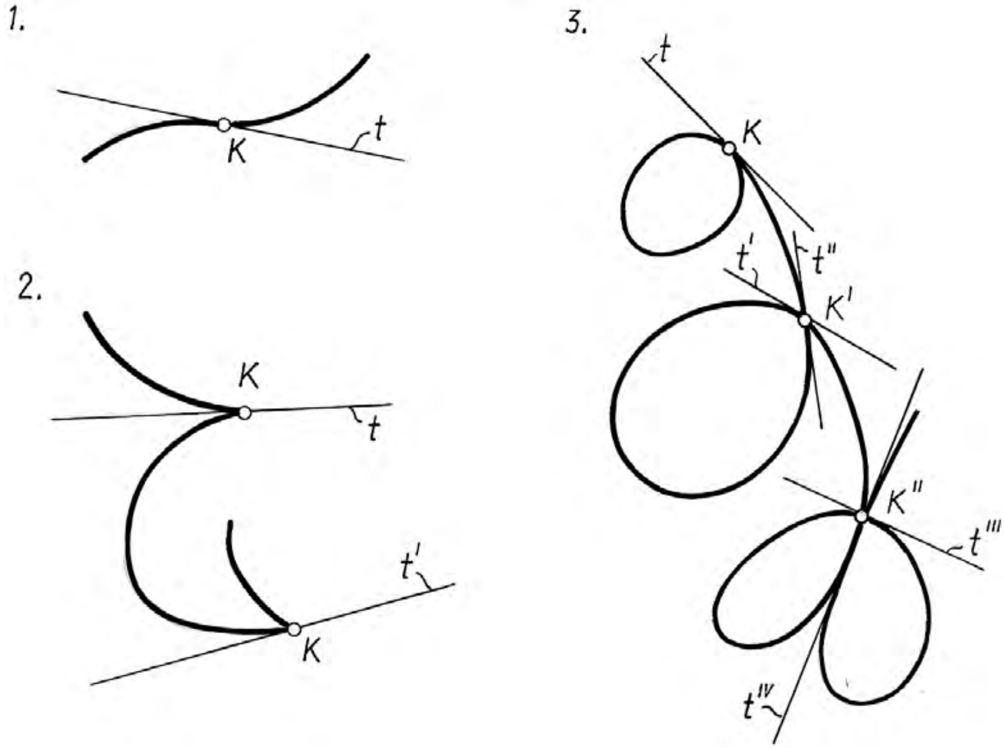



Рис. 4.11

## 4.5. Цилиндрическая винтовая линия

Наиболее распространенной из пространственных кривых является цилиндрическая винтовая линия.

Цилиндрическая винтовая линия образуется равномерным перемещением точки $A$ вдоль образующей цилиндра, которая, в свою очередь, равномерно вращается около параллельной ей оси цилиндра. Точка $A$, участвующая в двух движениях, опишет пространственную кривую линию, называемую цилиндрической винтовой линией. Ось цилиндра называется осью винтовой линии (рис. 4.12). На развертке цилиндрической поверхности винтовая линия представляется в виде прямой $A_0,1_0,\ 2_0,\ \ldots,\ 8_0$, наклоненной под углом $\alpha$ к горизонтальной прямой. Угол $\alpha$ называется углом наклона винтовой линии. Один полный оборот винтовой линии называется витком винтовой линии.

Витком винтовой линии можно назвать любую часть винтовой линии, находящуюся между двумя ее точками, лежащими на одной образующей цилиндра.

Расстояние между двумя точками винтовой линии, лежащими на одной образующей называется шагом или ходом ($P$) винтовой линии.

Зависимость между углом наклона и шагом винтовой линии следующая:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{P}{\pi D}.$$

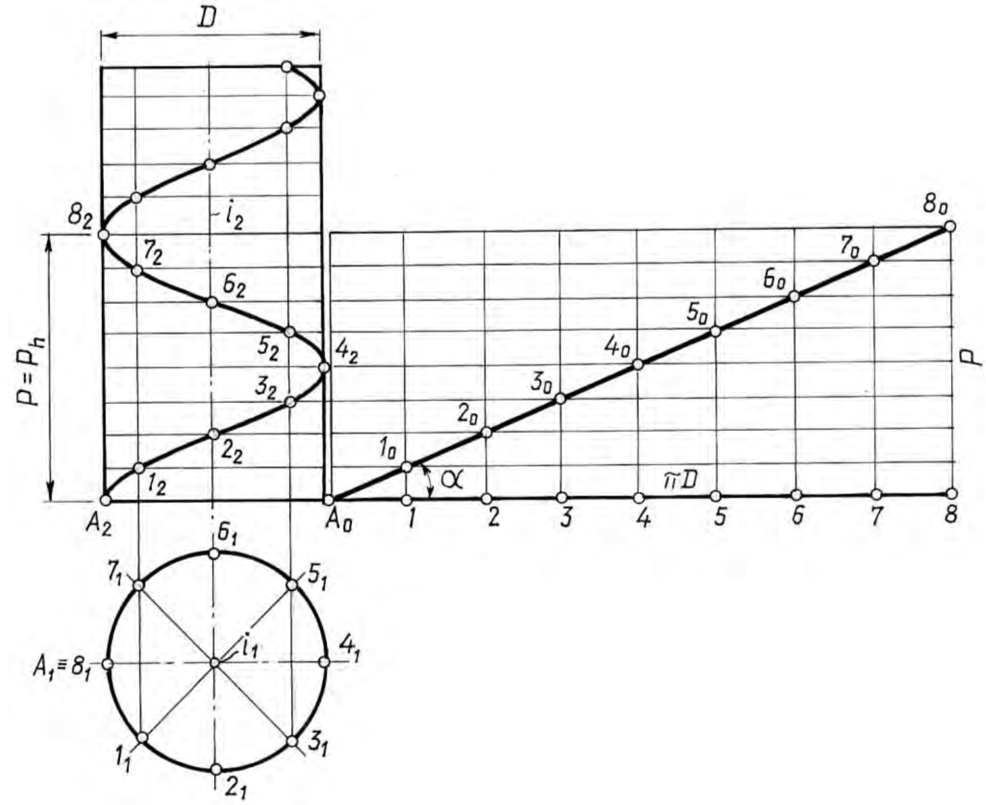



Рис. 4.12

Если при взгляде вдоль оси образующего цилиндра точка будет удаляться от наблюдателя, вращаясь по часовой стрелке, то винтовая линия называется правой.

Если точка будет удаляться от наблюдателя, вращаясь против часовой стрелки, то винтовая линия – левая.

Построение цилиндрической винтовой линии начинаем с деления горизонтальной проекции цилиндра на некоторое равное число частей. Затем строим соответствующие образующие.

Разделив шаг винтовой линии на то же число частей, что и горизонтальную проекцию основание цилиндра, проведем через полученные точки горизонтальные прямые до пересечения с соответствующими проекциями образующих.

Винтовую линию можно построить с помощью развертки винтовой линии, навернув прямоугольный треугольник с катетами $P$ и $\pi D$ на образующий цилиндр, в этом случае гипотенуза станет винтовой линией.

## 4.6. Спрямление кривой линии

Спрямлением кривой линии называется построение отрезка прямой, равного длине дуги кривой линии. Приближенное построение показано на рис. 4.13.

Разделим, например, горизонтальную проекцию кривой на некоторое количество частей. Проведем горизонтальную прямую через $A$. Отложим длины дуг $A_1$–$1_1$, $1_1$–$2_1$, $2_1$–$3_1$ и т.д. на горизонтальном отрезке, заменяя длину дуги величиной стягивающей ее хорды. Построим через каждую точку $A'_1$, $1'_1$, $2'_1$ и т.д. линии проекционной связи, перпендикулярные построенной прямой, найдем точки $A'_2$, $1'_2$, $2'_2$ и т.д. их пересечения с горизонтальными прямыми, проведенными через фронтальные проекции соответствующих точек заданной линии. Соединив найденные точки плавной кривой линией, получим развертку кривой. На произвольно взятой прямой линии отложим участки кривой развертки, заменяя кривые стягивающими их хордами $A'_2$–$1'_2$, $1'_2$–$2'_2$, $2'_2$–$3'_2$ и т.д. и получим спрямленную кривую $A$–$B$ в виде отрезка $A''_1$–$B''_1$.

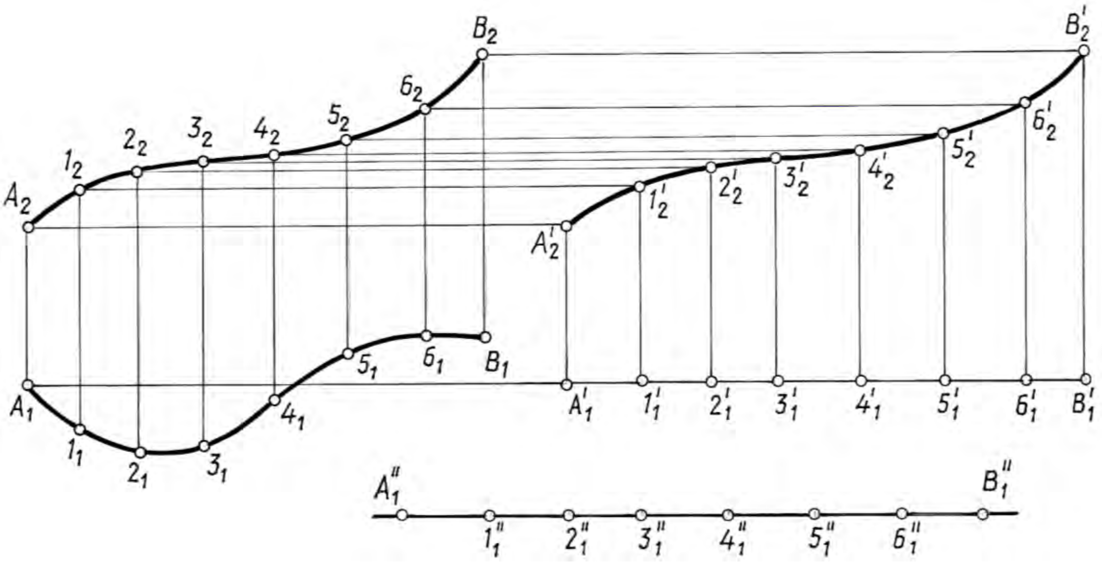



Рис. 4.13

Лекция 5

# 5. ПОВЕРХНОСТИ

Общие сведения. Способы задания поверхности на чертеже. Основные виды поверхностей в строительной практике. Точка и линия на поверхности

## 5.1. Общие сведения

В начертательной геометрии рассматривают кинематический способ образования поверхности.

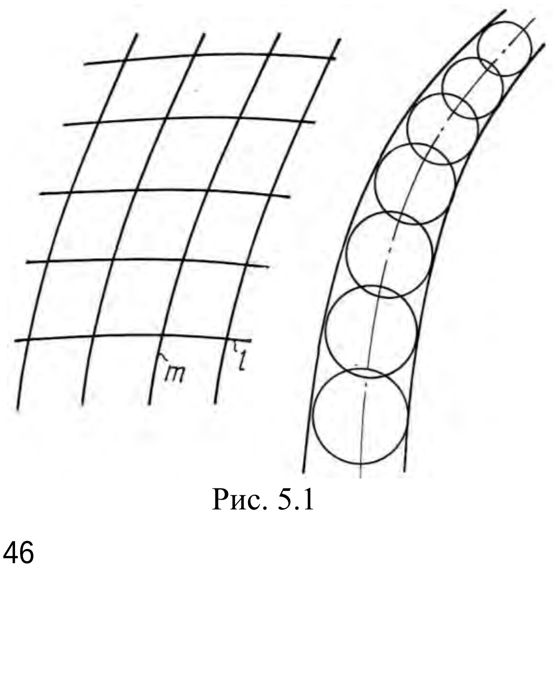



Рис. 5.1

Под поверхностью понимают совокупность последовательных положений непрерывно перемещающейся в пространстве линии (образующей).

Она может быть прямой или кривой, постоянной или непрерывно изменяющейся. Образующей может быть также поверхность (рис. 5.1). Многообразие поверхностей зависит не только от формы образующей, но и от закона ее перемещения.

Закон перемещения образующей может быть оговорен словесно (перемещение поступательное, вращательное, винтовое) или же задан графически проекциями неподвижной линии, по которой скользит образующая. Эту линию называют направляющей поверхности. Образующие и направляющие могут меняться местами.

На каждой поверхности можно выделить два множества линий: множество образующих и множество направляющих, при этом должно быть выполнено условие, что линии одного множества между собой не пересекаются, но каждая линия одного множества пересекает все линии другого множества.

Многие поверхности можно рассматривать, как образованные различными приемами, так, например, поверхность цилиндра вращения (рис. 5.2) можно рассматривать как поверхность, образованную вращением вокруг оси прямой или кривой линии, принадлежащей поверхности, или же как поверхность, образованную поступательным перемещением окружности, когда центр окружности перемещается по неподвижной оси цилиндра, а плоскость окружности остается перпендикулярной этой оси.

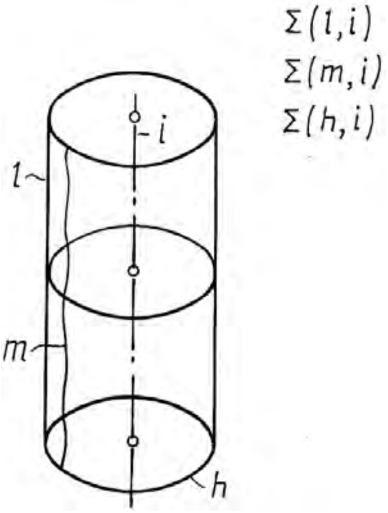


Рис. 5.2

Из множества вариантов образования поверхности следует выбирать те из них, которые сочетают простую форму образующей с несложной кинематикой ее перемещения, так как такие варианты удобны для изображения данной поверхности на чертеже и решения конкретных задач, связанных с ней.

## 5.2. Способы задания поверхности на чертеже.

Поверхность считается заданной на чертеже, если относительно каждой точки пространства можно однозначно решить, принадлежит ли она данной поверхности.

Принадлежность точки поверхности определяется аналогично тому, как это делалось при выяснении вопроса принадлежности точки плоскости (см. рис. 5.2).

Точка принадлежит поверхности в том случае, если она принадлежит некоторой линии данной поверхности. В качестве таких линий выбирают обычно графически простые линии поверхности (прямые или окружности).

В инженерной практике поверхность задают различными способами:

- моделью;
- геометрическим множеством точек, отвечающих определенным условиям;
- уравнением;
- чертежом и т.д.

Рассмотрим способы задания поверхности чертежом.

Поверхность на чертеже может быть задана определителем, очерком или каркасом, а также их сочетанием.

Совокупность условий, однозначно определяющих поверхность, т.е, выделяющих ее из всего многообразия поверхностей, называют определителем поверхности.

В определитель поверхности входят форма образующей и направляющей – геометрическая часть определителя, а также дополнительные условия, позволяющие реализовать или наиболее полно описать закон перемещения образующей.

З а д а ч а. Построить недостающую проекцию точки $A$, принадлежащей данной поверхности $\Sigma$ (рис 5.3).

Дано: $\Sigma\ (m,l)$ – заданная поверхность. $l' \parallel l$. $A \subset \Sigma$.

$A_2$ – ?

Решение:

$$l'_1 \parallel l_1; \quad l'_1 \supset A_1 \quad l'_1 \cap m_1 = 1_1 \quad l'_2 \supset 1_2;$$
$$l'_2 \parallel l_2; \quad A_2 \subset l_2.$$

Через известную проекцию точки $A$ проводим образующую $l'_1 \parallel l_1$ до пересечения с горизонтальной проекцией направляющей $m_1$. Строим вторую проекцию образующей $l'_2 \parallel l_1$ через $1_2$ – фронтальную проекцию точки 1. На $l'_2$ с помощью линии связи получаем $A_2$.

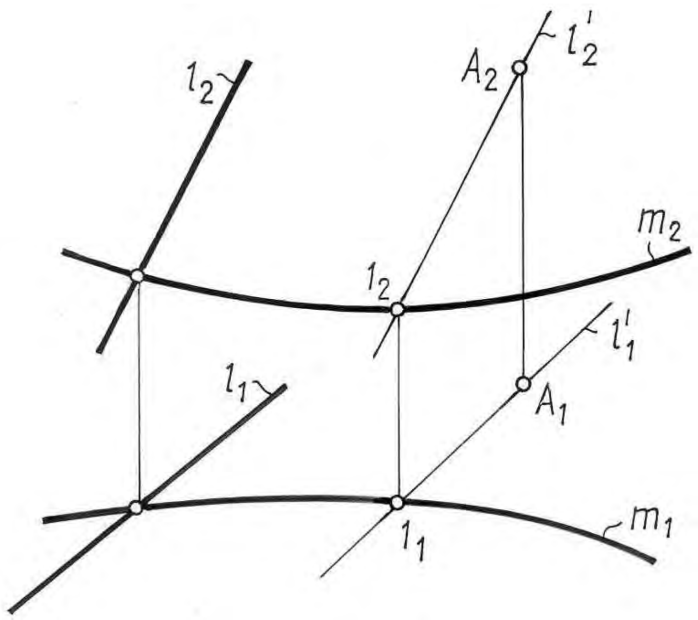



Рис. 5.3

Задание поверхности на чертеже проекциями ее определителя не обладает достаточной наглядностью, поэтому с целью увеличения наглядности на чертеже, кроме наиболее важных точек и линий, определяющих поверхность, строят еще и ее очерк. В некоторых случаях поверхность может быть задана только очерком.

Очерком поверхности на данной плоскости проекций (рис. 5.4) называют линию пересечения плоскости проекций с проецирующей поверхностью, образованной лучами, касающимися данной поверхности. Линию касания заданной поверхности с проецирующей поверхностью называют линией контура. Очерк поверхности можно рассматривать также как проекцию линии контура поверхности на данную плоскость проекций.

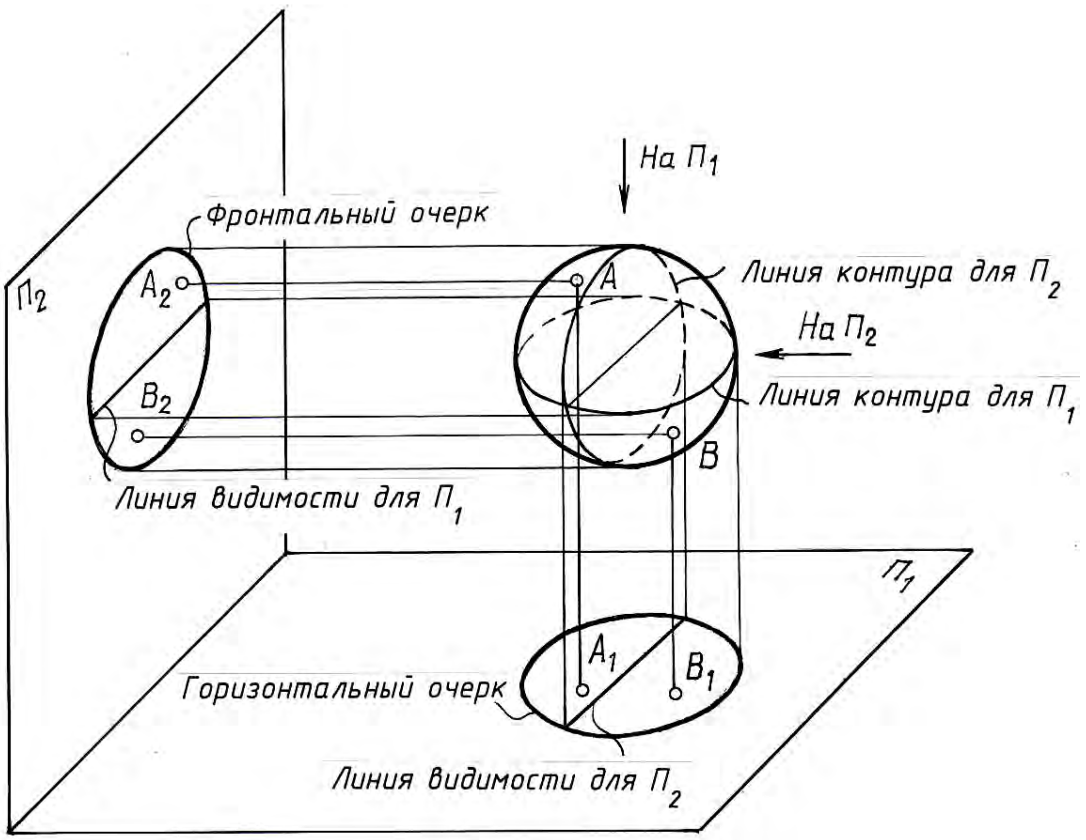



Рис. 5.4

Линия контура делит поверхность на видимую и невидимую части. Видима на данной плоскости проекций та часть поверхности, которая расположена между глазом наблюдателя и линией контура, та же часть поверхности, которая расположена за линией контура – невидима. Так, в проекции на плоскость $П_2$ точка *B* видима, а точка *A* невидима, на плоскость $П_1$ точка *A* видима, точка *B* невидима.

Проекцию линии контура на плоскость, перпендикулярную данной плоскости проекций, называют линией видимости. По расположению этой линии на проекциях судят о видимости точек в той или иной проекции.

В общем случае поверхность может быть задана каркасом.

Каркас поверхности – это совокупность некоторого числа линий, принадлежащих ей (см. рис. 5.5).

Каркас может быть непрерывный и дискретный. Под непрерывным каркасом поверхности понимают множество линий, сплошь заполняющее данную поверхность, это по существу кинематический способ задания поверхности на чертеже.

Дискретный каркас поверхности – это совокупность отдельных линий данной поверхности.

Задание поверхности дискретным каркасом не является достаточно полным, так как при этом однозначно не определяется положение точек поверхности, находящихся между отдельными линиями каркаса.

Это значит, что при одном и том же дискретном каркасе можно получить поверхности, несколько отличающиеся друг от друга. К заданию поверхности дискретным каркасом прибегают в том случае, если образование поверхности не подчинено никакому геометрическому закону.

Примером поверхностей, задаваемых дискретным каркасом, являются поверхности обшивки самолетов, кузова автомобилей, рельеф земной поверхности и т.д.

На чертеже такие поверхности задают обычно проекциями некоторых линий каркаса, которые рассматривают как результат пересечения поверхности плоскостями уровня (рис. 5.6).

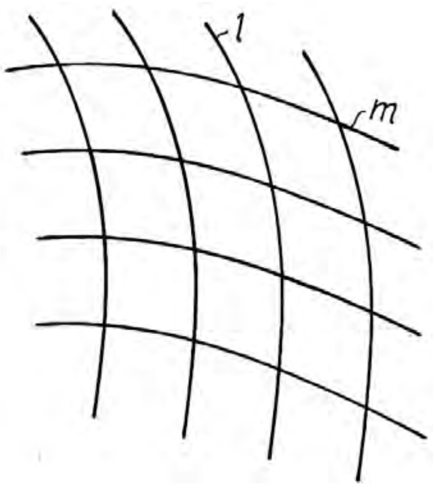



Рис. 5.5

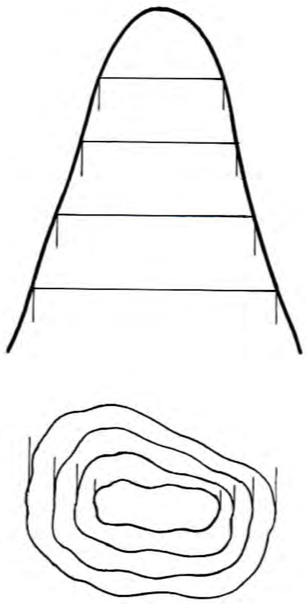


Рис. 5.6

## 5.3. **Основные виды поверхностей в строительной практике**

Поверхности по их определенным признакам могут быть разбиты на ряд отдельных классов, причем деление это во многих случаях условное, так как одна и та же поверхность, исходя из того, какой ее признак положен в основу классификации, может быть отнесена одновременно к двум и более классам.

1. По форме образующей поверхности: линейчатые и нелинейчатые.

Поверхность, которая может быть образована перемещением прямой линии, называется линейчатой.

Поверхность, для которой образующей может быть только кривая линия, называется нелинейчатой, т. е. криволинейной.

2. По закону движения образующей поверхности: поверхности вращения, поверхности с поступательным перемещением образующей, винтовые поверхности.

3. По признаку развертываемости поверхности делят на развертываемые и неразвертываемые.

Развертываемые поверхности можно без разрывов и складок совместить с плоскостью проекций.

4. По закону образования поверхности делят на закономерные и незакономерные.

Если известен закон образования поверхности, ее называют закономерной, в противном случае – незакономерной.

5. Если поверхность состоит из отсеков плоскостей, ее называют гранной, все остальные поверхности – кривыми.

Следует отметить, что это неполная классификация поверхностей, так как кроме перечисленных в основу могли быть взяты иные признаки поверхности.

### *5.3.1. Торсовые поверхности*

Возьмем кривую линию двоякой кривизны $n$ (рис. 5.7) и отметим на ней ряд произвольных точек $A$, $B$, $C$, $D$ и проведем секущие $AB$–$a$, $BC$–$b$, $CD$–$c$.

Если точки $ABCD$ взяты достаточно близко друг к другу, то секущие пары $AB$–$a$ и $BC$–$d$, $BC$–$b$ и $CD$–$c$ и т.д., образуют плоскости, которые наклонены друг к другу. Совокупность всех плоских элементов образует многогранную поверхность, т.к. кривая $n$ – пространственная. У такой поверхности пересекающиеся прямые $a \cap b$, $b \cap c$ и т.д. образуют грани, а прямые $a$, $b$, $c$ и т.д. – ребра. При бесконечном увеличении точек на кривой хорды $AB$, $BC$, $CD$ будут стремиться к нулю, секущие перейдут в касательные, а многогранная поверхность – в линейчатую кривую поверхность, называемую торсом (рис. 5.8).

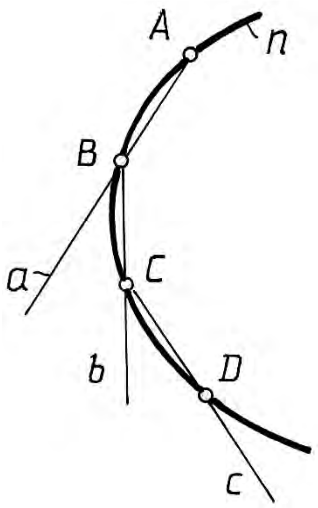


Рис. 5.7

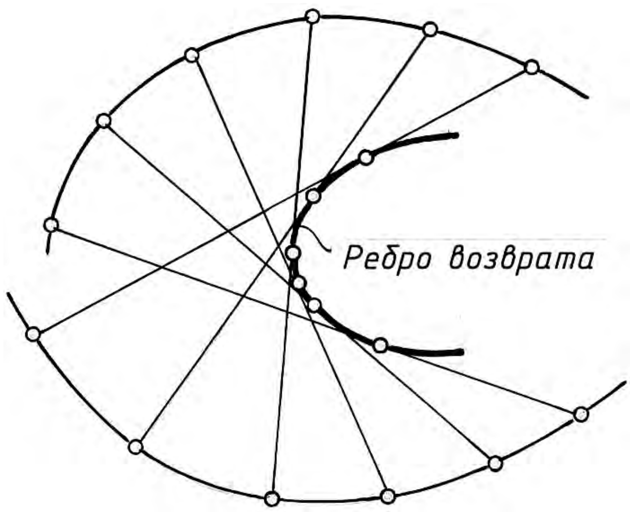


Рис. 5.8

Иными словами, торсом называется поверхность, образованная непрерывным перемещением прямолинейной образующей, во всех своих положениях касающейся некоторой пространственной кривой – ребра возврата.

В случае вырождения ребра возврата в точку (конечную или бесконечно удаленную) поверхность торса превращается в коническую или цилиндрическую.

### *5.3.2. Линейчатые поверхности с плоскостью параллелизма (поверхности Каталана)*

Линейчатые поверхности с двумя направляющими требуют дополнительного условия для их задания, т.к. две направляющие не определяют однозначно положения поверхности в пространстве. Таким дополнительным условием является направляющая плоскость или плоскость параллелизма, которой параллельны все образующие рассматриваемой поверхности.

Кривая поверхность, образованная непрерывным перемещением прямолинейной образующей $l$, во всех своих положениях пересекающей две пространственные кривые $m$ и $n$ (направляющие) и остающейся параллельной заданной плоскости параллелизма, называется цилиндроидом (рис. 5.9, *а*).

Кривая поверхность, образованная непрерывным перемещением прямолинейной образующей $l$, во всех своих положениях пересекающей одну пространственную кривую $m$ и вторую прямолинейную направляющую $n$ и остающейся параллельной заданной плоскости параллелизма, называется коноидом (рис. 5.9, *б*).

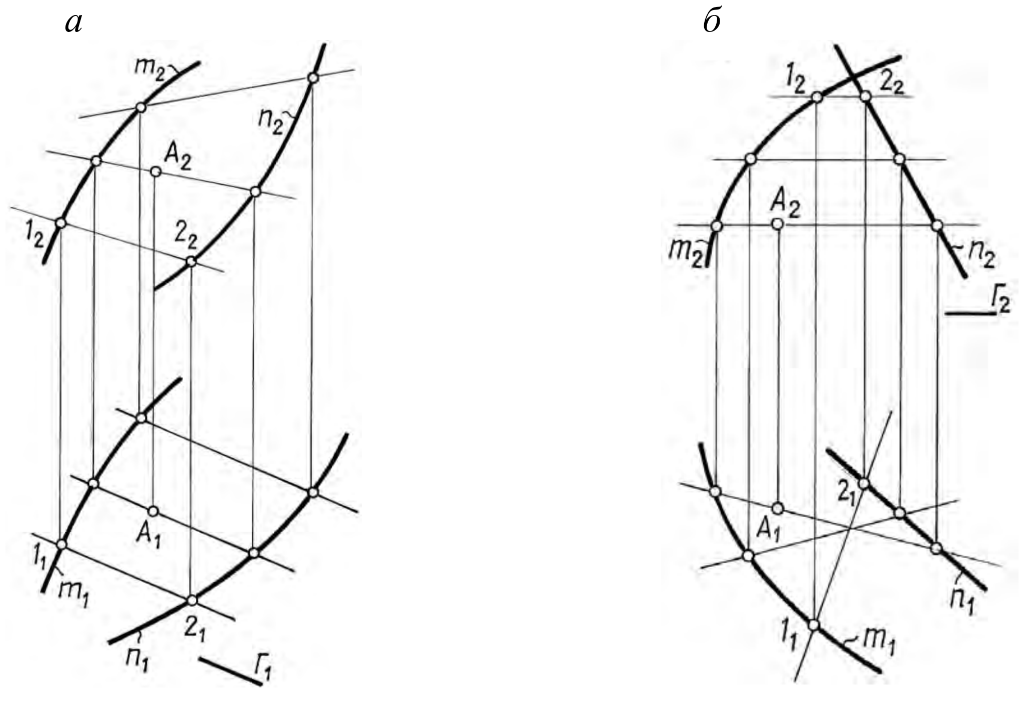



Рис. 5.9:
*а* – цилиндроид; *б* – коноид

Кривая поверхность, образованная непрерывным перемещением прямолинейной образующей $l$, во всех своих положениях пересекающей две скрещивающиеся прямые $m$ и $n$ и остающейся параллельной заданной плоскости параллелизма, называется косой плоскостью или гиперболическим параболоидом (рис. 5.10).

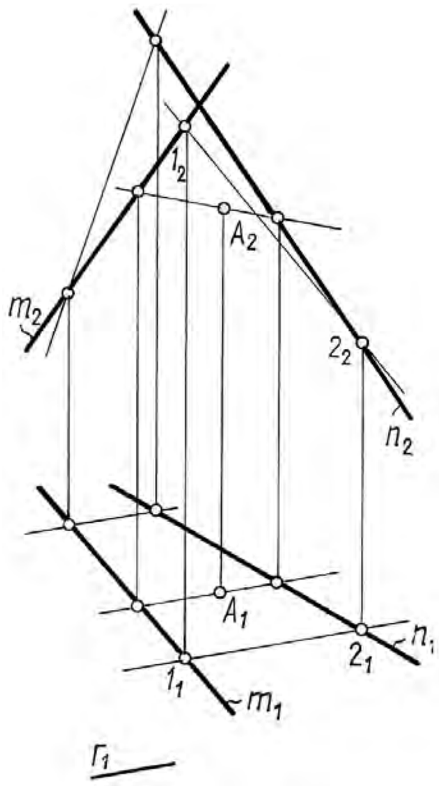



Рис. 5.10

### *5.3.3. Поверхности вращения*

Поверхностью вращения называют поверхность, образованную вращением некоторой линии (образующей поверхности) вокруг неподвижной прямой, называемой осью поверхности. Образующей поверхности вращения может быть прямая, любая плоская или пространственная кривая

Поверхность вращения считается заданной, если известны ее образующая и ось, которые и являются определителем поверхности.

Рассмотрим поверхность вращения (тело) общего вида (рис. 5.11). Для удобства ось поверхности возьмем перпендикулярной плоскости $\Pi_1$.

Все точки образующей $l$ при ее вращении вокруг оси $i$ описывают окружности, плоскости которых перпендикулярны оси поверхности, т.е. являются плоскостями уровня. Эти окружности называют параллелями поверхности. Они проецируются без искажения на ту плоскость проекций, которой параллельны.

Среди множества ближайших смежных параллелей поверхности выделяют параллель наименьшего радиуса, которую называют горлом поверхности, и параллель наибольшего радиуса, называемую экватором поверхности. Поверхность может иметь несколько параллелей, называемых горлом и экватором.

Любая плоскость, проходящая через ось поверхности вращения, например, плоскость Θ, пересекает ее по образующим, называемым меридианами поверхности. У поверхности вращения все меридианы равны.

Тот меридиан, проекция которого дает очерк поверхности, называют главным.

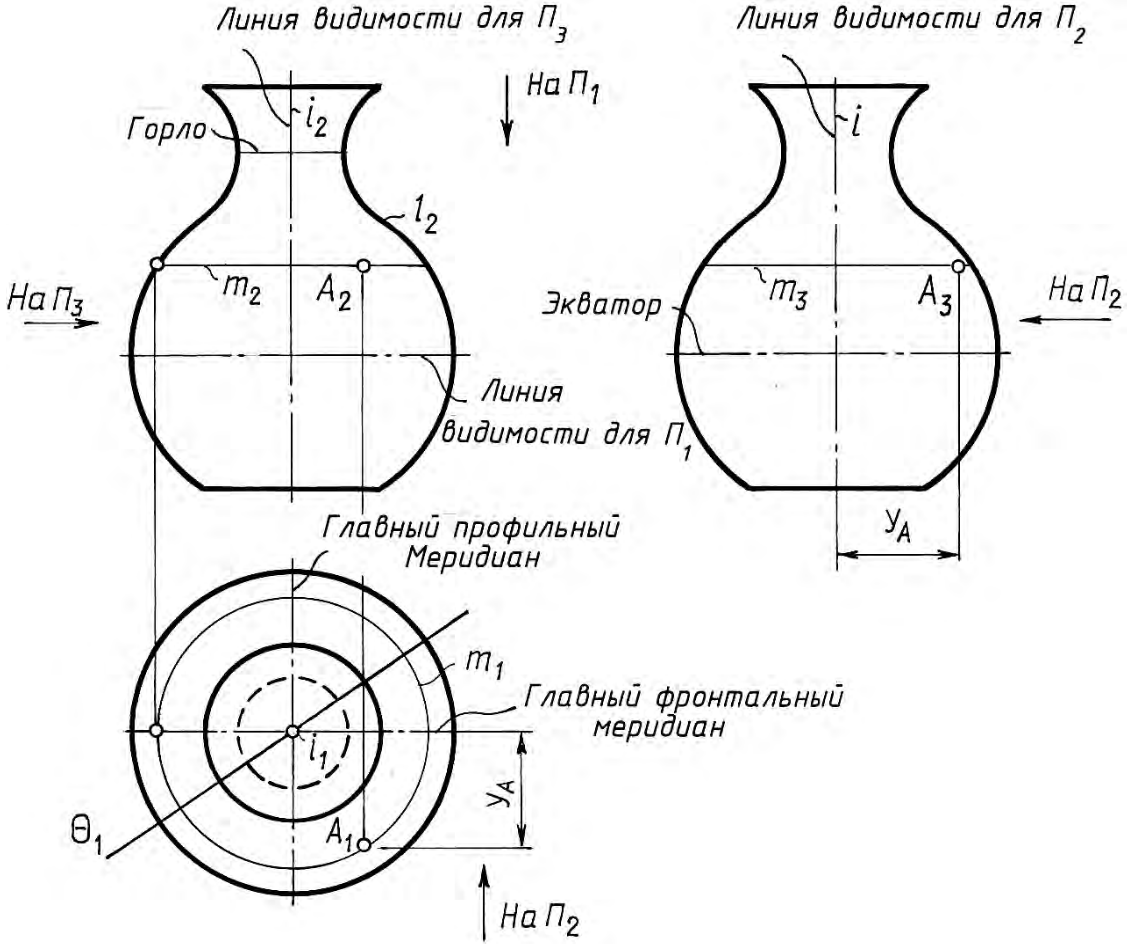



Рис. 5.11

Меридиан, принадлежащий плоскости, параллельной фронтальной плоскости проекций, называют не только главным, но еще и фронтальным, а меридиан, расположенный в плоскости, параллельной профильной плоскости проекций, называют профильным меридианом.

Для поверхности вращения любая меридиальная плоскость является плоскостью симметрии. Заметим, что каркас поверхности вращения может быть составлен из меридианов и параллелей.

Для поверхности вращения графически простой линией является ее параллель, т.е. окружность. Поэтому для того, чтобы построить недостающую проекцию точки, принадлежащей поверхности вращения, в качестве вспомогательной линии, проходящей через данную точку поверхности, проводят ее параллель.

Построение вспомогательной параллели начинают с проведения той ее проекции, которая одноименна с заданной проекцией точки.

Так, на рис. 5.11 через заданную фронтальную проекцию $A_2$ точки $A$ проведена фронтальная (вырожденная) проекция параллели, т.е. горизонтальная прямая, пересечение которой с фронтальным очерком дает радиус параллели. Построив горизонтальную проекцию параллели, намечаем на ней искомую горизонтальную проекцию $A_1$ с учетом того, что по условию задачи точка $A$ в проекции на $П_2$ видима. Заметим, что во фронтальной проекции видимы те точки поверхности, которые расположены перед фронтальным меридианом.

Горизонтальную проекцию фронтального меридиана, иначе горизонтальную проекцию фронтального очерка называют линией видимости для проекции на плоскость $П_2$.

Поэтому во фронтальной проекции видимы те точки поверхности, которые расположены перед линией видимости для плоскости $П_2$.

Аналогично можно сказать, что в профильной проекции видимы те точки поверхности, которые расположены перед линией видимости для плоскости $П_3$ (см. стрелку на $П_3$ на рис. 5.1).

Видимость точки в горизонтальной проекции определяется видимостью в горизонтальной проекции соответствующей параллели, которой принадлежит точка.

Поверхность вращения называют линейчатой в том случае, если ее образующей является прямая линия.

Если прямая образующей поверхности вращения параллельна оси поверхности, получаем поверхность цилиндра вращения, если пересекает ось, получаем поверхность конуса вращения, если же скрещивается – поверхность однополостного гиперболоида вращения.

Поверхности, как правило, задают на чертеже их отсеками, что во многих случаях совпадает с изображением на чертеже соответствующих геометрических тел.

## 5.4. **Точка и линия на поверхности**

В общем случае линия на любой поверхности строится по точкам.

Среди множества точек линии выделяют так называемые характерные (опорные) точки. К ним относятся:

а) точки видимости, расположенные на очерковых образующих. Они делят линию на видимую и невидимую части;

в) точки, лежащие на осях симметрии;

б) экстремальные точки, т.е. наиболее близкие или удалённые от плоскости проекций;

г) для многогранников – точки, лежащие на ребрах.

Эти точки подлежат обязательному построению.

Кроме опорных точек в зависимости от вида линии для ее построения может быть использовано любое количество случайных точек.

Ниже показаны приемы построения точек и линий на различных поверхностях.

### *5.4.1. Многогранники*

Поверхности, ограниченные отсеками плоскостей, называют гранными.

Многогранником называют тело, ограниченное плоскими многоугольниками. Элементами многогранников являются его вершины и ребра. Из многогранников рассмотрим призму и пирамиду. У призмы боковые ребра параллельны друг другу, у пирамиды они пересекаются в одной точке.

Рассмотрим построение проекций линии, принадлежащей боковой поверхности призмы по ее заданной фронтальной проекции (рис. 5.12). Задачу будем решать в трех проекциях, так как в инженерной практике во многих случаях требуется умение выполнять проекции изделия более чем на двух плоскостях проекций. Данная призма прямая. Ее ребра – горизонтально проецирующие прямые, значит, боковые грани призмы тоже представляют собой горизонтально проецирующие плоскости.

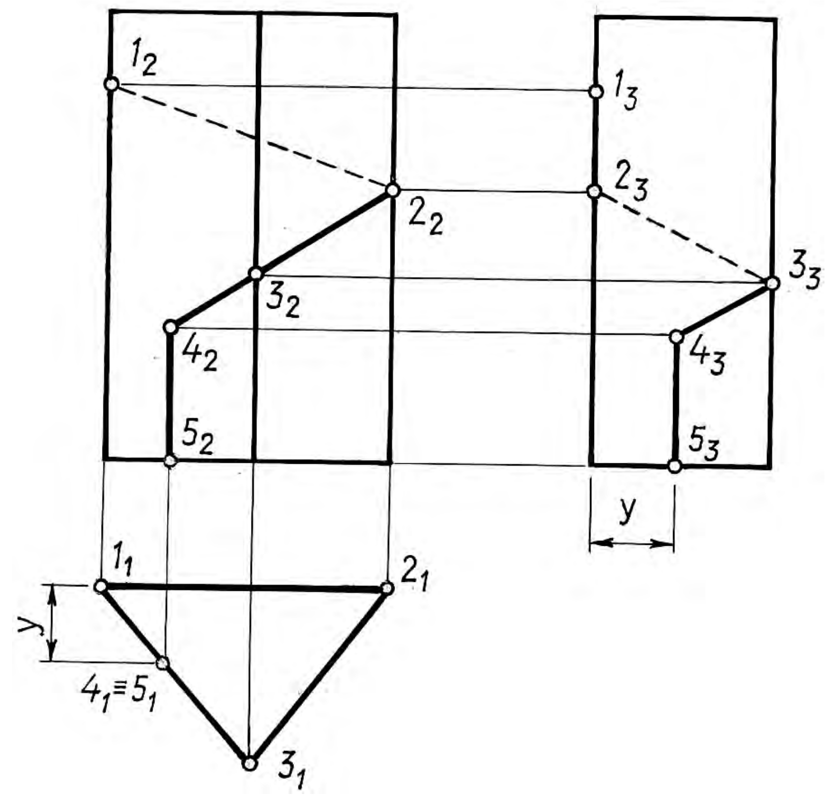



Рис. 5.12

Горизонтальная проекция такой призмы вырождается в треугольник, обладающий собирательным свойством. Это значит, что горизонтальные проекции всех точек, принадлежащих боковой поверхности призмы располагаются на этом треугольнике (горизонтальном очерке призмы).

Строим профильную проекцию призмы, принимая за базу отсчета измерений в направлении оси $Y$ заднюю грань призмы. Построение недостающих проекций точек заданной линии начинаем с того, что обозначаем на фронтальной проекции цифрами точки, подлежащие определению в других проекциях. Это будут точки, принадлежащие ребрам призмы (1, 2, 3, 5) и точка излома (4).

Отметив горизонтальные проекции обозначенных точек, строим их профильные проекции, используя для этого измерения в направлении осей $Y$, $Z$.

Соединение полученных точек в профильной проекции производим с учетом видимости в последовательности, определяемой их расположением во фронтальной проекции. Заметим, что отрезками прямых соединяем точки, принадлежащие одной грани, и на видимой грани получаем видимые отрезки прямых.

Рассмотрим построение линии на поверхности пирамиды по ее фронтальной проекции (рис. 5.13).

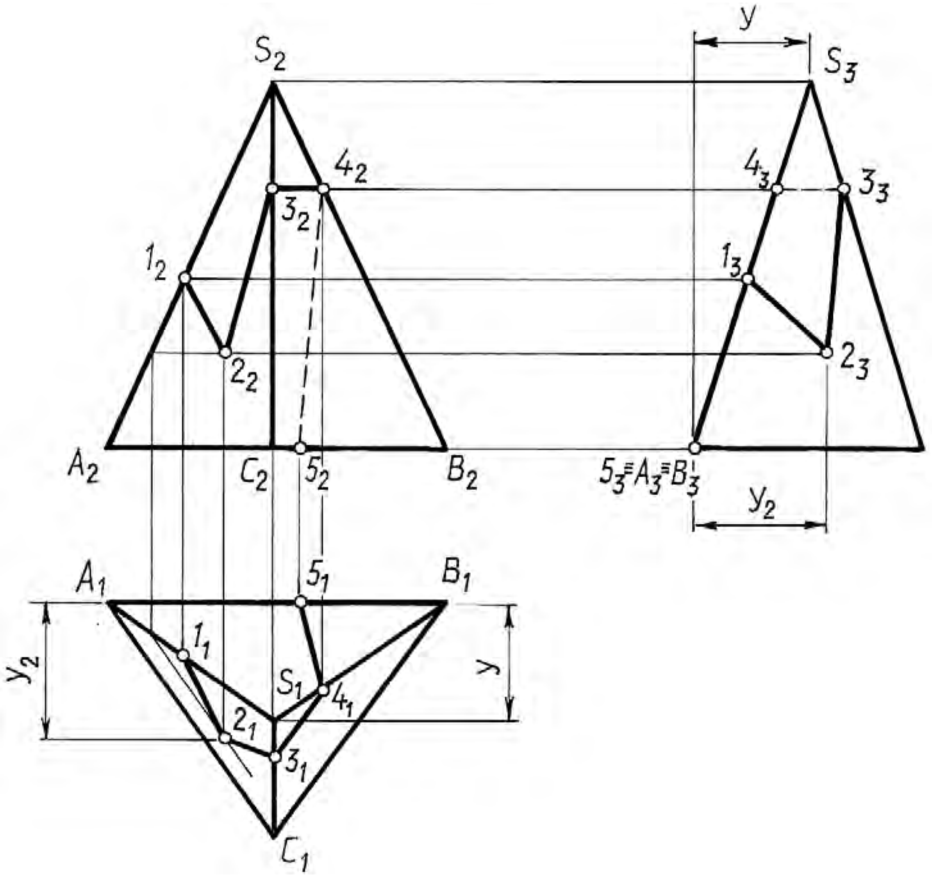



Рис. 5.13

Анализируя проекции пирамиды, видим, что две ее передние грани являются плоскостями общего положения, задняя грань – профильно проецирующая плоскость, основание – горизонтальная плоскость. Отмечаем на фронтальной проекции точки, подлежащие определению в двух других проекциях. Это будут точки, принадлежащие ребрам пирамиды (1, 3, 4, 5) и точка излома (2). Горизонтальные и профильные проекции отмеченных точек находим, исходя из принадлежности их к ребру или грани пирамиды. При этом помним, что точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой плоскости. Так, для определения горизонтальной проекции точки 2 проведена фронтальная проекция вспомогательной прямой, параллельной ребру основания пирамиды, найдена её горизонтальная проекция и на ней отмечена проекция $2_1$.

Профильные проекции отмеченных точек строят по двум проекциям (фронтальной и горизонтальной), используя для этого измерения в направлении осей $z$ и $y$. Заметим, что проекции $4_3$, $1_3$, $5_3$ располагаются на вырожденной проекции грани $ASB$.

### *5.4.2. Поверхности вращения*

Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью вращения и двумя секущими плоскостями, называют круговым цилиндром.

На рис. 5.14 показан цилиндр вращения, ось которого перпендикулярна плоскости $П_1$. Такой цилиндр называют горизонтально проецирующим, так как все его образующие – горизонтально проецирующие прямые. Его боковая поверхность в проекции на горизонтальную плоскость вырождается в окружность, обладающую собирательным свойством. Это значит, что горизонтальные проекции всех точек и линий, принадлежащих боковой поверхности цилиндра располагаются на этой окружности.

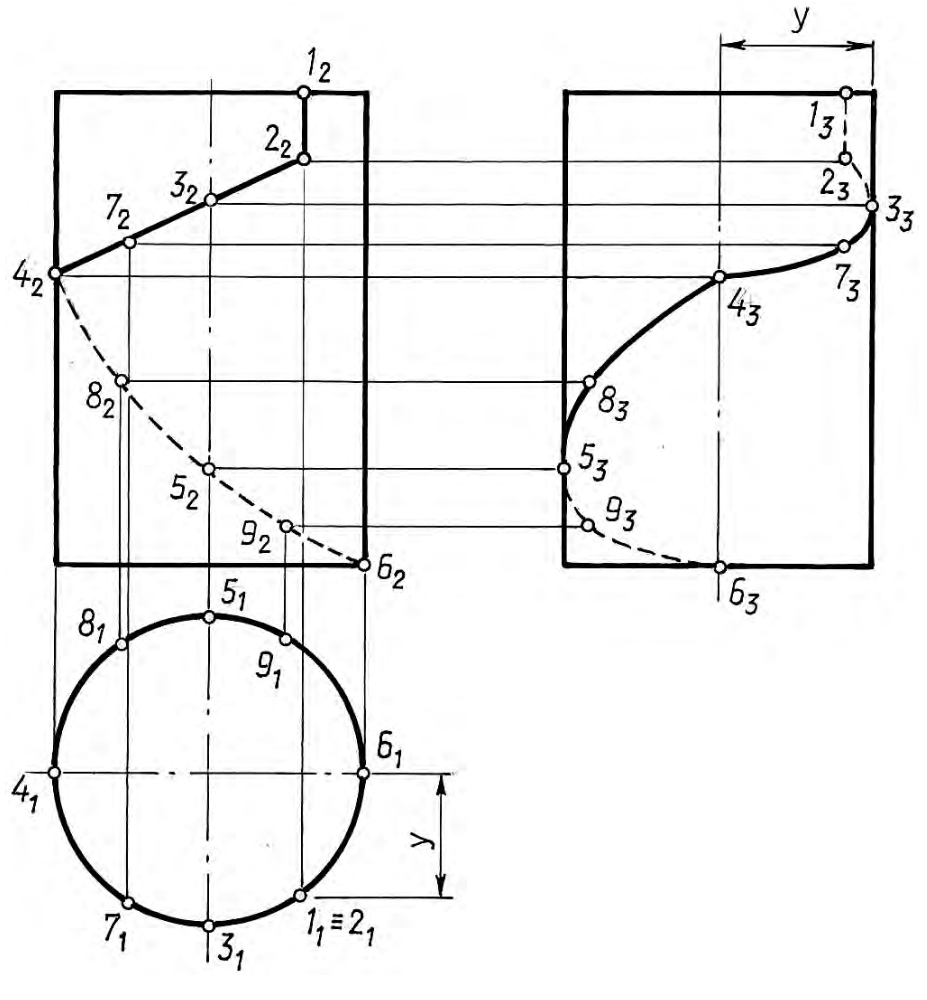



Рис. 5.14

Рассмотрим построение линии на поверхности цилиндра по ее заданной фронтальной проекции (см. рис. 5.14.). Построение проекций заданной линии начинаем с того, что отмечаем на ней цифрами точки, принадлежащие очерковым образующим, и точки излома линии. Эти точки называют характерными. Между ними в случае надобности отмечают так называемые случайные точки, помогающие установить характер линии.

Точка 3 принадлежит передней образующей, 5 – задней, 4 – правой, 6 – левой. Правая и левая образующие в проекции на плоскость $П_3$ сливаются с осью цилиндра. Точка 2 – точка излома, точки 7, 8, 9 – случайные. Так как данный цилиндр горизонтально проецирующий, то горизонтальные проекции всех отмеченных точек располагаются на вырожденной проекции боковой поверхности цилиндра, т.е. на окружности. Профильные проекции точек строим по двум заданным, при этом за базу отсчета измерений в направлении оси *y* принимаем фронтальную плоскость, проходящую через ось поверхности.

При соединении точек в профильной проекции следует учитывать их видимость и характер получаемой линии.

Для определения видимости в профильной проекции делаем анализ расположения точек относительно линии видимости для плоскости $П_3$. Точки 1, 2, 9, 6 в профильной проекции невидимы, так как они расположены правее линии видимости для $П_3$.

Заметим, что цилиндрическую поверхность вращения можно рассматривать как множество прямых, отстоящих от данной прямой (оси цилиндра) на расстоянии, равном радиусу цилиндра.

Тело, ограниченное конической поверхностью вращения и плоскостью, пересекающей все образующие конуса, называют круговым конусом.

Принадлежность точки поверхности конуса определяется с помощью образующих или параллелей конуса, проходящих через данную точку (рис. 5.15, *а*, *б*).

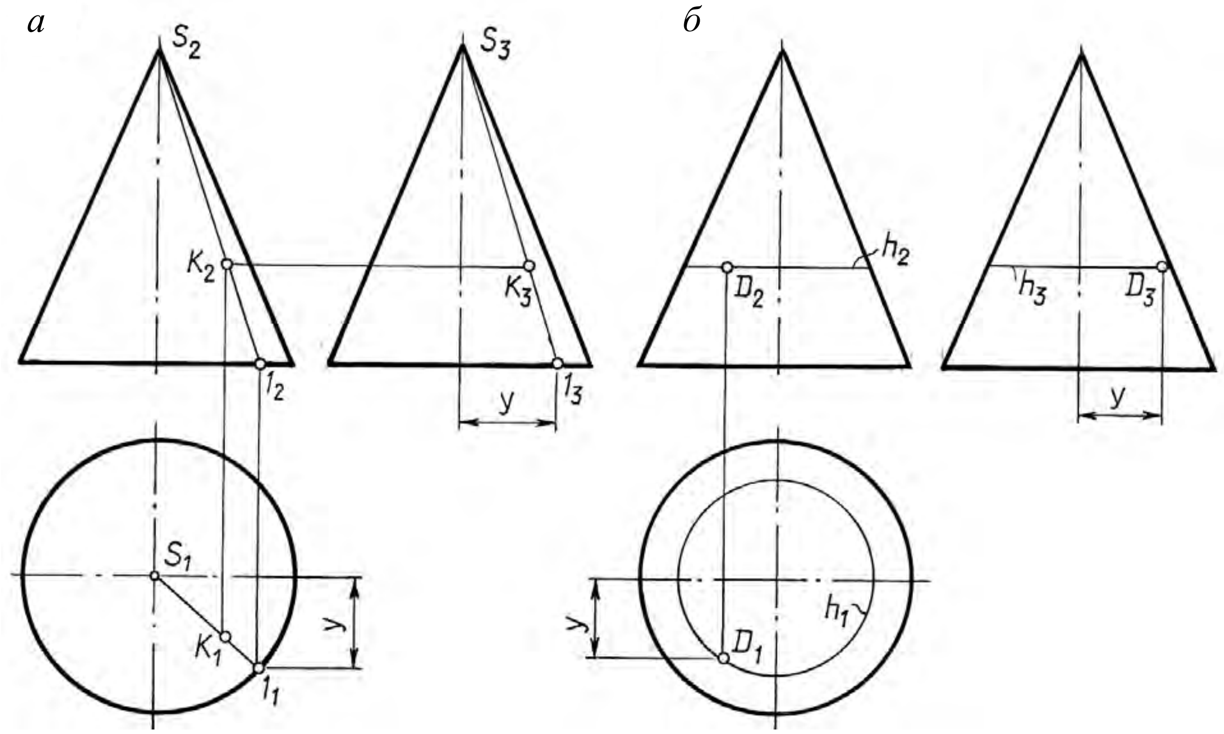



Рис. 5.15

З а д а ч а. Дано: $\Sigma$ – конус вращения; $K \subset \Sigma$; $D \subset \Sigma$. Найти: $K_2$ – ?, $K_3$ – ?, $D_1$ – ?, $D_3$ – ?

Недостающие проекции точки $K$ строим с помощью образующей $S_1$, проходящей через эту точку, а проекции $D_1$, $D_3$ – с помощью параллели (окружности) $h$.

Точка $K$ видима во фронтальной проекции и невидима в профильной. Точка $D$ видима во фронтальной и профильной проекциях. На горизонтальной проекции обе точки видимы.

При построении линии, принадлежащей поверхности конуса, в первую очередь строят характерные точки, принадлежащие очерковым образующим конуса, затем – случайные точки данной линии.

Коническую поверхность вращения можно рассматривать как множество прямых, составляющих с данной прямой (осью конуса) определенный угол.

При вращении окружности вокруг ее диаметра образуется поверхность вращения, называемая сферой. Часть пространства, ограниченную сферой, называют шаром. Все три очерка шара одинаковы (рис. 5.16). Фронтальный очерк шара является фронтальной проекцией главного фронтального меридиана шара, горизонтальной – проекцией экватора шара, профильный – профильной проекцией его профильного меридиана. Если точка принадлежит очерку шара, то проекции точки располагаются на соответствующих проекциях этого очерка (см. точки 1, 2, 3).

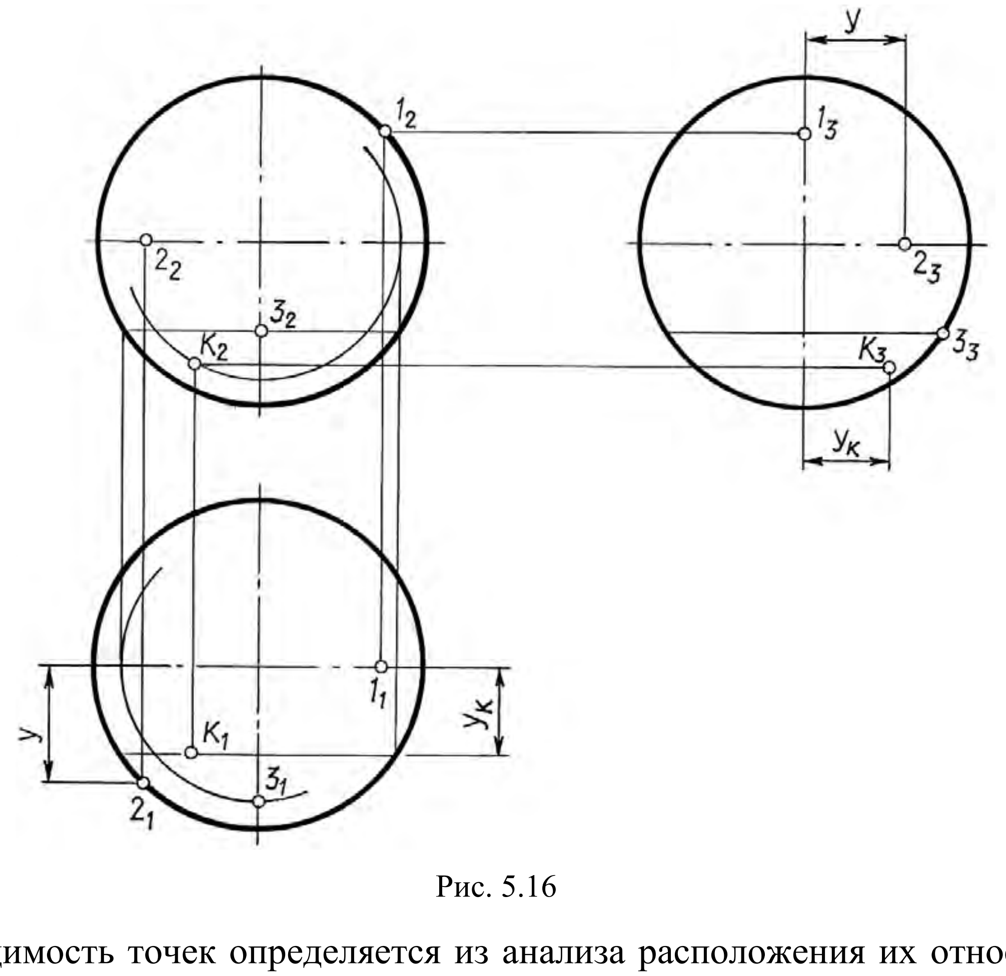



Рис. 5.16

Видимость точек определяется из анализа расположения их относительно линии видимости соответствующей плоскости проекций. Точка 1 невидима в профильной проекции, точки 3 и $K$ невидимы в горизонтальной. Остальные проекции отмеченных точек видимы.

Всякая произвольная точка на поверхности шара может быть построена с помощью параллели шара.

Заметим, что так как у шара за ось вращения может быть принят любой его диаметр, то на поверхности шара можно выделить для построения параллели, параллельные любой из плоскостей проекций $П_1$, $П_2$. $П_3$.

Если необходимо построить проекции линии, принадлежащей поверхности шара, то строят проекции отдельных точек линии, выделяя в первую очередь характерные точки, т.е. точки, расположенные на очерках шара.

Поверхность, образованная вращением окружности $l$ вокруг оси $i$, лежащей в плоскости окружности, но не проходящей через ее центр, называется тором.

Пример тора дан на рис. 5.17.

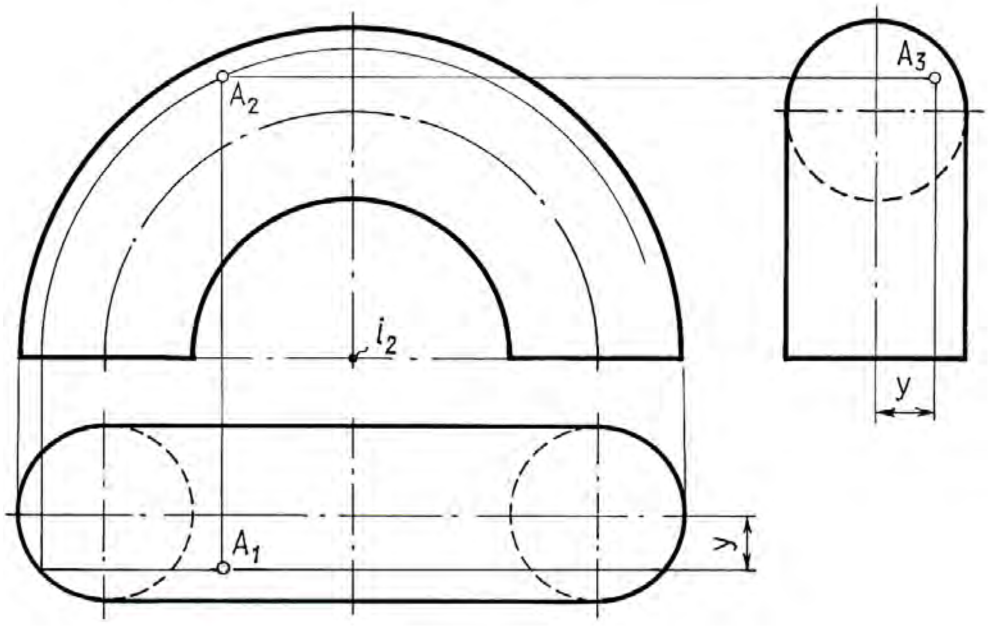



Рис. 5.17

Проекции точки, принадлежащей поверхности тора, строят с помощью параллели самого тора.

З а д а ч а: $\Sigma$ – поверхность тора; $A \subset \Sigma$; $A_2$ – ?, $A_3$ – ?

Точка видима во всех проекциях. Если требуется построить проекции линии, принадлежащей поверхности тора, строят прежде всего проекции ее характерных точек, принадлежащих очерковым образующим, затем находят ее случайные точки.

Лекция 6

# 6. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ФИГУР

Случаи пересечения фигур. Характерные и случайные точки при построении линии пересечения. Алгоритм 1 и 2 случая пересечения фигур

## 6.1. Случаи пересечения фигур

В пересечении двух заданных фигур (прямой, плоскости, поверхности) могут быть получены:

1) точка или несколько точек, если прямая пересекает плоскость или поверхность;

2) прямая линия, если пересекаются две плоскости;

3) плоская кривая или ломаная, если пересекается плоскость и поверхность;

4) пространственная кривая или ломаная, если пересекаются две поверхности.

Если фигурой пересечения является плоская или пространственная кривая, то построение проекций этой линии проводится по отдельным точкам, которые затем соединяются между собой. Среди множества точек линии обязательному построению подлежат так называемые характерные (опорные) точки. К ним относятся:

а) точки видимости, расположенные на очерковых образующих. Они делят фигуру пересечения на видимую и невидимую части;

в) точки, лежащие на осях симметрии;

б) экстремальные точки, т.е. наиболее близкие или удаленные от плоскости проекций;

г) для многогранников – точки, лежащие на ребрах.

Заметим, если две заданные фигуры имеют общую плоскость симметрии, то искомая фигура пересечения будет иметь ось симметрии, расположенную в плоскости симметрии. Если общая плоскость симметрии проецирующая, то проекция фигуры пересечения симметрична относительно вырожденной проекции – следа плоскости.

Чтобы построить проекции фигуры пересечения, необходимо найти проекции точек фигуры пересечения заданных фигур. Решение задачи на проекционном чертеже значительно упрощается, если заданные фигуры (или одна из них) занимают проецирующее положение.

Все задачи на пересечение фигур можно отнести к одному из трех возможных случаев:

случай 1 – обе геометрические фигуры занимают проецирующее положение;

случай 2 – одна фигура занимает проецирующее положение, а вторая – общее положение;

случай 3 – обе геометрические фигуры занимают общее положение.

Решение задачи на построение проекций фигуры пересечения необходимо выполнять в следующей последовательности:

1) провести анализ заданных геометрических фигур – выяснить вид фигуры пересечения, уточнить положение заданных фигур относительно плоскостей проекций с целью выявления случая пересечения;

2) построить проекции фигуры пересечения по алгоритму, соответствующему данному случаю пересечения;

3) установить видимость отдельных частей пересекающихся фигур и фигуры пересечения.

Для каждого из названных ранее случаев расположения заданных фигур относительно плоскостей проекций существует единый общий алгоритм решения, т.е. построения проекций фигуры пересечения.

## 6.2. **Первый случай пересечения фигур**

Если обе геометрические фигуры, заданные на чертеже, занимают проецирующее положение безразлично к одной и той же или различным плоскостям проекций, то две проекции общей фигуры пересечения уже непосредственно заданы на чертеже. Они совпадают с вырожденными проекциями проецирующих фигур.

Проиллюстрируем это на примерах.

З а д а ч а 1. Дано: $\Gamma$ ($\Gamma_2$); $a$ ($a_1$, $a_2$) (рис. 6.1). Найти: $\Gamma \cap a$ – ?

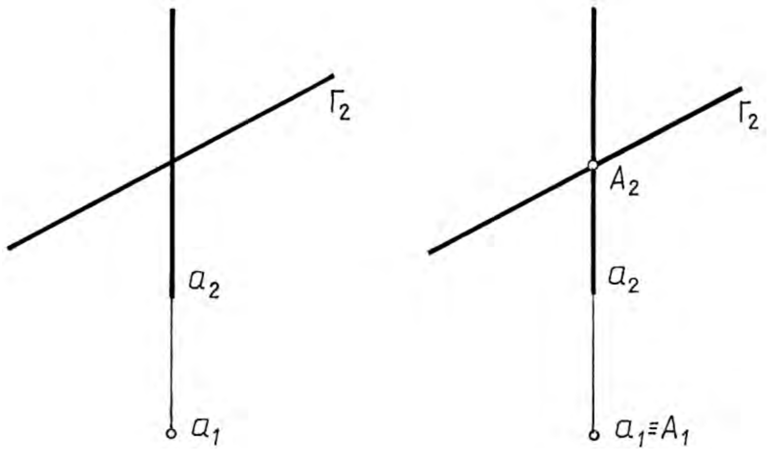



Рис. 6.1

Решение: 1) $\Gamma \perp \Pi_2$; $a \perp \Pi_1$;

$\Gamma \cap a = A$;

2) $A \subset a$; $a \perp \Pi_1 \Rightarrow A_1 \equiv a_1$;

3) $A \subset \Gamma$; $\Gamma \perp \Pi_2 \Rightarrow A_2 \subset \Gamma_2$;

$A_2 \subset a_2 \Rightarrow A_2 \equiv \Gamma_2 \cap a_2$.

Фигурой пересечения прямой и плоскости является точка $A$. Фронтальная проекция этой точки находится на пересечении $a_2$ и $\Gamma_2$. Горизонтальная проекция совпадает с вырожденной проекцией $a_1$.

З а д а ч а 2. Дано: $\Gamma$ ($\Gamma_1$); $\theta$ ($ABC$). Найти $\Gamma \cap \theta$ – ? (рис. 6.2).

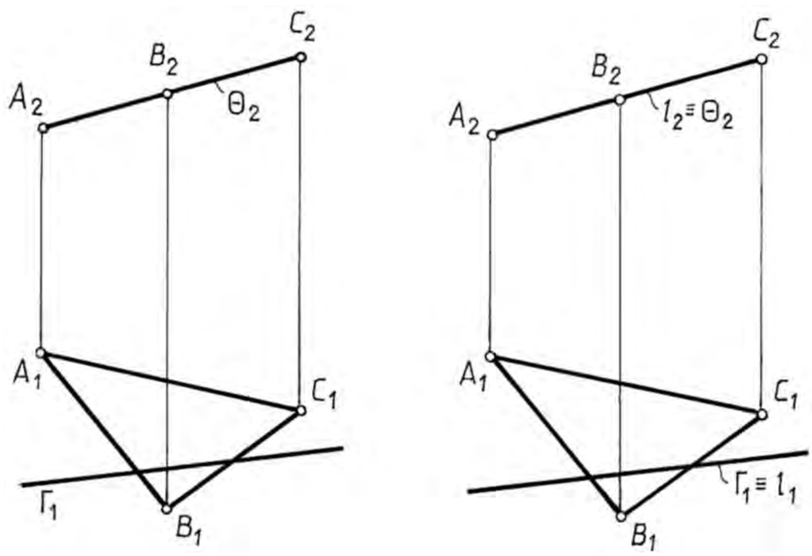


Рис. 6.2

Решение: 1) $\Gamma \cap \theta = l$; $\Gamma \perp \Pi_1$;

2) $l \subset \Gamma \Rightarrow l_1 \equiv \Gamma_1$;

3) $l \subset \theta \Rightarrow l_2 \equiv A_2B_2C_2 \equiv \theta_2$.

З а д а ч а 3. Дано: Г ($\Gamma_2$); Ф – призматическая поверхность (рис. 6.3). Найти $\Gamma \cap \Phi$ – ?

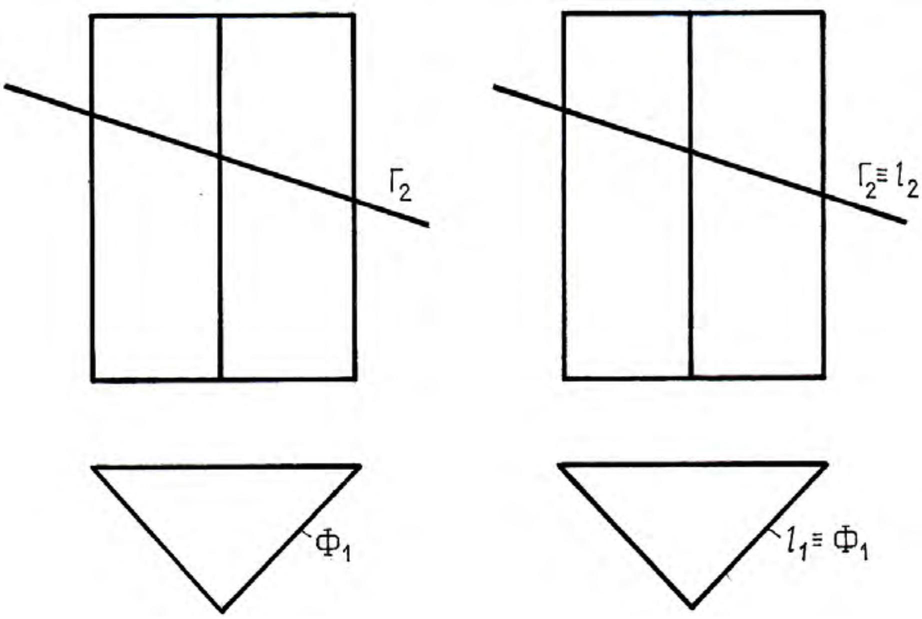


Рис. 6.3

Решение: 1) $\Gamma \perp \Pi_2$; $\Phi \perp \Pi_1$; $\Gamma \cap \theta = l$ – ломаная линия;

2) $l \subset \Gamma \Rightarrow l_2 \equiv \Gamma_2$ $l \subset \Phi \Rightarrow l_1 \equiv \Phi_1$.

З а д а ч а 4. Дано: Ф, θ – цилиндрические поверхности (рис. 6.4). Найти: $\Phi \cap \theta$ – ?

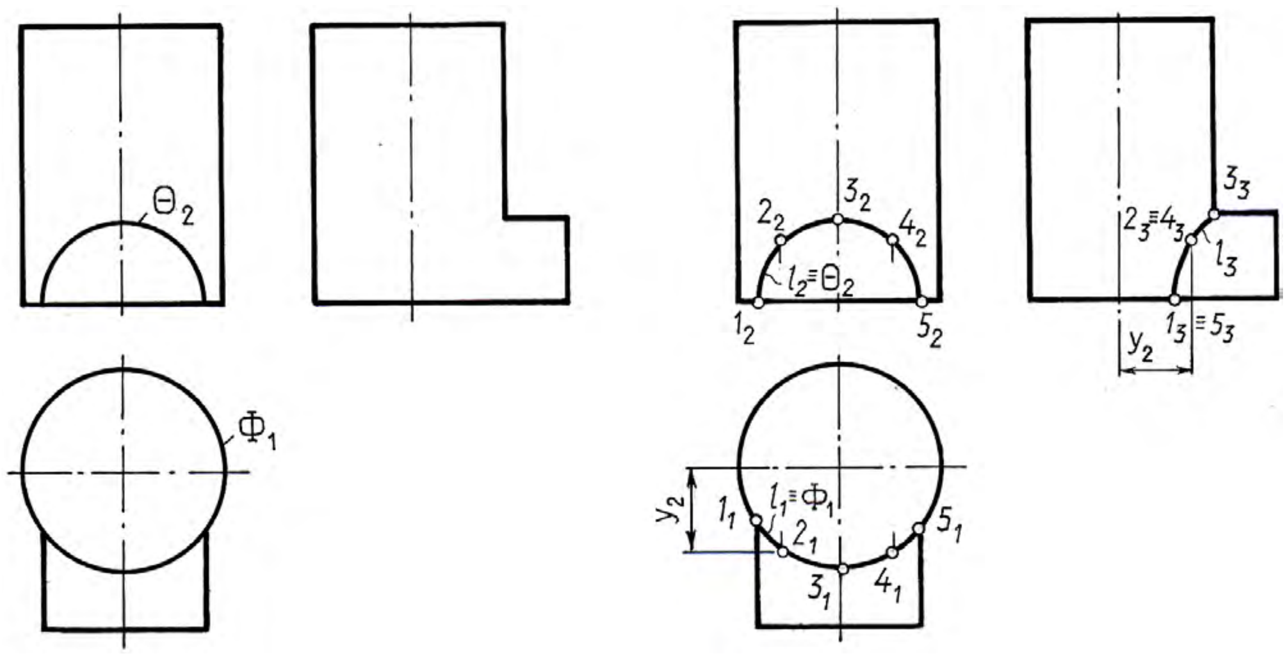



Рис. 6.4

Решение: 1. $\Phi \perp \Pi_1$; $\theta \perp \Pi_2$.

Обе заданные поверхности являются проецирующими, т.е. имеет место первый случай пересечения.

Фигурой пересечения двух цилиндров является пространственная кривая линия.

$\Phi \cap \theta = l$ – пространственная кривая.

2. Проекции линии пересечения совпадают с частями вырожденных проекций одной проецирующей фигуры, находящимися внутри контура второй фигуры.

Так, горизонтальная проекция линии пересечения $l_1$ совпадает с частью вырожденной горизонтальной проекции цилиндра $\Phi_1$.

$$l \subset \Phi \Rightarrow l_1 \equiv \Phi_1.$$

Фронтальная проекция линии пересечения $l_2$ совпадает с частью вырожденной фронтальной проекции цилиндра $\theta_2$.

$$l \subset \theta \Rightarrow l_2 \equiv \theta_2.$$

3. Профильная проекция построена по отдельным точкам, которые соединены потом плавной кривой. Построение показано для точки 2.

## 6.3. **Второй случай пересечения фигур**

Одна из геометрических фигур занимает проецирующее положение, а вторая – общее.

Если одна из геометрических фигур занимает проецирующее положение, то одна проекция искомой фигуры пересечения уже непосредственно задана на чертеже.

Она совпадает с вырожденной проекцией (или с ее частью) проецирующей фигуры. Вторая проекция фигуры пересечения строится на основе условия принадлежности ее точек поверхности фигуры общего положения.

Таким образом, задача на пересечение практически сводится к решению более простой задачи – на принадлежность.

Рассмотрим графическое построение на примерах.

З а д а ч а 5. Дано: $l$, Г ($Г_1$) (рис. 6.5). Найти: $l \cap Г$ – ?

Решение: 1. $Г \perp П_1$; $l$ – общего положения; $l \cap Г = Т$.

2. Так как $Т \subset Г$ и $Г \perp П_1 \Rightarrow Т_1 \subset Г_1$; в тоже время $Т \subset l \Rightarrow Т_1 \subset l_1$.

Определяем $Т_1 = l_1 \cap Г_1$ – горизонтальная проекция точки пересечения является пересечением горизонтальной проекции прямой и вырожденной проекцией плоскости. $Т_2 \subset l_2$ – фронтальная проекция точки пересечения строится из условия ее принадлежности прямой $l$.

3. Определяем видимость на плоскости $П_2$ с помощью фронтально конкурирующих точек 1 и 2.

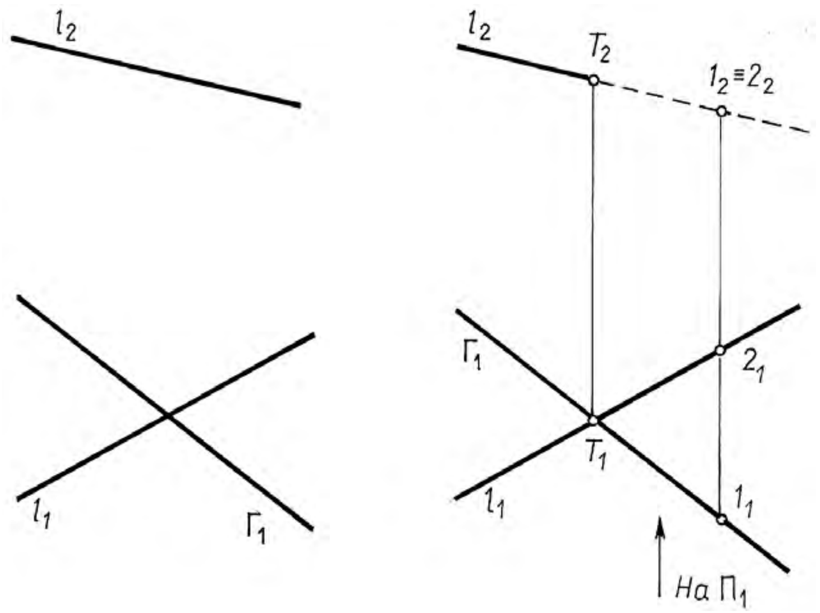



Рис. 6.5

Отметим, что если среди двух заданных геометрических фигур одна является проецирующей плоскостью, то на эпюре часто видимость определяют по представлению, не прибегая к помощи конкурирующих точек.

З а д а ч а 6. Дано: $l$, Г ($ABC$) (рис. 6.6). Найти: $Г \cap l$ – ?

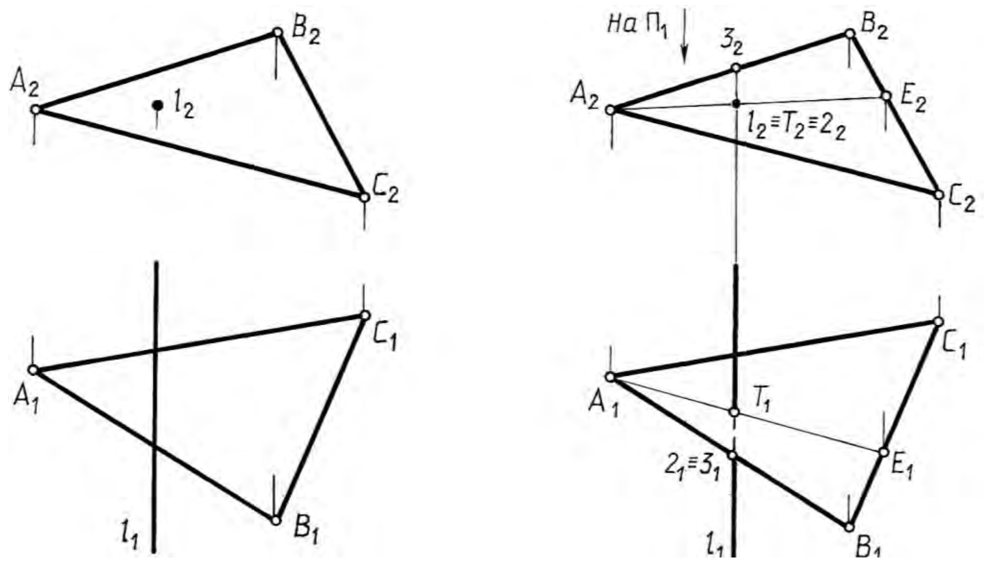



Рис. 6.6

Решение: 1) $\Gamma \cap l = T \quad l \perp \Pi_2$;

2) $T \subset l$ и $l \perp \Pi_2 \Rightarrow T_2 \equiv l_2$.

Горизонтальную проекцию искомой точки Т построим на основе принадлежности ее плоскости общего положения при помощи вспомогательной прямой плоскости – прямой *A–E*.

Видимость прямой $l$ на плоскости $\Pi_1$ определим при помощи горизонтально конкурирующих точек 2 и 3.

З а д а ч а 7: Дано: $\Theta$ – коническая поверхность, $l$ (рис. 6.7). Найти: $l \cap \Theta$ – ?

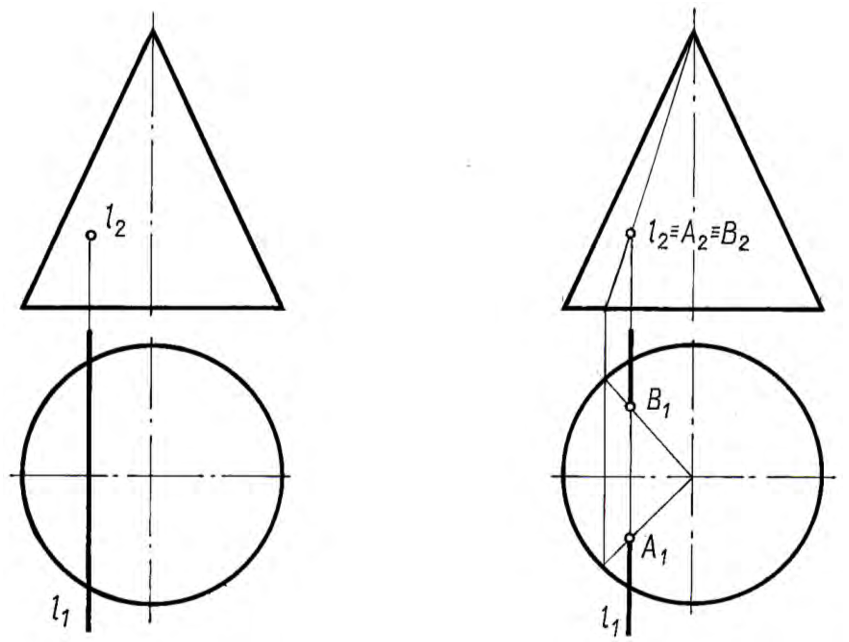



Рис. 6.7

Решение: 1) $l \cap \Theta = A, B$;

2) $A, B \subset l$; $l \perp \Pi_2 \Rightarrow A_2, B_2 \equiv l_2$.

Горизонтальные проекции точек А и В определяем из условия их принадлежности боковой поверхности конуса с помощью его образующих. Очевидно, что на горизонтальной проекции эти точки видимы. Часть проекции прямой между точками *A* и В, находящуюся внутри конуса, на чертеже показывают тонкой сплошной линией построения.

З а д а ч а 8. Дано: $\Sigma$ ($m \parallel n$); Г ($\Gamma_2$) (рис. 6.8). Найти: $\Gamma \cap \Sigma$ – ?

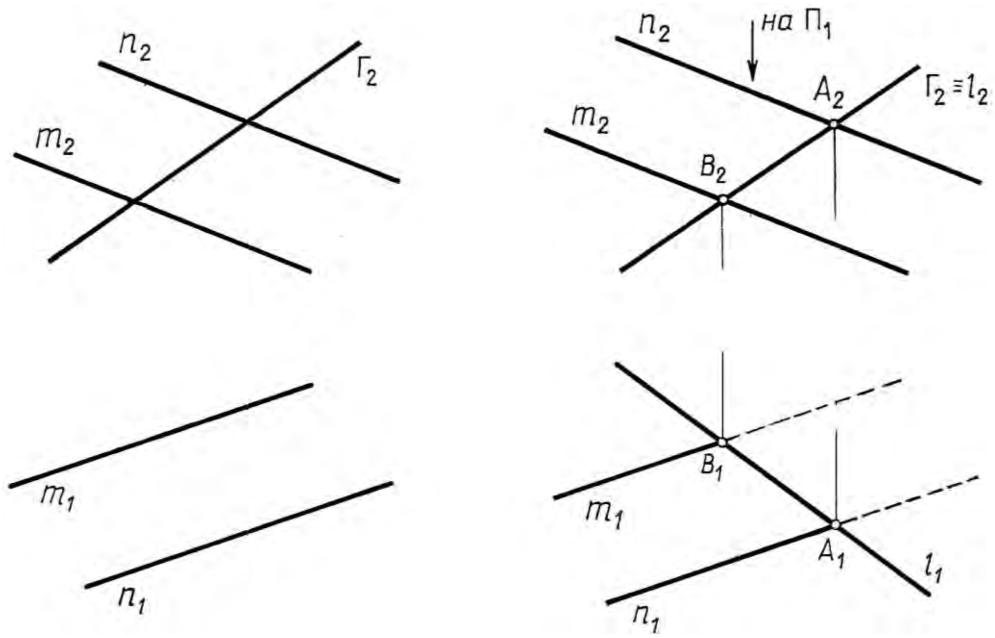



Рис. 6.8

Решение: 1) $\Gamma \cap \Sigma = l$ – прямая;

2) $l \subset \Gamma$; $\Gamma \perp \Pi_2 \Rightarrow l_2 \equiv \Gamma_2$.

Горизонтальную проекцию искомой прямой $l$ построим на основе принадлежности ее плоскости общего положения $\Sigma$ ($m \parallel n$), т.е.

$$l \subset \Sigma \Rightarrow l \cap m = B; \quad l \cap n = A.$$

$$B_1 \cup A_1 = l_1.$$

Видимость на плоскости $\Pi_1$ определена по представлению.

З а д а ч а 9. Дано: $\Theta$ – сфера; Г ($\Gamma_2$) (рис. 6.9). Найти: $\Gamma \cap \Theta$ – ?

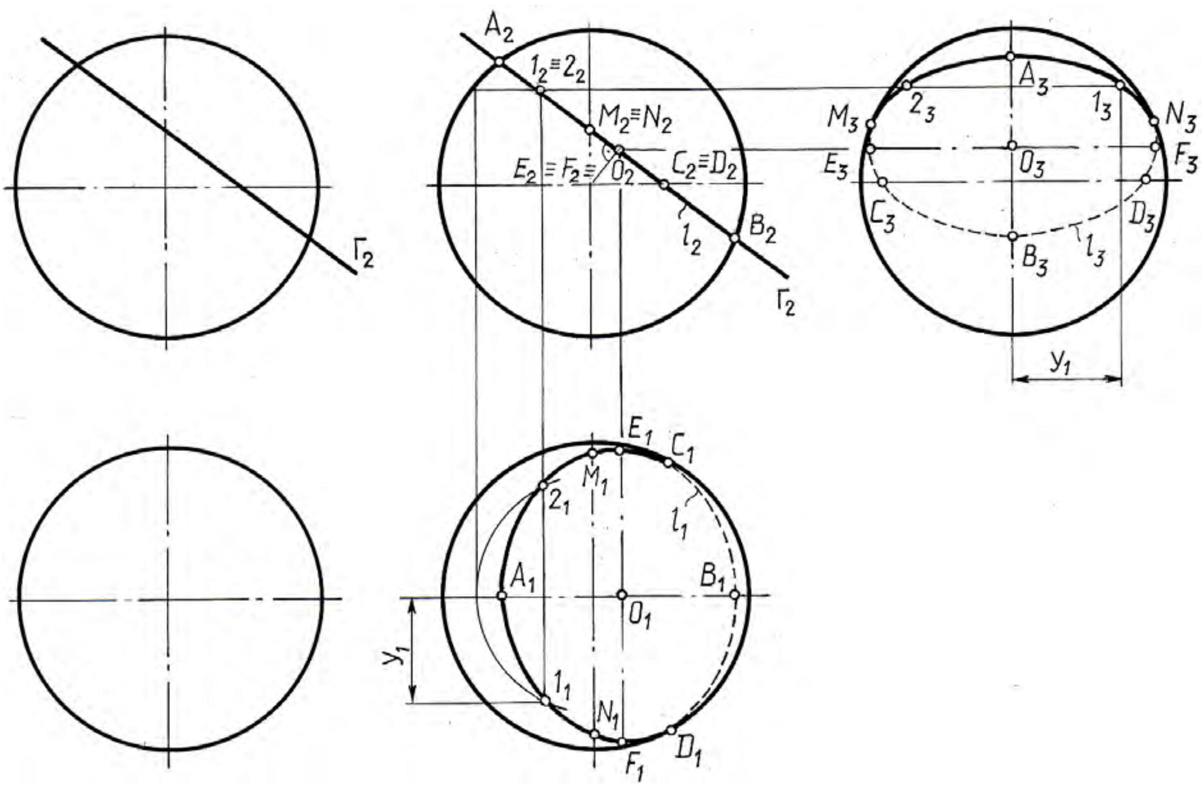



Рис. 6.9

Решение: 1) $\Gamma \cap \Theta = l$ – окружность.

2) $l \subset \Gamma$; $\Gamma \perp \Pi_2 \Rightarrow l_2 \equiv \Gamma_2$.

На плоскость $\Pi_1$ окружность проецируется в виде эллипса. Горизонтальную и профильную проекции $l$ строим по отдельным точкам, исходя из принадлежности их сферической поверхности.

Сначала строим проекции опорных точек – точки видимости $A$, $B$, $D$, $M$, $N$, $C$ на соответствующих линиях поверхности сферы. Посередине отрезка $A_2B_2$ на фронтальной проекции отмечена точка $O_2$ – фронтальная проекция центра окружности – сечения. По линии связи находим горизонтальную проекцию $O_1$ этого центра. На направлении линии связи $O_2O_1$ в обе стороны от точки $O_1$ можно отложить радиус окружности сечения, равный $O_2A_2$. Это дает одну ось эллипса $E_1F_1$, вторая ось – $A_1B_1$.

Для построения случайных точек используем параллель – окружность поверхности. На чертеже показано построение случайных точек 1, 2.

Видимость найденной линии пересечения меняется от точек $C$, $D$ – на $\Pi_1$ и $M$, $N$ – на $\Pi_3$.

З а д а ч а 10. Дано: $\Gamma$ $(m \cap n)$; $\Phi$ – призма (рис. 6.10).

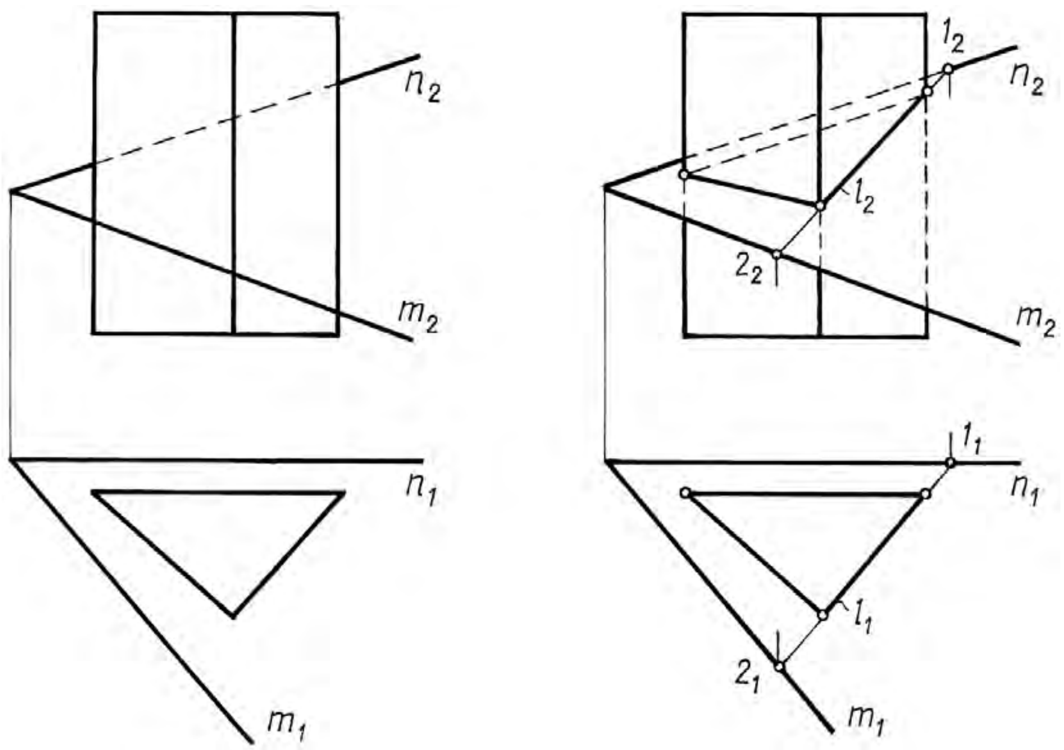



Рис. 6.10

Решение: 1) $\Gamma \cap \Phi = l$ – ломаная;

$\Phi \perp \Pi_1$.

2. Горизонтальная проекция плоской ломаной $l$ совпадает с горизонтальной проекцией боковой поверхности призмы, т.е. $l_1 \equiv \Phi_1$. Фронтальную проекцию этой линии строим на основе принадлежности ее плоскости Г.

На плоскости $\Pi_2$ видимы те участки ломаной, которые расположены на видимых гранях призмы.

З а д а ч а 11. Дано: Ф – поверхность цилиндра

$\theta$ – поверхность конуса (рис. 6.11). Найти: $\Phi \cap \theta$ – ?

Решение: 1. $\Phi \cap \theta = l$ – пространственная кривая.

2. $l \subset \Phi$ и $\Phi \perp \Pi_2 \Rightarrow l_2 \equiv \Phi_2$.

Имея фронтальную проекцию искомой кривой, отмечаем опорные точки *A, B, C, D, M, N, E, F, K, T* на плоскости $\Pi_2$. Горизонтальные и профильные проекции этих точек находим из условия принадлежности их соответствующим образующим или параллелям конуса.

Случайные точки 1, 2, 3, 4 построены с помощью параллелей конуса.

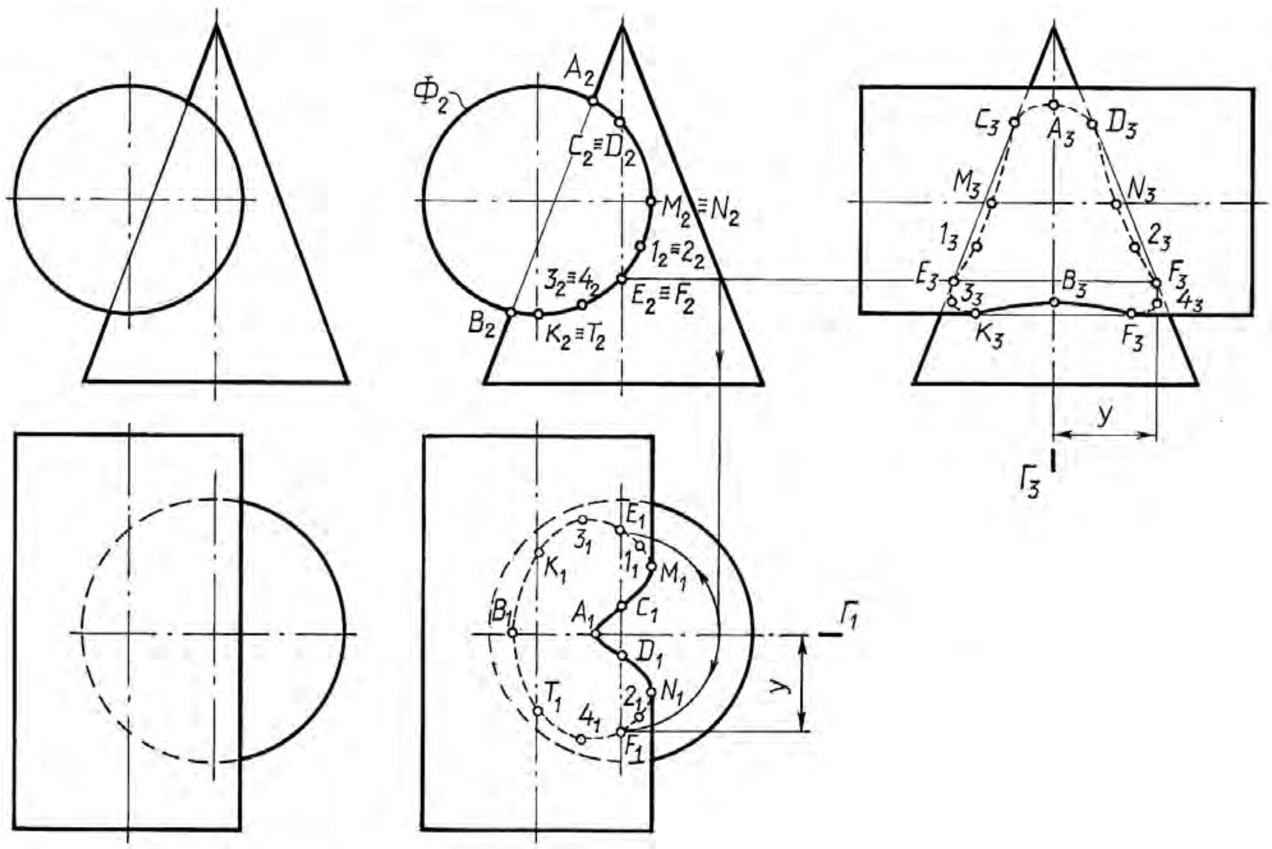



Рис. 6.11

Заметим, что заданные фигуры имеют общую плоскость симметрии – фронтальную плоскость Г. Поэтому горизонтальная и профильная проекции искомой кривой *l* симметричны относительно соответствующих проекций плоскостей $Г_1$ и $Г_3$.

При определении видимости отдельных частей кривой *l* учитываем, что на проекции видима та часть линии пересечения, которая расположена на видимой части двух заданных пересекающихся фигур.

Таким образом, решение задачи на пересечение геометрических фигур, когда одна из них является проецирующей, выполняется в такой последовательности:

1) выделяем из 2 заданных фигур проецирующую и отмечаем ее вырожденную проекцию;

2) обозначаем ту проекцию искомой фигуры пересечения (точки, линии), которая совпадает с вырожденной проекцией проецирующей фигуры. Если совпадение только частичное, то находим границы общей части;

3) строим вторую проекцию искомых общих точек по условию их принадлежности геометрической фигуре общего положения.

# 7. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ФИГУР

Третий случай пересечения. Способ плоскостей-посредников

Если две пересекающиеся геометрические фигуры занимают общее (не проецирующее) положение, то основой алгоритма решения такой задачи является использование вспомогательных поверхностей – посредников (чаще всего плоскостей или сфер) с целью выявления общих точек заданных фигур.

Сущность способа вспомогательных сечений плоскостями-посредниками заключается в следующем.

1. Две заданные фигуры пересекаем некоторой вспомогательной поверхностью $\Phi_i$ (рис. 7.1).

2. Находим пересечение поверхности-посредника с заданными фигурами $\Phi_i \cap \Gamma = m_i$; $\Phi_i \cap \Sigma = n_i$.

3. Определяем точки $A$ и $A'$, общие для заданных фигур и поверхности посредника $m_i \cap n_i = A, A'$.

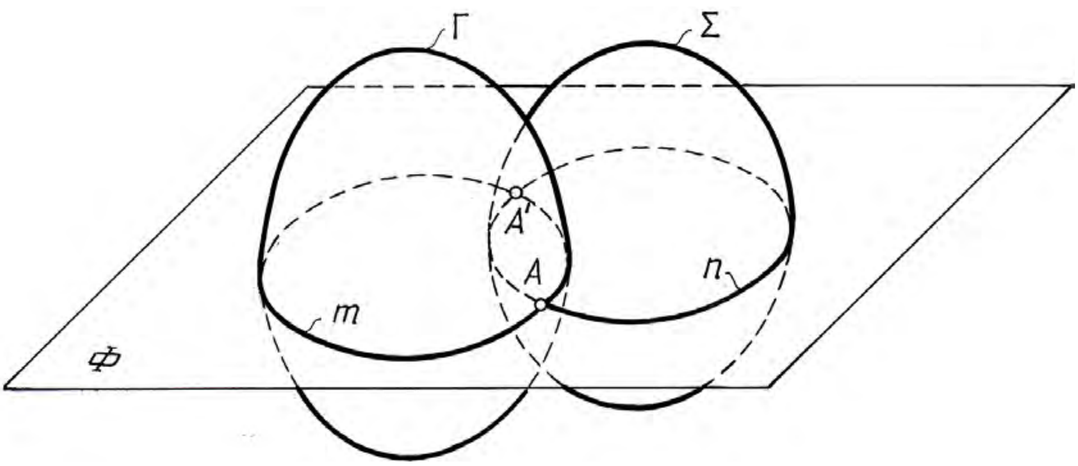



Рис. 7.1

Если для нахождения пересечения заданных фигур необходимо найти множество точек, то, повторяя этот прием несколько раз, определяем достаточное количество точек, необходимых для построения искомой фигуры пересечения.

Посредников выбирают так, чтобы в пересечении с заданными фигурами они давали графически простые линии (прямые или окружности), при этом окружности должны проецироваться без искажения на плоскости проекций.

В зависимости от условия задачи поверхность-посредник может пересекать заданные геометрические фигуры (см. рис. 7.1) или же проходить через одну из них (рис. 7.2), если одна из заданных фигур является линией (прямой или кривой).

С помощью указанного алгоритма можно выяснить любое положение прямой относительно заданной плоскости (рис. 7.2).

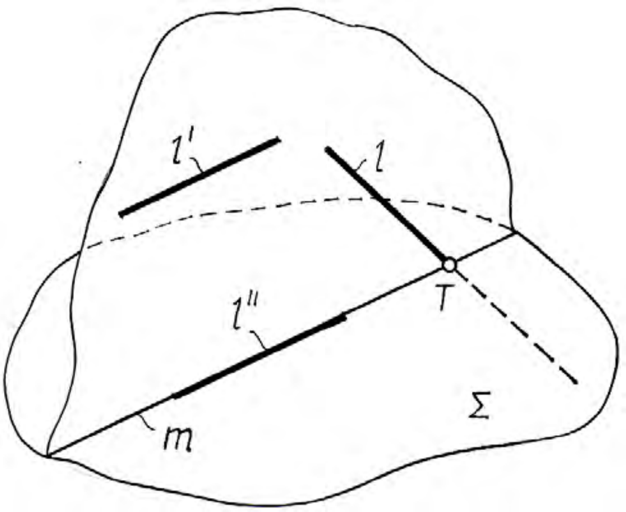



Рис. 7.2

Так, если:

$$m \parallel l' \Rightarrow l' \parallel \Sigma;$$
$$m \equiv l'' \Rightarrow l'' \subset \Sigma;$$
$$m \cap l \Rightarrow l \cap \Sigma = T.$$

Рассмотрим графические построения, связанные с нахождением пересечения фигур общего положения, на примерах.

З а д а ч а 1. Дано: $\Sigma$ ($a \parallel b$); $l$ ($l_1$; $l_2$) (рис. 7.3). Найти $\Sigma \cap l$ = ?

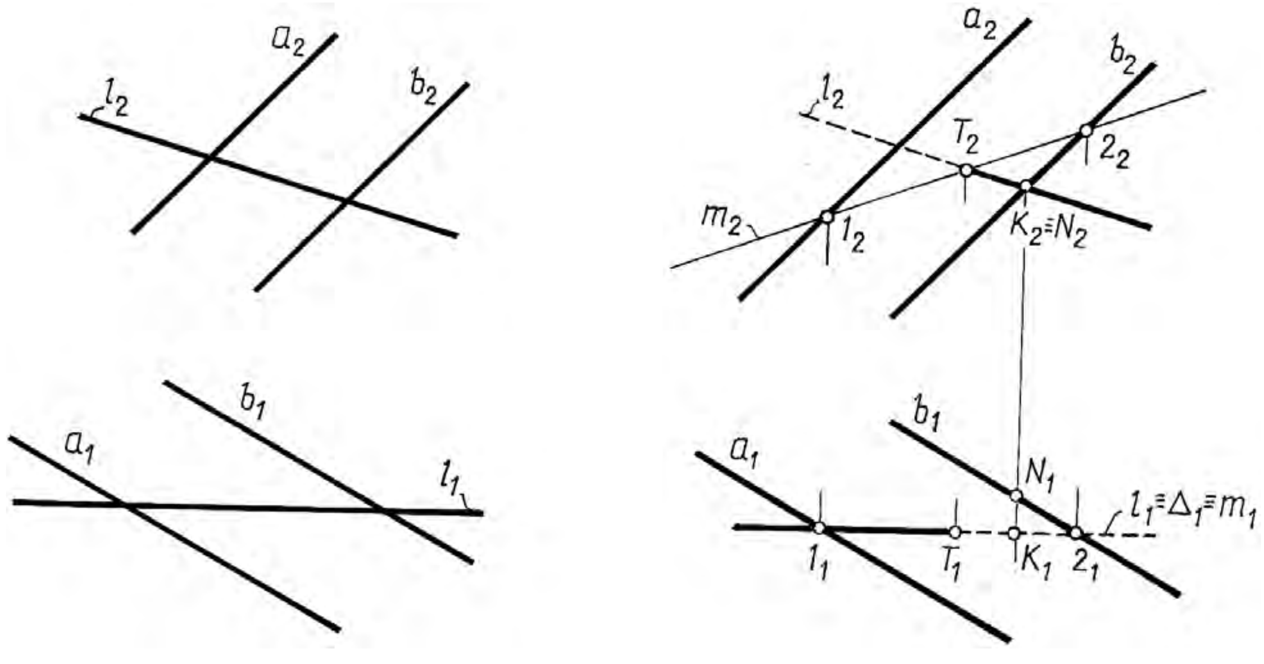



Рис. 7.3

Решение: 1. $\Sigma$, $l$ – общего положения; $\Sigma \cap l = T$.

2. Точку пересечения прямой с плоскостью определяют вышеуказанным способом сечений. В качестве посредника целесообразно выбрать проецирующую плоскость, проходящую через заданную прямую.

Алгоритм решения этой задачи состоит из трех операций.

а) Ф (вводим плоскость-посредник Ф; $Ф \supset l$);

б) $Ф \cap \Sigma = m$;

в) $m \cap l = T$ ($T_2 = l_2 \cap m_2$; $T_1 \subset l_1$).

3. Видимость прямой $l$ определяется методом конкурирующих точек. Поскольку из двух фронтально конкурирующих точек $K$ и $N$, лежащих на прямых $l$ и $b$ соответственно, дальше от плоскости $П_2$ расположена точка $K$, то в этом месте чертежа видимой будет заданная прямая $l$ до точки пересечения $T$ (см. рис. 7.3). Далее прямая $l$ невидима.

З а д а ч а 2. Дано: $\Sigma$ – поверхность вращения; $l$ (рис. 7.4). Найти: $l \cap \Sigma = ?$

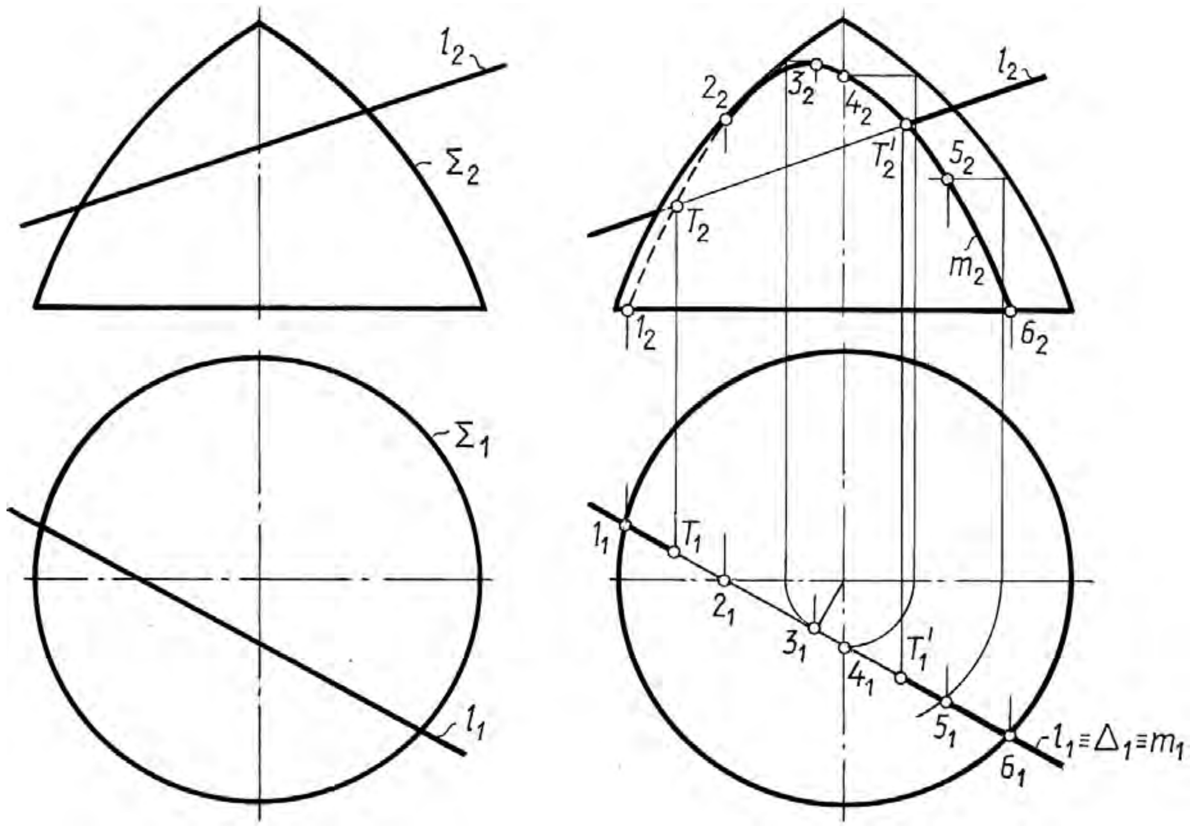



Рис. 7.4

Решение: 1. $\Sigma$, $l$ – общего положения; $l \cap \Sigma = T, T'$.

2. Точки пересечения прямой с поверхностью, «точки входа и выхода» $T$ и $T'$ определяются с помощью способа вспомогательных сечений. Прямую $l$ заключаем в проецирующую плоскость $\Delta$. Критерием выбора вспомогательной плоскости является наибольшая простота построения полученной на поверхности кривой сечения.

Алгоритм решения следующий:

а) $\Delta \supset l$. $\Delta \perp П_1 \Rightarrow \Delta_1 \equiv l_1$;

б) $\Delta \cap \Sigma = m$; $m_1 \equiv \Delta_1$. $m_2$ строим по точкам, исходя из принадлежности их заданной поверхности $\Sigma$;

в) $m \cap l = T, T'$; $m_2 \cap l_2 = T_2, T_2'$;

$T_1 \subset l_1$; $T'_1 \subset l_1$.

3. При определении видимости отдельных участков прямой исходим из того, что сама прямая будет видима, если она пересекает поверхность в видимой точке. Участок прямой, заключенный внутри поверхности, изображаем тонкой сплошной линией.

Из рассмотренных примеров видно, что для построения точек (точки) пересечения прямой с поверхностью (плоскостью) достаточно применить одну вспомогательную проецирующую плоскость-посредник, проходящую через данную прямую.

В ряде случаев, выбрав оптимальный путь решения задачи, построения можно упростить.

З а д а ч а 3. Дано: $\Sigma$ – наклонный цилиндр с осью $i$ и основанием $k$;
$l$ – прямая (рис. 7.5). Найти: $l \cap \Sigma = ?$

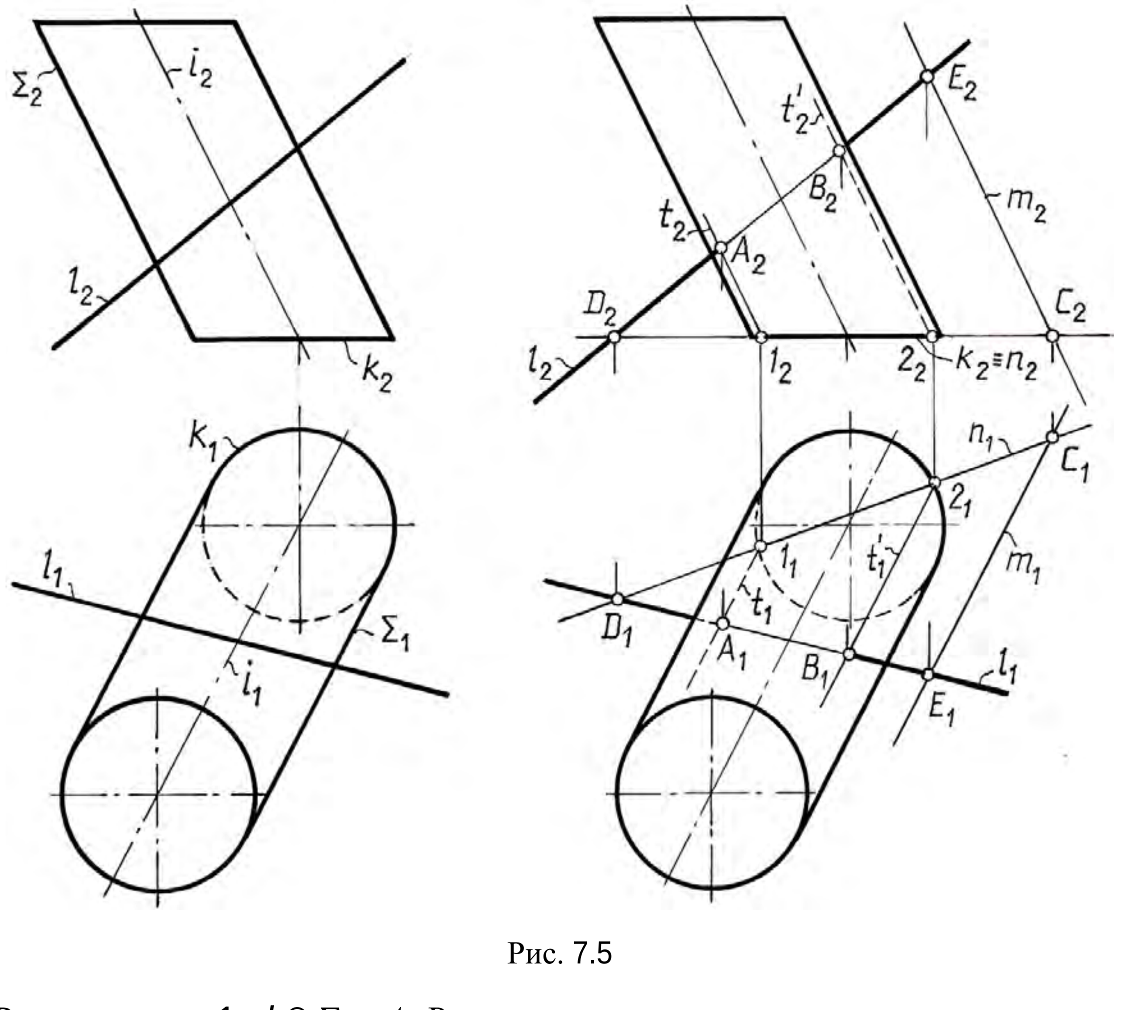



Рис. 7.5

Р е ш е н и е: 1. $l \cap \Sigma = A, B$.
2. $l \subset \Gamma$, $\Gamma \parallel i$, $\Gamma\ (m \cap n)$, $m \parallel i$,
$n \cap k = 1{,}2$
3. $\Gamma \cap \Sigma = t, t' \parallel i$.
4. $l \cap t = A$, $l \cap t' = B$.

Заключаем прямую $l$ в плоскость $\Gamma \parallel i$.

Для этого плоскость $\Gamma$ задаем пересекающимися прямыми $n$, лежащими в плоскости основания цилиндра, и прямой $m$, параллельной оси цилиндра $i$. Обозначим точки взаимного пересечения трех прямых $n \cap m$, $n \cap l$, $m \cap l$ соответственно $C$, $D$, $E$.

Так как плоскость-посредник Г || $i$, то она пересечет боковую поверхность цилиндра по образующим $t$ и $t'$, положение которых определяют точки 1 и 2 пересечения прямой $n$ и окружности основания $k$. Остается только отметить на чертеже точки $A$ и $B$, как результат пересечения прямой $l$ с образующими цилиндра $t$ и $t'$.

З а д а ч а 4. Построить пересечение двух плоскостей.

Дано: Φ ($ABC$); θ ($l$ || $n$) (рис. 7.6). Найти: $\Phi \cap \theta$ – ?

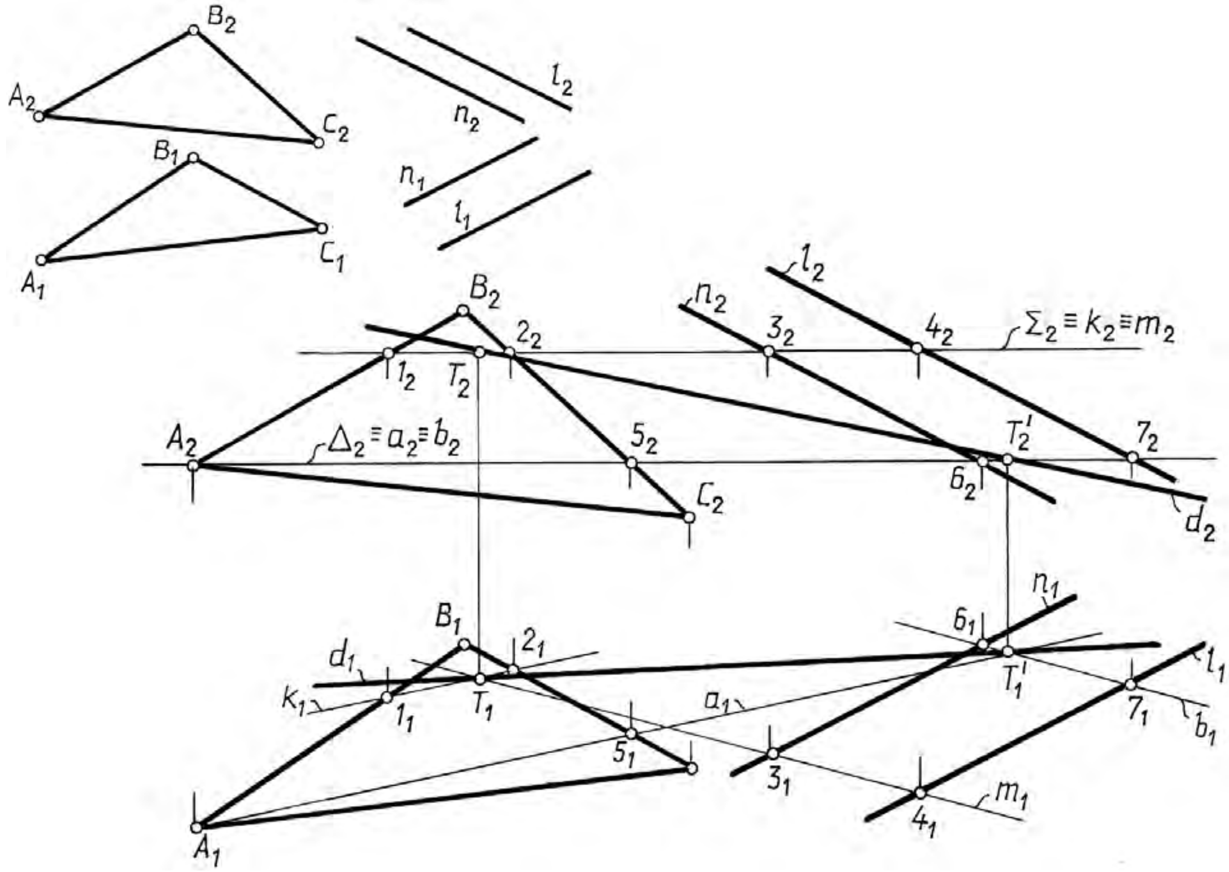



Рис. 7.6

Решение: 1. $\Phi \cap \theta = d$ – прямая общего положения.

2. Так как прямую вполне определяют две точки, то для построения прямой пересечения $d$ достаточно ввести две вспомогательные проецирующие плоскости Σ и Δ. Алгоритм решения заключается в следующем:

а) $\Sigma \perp \Pi_2$;

б) $\Sigma \cap \Phi (ABC) = k$;

$\Sigma \cap \theta (l \parallel n) = m$;

в) $k \cap m = T$;

г) $\Delta \parallel \Sigma \perp \Pi_2$;

д) $\Delta \cap \Phi (ABC) = a$;

$\Delta \cap \theta ((l \parallel n) = b$;

$a \cap b = T'$; $T \cup T' = d$.

3. Поскольку в условии задачи плоскости не заданы ограниченными, наложенными друг на друга контурами, их взаимная видимость не определяется.

З а д а ч а 5. Найти фигуру сечения пирамиды плоскостью общего положения. Дано: Σ (*SKMN*); θ (*a* || *b*) (рис. 7.7). Найти: Σ ∩ θ = ?

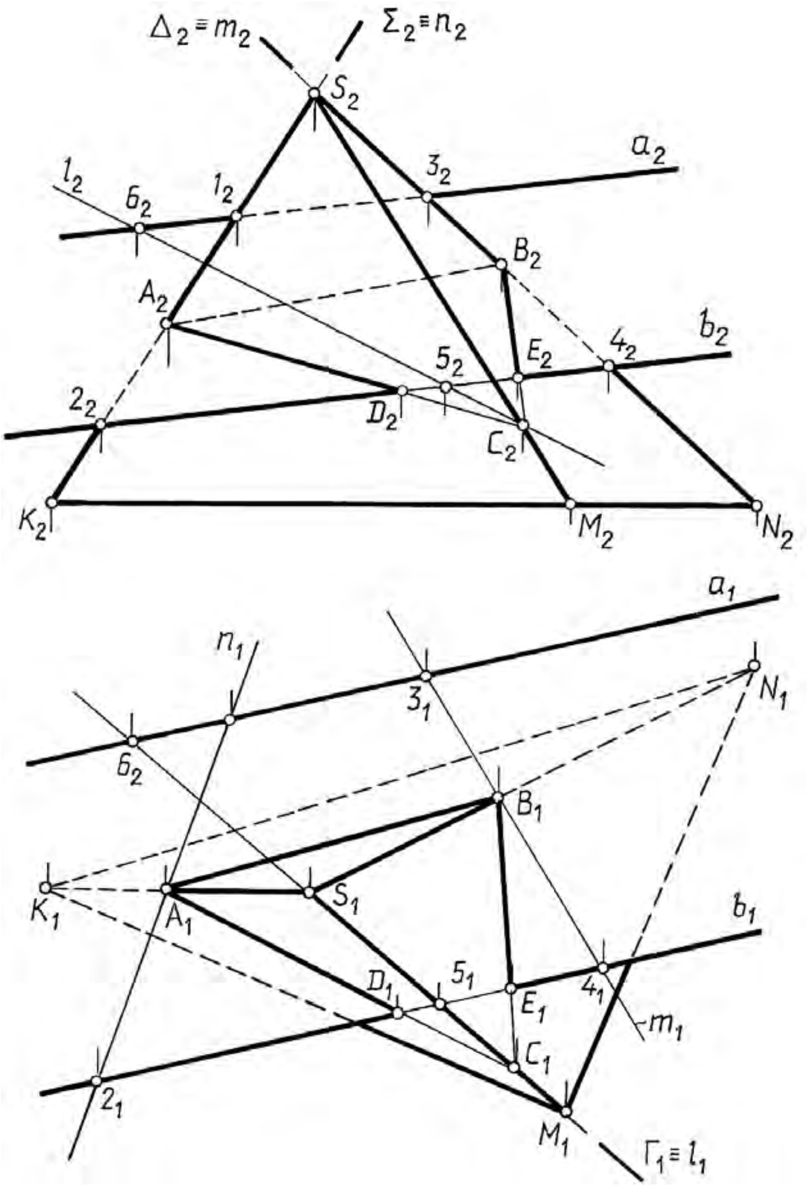



Рис. 7.7

Решение: 1. Σ ∩ θ – плоская ломаная линия.

Сечение многогранника – это множество точек, общих для секущей плоскости, и граней поверхности.

Невырожденное плоское сечение есть многоугольник, число вершин которого равно числу пересекаемых ребер, а число сторон – числу пересекаемых граней. Сечение можно найти, построив либо его вершины, как точки пересечения ребер с секущей плоскостью, либо его стороны, как линии пересечения граней с той же плоскостью, или комбинируя первый прием со вторым.

На рис. 7.7 показано решение первым способом. Вспомогательные секущие плоскости посредника проведены через ребра пирамиды. Отсюда алгоритм решения:

1) $\Delta \supset SK$; $\Delta \perp \Pi_2$;

2) $\Delta \cap \theta = n$; $n_2 \equiv \Delta_2 \equiv S_2K_2$;

3) $n \cap SK = A$; $A_1 = n_1 \cap S_1K_1$; $A_2 \subset S_2K_2$.

Остальные вершины искомого сечения определяем путем проведения аналогичных операций:

1) $\Sigma \perp \Pi_2$; $\Sigma \supset SN$;

2) $\Sigma \cap \theta = m$; $\Sigma_2 \equiv S_2N_2 \equiv m_2$;

3) $m \cap SN = B$; $B_1 = m_1 \cap S_1N_1$; $B_2 \subset m_2$.

И далее

1) $\Gamma \perp \Pi_1$; $\Gamma \supset SM$;

2) $\Gamma \cap \theta = l$; $\Gamma_1 \equiv S_1M_1 \equiv l_1$;

3) $l \cap SM = C$; $C_1 = l_1 \cap S_1M_1$; $C_2 \subset l_2$.

Найденные точки сечения соединяем так, чтобы две из них лежали в одной грани пирамиды. Точка $C$ лежит за пределами секущей плоскости $\theta$ $(a \parallel b)$, поэтому контур сечения ограничиваем точками $D$ и $E$, между которыми прямая $b$ пересекает грани пирамиды.

2. При определении видимости контуров найденного сечения следует исходить из условия, что прямая будет видимой, если она лежит в видимой грани пирамиды.

З а д а ч а 6. Построить фигуру сечения конуса плоскостью общего положения. Дано: $\Psi$ – конус; $\theta$ $(ABC)$ (рис. 7.8). Найти: $\Psi \cap \theta = ?$

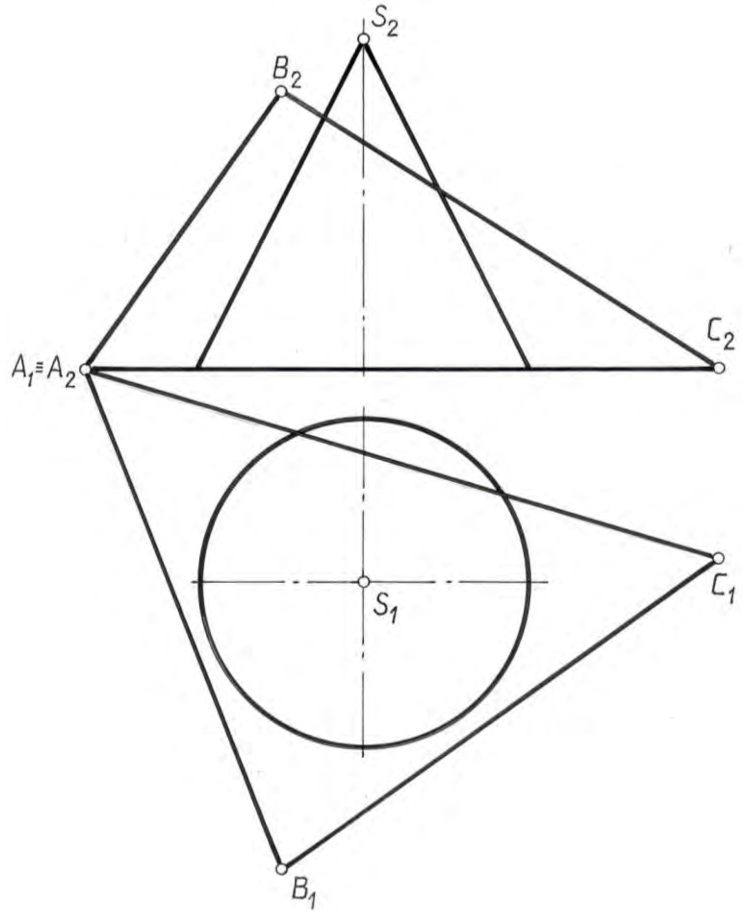



Рис. 7.8

Решение: 1. $\theta \cap \Psi = l$ – плоская кривая.

2. Секущая плоскость $\theta$ не проходит через вершину конуса, следовательно, фигурой сечения конуса $\Psi$ плоскостью $\theta$ будет кривая $l$ (эллипс или его часть).

Для построения этой кривой находим необходимое количество точек, ей принадлежащих. Вначале определяют точки, которые определяют характер искомой кривой.

Так, для нахождения наивысшей точки кривой $T$ вспомогательная плоскость $\Delta$ проводится через вершину конуса, перпендикулярно горизонтальному следу секущей плоскости $AC$. Плоскость $\Delta$ будет являться плоскостью симметрии сечения (рис. 7.9).

1. $\Delta_1 \perp A_1C_1$.

2. $\Delta \cap \theta = 3{,}4$; $\Delta \cap \Psi = 5S$.

3. $3{,}4 \cap 5S = T$.

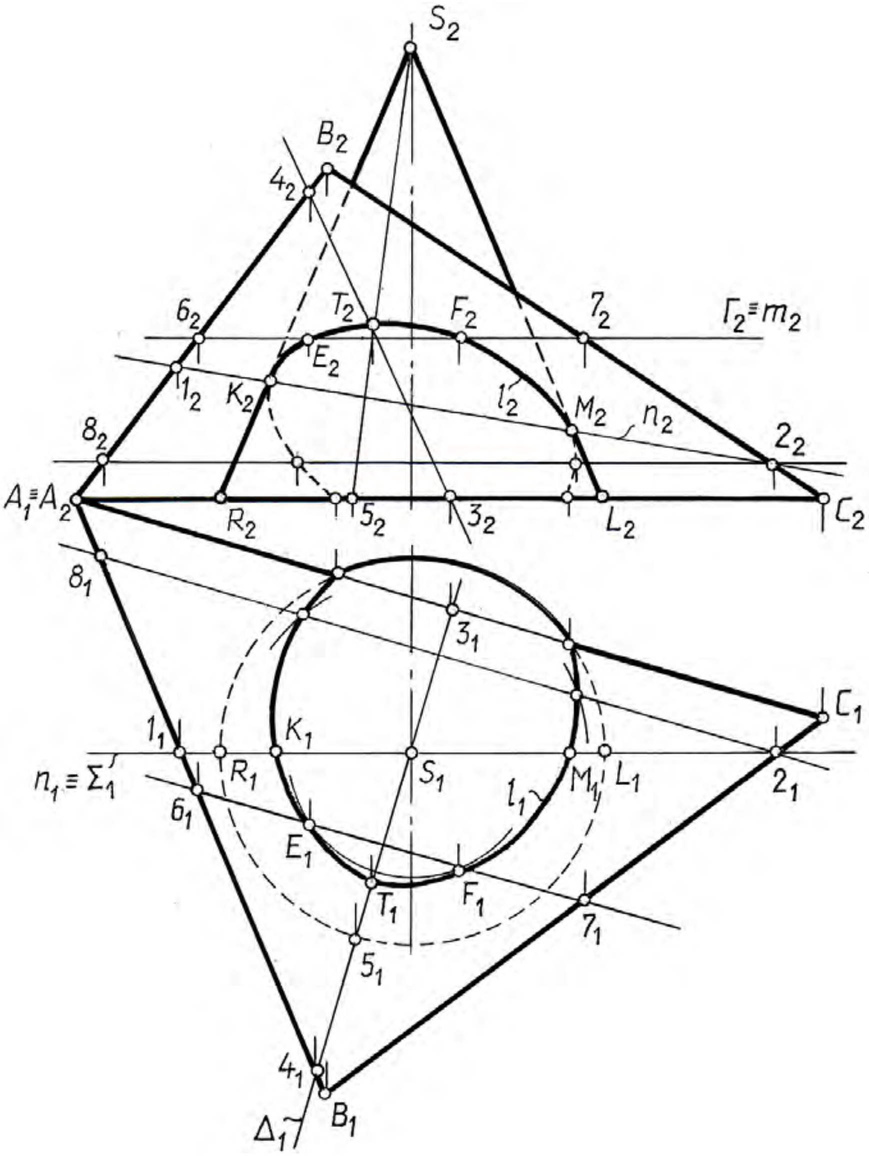



Рис. 7.9

Для нахождения видимости, лежащей на очерковой образующей конуса, проводим фронтальную плоскость-посредник, проходящую через вершину конуса.

1. $\Sigma \parallel \Pi_2$; $\Sigma \supset S$;

2. $\Sigma \cap \Psi = RSL$; $\Sigma \cap \theta = 1{,}2 = n$.

3. $RSL \cap 1{,}2 = K, M$.

Точки границы видимости $K$ и $M$ получены как результат пересечения фронтального очерка конуса $R_2S_2L_2$ и $n_2$.

Для построения случайных точек кривой $l$ проводим секущие горизонтальные плоскости.

1. $\Gamma \parallel \Pi_1$.

2. $\Gamma \cap \Psi = m$ – окружность; $\Gamma_2 \equiv m_2$; $\Gamma \cap \theta = 6–7$.

3. $m \cap 6–7 = E, F$.

4. $K$, $E$, $T$, $F$, $M$ и т.д. представляют собой точки искомого эллипса.

Задача 7. Построить фигуру пересечения двух поверхностей вращения.

Дано: $\Psi$ – сфера; $\Omega$ – поверхность вращения (рис. 7.10). Найти: $\Omega \cap \Psi = ?$

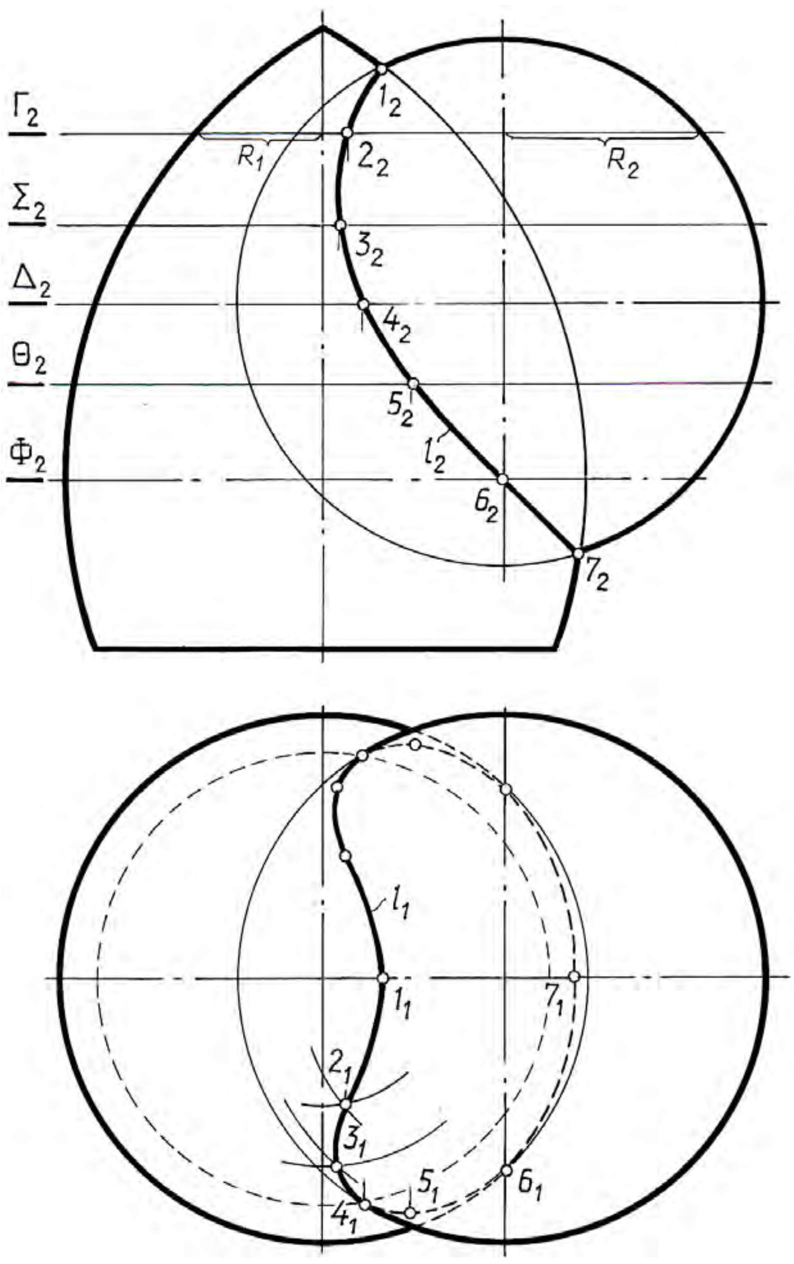



Рис. 7.9

Решение: 1. $\Omega \cap \Psi = l$ – пространственная кривая.

2. Плоскость симметрии обеих фигур параллельна фронтальной плоскости проекций, поэтому точки $1_2$ и $7_2$ пересечения фронтальных образующих фигур будут являться точками линии их пересечения.

3. Промежуточные точки найдем с помощью плоскостей-посредников, параллельных плоскости $\Pi_1$.

Для нахождения точки 2 проведем плоскость $\Gamma \perp \Pi_1$.

$\Gamma \cap \Omega$ – окружность радиуса $r_1$;

$\Gamma \cap \Psi$ – окружность радиуса $r_2$.

Пересечение этих окружностей дает две точки 2 и 2'.

Точки 3, 4, 5, 6 находятся аналогично с помощью плоскостей-посредников $\Sigma$, $\Delta$, $\Theta$ и $\Phi$ соответственно.

# 8. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ФИГУР

Пересечение соосных поверхностей вращения.
Метод сфер-посредников. Теорема Монжа

Линией пересечения поверхностей второго порядка является в общем случае кривая четвертого порядка. Для ее построения не всегда целесообразно пользоваться плоскостями-посредниками, т.к. их применение в ряде усложняет промежуточные построения. В качестве посредников при решении таких задач применяются вспомогательные сферические поверхности. Их применение основано на свойстве соосных поверхностей пересекаться по окружностям.

## 8.1. Построение линии пересечения соосных поверхностей вращения

Поверхности вращения называются соосными, если их оси вращения совпадают.

$\Sigma$ ($i$, $a$) – поверхность вращения;

$\Theta$ ($i$, $b$) – поверхность вращения (рис. 8.1).

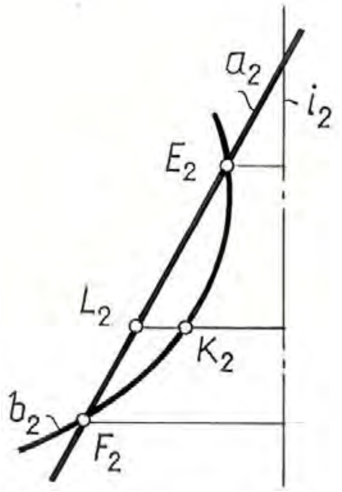



Рис. 8.1

Т е о р е м а. Две соосные поверхности вращения всегда пересекаются по окружностям, число которых равно числу пересечения образующих, находящихся по одну сторону общей оси вращения. Плоскости этих окружностей перпендикулярны общей оси вращения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поверхности заданы главными меридианами $a$ и $b$ (см. рис. 8.1), пересекающимися в точках $E$ и $F$. Каждая из этих точек опишет окружность при образовании поверхностей $\Sigma$ и $\theta$. Другие точки, принадлежащие меридианам и лежащие в плоскости, перпендикулярной оси вращения, например $L$ и $K$, при образовании поверхностей также опишут концентрические окружности.

На рис 8.2 приведены примеры пересечений цилиндра и конуса с шаром. В обоих указанных случаях шар является соосным с поверхностью вращения, так как центр его расположен на осях этих поверхностей.

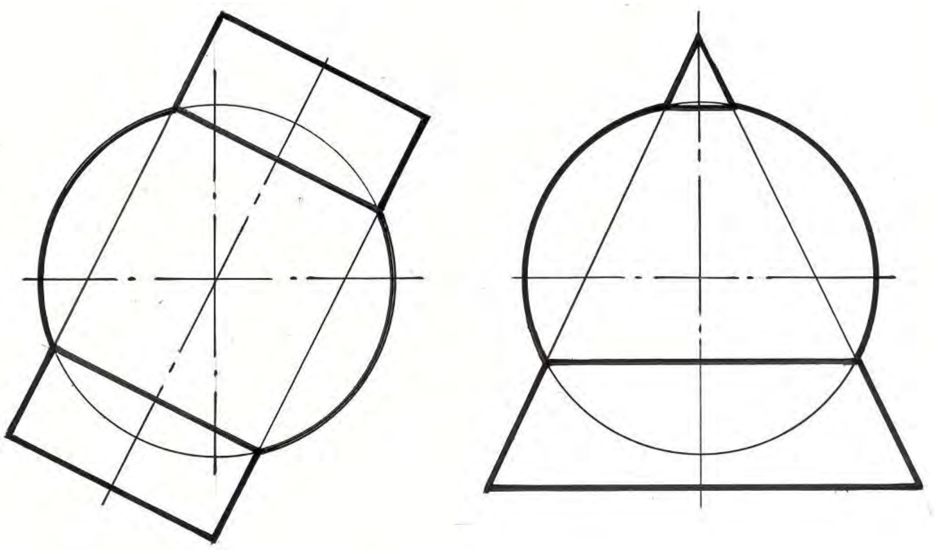


Рис. 8.2

Поэтому конус и цилиндр вращения пересекаются с шаром по окружностям. Проекции этих окружностей на плоскость, параллельную оси вращения поверхностей, вырождаются в прямые линии, так как плоскости этих окружностей перпендикулярны осям вращения цилиндра и конуса.

## 8.2. Метод концентрических сфер-посредников

Для построения линии пересечения двух поверхностей вращения с пересекающимися осями целесообразно в качестве посредников применять сферические поверхности, соосные с обеими пересекающимися поверхностями. Центры таких сфер должны находиться в точке пересечения осей данных поверхностей. Сфера-посредник пересекает каждую из поверхностей по окружностям, принадлежащим этому посреднику, а пересечения на выбранной сфере-посреднике окружностей одной поверхности с окружностями другой поверхности дадут точки искомой линии пересечения данных поверхностей. При последовательном применении ряда сфер-посредников получаем достаточное количество точек искомой линии пересечения.

Применение концентрических сфер-посредников для построения линии пересечения возможно при двух условиях:

1) если обе поверхности являются поверхностями вращения;

2) если оси их пересекаются, так как только при этом можно построить сферические посредники, соосные одновременно обеим поверхностям. Для более удобного решения задачи плоскость пересекающихся осей должна быть параллельна одной из плоскостей проекций.

З а д а ч а 1. Построить линию пересечения конуса с цилиндром.

Дано: $\Sigma$ – конус вращения;

$\theta$ – цилиндр вращения (рис. 8.3). Найти: $\Sigma \cap \theta = ?$

Решение: 1. $\Sigma \cap \theta = m, n$ – две пространственные кривые.

Для решения задачи используем рассмотренный алгоритм применения концентрических сфер-посредников.

Оси вращения этих поверхностей пересекаются и параллельны плоскости $\Pi_2$. Очерковые образующие поверхностей конуса и цилиндра лежат в одной плоскости $\Delta$ и параллельны плоскости $\Pi_2$. Следовательно, фронтальные проекции $1_2$, $4_2$, $5_2$, $8_2$ этих точек находятся в пересечении очерковых образующих на $\Pi_2$. Горизонтальные проекции $1_1$, $4_1$, $5_1$, $8_1$ тех же точек будут принадлежать вырожденной проекции $\Delta_1$ плоскости $\Delta$. Для построения других точек линии пересечения в качестве посредников выбраны концентрические сферы с центром в точке пересечения осей вращения цилиндра и конуса. Поверхности вращения пересекутся с этим посредником по окружностям, плоскости которых перпендикулярны соответственно оси конуса и оси цилиндра, поэтому проекции окружностей вырождаются на $\Pi_2$ в прямые.

При построении линии пересечения прежде всего надо провести две сферы радиусами $R_{min}$ и $R_{max}$.

Все остальные посредники должны располагаться между ними. Сфера наименьшего радиуса выбирается так, чтобы она касалась одной из поверхностей и одновременно пересекала бы другую поверхность.

$$\underline{\theta} \cap \Phi_{R\,min} \cup \Sigma,$$

$R_{max}$ равен расстоянию от центра сфер-посредников до наиболее удаленной от него точки пересечения очерковых образующих. В данной задаче это точка 4.

При нахождении достаточного количества точек, принадлежащих пространственным кривым $m$ и $n$, соединяем их с помощью лекала с учетом видимости отдельных участков кривых. Кривую будем считать видимой, если ее точки принадлежат одновременно двум видимым образующим конуса и цилиндра. При определении характера линии пересечения, полученной с помощью метода сферических посредников, учитываем, что поверхность, в которую вписывалась сфера с наименьшим радиусом, пресекается со второй поверхностью частично, не все ее образующие имеют на себе точки, принадлежащие искомой пространственной кривой.

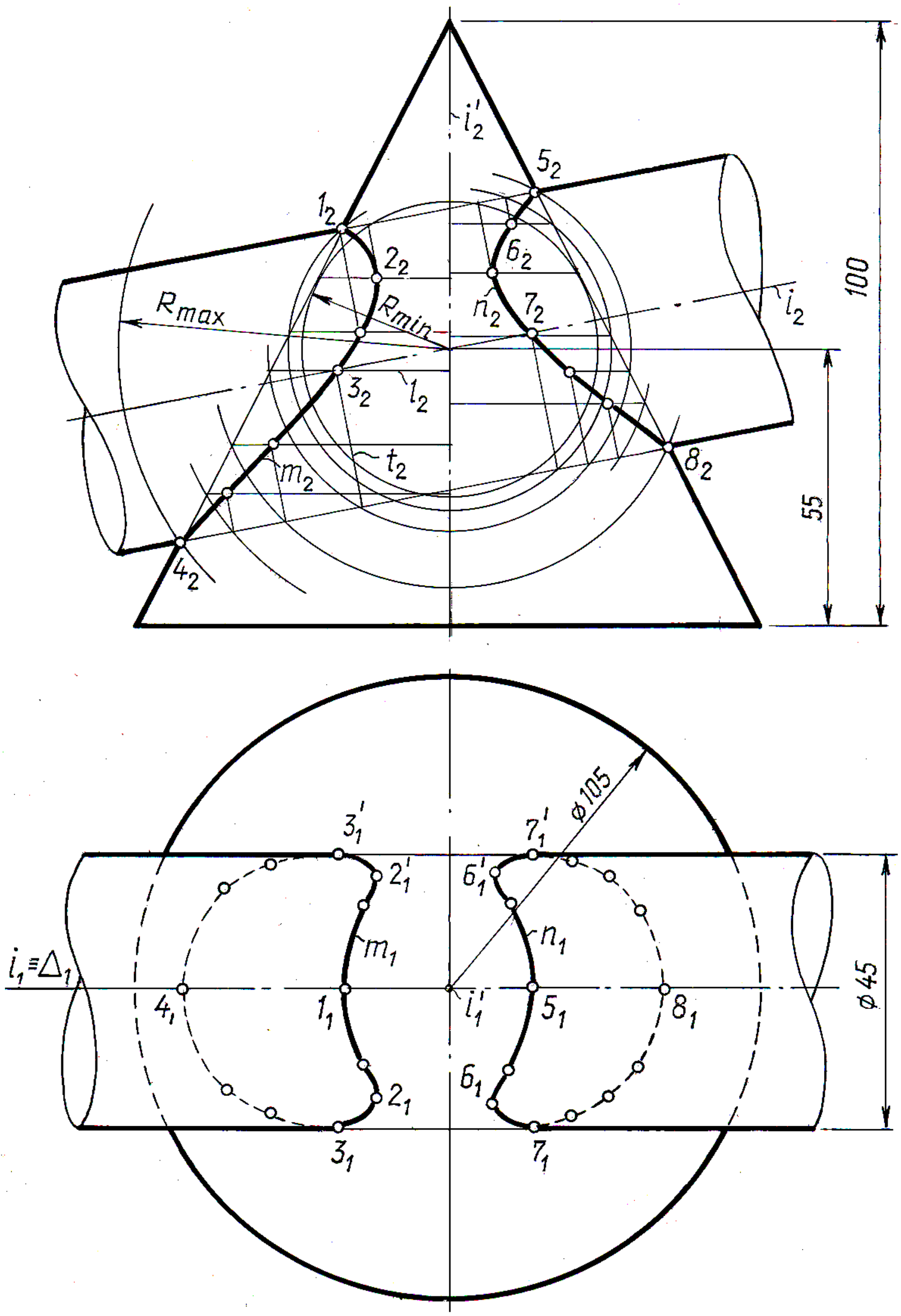



Рис. 8.3

## 8.3. Метод эксцентрических сфер-посредников

В некоторых случаях возможно использование сфер-посредников, центры которых не лежат в одной точке. Этот способ иногда называют способом скользящих сфер. Он применим в случаях, когда оси заданных фигур не имеют точки пересечения, когда одна из поверхностей не является поверхностью вращения, но имеет две системы круговых сечений.

Задача 2. Построить линию пересечения конуса с тором.

Дано: Ω – конус вращения; Ψ – круговой тор (рис. 8.4). Найти: $\Omega \cap \Psi = ?$

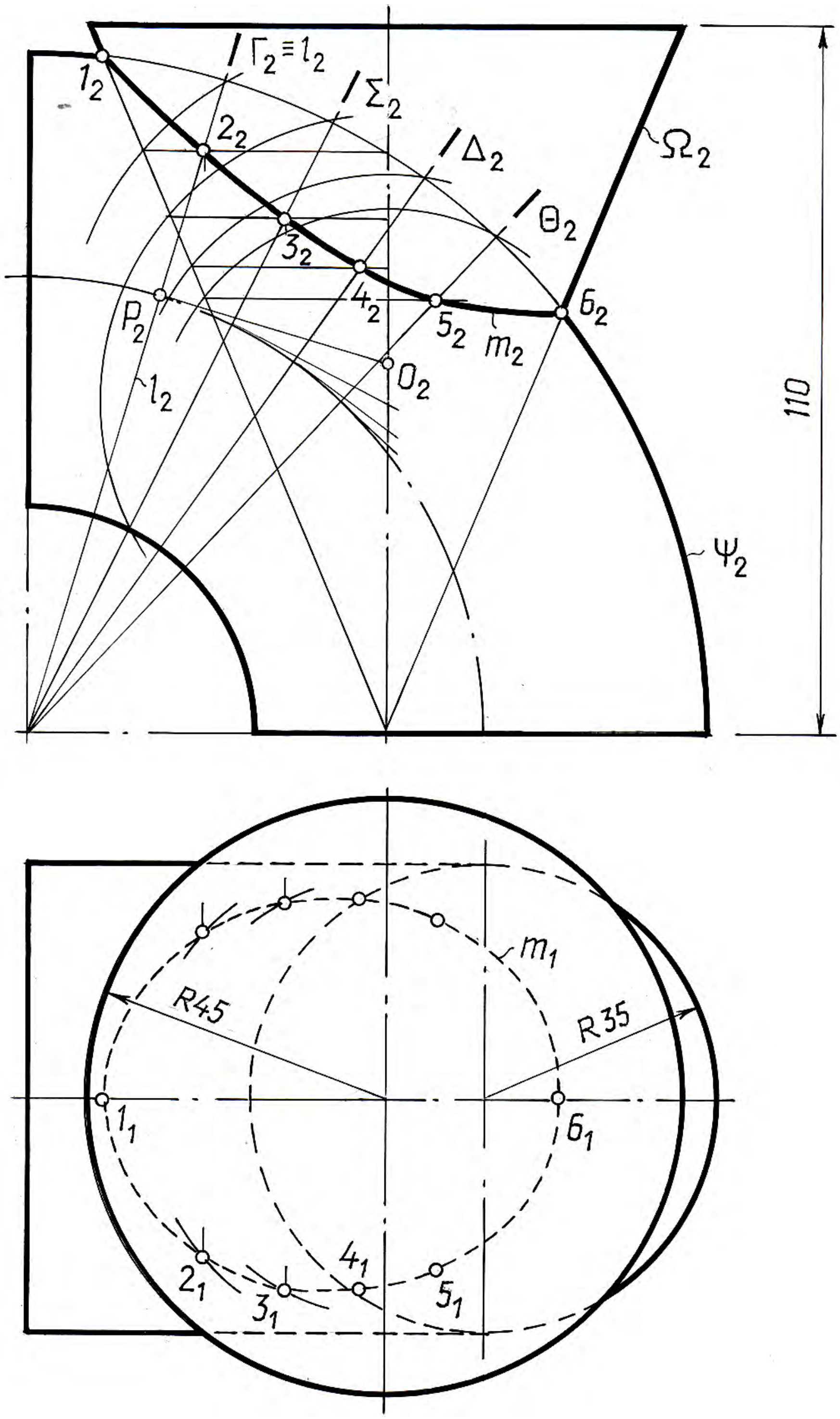



Рис. 8.4

$\Omega \cap \Psi = m$ – пространственная кривая.

Оси заданных поверхностей не пересекаются, но поверхности имеют общую плоскость симметрии, параллельную плоскости $\Pi_2$. В качестве посредников в этой задаче целесообразно использовать эксцентрические сферы-посредники, центры которых лежат в разных точках на оси симметрии конуса.

Выбор центра и радиуса сферы-посредника производится так:

а) через ось тора проводим произвольную фронтально проецирующую плоскость $\Gamma_2$, пересекающую тор по окружности $l$ с центром $P$.

б) находим центр сферы-посредника, которая бы проходила через полученную окружность и пересекала конус по окружности $n$. Этот центр будет расположен в точке $O$ на пересечении оси конуса с перпендикуляром, восстановленным из точки $P$ к фронтальному следу плоскости $\Gamma_2$.

В пересечении окружностей $n$ и $l$ будут получены точки 2 и 2'.

Пересекая тор фронтально проецирующими плоскостями $\Sigma$, $\Delta$, $\Theta$ и производя построения, аналогичные выполненным, находим точки 3, 4, 5. Точки 1 и 6 получены как принадлежащие фронтальной плоскости симметрии обеих поверхностей.

Горизонтальные проекции точек можно построить с помощью окружностей-параллелей конуса, проходящих через эти точки.

## 8.4. Теорема Монжа

В особых случаях пространственная кривая, полученная в результате пересечения двух поверхностей вращения, распадается на плоские кривые или прямую (линию 1-го порядка) и кривую 3-го порядка и т.д. Так, если две поверхности второго порядка соприкасаются в двух точках, то кривая пересечения распадается на две кривые второго порядка.

В курсе аналитической геометрии доказывается теорема Монжа: две поверхности второго порядка, описанные около третьей поверхности второго порядка (или в нее вписанные), пересекаются между собой по двум плоским кривым второго порядка, причем плоскости этих кривых проходят через прямую, определяемую точками соприкосновения всех трех поверхностей.

Поясним смысл теоремы на примере пересечения двух цилиндров вращения равного диаметра.

З а д а ч а 3. Найти линию пересечения двух цилиндров (рис. 8.5).

Дано: $\Sigma$ и $\theta$ – цилиндры вращения. Найти: $\Sigma \cap \theta = ?$

Решение: $\theta \cap \Sigma = m, n$ – плоские кривые.

Обе цилиндрические поверхности $\Sigma$ и $\theta$ можно рассматривать как описанные около поверхности сферы $\Delta$. Очевидно, что поверхности $\Sigma$ и $\theta$ будут касаться поверхности сферы соответственно по окружностям $l$ и $k$, точки пересечения которых $A$ и $A'$ будут общими для всех трех поверхностей. Эти две точки и являются точками соприкосновения, отмеченными в теореме Монжа. Соединив по диагонали проекции точек пересечения фронтальных очерковых цилиндров $1_2$, $4_2$ и $2_2$, $3_2$, получим вырожденные фронтальные проекции плоских кривых их пересечения $m_2$ и $n_2$.

В данном примере кривые $m$ и $n$ представляют собой эллипсы, пересекающиеся в точках соприкосновения $A$ и $A'$, а значит, их плоскости проходят через отрезок $AA'$, что отвечает требованию теоремы.

На практике эта теорема находит широкое применение в случае пересечения поверхностей вращения, описанных около общей для них сферы.

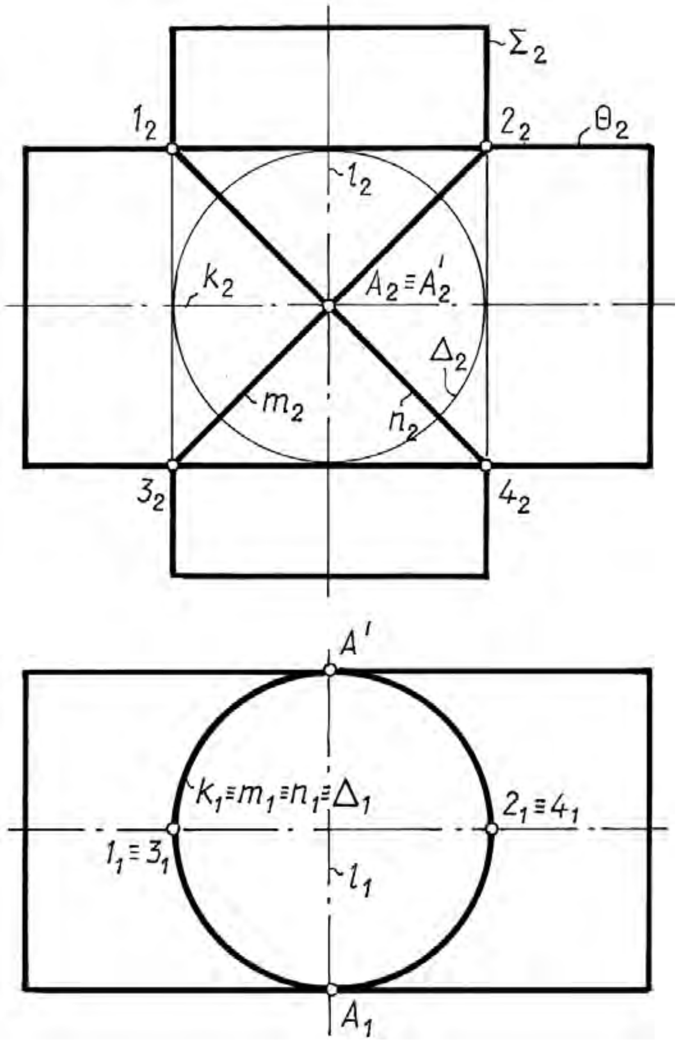



Рис. 8.5

Рассмотрим приложение выше сказанного к построению линий пересечения двух прямых круговых конусов: вертикального Δ и горизонтального Г.

З а д а ч а 4. Найти линию пересечению двух прямых круговых конусов.

Дано: Δ и Г – конусы (рис. 8.6). Найти: $\Delta \cap \Gamma = ?$

Решение: $\Delta \cap \Gamma = m, n$ – две плоские кривые.

Оба конуса описаны около общей сферы, следовательно, пересекутся по двум плоским кривым. Боковая поверхность конуса Г будет касаться сферы по окружности $k$, а конуса Δ – по окружности $l$. Обе окружности пересекутся в точках $A$ и $A'$, так как принадлежат одной сфере. Это и есть точки соприкосновения двух рассматриваемых конусов. Остается только соответственно соединить фронтальные проекции точек пересечения очерковых $1_2$, $2_2$, $3_2$, $4_2$. Получим вырожденные фронтальные проекции плоских кривых пересечения $m_2$ и $n_2$, которые и в этом случае будут эллипсами. Если задача решена с достаточной точностью, то $m$ и $n$ обязательно пересекутся в точках соприкосновения $A$ и $A'$.

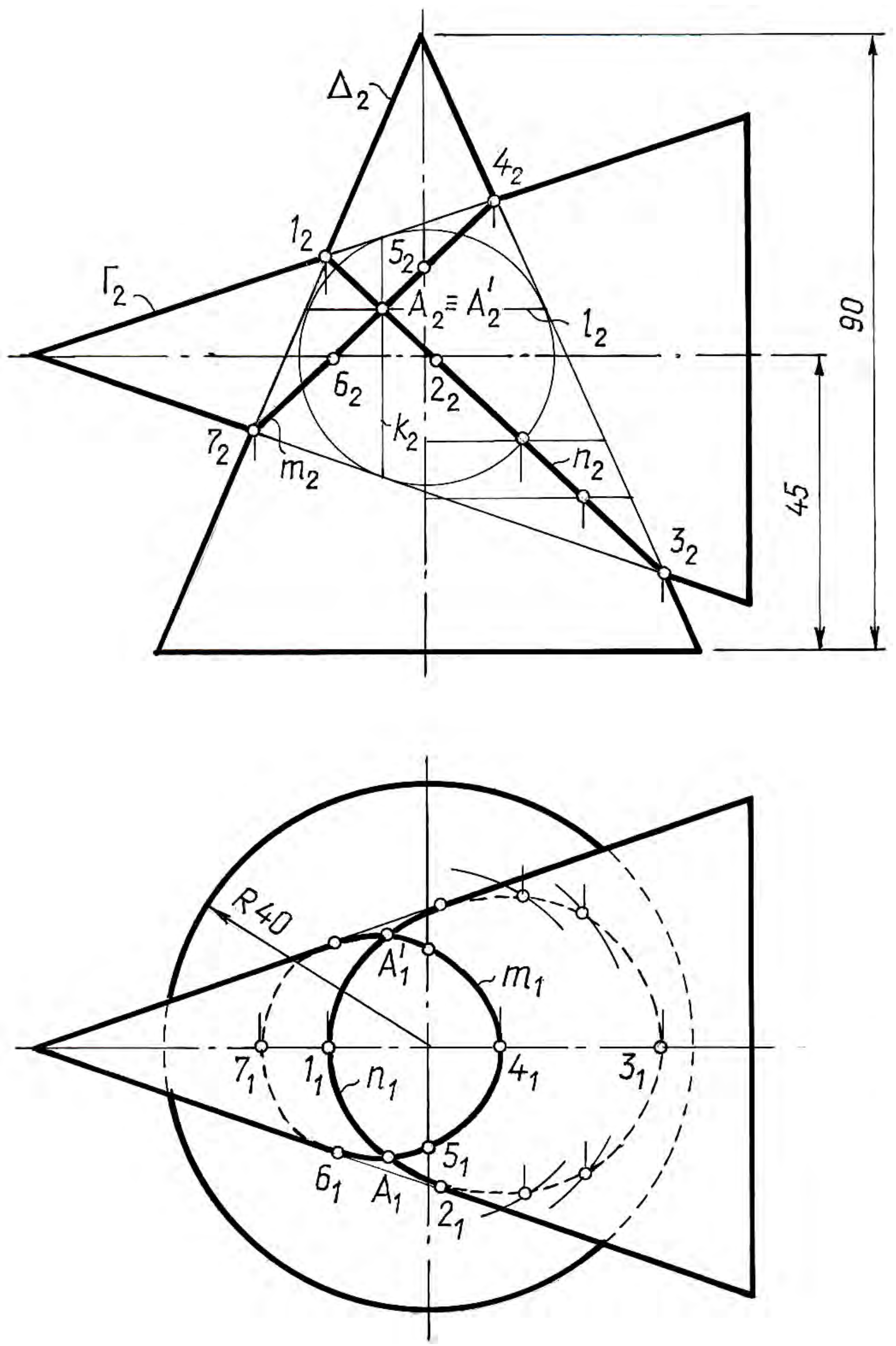



Рис. 8.6

В других случаях, отвечающих условиям теоремы Монжа, при изменении относительных размеров и взаимного положения поверхностей вращения в пространстве линии их пересечения могут принимать форму гипербол или парабол.

Следует отметить, что пересечение по теореме Монжа является пограничным случаем в очертании линий пересечения поверхностей вращения.

Если в последней задаче изменить относительные размеры конусов так чтобы сфера минимального радиуса ($R_{min}$) вписывалась бы в вертикальный конус Δ, а горизонтальный пересекал, то линии их пересечения распадутся на две пространственные кривые $m$ и $n$, полностью пересекающие образующие горизонтального конуса Г (рис. 8.7). В этом случае горизонтальный конус протыкает вертикальный.

При изменении параметров конусов таким образом, чтобы сфера минимального радиуса $R_{\min}$ вписывалась в горизонтальный конус и пересекала вертикальный (рис. 8.8), характер пересечения меняется. Теперь уже вертикальный конус протыкает горизонтальный.

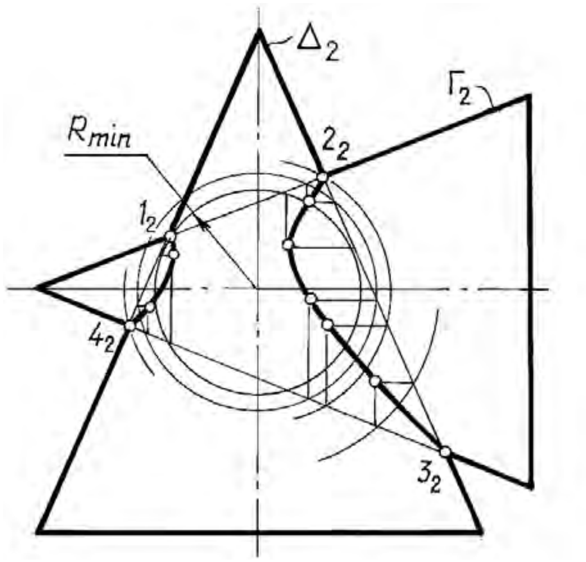



Рис. 8.7

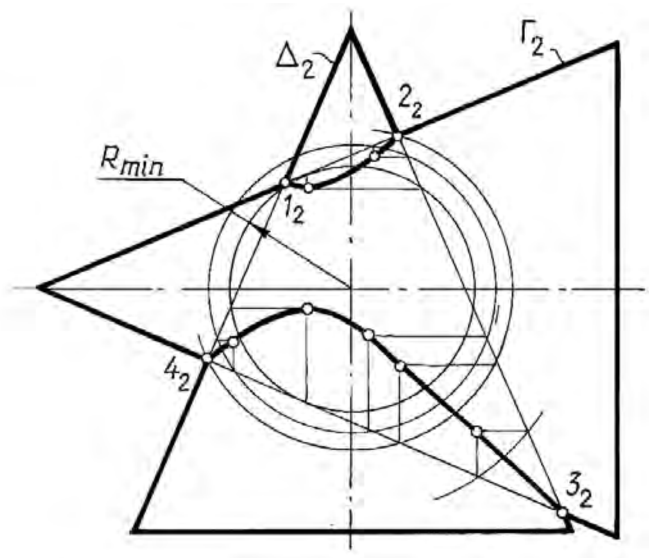



Рис. 8.8

Учебное издание

САДОВСКИЙ Юрий Игоревич
ПЕТРОВИЧ Марлен Николаевич
ТАРАСОВ Виктор Васильевич
ТЕЛЕШ Евгений Александрович

# НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

*Конспект лекций*

В 2 частях

Часть 1

## МЕТОД МОНЖА. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Подписано в печать 2009.
Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 500. Заказ 431.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.