

В. Э. МАРКЕВИЧ, В. В. ЛЕГКОСТУП

## МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ ДЛЯ ПЕРЕХВАТА АЭРОБАЛЛИСТИЧЕСКОЙ ЦЕЛИ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ СЕКТОРЕ НАВЕДЕНИЯ РАКЕТЫ

ОАО «АЛЕВКУРП»

*Рассматривается усовершенствованный вариант алгоритма, реализующего метод пропорциональной навигации для наведения зенитных управляемых ракет в ограниченном секторе углового сопровождения, связанного с линией визирования аэробаллистической цели и обеспечивающие устойчивое наведение ракеты с максимальными углами упреждения, не превышающих предельно допустимых. Приводятся аналитические выражения, описывающие алгоритм формирования команд управления и сигналов коррекции, адаптивных к параметрам движения, реализующий сопровождение и наведение ракеты в широком диапазоне дальностей, высот и скоростей движения объекта перехвата. Представлены результаты математического моделирования задачи пространственного перехвата аэробаллистической цели, а также сравнительный анализ и предварительная оценка точности наведения существующих классических и модифицированных вариантов метода пропорциональной навигации.*

**Ключевые слова:** модифицированный метод пропорциональной навигации, станция наведения ракет, зенитная управляемая ракета, сектор углового сопровождения, маневрирующая аэробаллистическая цель, пространственная модель движения ракеты, ошибки наведения.

### Введение

Большинство современных алгоритмов управления ракетами (зенитными, авиационными, противоракетными, противоспутниковыми, противокорабельными и др.), предназначенных для поражения различного класса целей, базируются на различных вариантах метода пропорциональной навигации (МПН), как частном случае метода наведения в фактическую (мгновенную) точку встречи.

Согласно данному методу, кинематические нормальные ускорения ракеты должны быть пропорциональны угловой скорости вращения (УСВ) линии визирования (ЛВ) ракета – цель. В векторной форме выражение для заданных ускорений ракеты в общем виде имеет следующий вид:

$$\mathbf{W}_p = N_0 [\boldsymbol{\omega}_0 \times \Delta \mathbf{v}], \boldsymbol{\omega}_0 = \frac{[\Delta \mathbf{v} \times \Delta \mathbf{r}]}{\Delta r^2}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{W}_p = (0 \ W_{py} \ W_{pz})^T$  – вектор управляющих ускорений ракеты в проекциях на оси системы координат (СК), связанной с ЛВ ракета – цель;  $\boldsymbol{\omega}_0 = (\omega_{0x} \ \omega_{0y} \ \omega_{0z})^T$  – вектор УСВ ЛВ ракета –

цель в проекциях на оси СК, связанной с ЛВ;  $\Delta \mathbf{v} = \Delta \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$  – вектор разности скоростей сближения ракеты  $\mathbf{v}_1$  и цели  $\mathbf{v}_2$ ;  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  – вектор разности декартовых координат ракеты  $\mathbf{r}_1$  и цели  $\mathbf{r}_2$ ;  $N_0 = f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  – навигационный параметр, зависящий от параметров движения цели и ракеты, находящийся в пределах  $N_0 \in [2; 10]$ .

Основными достоинствами разновидности МПН, используемого в зенитных управляемых ракетах (ЗУР) применительно к задаче перехвата скоростных и маневрирующих аэробаллистических целей, являются:

- возможность реализации обстрела с произвольного ракурса, как в переднюю, так и заднюю полусферу атаки;
- формирование траектории наведения, обеспечивающей наведение на прямолинейно летящую цель с минимальными перегрузками;
- слабая чувствительность метода к величине флуктуационной ошибки измерения угловых координат цели (в отличие от трехточечных методов телеуправления).

Вместе с тем, существует ряд особенностей данного метода, снижающие в некоторых тактических ситуациях его эффективность:

- высокая чувствительность МПН к неконтролируемым случайным внешним возмущениям по нормальным ускорениям (например, непредвиденный маневр цели), зависящая от величины навигационного параметра метода;

- увеличение кривизны траектории при отсутствии сигналов компенсации систематических возмущающих воздействий (ускорение свободного падения, продольное ускорение ракеты);

- значительные углы упреждения ракеты относительно линии визирования (ЛВ) цели, движущейся с большими угловыми скоростями относительно станции наведения ракет (СНР), достигающие на начальном участке траектории величины (30...40) градусов.

Впервые МПН в современной формулировке был предложен в [1, 2] применительно к задаче наведения управляемых ракет. Для простейших моделей перехвата (без учета связи каналов наведения, многомерности и нелинейности уравнений кинематики относительного движения) были получены аналитические соотношения, позволяющие выполнять анализ динамических свойств закона управления в идеальных условиях.

Дальнейшему развитию теории МПН посвящены работы [3–5], где было получены уравнения обобщенных методов самонаведения, обеспечивающих движение авиационной управляемой ракеты в фактическую точку встречи с маневрирующей целью при минимальных затратах энергии, исследованы свойства МПН в зависимости от аэродинамической компоновки ракеты, ее аэродинамического качества и угла упреждения, а также приближенно исследована динамика линейной и нелинейной одноканальной системы самонаведения.

В работах [6, 7, 8] для случая плоского перехвата цели в линейном приближении получены типовые законы оптимального управления при различных формах квадратичного функционала качества, в том числе – с учетом стохастического характера ускорения маневрирующей цели. При этом алгоритм расчета управляющих ускорений, в зависимости от используемого критерия оптимальности, может принимать следующий вид [6, 7, 8]:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_p &= N_0 [\boldsymbol{\omega}_0 \times \Delta \mathbf{v}] + 0.5(3 - \alpha_u \tau) \hat{\mathbf{W}}_u, \\ \mathbf{W}_p &= (N_0 \Delta \mathbf{v} + 0.2k_\gamma \tau \cdot \Delta \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\omega}_0, \\ \tau &= -\frac{\Delta \mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{v}_0}{\Delta \mathbf{v}}, \Delta \mathbf{v}_0 = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\|\Delta \mathbf{v}\|}, N = 3, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\alpha_u = \Delta f_u$  – ширина спектра флуктуаций нормальных ускорений цели;  $\mathbf{W}_u$  – вектор ускорений цели;  $k_\gamma$  – коэффициент штрафа на величину промаха в точке встречи, имеющий размерность  $\text{с}^{-2}$ ;  $\tau$  – время, оставшееся до момента встречи ракеты с целью (подлетное время).

Современные исследования в данном направлении посвящены синтезу законов наведения, позволяющих более полно использовать априорную статистическую информацию для прогнозирования динамики относительного движения и параметров встречи с целью, адаптации параметров МПН к условиям перехвата.

Например, в работе [9] для повышения точности наведения и снижения величины потребных перегрузок предлагается прогнозировать координаты точки встречи, а также использовать комбинацию метода погони (наведения с нулевым упреждением) на начальном участке и классического МПН – на оставшейся части траектории:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_p &= N_1 \left( k_v \frac{[\Delta \mathbf{v} \times \Delta \mathbf{r}]}{\Delta r^2} + (1 - k_v) \frac{[\mathbf{v}_1 \times \Delta \mathbf{r}]}{\Delta r^2} \right) \times \mathbf{v}_1, \\ k_v &= \frac{|\mathbf{v}_1| \tau}{|\mathbf{Q}(\tau)|}, N_1 = \frac{N_0 |\Delta \mathbf{v}|}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{I}_{x0}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\mathbf{Q}(\tau)$  – вектор текущей прогнозируемой дальности до упрежденной точки встречи с целью;  $\mathbf{I}_{x0}$   $\mathbf{I}_{y0}$   $\mathbf{I}_{z0}$  – ортонормированные вектора, определяющие оси сопровождающего триэдра СК ЛВ.

Величина  $\mathbf{Q}(\tau)$  при постоянном относительном ускорении цели  $\Delta \mathbf{a} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$ , где  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  – оценка вектора ускорений ракеты и цели в СК ЛВ, может быть определена из условия  $\Delta \mathbf{r}(\hat{\tau}) \cdot \Delta \mathbf{v}(\hat{\tau}) = 0$  в виде решения квадратного уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v} (\Delta \mathbf{r} + \Delta \mathbf{v} \cdot \tau + 0.5 \Delta \mathbf{a} \cdot \tau^2) &= 0, \\ \hat{\tau} &= \frac{-\Delta v^2 \pm \sqrt{(\Delta \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v})^2 - 2 \cdot (\Delta \mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{v}) \cdot (\Delta \mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{v})}}{(\Delta \mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{v})}, \\ \boldsymbol{\Theta}(\hat{\tau}) &= \Delta \mathbf{r} + \Delta \mathbf{v} \cdot \hat{\tau} + 0.5 \Delta \mathbf{a} \cdot \hat{\tau}^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Для случая  $\Delta \mathbf{a} = 0$  выражение (4) упростится и примет вид:

$$\mathbf{Q} = \frac{\Delta \mathbf{r} (\Delta \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v}) - \Delta \mathbf{v} (\Delta \mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{v})}{(\Delta \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v})} = \frac{[\Delta \mathbf{v} \times \Delta \mathbf{r}] \times \Delta \mathbf{v}}{(\Delta \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v})}. \quad (5)$$

Проектируя компоненты вектора  $\mathbf{Q}$  из выражения (3) на оси СК ЛВ, получим:

$$\mathbf{W}_p = N_1 \left( k_v [\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}_1] + (1 - k_v) \frac{\mathbf{M}_3 \mathbf{v}_1}{|\Delta \mathbf{r}|} |\mathbf{v}_1| \right), \quad (6)$$

где  $\mathbf{M}_3$  – матрица связи СК ЛВ и СК, связанной со строительными осями ЗУР (СвСК).

В работе [10] в рамках линейной квадратично – гауссовской задачи с учетом инерци-

онности ЗУР получены соотношения для оптимального закона перехвата маневрирующей цели на основе одноканальных моделей 2...4-го порядков в декартовой СК применительно к задаче наведения противоракеты семейства «Стандарт» RIM-161A (SM-3 Block I), предназначенной для уничтожения воздушных целей, в том числе баллистических ракет и боеголовок на заатмосферных высотах, а также спутников на высотах до 250 км. При синтезе введено допущение об отсутствии связи каналов, стационарности системы управления, а также известных оценках фактических ускорений ракеты и цели в СК ЛВ [10]:

$$\mathbf{W}_p = \bar{N} (\Delta \mathbf{r} + \Delta \mathbf{v} \tau + 0.5 \mathbf{a}_2 \tau^2 + \gamma_\tau \mathbf{a}_1),$$

$$\bar{N} = \frac{6\tau^2 (\xi_\tau + \exp(-\xi_\tau) - 1)}{\xi_\tau^2 \left( \frac{6}{bT^3} + (3 + 6\xi_\tau - 6\xi_\tau^2 + 2\xi_\tau^3 - 12\xi_\tau \exp(-\xi_\tau) - 3 \exp(-2\xi_\tau)) \right)},$$

$$\gamma_\tau = -T^2 (\xi_\tau + \exp(-\xi_\tau) - 1), \xi_\tau = \frac{\tau}{T_p},$$

где  $T_p$  – постоянная времени ракеты при аппроксимации ее передаточной функции апериодическим звеном (как правило,  $T_p$  может изменяться в процессе наведения);  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  – вектор текущих (измеренных) ускорений ракеты и цели соответственно;  $b$  – коэффициент штрафа за промах на конечном участке наведения.

В работе [11] методами синергетической теории оптимального управления получены в замкнутой форме аналитические выражения, реализующие оптимальный закон перехвата цели на основе многомерной нелинейной многосвязной модели кинематики относительного перемещения ракеты и цели, учитывающий ускорения маневра цели и текущие ускорения ЗУР.

Все перечисленные закона оптимального перехвата в рамках используемых моделей дают приемлемые для практической реализации алгоритмическую сложность и вычислительные затраты в предположении отсутствия ограничений, налагаемых на фазовые координаты, используемые для формирования команд управления. Общим недостатком полученных законов наведения [3, 6, 9, 11] является то, они не позволяют учесть технические ограничения проектируемой системы управления (в том числе – ограничения по нормальным ускоре-

ниям и угловым скоростям вращения, а также угловые ограничения секторов захвата и сопровождения ракеты).

Кроме того, в указанных работах не в полной мере исследована задача компенсации неконтролируемых возмущений, приводящих к росту потребных ускорений ракеты в процессе наведения. Особую актуальность данная проблема приобретает в условиях ограниченных запасов располагаемых ускорений ракеты при больших значениях навигационного коэффициента МПН, в том числе – при совершении целью противоракетного маневра.

В работе [11] сделана попытка учесть нелинейный и многомерный характер полной модели относительного движения материальных точек (цели и ракеты), в том числе – ограничения на фазовые координаты (нормальные ускорения), налагаемые конкретной технической реализацией системы. Однако полученные соотношения требуют введения дополнительных фильтров оценивания для фазовых координат, недоступных непосредственному наблюдению при реализации управления через СНР, а не с борта ЗУР с использованием радиолокационной или оптической головки самонаведения (ГСН).

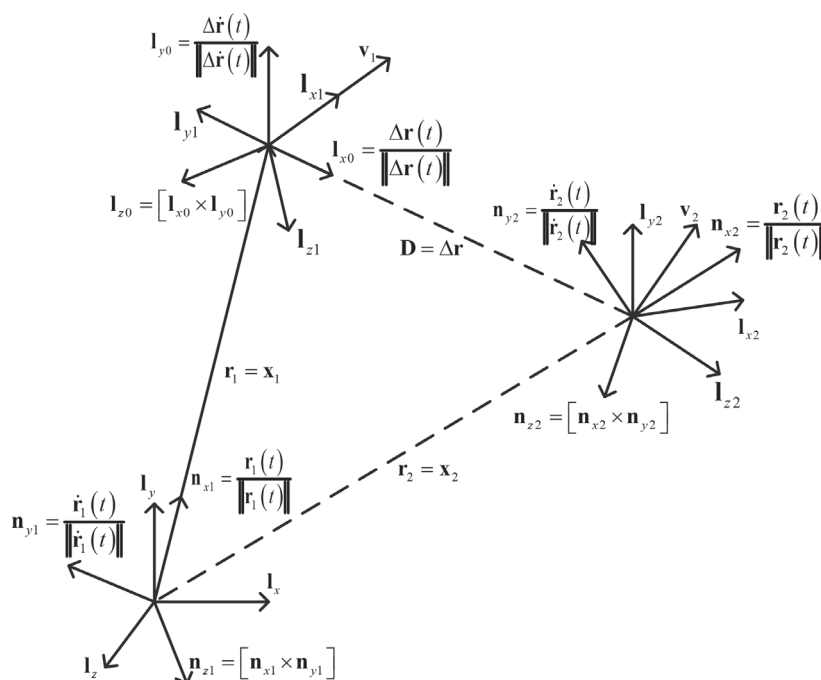


Рис. 1. Геометрия взаимного перемещения ракеты и цели, используемая для получения кинематических уравнений

Необходимость адаптации к ограничениям на сектор углового сопровождения ракеты при использовании методов синергетической теории управления приводит к необходимости дополнительного учета кинематики перемещения ракеты относительно СНР. Это влечет за собой двукратный рост размерности системы уравнений, описывающих нелинейную многосвязную динамическую систему в относительном и абсолютном движении. Причем, число взаимозависимых каналов управления увеличивается с двух до четырех, а исходная модель будет описываться системой нелинейных дифференциальных уравнений размерностью 12.

Дополнительно необходимо вводить четыре промежуточных фазовых координаты для учета ограничений – для азимута и угла места, а также нормальных ускорений ЗУР. При этом общее число нелинейных дифференциальных уравнений возрастает до 16.

Кроме того, необходимо будет учитывать алгебраические уравнения связи с помощью матриц Эйлера – Крылова между несколькими системами координат – измерительной (связанной с линией визирования СНР – ЗУР) и относительной (связанной с линией визирования ЗУР – цель).

В качестве иллюстративного примера на рис. 1 приведена геометрия взаимного перемещения ракеты и цели, а также системы координат,

используемые при получении уравнений относительного и абсолютного движения ракеты и цели. Введены следующие обозначения осей сопровождающих (динамических) и статических ортонормированных триэдров, связанных с полюсами соответствующих динамических объектов (СНР, ракеты и цели), взаимное положение которых характеризуется следующими ортами рассматриваемых СК:

$I_x, I_y, I_z$  – орты СК, связанной с фиксированной точкой визирования ракеты и цели, находящейся на земле (как правило, полюс данной СК определяется точкой стояния СНР);  $I_{x0}, I_{y0}, I_{z0}$  – орты СК, связанной с ЛВ, характеризующие положение соответствующих осей данной СК;  $I_{x1}, I_{y1}, I_{z1}$  – орты СвСК, характеризующий положение продольной и поперечных осей (орт  $I_{x1}$  и вектор скорости ракеты можно считать коллинеарными в предположении о малости углов атаки и скольжения ракеты);  $n_{x1}, n_{y1}, n_{z1}$  – орты осей измерительной системы координат (ИСК-1), связанной с ЛВ ЗУР;  $n_{x2}, n_{y2}, n_{z2}$  – орты осей измерительной системы координат (ИСК-2), связанной с ЛВ цели;  $r_1 = x_1, r_2 = x_2$  – вектор радиальной дальности ракеты и цели соответственно;  $v_1$  – вектор скорости ракеты;  $v_2$  – вектор скорости цели;  $\Delta v = v_{12}$  – вектор относительной скорости сближения ракета – цель (на рисунке не приведен).

Сопровождающий ортонормированный триэдр СК ЛВ характеризуется тремя ортами, которые связаны соотношениями вида:

$$\mathbf{l}_{x0} = \frac{\Delta \mathbf{r}(t)}{\|\Delta \mathbf{r}(t)\|}, \mathbf{l}_{y0} = \frac{\Delta \dot{\mathbf{r}}(t)}{\|\Delta \dot{\mathbf{r}}(t)\|}, \mathbf{l}_{z0} = [\mathbf{l}_{x0} \times \mathbf{l}_{y0}]. \quad (7)$$

Аналогичные соотношения связывают орты сопровождающих триэдров остальных динамических СК (например, СвСК ракеты и цели).

В качестве примера ниже приведен один из вариантов исходной нелинейной модели перехвата для синтеза методом АКАР, учитывающей действующие технические ограничения на сектор сопровождения ракеты.

Уравнения относительного движения ЗУР:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_2 &= \omega_{z2}, \\ \dot{\phi}_2 &= \frac{\omega_{y2}}{\cos(\theta_2)}, \\ \dot{W}_{y2}^* &= k_y (W_{y2} - \text{tg}(W_{y2}^*)), \\ \dot{W}_{z2}^* &= k_z (W_{z2} - \text{tg}(W_{z2}^*)), \\ \dot{\omega}_{z2} &= \frac{W_{yp}^* - 2|\dot{D}|\omega_{z2}}{D} - \omega_{y2}^2 \text{tg}(\theta_2), \\ \dot{\omega}_{y2} &= \frac{-W_{zp}^* - 2|\dot{D}|\omega_{y2}}{D} + \omega_{y2}\omega_{z2} \text{tg}(\theta_2), \\ \dot{W}_{y2} &= \alpha_{yp} (U_y - W_{y2}), \\ \dot{W}_{z2} &= \alpha_{zp} (U_z - W_{z2}), \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнения движения ЗУР относительно СНР:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_j &= \omega_{zj}, \\ \dot{\beta}_j &= \frac{\omega_{yj}}{\cos(\varepsilon_j)}, \\ \dot{\varepsilon}_j^* &= k_\varepsilon (\varepsilon_j - \text{tg}(\varepsilon_j^*)), \\ \dot{\beta}_j^* &= k_\beta (\beta_j - \text{tg}(\beta_j^*)), \\ \dot{\omega}_{zj} &= \frac{W_{yj} - 2\dot{\rho}_j \omega_{zj}}{\rho_j} - \omega_{yj}^2 \text{tg}(\varepsilon_j^*), \\ \dot{\omega}_{yj} &= \frac{-W_{zj} - 2\dot{\rho}_j \omega_{yj}}{\rho_j} + \omega_{yj}\omega_{zj} \text{tg}(\varepsilon_j^*), \\ \dot{W}_{yj} &= \alpha_{yp} (U_{yj} - W_{yj}), \\ \dot{W}_{zj} &= \alpha_{zp} (U_{zj} - W_{zj}), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\mathbf{U}_j = \mathbf{M}(\varepsilon_j, \beta_j) \mathbf{M}^T(\theta_2, \phi_2) (U_{jx} \ U_{jy} \ U_{jz})^T,$$

где  $\Theta_2 = (\theta_2, \phi_2, \gamma_2)$  – углы ориентации ЛВ БПЛА – цель в декартовой СК, связанной с точкой расположения РЛС наведения БПЛА (РЛСН);  $\mathbf{W}_2 = (W_{x2} \ W_{y2} \ W_{z2})^T$  – компоненты вектора линейных (продольных и нормальных) ускорений ракеты в системе координат, связанной с ЛВ (СК ЛВ) ракета – цель;  $\boldsymbol{\omega}_2 = (\omega_{x2} \ \omega_{y2} \ \omega_{z2})^T$  – компоненты вектора УСВ ЛВ ЗУР – цель в СК ЛВ РЦ;  $D, \dot{D}$  – относительная дальность и скорость сближения ракета – цель;  $\alpha_p = T_p^{-1}$  – коэффициент, определяющий инерционные свойства неизменной части объекта управления;  $T_p$  – постоянная времени звена, аппроксимирующего динамические свойства ЗУР;  $U_y, U_z$  – сигналы (команды) управления на выходе регулятора;  $\hat{\mathbf{W}}_c = (\hat{W}_{xc}, \hat{W}_{yc}, \hat{W}_{zc})^T$  – вектор оценок нормальных ускорений цели, полученных в следящем фильтре оценивания параметров движения цели;  $W_{yp}^* = (\hat{W}_{yc} - W_{y2}^*)$ ,  $W_{zp}^* = (\hat{W}_{zc} - W_{z2}^*)$  – относительные управляющие нормальные ускорения ЗУР;  $\varepsilon_j, \beta_j, \rho_j$  – угол места, азимут и радиальная дальность БПЛА (цели) относительно наземной РЛС;  $\rho_j$  – радиальная скорость ЗУР (цели);  $\omega_{yj}, \omega_{zj}$  – УСВ ЛВ СНР – ЗУР (цель) в проекциях на оси измерительной СК, продольная ось которой связана с ЛВ;  $W_{yj}, W_{zj}$  – нормальные ускорения ЗУР (цели) в проекциях на оси стационарной (измерительной) СК (СтСК);  $W_{yj}, W_{zj}$  – команды управления ЗУР (задающие нормальные ускорения цели) на входе фильтра, моделирующего запаздывание в контуре управления ЗУР (динамику маневра цели);  $j \in (0, 1)$  – подстрочный индекс переменных состояний: 0 – ЗУР, 1 – цель.

Решение данной задачи возможно в настоящее время исключительно с привлечением положения теории аналитического конструирования агрегированных регуляторов [12, 13]. Однако сложность полученных аналитических соотношений и прогнозируемые трудозатраты на исследование полученных законов методами статистического моделирования могут нивелировать ожидаемый выигрыш от учета технических и технологических нелинейностей (ограничений).

Приведенный ниже материал является попыткой найти компромисс между строгостью, завершенностью научных результатов и практичностью, лаконичностью и прагматичностью



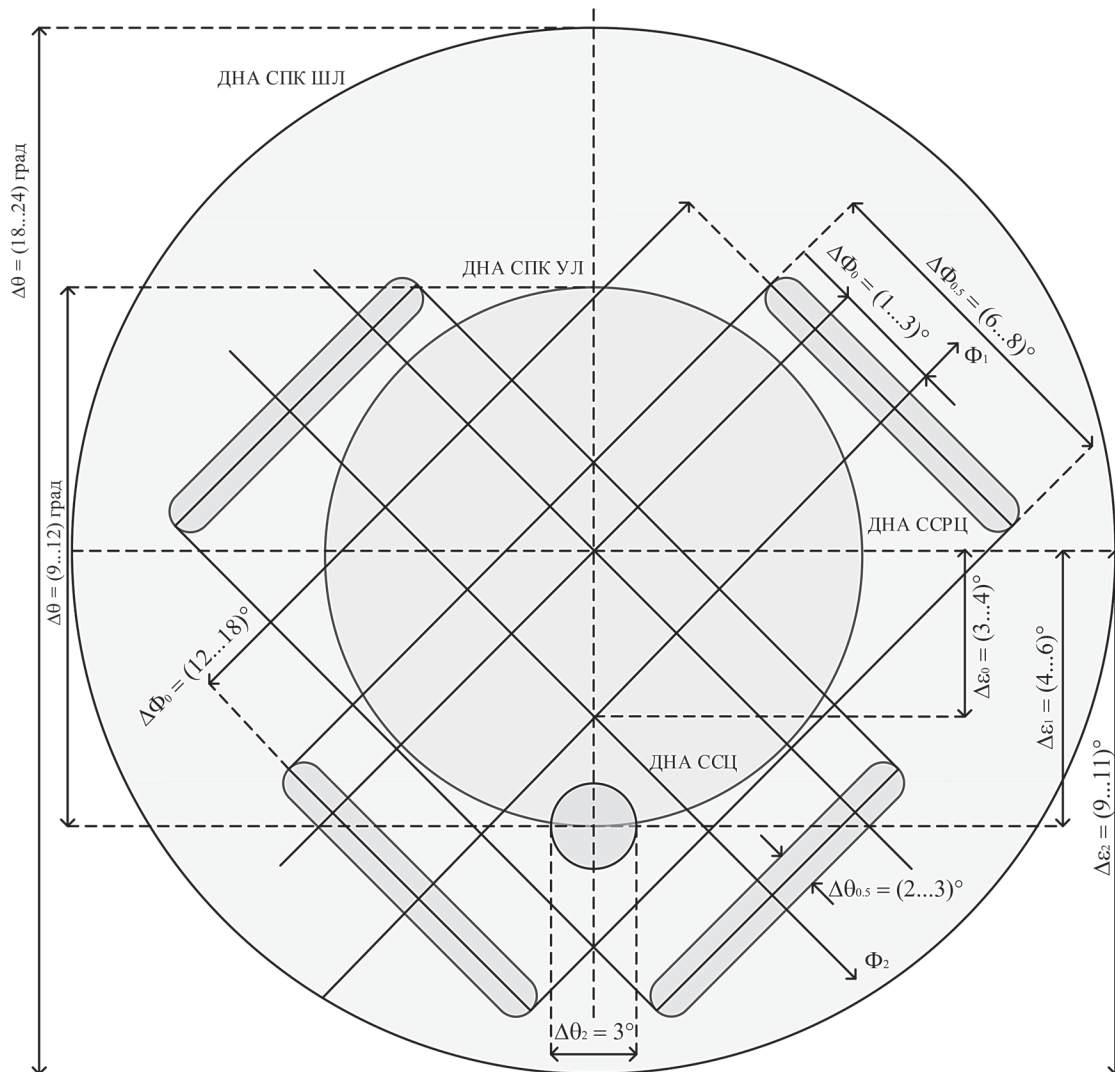


Рис. 2. Сектор углового сопровождения ракет в картинной плоскости, ортогональной ЛВ СНР – цель

инженерной интерпретации в процессе разработке и практической реализации алгоритмов наведения ракет с учетом реальных технических характеристик неизменной (заданной) части контура управления.

### Постановка задачи

Сектор сопровождения ЗУР в картинной плоскости представлен на рис. 2. Сечения сектора сопровождения образовано пересечением диаграмм направленности антенн (ДНА) станции сопровождения цели неподвижным лучом (ССЦ), станции сопровождения ракеты и цели с линейным сканированием (ССРЦ) и станции передачи команд (СПК) узкого и широкого луча (УЛ и ШЛ) с плоскостью, ортогональной оптической оси антенн (ЛВ цели). Угловые размеры соответствующих секторов, а также обозначения антенн приедены на рисунке.

Задача заключается формировании управляющих команд таким образом, чтобы обеспечить удержании ракеты в пределах сектора сканирования ССРЦ, образованного следом от перемещающихся в пространстве главных лучей ДНА с размерами по угловым координатам  $\Delta\Phi_1 \times \Delta\Phi_2 = (13 \times 13)^\circ$ .

Из рисунка можно определить, что угловые размеры сектора сопровождения относительно ЛВ цели составляют величину

$$\Delta\Phi_1 \times \Delta\Phi_2 = (-4...9)^\circ \times (-9...4)^\circ. \quad (10)$$

При этом должно быть обеспечено выполнение следующих требований к методу наведения:

- угловое упреждение (отставание) ракеты относительно ЛВ цели не должно превышать указанных выше значений;
- величина флуктуационных и кинематических нормальных ускорений (величины УСВ

ЛВ РЦ) в процессе наведения должна быть минимальна (либо обеспечивать требуемую величину скорости ЗУР в точке встречи);

– величина мгновенного линейного промаха и скорости его изменения в точке встречи не должны превышать допустимых значений, определяемых характеристиками боевой боевого снаряжения ракеты.

Выполнение первого и последнего требований является безусловным, так как выход ЗУР за пределы сектора сопровождения приведет к потере ответного сигнала и срыву процесса наведения.

Нулевые значения промаха и его производной в точке встречи обеспечивается соответствующим выбором коэффициентов штрафа при фазовых координатах.

Второе требование обусловлено тем, что величина потребных нормальных ускорений ракеты зависит не только от неконтролируемых внешних ускорений (ускорения маневра, свободного падения, продольного ускорения ЗУР), но и от значения навигационного коэффициента, которая выражается следующим образом [17]:

$$W_p(t) = \frac{N_0}{N_0 - 2} \left( 1 - \left( \frac{D}{D_1} \right)^{N_0 - 2} \right) W_u, \quad (11)$$

где  $D, D_1$  – текущая дальность и дальность начала маневра цели соответственно;  $W_u$  – ускорения маневра цели.

При ограничении ускорений ракеты будет происходить неконтролируемый рост промаха  $h$ , величина которого с приемлемой для практики точностью определяется как [17]:

$$h = \frac{W_u D_1^2}{2|\dot{D}|} \left( 1 - \frac{W_p}{W_{mp}} \right) \left( 1 - \frac{W_p}{W_{mp}} \right)^{\frac{2}{N_0 - 2}}, \quad (12)$$

где  $W_p$  – максимальные ускорения, развиваемые ракетой;  $W_{mp}$  – требуемые для наведения МПН ускорения ракеты;  $\dot{D}$  – относительная скорость сближения ракеты и цели.

Математическая формулировка указанных выше технических требований записывается в виде:

$$J = C_h h^2(T) + C_v V^2(T) + \int_0^T (C_\phi F(\Delta\phi) + C_w W_p^2(t)) dt, \quad (13)$$

где  $h, V$  – соответственно линейных промах и скорость его изменения в точке встречи;

$F(\Delta\phi)$  – нелинейная функция сигнала  $\Delta\phi$  углового рассогласования ракета – цель в картинной плоскости;  $W_p(t)$  – нормальное ускорение ракеты;  $C_h, C_v, C_w, C_\phi$  – весовые коэффициенты штрафов на текущее и конечное рассогласование и величину сигнала управления;  $T$  – время наведения ракеты.

Синтез оптимального закона перехвата вариационными методами приводит к необходимости решения двухточечной краевой задачи (ДТКЗ) в процессе наведения в реальном масштабе времени. Использование методов синергетической теории управления, как было отмечено выше, хоть и позволяет получить оптимальное решение для задачи перехвата в замкнутой алгебраической форме, однако громоздкость аналитических выражений и объем требуемых вычислений для оценки фазовых координат, наряду со сложностью получения методики для практического анализа точности и динамических свойств, существенно снижает прикладную ценность результатов синтеза.

Исходя из вышеизложенного, рассмотрим инженерный метод решения задачи синтеза метода наведения, который предполагает использование эвристического подхода<sup>1</sup> для обеспечения перечисленных выше технических требований с учетом структурных ограничений [14]. Перечислим возможные варианты решения задачи наведения ЗУР в условиях ограниченного сектора сопровождения:

– формирование дополнительных (наряду с сигналами компенсации продольного ускорения, сил тяжести и маневра цели) корректирующих сигналов в контуре оценки УСВ ЛВ РЦ, зависящих от текущего углового упреждения

<sup>1</sup> Алгоритм решения задачи, включающий практический метод, не являющийся гарантированно точным или оптимальным, но достаточный для решения поставленной задачи. Позволяет ускорить решение задачи в тех случаях, когда точное решение не может быть найдено. Эвристический алгоритм – это алгоритм решения задачи, правильность которого для всех возможных случаев не доказана, но про который известно, что он даёт достаточно хорошее решение в большинстве случаев. В действительности может быть даже известно (то есть доказано) то, что эвристический алгоритм формально неверен. Его всё равно можно применять, если при этом он даёт неверный результат только в отдельных, достаточно редких и хорошо выделяемых случаях или же даёт неточный, но всё же приемлемый результат. Проще говоря, эвристика – это не полностью математически обоснованный (или даже «не совсем корректный»), но при этом практически полезный алгоритм.

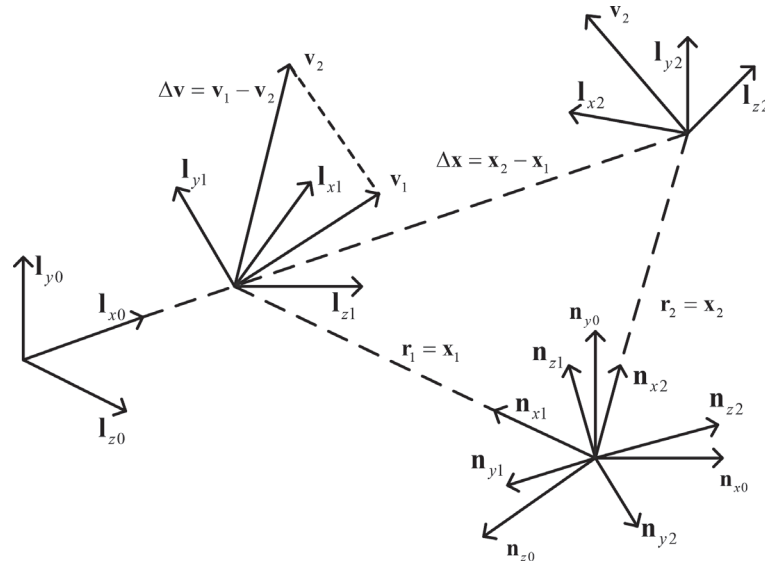


Рис. 3. Системы координат, используемые при рассмотрении взаимного перемещения ракеты и цели

относительно ЛВ СНР – цель, на основе простейших схем регулирования, например, нелинейных модификаций классического пропорционально – интегрального – дифференцирующего (ПИД) регулятора;

- расчет кинематической (заданной) УСВ ЛВ РЦ по расчетным кинематическим угловым координатам ЗУР с последующим сравнением заданной и фактической УСВ ЛВ РЦ и плавным переходом на классический МПН;

- комбинированное управление за счет плавного сопряжения траекторий трехточечных (полное или частичное спрямление траектории, метод параллельного сближения) и двухточечных методов наведения (например, МПН);

- комбинированное управление с использованием наведения с постоянным (переменным) углом упреждения (метод погони) на начальном участке и МПН – на конечном участке;

- использование переменного навигационного коэффициента в выражениях для МПН, адаптивного к прогнозируемым параметрам встречи, позволяющего опосредованно управлять величиной углового упреждения;

- использование упрощенной эталонной модели движения ракеты для прогнозирования и предварительной оценке максимальных углов упреждения с целью последующей коррекции параметров МПН (навигационного коэффициента или сигнала компенсации);

- комбинация двух или более перечисленных способов на различных этапах наведения.

Ввиду ограниченного объема публикации из всего перечня эвристических приемов огра-

ничимся детальным рассмотрением подхода, основанного на использование отдельного контура коррекции по сигналам углового рассогласования совместно с адаптацией навигационного коэффициента к параметрам наведения.

### Модификация МПН для ограниченного сектора углового сопровождения ЗУР

Геометрия задачи пространственного наведения ракеты на цель представлена на рисунке 2. Обозначения осей сопровождающих (динамических) и статических ортонормированных триэдров, связанных с полюсами соответствующих объектов (СНР, ракеты и цели), соответствуют приведенным ранее.

Общее выражение для модифицированного МПН с использованием контура коррекции в общем случае имеет следующий вид (для вертикального канала наведения):

$$\begin{aligned}
 W_y &= N_y(t) \left( \omega_z + \Delta\bar{\omega}_z + \sum_{j=0}^2 \Delta\omega_{zj} \right), \\
 \Delta\dot{\omega}_z &= k_{\omega d} \frac{\partial f(\Delta\varphi_z)}{\partial t} + k_{\omega p} f(\Delta\varphi_z) + \Delta\zeta_z, \\
 \Delta\dot{\zeta}_z &= k_{\omega i} f(\Delta\varphi_z) + k_{\omega l} \delta\omega_z, \\
 \delta\dot{\omega}_z &= k_{\beta\omega} \left( \left( \Delta\omega_z - k_z \tanh\left(\frac{\Delta\omega_z}{k_z}\right) \right) - \delta\omega_z \right), \\
 \Delta\dot{\bar{\omega}}_z &= k_{\omega\alpha} \left( k_z \tanh\left(\frac{\Delta\omega_z}{k_z}\right) - \Delta\bar{\omega}_z \right), \\
 N_y(t) &= N_0(t) |\dot{D}(t)|,
 \end{aligned} \tag{14}$$



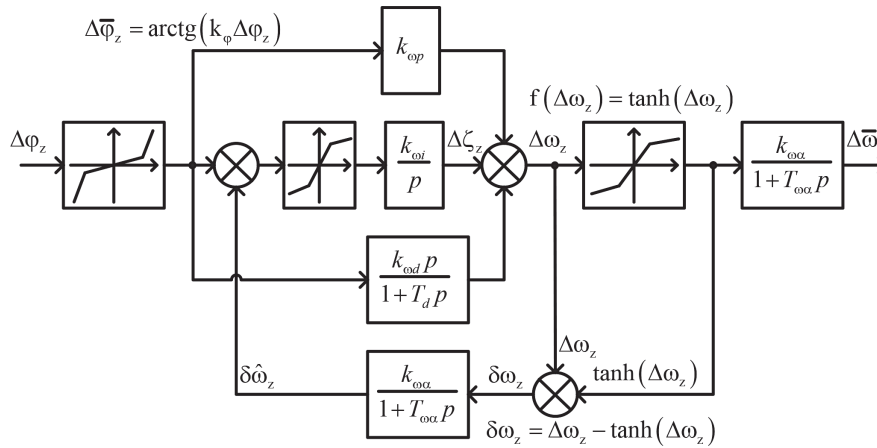


Рис. 4. Структурная схема нелинейного ПИД – регулятора канала коррекции углового упреждения

где  $N_y(t) = f(t, \tau, \Omega_z, \varpi_z)$  – навигационный коэффициент, зависящий от полетного времени, остатка времени до встречи, угловой скорости  $\Omega_z$  и углового ускорения  $\varpi_z$  вращения ЛВ СНР – цель в точке встречи (характеризует динамическую напряженность траектории);  $\dot{D}(t)$  – скорость сближения ракета – цель;  $\Delta\bar{\omega}_z$  – поправка по УСВ  $\omega_z$  на выходе корректирующего устройства на основе модифицированного нелинейного ПИД – регулятора;  $k_z$  – нормировочный коэффициент функции  $\tanh(x)$  для плавного ограничения;  $k_{\omega\alpha}$  – коэффициент сходимости сглаживающего фильтра на выходе ограничителя ПИД – регулятора;  $k_{од}, k_{оп}, k_{ои}$  – коэффициенты дифференцирующего, пропорционального и интегрирующего каналов коррекции по УСВ ЛВ;  $\Delta\varphi_z, \Delta\zeta_z$  – переменные состояния ПИД – регулятора;  $\Delta\omega_{zj}$  – корректирующая поправка по УСВ, обусловленная воздействием  $j$ -го внешнего возмущающего ускорения;  $f(\Delta\varphi_z)$  – функция, обеспечивающая быстрый рост сигнала ошибки от входного рассогласования.

Функциональная зависимость навигационного параметра  $N_y(t, \tau, \Omega_z, \varpi_z)$  подбирается на основе математического моделирования. Диапазон изменения параметра составляет  $N_y \in (1...6)$  в зависимости от прогнозируемых условий встречи. Одна из типовых зависимостей приведена ниже:

$$N_y(t, \tau, \Omega_z) = N_{y0}(\Omega_z) + \Delta N_y(\Omega_z) \exp\left(-\frac{(t-t_0)}{\Delta t(\tau)}\right),$$

где  $N_{y0}(\Omega_z) = 2$  – начальное значение навигационного коэффициента (реализуется метод наведения с постоянным пеленгом);  $\Delta N_y(\Omega_z)$  –

приращение параметра за время наведения;  $\Delta t(\tau)$  – постоянная времени, зависящая от текущего значения подлетного времени  $\tau$  и определяющая время достижения коэффициентом  $N_y$  установившегося значения.

$$\Delta t(\tau) = \Delta t_0 + \delta t_0 \operatorname{th}\left(\frac{\tau - \tau_0}{\delta \tau_0}\right), \quad (15)$$

где  $\Delta t_0$  – минимальное начальное значение постоянной времени;  $\delta \tau_0$  – величина, определяющая время нарастания параметра  $\Delta t(\tau)$  от минимального до максимального значения;  $\delta t_0$  – приращение величины  $\Delta t(\tau)$ .

Структурная схема нелинейного ПИД-регулятора приведена на рис. 4. Назначение функционального преобразователя  $f(\Delta\varphi)$  на входе ПИД – регулятора:

- обеспечение нелинейной зависимости крутизны преобразования от величины входного сигнала ошибки  $\Delta\varphi$ ;
- плавное включение – выключение цепи коррекции при достижении граничного значения  $\Delta\varphi_0(\Delta\dot{\varphi})$ ;
- исключение случайной коммутации (дребезга) сигнала рассогласования вблизи граничного значения.

Назначение ограничителя сигнала ошибки на входе интегрирующей цепи – контролируемое увеличение сигнала регулирования по соответствующей компоненте выходного сигнала.

Назначение ограничителя с обратной связью на выходе ПИД-регулятора – предотвращение насыщения выходного сигнала при больших величинах сигнала рассогласования на входе и уменьшение времени выхода из зоны ограничения.

Типовые функции могут использовать зоны нечувствительности для плавного ввода сигнала ошибки в контур коррекции:

$$f(\Delta\varphi) = \left( \left| \Delta\varphi \right| < \Delta\varphi_0, 0, \varphi_0 \operatorname{tg} \left( \frac{\Delta\varphi - \Delta\varphi_0 (\Delta\dot{\varphi}) \operatorname{sign}(\Delta\varphi)}{\varphi_0} \right) \right),$$

или

$$f(\Delta\varphi) = \left( \left| \Delta\varphi \right| < \Delta\varphi_0, 0, \sum_{j=0}^3 \kappa_j (\Delta\varphi - \Delta\varphi_0 (\Delta\dot{\varphi}) \operatorname{sign}(\Delta\varphi))^j \right),$$

где  $\Delta\varphi_0 (\Delta\dot{\varphi})$  – смещение гистерезисного типа относительно нулевого значения сигнала рас-согласования, при котором включается нелинейный контур коррекции;  $\kappa_j$  – постоянные полиномиальные коэффициенты.

Рассмотрим возможные варианты поэтапного расчета управляющих ускорений ЗУР. Первый вариант представляет собой векторную форму алгоритма расчета УСВ в проекциях на оси СК ЛВ и описывается следующими выражениями:

$$\omega_2 = \mathbf{M}_2 \cdot (\omega_0 + \Delta\bar{\omega}) + \sum_{j=0}^2 \Delta\omega_j, \omega_0 = \frac{[\Delta\mathbf{x} \times \Delta\mathbf{v}]}{(\Delta\mathbf{x}^T \Delta\mathbf{x})},$$

$$\Delta\dot{\omega} = k_{\omega d} \frac{\partial \mathbf{f}(\Delta\varphi_y, \Delta\varphi_z)}{\partial t} + k_{\omega p} \mathbf{f}(\Delta\varphi_y, \Delta\varphi_z) + \Delta\zeta,$$

$$\Delta\dot{\zeta} = k_{\omega i} \mathbf{f}(\Delta\varphi_y, \Delta\varphi_z) + k_{\omega l} (\Delta\omega - \tanh(\Delta\omega)),$$

$$\Delta\dot{\bar{\omega}} = k_{\omega\alpha} (\tanh(\Delta\omega) - \Delta\bar{\omega}),$$

$$\Delta\omega_j = \sum_{j=0}^2 \frac{\Delta\mathbf{W}_j}{2|\dot{D}|}, \quad (16)$$

где  $\Delta\bar{\omega}$  – корректирующая поправка для предотвращения выхода ЗУР за пределы сектора сопровождения;  $\Delta\omega_j$  – компенсирующие поправки к фактической УСВ ЛВ, обусловленные возмущающим воздействием внешних ускорений;  $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$  – разность координат цели и ракеты в проекциях на оси земной системы координат (ЗСК);  $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$  – разность производных координат цели и ракеты в проекциях на оси ЗСК;  $\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_2(\theta_2, \varphi_2)$  – матрица перехода от ЗСК к СК ЛВ, зависящая от углов ориентации ЛВ в ЗСК  $(\theta_2, \varphi_2)$ ;  $\Delta\mathbf{W}_j$  – поправки для компенсации возмущающего воздействием внешних неконтролируемых ускорений;  $|\dot{D}| = |\Delta\mathbf{v}|$  – модуль вектора скорости

сближения;  $k_{wd}, k_{wp}, k_{wi}$  – коэффициенты дифференцирующего, пропорционального и интегрирующего каналов коррекции по нормальным ускорениям;  $\mathbf{f}(\Delta\varphi_y, \Delta\varphi_z)$  – векторная функция нелинейного преобразователя на входе ПИД-регулятора;  $\mathbf{f}(\Delta\omega) = \tanh(\Delta\omega)$  – векторная функция векторного аргумента гиперболический тангенс.

Управляющие нормальные ускорения определяются следующим образом:

$$\mathbf{W}_{\rho 2} = N(t) \mathbf{M}_3 \left( \omega_2 \times \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} \right), N(t) = N_0(t) |\dot{D}_1|,$$

$$|\dot{D}_1| = \frac{|\dot{D}|}{\cos(\varepsilon_0) \cos(\beta_0)}, \dot{D} = \frac{\Delta\mathbf{x} \Delta\mathbf{v}}{|\Delta\mathbf{x}|}, \quad (17)$$

где  $\mathbf{M}_3 = \mathbf{M}_3(\Theta_3) = \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2^T$  – матрица перехода от СК ЛВ к СвСК, зависящая от углов ориентации ЗУР в СК ЛВ  $\Theta_3 = (\nu_3, \psi_3, \zeta_3)$ , полученных с учетом пространственного крена ракеты при условии идеальной работы системы стабилизации;  $N_0(t) \in (2...10)$  – навигационный коэффициент, зависящий от текущих условий наведения и прогнозируемых параметров встречи;  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_1(\nu_1, \psi_1, \zeta_1)$  – матрица перехода от ЗСК к СвСК, характеризующаяся углами тангажа  $\nu_1$ , рыскания  $\psi_1$  и крена  $\zeta_1$  ЗУР;  $\varepsilon_0, \beta_0$  – угол места и азимут цели в СвСК ЗУР (углы относительного пеленга).

Альтернативный вариант оценки управляющих ускорений в СвСК выпадит следующим образом:

$$\mathbf{W}_{\rho 1} = \mathbf{M}_3 \mathbf{W}_{\rho 2},$$

$$\mathbf{W}_{\rho 2} = N(t) \left( \mathbf{M}_2 \left( \omega_0 \times \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} \right) + \Delta\mathbf{W} + \sum_{j=0}^2 \Delta\mathbf{W}_{0j} \right),$$

$$\Delta\dot{\mathbf{W}} = k_{wd} \frac{\partial \mathbf{f}(\Delta\varphi_y, \Delta\varphi_z)}{\partial t} + k_{wp} \mathbf{f}(\Delta\varphi_y, \Delta\varphi_z) + \Delta\mathbf{Q},$$

$$\Delta\dot{\mathbf{Q}} = k_{wi} \mathbf{f}(\Delta\varphi_y, \Delta\varphi_z), \quad (18)$$

где  $k_{wd}, k_{wp}, k_{wi}$  – коэффициенты дифференцирующего, пропорционального и интегрирующего каналов коррекции по нормальному ускорению.

Методика расчета компенсирующих (корректирующих) сигналов по нормальным ускорениям  $\Delta\mathbf{W}_{0j}$  будет рассмотрена в следующем параграфе.

### Формирование корректирующих сигналов

В процессе наведения на ракету, помимо управляющих нормальных ускорений в СК ЛВ, действуют следующие задающие и возмущающие ускорения:

– вектор продольного ускорения ЗУР  $\mathbf{W}_{x1}$ , обусловленного переменной величиной тяги двигателя и высотным градиентом параметров атмосферы;

– вектор ускорения свободного падения  $\mathbf{g}$  в заданной точке пространства;

– вектор ускорения цели  $\mathbf{W}_\tau$ , вызванный случайным маневром.

С целью компенсации указанных возмущающих воздействий необходимо сформировать соответствующие сигналы компенсации. Для этого обобщим частную методику расчета вектора управляющих ускорений, изложенную в [10, 17]. Запишем в векторной форме уравнения для оценки ускорений, действующих на ЗУР:

$$\mathbf{W}_\rho = \mathbf{W}_{x1} + \mathbf{W}_\rho + \mathbf{G}_0 + \mathbf{W}_2, \quad (19)$$

где  $\mathbf{W}_{x1} = (W_{x1} \ 0 \ 0)^T$  – вектор продольного ускорения ЗУР;  $\mathbf{W}_\rho$  – вектор фактических нормальных ускорений ЗУР в СК ЛВ;  $\mathbf{G}_0$  – вектор ускорения силы тяжести;  $\mathbf{W}_2$  – вектор ускорения маневра цели.

Необходимо отметить, что расчет оценки вектора нормальных ускорений цели  $\mathbf{W}_2$  является отдельной нетривиальной и специфической задачей, к рассмотрению которой мы вернемся в дальнейших публикациях.

Вектор полных ускорений ЗУР в проекциях на оси СК ЛВ запишется следующим образом:

$$\mathbf{W}_\rho = k_1 \mathbf{I}_{x0} + k_2 \mathbf{I}_{y0} + k_3 \mathbf{I}_{z0} \quad (20)$$

где  $k_1 \dots k_3$  – неопределенные коэффициенты, подлежащие определению

Введем векторные ограничения, которые формулируются следующим образом:

– проекция на продольную ось ЗУР результирующего вектора ускорений равна величине собственного продольного ускорения ЗУР;

– проекция на нормальные к ЛВ оси СК результирующего вектора ускорений ЗУР определяется соответствующими величинами кинематических (заданных) ускорений.

Ограничения в аналитической форме примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_\rho \mathbf{I}_{x1} &= W_{x1}, \\ \mathbf{W}_\rho \mathbf{I}_{y0} &= W_{y0} = +N_0(t) \dot{D} |_{\omega_{z0}}, \\ \mathbf{W}_\rho \mathbf{I}_{z0} &= W_{z0} = -N_0(t) \dot{D} |_{\omega_{y0}} \end{aligned} \quad (21)$$

Подставив (20) в (21) и выполнив необходимые преобразования, получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{\rho 1} &= \mathbf{M}_1 \mathbf{W}_{\rho 0}, \\ \mathbf{W}_{\rho 0} &= \mathbf{W}_0 + \left( \frac{W_{x1} - \mathbf{W}_0 \mathbf{I}_{x1}}{\mathbf{I}_{x0} \mathbf{I}_{x1}} \right) \mathbf{I}_{x0} - \mathbf{M}_0 (\mathbf{G}_0 - \mathbf{N}_2^T \mathbf{W}_2), \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\mathbf{W}_{\rho 0} = (W_{\rho x0} \ W_{\rho y0} \ W_{\rho z0})^T$  – вектор ускорений ЗУР в проекциях на оси СК ЛВ с учетом компенсации возмущающих (внешних) ускорений;  $\mathbf{W}_0 = (0 \ W_{y0} \ W_{z0})^T$  – вектор кинематических ускорений в СК ЛВ;  $\mathbf{G}_0 = (0 \ -9.81 \ 0)^T$  – вектор ускорения свободного падения в ЗСК, связанной с точкой стояния СНР;  $\mathbf{M}_0$  – матрица перехода из ЗСК в СК ЛВ, характеризующаяся вертикальным  $\theta_0$  и горизонтальным  $\varphi_0$  углами ориентации ЛВ РЦ;  $\mathbf{N}_2$  – матрица перехода от измерительной СК (ИСК) цели к ЗСК и характеризующаяся углами места и азимута  $\varepsilon_2, \beta_2$ ;  $\mathbf{I}_{x0} \mathbf{I}_{x1}$  – произведение определяется первым диагональным элементом матрицы перехода от СК ЛВ к СвСК.

Полученные аналитические соотношения являются обобщением методики оценки команд управления ЗУР, изложенного в [10], и не учитывающего воздействие гравитационного ускорения и ускорения маневра цели.

Метод расчета результирующих управляющих ускорений, основанный на прямой компенсации ускорений без учета ограничения  $\mathbf{W}_\rho \mathbf{I}_{x1} = W_{x1}$  и предполагающий компенсацию возмущающих нормальных ускорений в СК ЛВ, приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{\rho 1} &= \mathbf{M}_3 (\Theta_3) \mathbf{O}_3 \mathbf{W}_{\rho 0}, \quad \mathbf{W}_{\rho 0} = \mathbf{W}_0 + \Delta \mathbf{W}_0, \\ \mathbf{W}_{\rho 0} &= \left( \mathbf{W}_0 - \mathbf{M}_0 (\mathbf{G}_0 - \mathbf{N}_2^T \mathbf{W}_2) \right), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{M}_3 (\Theta_3)$  – матрица перехода от СК ЛВ к СвСК, зависящая от вектора углов  $\Theta_3$ ;  $\mathbf{O}_j$  – единичная матрица размером  $3 \times 3$  с нулевым  $j$ -м диагональным элементом;  $\Delta \mathbf{W}_0$  – вектор ускорений, компенсирующих возмущающее воздействие внешних ускорений.

Моделирование показывает, что второй вариант расчета ускорений ЗУР дает некоторый

выигрыш для типовых траекторий наведения (с точки зрения минимизации промаха). Заметные преимущества появляются лишь при обстреле интенсивно маневрирующих целей, а также для целей, движущихся с большими угловыми скоростями.

В дальнейшем для математического моделирования и статистического анализа будем использовать соотношения (18) и (23).

#### Учет пространственного скручивания измерительной и связанной систем координат

Вследствие пространственного движения ракеты и цели, а также из-за ошибок системы стабилизации ракеты по крену возникает несогласование между осями СК ЛВ и СвСК, что приводит к снижению запасов устойчивости контура наведения и, как следствие, увеличению случайной компоненты мгновенного промаха.

Ошибки системы стабилизации по крену вызваны возмущающим действием момента “косой обдувки” и не превышают в большинстве случаев (3...5)°. Пространственный крен ракеты появляется при повороте в двух плоскостях – по рысканию и тангажу.

Пространственный крен ракеты в гироскопной СК (ГСК), или системе координат свободного гироскопа, устраняется системой стабилизации ракеты по крену. Остаточный крен ракеты в СК ЛВ при условии равенства нулю крена в ГСК, называется углом пространственного скручивания [17, 18, 19, 20, 21].

Получим соотношения для расчета углов ориентации СвСК в СК ЛВ при условии работы системы стабилизации ЗУР по крену. Для этого запишем кинематические уравнения для расчета углов ориентации ЗУР в ГСК

$$\dot{\Theta}_4 = M_{\omega}(\Theta_4)\Delta\omega_3, \quad \dot{\Theta}_4 = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta}_4 \\ \dot{\psi}_4 \\ \dot{\gamma}_4 \end{pmatrix},$$

$$M_{\omega}(\Theta_4) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{y1} & \omega_{z1} \\ 0 & \frac{\cos \gamma_4}{\cos \vartheta_4} & -\frac{\sin \gamma_4}{\cos \vartheta_4} \\ 1 & -\operatorname{tg} \vartheta_4 \cos \gamma_4 & \operatorname{tg} \vartheta_4 \sin \gamma_4 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

и преобразуем (при условии равенства угла крена в ГСК нулю  $\dot{\gamma}_4 = \gamma_4 = 0$ ):

$$\dot{\psi}_4 = \frac{\omega_{y1}}{\cos \vartheta_4}, \quad \dot{\vartheta}_4 = \omega_{z1}, \quad (25)$$

где  $M_{\omega}(\Theta_4) = M_{\omega}(\vartheta_4, \psi_4, \gamma_4)$  – матрица перехода от вектора УСВ, заданного в проекциях на оси соответствующей СК, к производным углов последовательного поворота относительно промежуточных осей (углов Эйлера–Крылова);

Спроецируем последовательно УСВ СвСК на оси неподвижной ГСК и на оси СК ЛВ:

$$\omega_3 = M(\varepsilon_1, \beta_1)M(\vartheta_0, \psi_0)^T M(\vartheta_4, \psi_4)^T \omega_1 \quad (26)$$

где  $\omega_3$  – проекции УСВ СвСК на оси СтСК;  $\vartheta_0, \psi_0$  – углы ориентации ГСК в ЗСК, определяемые начальными углами ориентации ракеты (фиксируются в момент старта).

Запишем выражения для относительных УСВ ЗУР в СК ЛВ:

$$\Delta\omega_3 = \omega_3 - M_0(\theta_2, \varphi_2)\omega_0, \quad (27)$$

где  $M_0(\theta_2, \varphi_2)$  – матрица перехода от ЗСК к СК ЛВ.

Отсюда несложно получить кинематические уравнения для расчета вектора углов ориентации ЗУР (СвСК) в СтСК  $\Theta_3$  при условии идеальной работы системы стабилизации по крену:

$$\dot{\Theta}_3 = M_{\omega}(\Theta_3)\Delta\omega_3, \quad (28)$$

где  $\Theta_3$  – вектор углов ориентации СвСК в СК ЛВ при условии  $\dot{\gamma}_4 = \gamma_4 = 0$ .

Данные углы используются в матрице поворота для пересчета управляющих ускорений ЗУР, полученных в соответствие с выбранным методом наведения, из СК ЛВ в СвСК, согласно выражению (23):

$$W_{p1} = M_3(\Theta_3)O_3W_{p0}. \quad (29)$$

где  $M_1(\Theta_3)$  – матрица перехода от СК ЛВ к СвСК с учетом работы системы стабилизации по крену ЗУР.

Следует напомнить, что МПН может быть реализован как с использованием наземных (СНР), так и бортовых измерителей (полуактивная или активная ГСН). В первом случае для расчета управляющих ускорений используются УСВ и углы тангажа, рыскания и крена СкСК. При этом наведение осуществляется за счет управления ориентацией вектора скорости ракеты.

Во втором случае (при отсутствии датчиков углов атаки на борту) для управления ис-



пользуются УСВ и углы ориентации СвСК (планера ЗУР) в предположении малости углов атаки и скольжения  $\alpha, \beta = (3...5)^\circ$  в большинстве практически важных случаев. При этом наведение осуществляется путем управления ориентацией корпуса ракеты.

### Математическая модель ЗУР

Для исследования использовалась пространственная модель двухступенчатой ЗУР 5В27Д с ракетными двигателями на твердом топливе (РДТТ), составленная на основе уравнений динамики несимметричного твердого тела с учетом внешних и реактивных сил, не совпадающих в общем случае с продольной осью ЗУР, а также несовпадения полюса СвСК с центром инерции ЗУР (при ненулевых центробежных моментах инерции) [15, 16]. Масса ракеты  $m = m(t)$ , уменьшающаяся вследствие сгорания твердого топлива, является в нашем случае заданной функцией времени. Предполагается известным закон изменения тяги  $\mathbf{P}_1$  двигателей первой и второй ступеней, зависящий от величины суммарного импульса зарядов топлива  $J_{s1}$  и  $J_{s2}$ .

Полагается известной также функциональная зависимость температуры начальных суммарных импульсов. Задается также функциональная зависимость от массы ракеты радиус – вектора центра инерции  $\Delta \mathbf{r}_1(m)$  и тензора инерции  $\mathbf{J}_3(m)$  (в дальнейшем для упрощения записи скалярный аргумент векторных и тензорных функций не указывается).

Для учета технологических отклонений при изготовлении планера ЗУР и их влияния на динамику наведения уравнения движения центра масс (ЦМ) и относительно ЦМ удобно записывать в проекциях на оси СвСК. Учет отклонений ЦМ ЗУР относительно центра СвСК, а также поворота главных осей инерции ЗУР, вызванных неточностями изготовления, приводит к усложнению системы уравнений, описывающих пространственное движение ракеты [15, 16]:

$$\begin{aligned} m \left[ \dot{\mathbf{V}}_1 + (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{V}_1) + (\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \Delta \mathbf{r}_1) + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \Delta \mathbf{r}_1) \right] &= \\ &= \mathbf{R}_1 + \mathbf{P}_1 + \mathbf{F}_{c1}, \\ \left[ \mathbf{J}_1 \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \dot{\mathbf{J}}_1 \boldsymbol{\omega}_1 + (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{J}_1 \boldsymbol{\omega}_1) + m \Delta \mathbf{r}_1 (\dot{\mathbf{V}}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{V}_1) \right] &= \\ &= \mathbf{M}_{a1} + (\Delta \mathbf{a}_1 \times \mathbf{P}_1) + (\Delta \mathbf{a}_1 + 0.5 \mathbf{e}_1 L) \times \mathbf{F}_{c1}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= -\dot{m} \mathbf{M} (\Delta \vartheta, \Delta \psi) \mathbf{U} = \mathbf{M} (\Delta \vartheta, \Delta \psi) (P_x P_y P_z)^T, \\ \mathbf{F}_{c1} &= -2(\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e} m L), \\ \mathbf{e}_1 &= \mathbf{M} (\Delta \vartheta, \Delta \psi) \mathbf{e}, \\ \Delta \mathbf{a}_1 &= \mathbf{M} (\Delta \vartheta, \Delta \psi) (b \ 0 \ 0)^T, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{V}_1$  – вектор скорости ЗУР в проекциях на оси СвСК;  $\Delta \mathbf{r}_1 = (\Delta r_{x1} \ \Delta r_{y1} \ \Delta r_{z1})^T$  – положение смещенного центра масс ЗУР в проекциях на оси СвСК;  $\Delta \mathbf{a}_1 = (\Delta a_{x1} \ \Delta a_{y1} \ \Delta a_{z1})^T$  – радиус-вектор точки на оси выходного сечения, имеющий начало в полюсе (центре) СвСК (номинальной СвСК);  $\mathbf{e} = (1 \ 0 \ 0)^T$  – единичный вектор, направленный по строительной оси канала двигателя от его выходного сечения к носу ракеты;  $\mathbf{e}_1 = (e_{x1} \ e_{y1} \ e_{z1})^T$  – проекция вектора  $\mathbf{e} = (1 \ 0 \ 0)^T$  на оси СвСК;  $P$  – сила тяги (реактивная сила);  $b = b(t) \in (1.2...3.5)$  – расстояние от переменной во времени точки приложения тяги до среза выходного сечения стартового (маршевого) двигателей (для упрощения полагаем, что точка приложения вектора тяги совпадает с центром передней стенки двигателя);  $\mathbf{F}_{c1}$  – вектор силы Кориолиса, возникающей при вращении ЗУР и работающем двигателе;  $\mathbf{P}_1$  – вектор газодинамических сил (сил реактивной тяги) в проекциях на оси СвСК;  $\mathbf{R}_{a1} = \mathbf{R}_{a1}(M)$  – вектор аэродинамических сил в проекциях на оси СвСК, зависящий от числа Маха  $M$ ;  $\mathbf{M}_{a1} = \mathbf{M}_{a1}(M)$  – результирующий вектор аэродинамических моментов сил в проекциях на оси СвСК, зависящий от числа Маха  $M$ ;  $\mathbf{J}_1$  – тензор инерции ЗУР как твердого тела в проекциях на оси номинальной СвСК;  $\dot{\mathbf{J}}_1$  – матрица, составленная из производных по времени соответствующих компонент тензора  $\mathbf{J}_1$ ;  $\mathbf{U}$  – вектор текущей скорости истечения газов на выходе сопла ракетного двигателя в СК, связанной с продольной осью РДТТ (разброс поперечных компонент скорости истечения задается в пределах допусков, зависящих от неравномерности горения заряда твердого топлива).

$$\mathbf{M}_{a1} = \sum_{j=0}^{J-1} \left[ \mathbf{R}_{a1}^j \times \mathbf{L}_{a1}^j \right] = \mathbf{M}_{s1} + \mathbf{M}_{c1} + \mathbf{M}_{d1} + \mathbf{M}_{h1}, \quad (31)$$

где  $\mathbf{R}_{a1}^j$  –  $j$ -ая векторная компонента результирующей аэродинамической силы  $\mathbf{R}_{a1}$ , обусловленная влиянием корпуса, крыльев, рулей

или элеронов ЗУР (определяется силой лобового сопротивления и аэродинамической подъемной силой);  $\mathbf{L}_{a1}^j$  – радиус – вектор точки приложения  $j$ -ой компоненты суммарной аэродинамической силы  $\mathbf{R}_{a1}^j$  относительно центра инерции (масс) ЗУР;  $\mathbf{M}_{s1}, \mathbf{M}_{c1}, \mathbf{M}_{d1}, \mathbf{M}_{h1}$  – соответственно вектор стабилизирующих, управляющих демпфирующих и шарнирных моментов аэродинамических сил (реактивные моменты).

Компоненты вектора  $\Delta \mathbf{r}_1$  задаются совокупностью нормально распределенных чисел с параметрами  $M_{\Delta r} = 0, \sigma_{\Delta r} = 0.002$  м. Тензор инерции  $\mathbf{J}_1$  определяется соотношением

$$\mathbf{J}_1 = \mathbf{M}_{31}^T \mathbf{J}_3 \mathbf{M}_{31} + m \left( \mathbf{E} \Delta \mathbf{r}_1^2 + \Delta \mathbf{r}_1 \Delta \mathbf{r}_1^T \right),$$

$$\mathbf{M}_{31} = \mathbf{M} \left( \Delta \varphi_{1y}, \Delta \varphi_{1z}, \Delta \varphi_{1x} \right), \Delta \mathbf{r}_1^2 = \sum_{j=1}^3 \Delta \mathbf{r}_{1j}^2, \quad (32)$$

где  $\mathbf{J}_3$  – тензор инерции в проекциях на оси СвСК, совпадающих с главными осями инерции (составляющие тензора задаются в качестве исходных данных, определяемых в процессе контрольных испытаний для точки действительного положения центра масс ракеты); матрица перехода от номинальной СвСК к СвСК, связанной с главными центральными осями инерции;  $\Delta \mathbf{r}_1 \cdot \Delta \mathbf{r}_1^T$  – диадный квадрат вектора  $\Delta \mathbf{r}_1$ ;  $\Delta \mathbf{r}_1^2$  – скалярный квадрат вектора  $\Delta \mathbf{r}_1$ ;  $\mathbf{E}$  – единичная матрица;  $\Delta \varphi_1 = (\Delta \varphi_{1x}, \Delta \varphi_{1y}, \Delta \varphi_{1z})$  – вектор углов поворота главных осей инерции относительно осей номинальной СвСК;  $\mathbf{M}_{31}$  – матрица перехода от номинальной СвСК, орты которой ориентированы по осям симметрии ЗУР, к СК, связанной с главными центральными осями инерции.

Компоненты вектора  $\Delta \varphi_1$  определяются технологическими допусками при изготовлении ЗУР и задаются в нашем случае совокупностью нормально распределенных случайных величин с математическим ожиданием (МО)  $m_{\Delta \varphi} = (-0.01 \dots +0.01)$  рад и среднеквадратическим отклонением (СКО) угла  $\sigma_{\Delta \varphi} = (0.003 \dots 0.006)$  рад.

В нормальной векторной форме уравнения движения ракеты в общем случае примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}_1 &= m^{-1} \left[ \mathbf{R}_1 + \mathbf{P}_1 + \mathbf{F}_{c1} \right] - \\ &- \left( (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{V}_1) + (\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \Delta \mathbf{r}_1) + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \Delta \mathbf{r}_1) \right), \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 &= \mathbf{J}_1^{-1} \left[ \mathbf{M}_{a1} + (\Delta \mathbf{a}_1 \times \mathbf{P}_1) + (\Delta \mathbf{a}_1 + 0.5 \mathbf{e}_1 L) \times \mathbf{F}_{c1} \right] - \\ &- \left( (\mathbf{J}_1 \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{J}_1 \boldsymbol{\omega}_1) + m \Delta \mathbf{r}_1 (\dot{\mathbf{V}}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{V}_1) \right), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{J}_1^{-1}$  – тензор моментов инерции твердого тела, обратный тензору  $\mathbf{J}_1$ .

В правых частях уравнений для векторов  $\dot{\mathbf{V}}_1$  и  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_1$  содержатся производные векторов  $\boldsymbol{\omega}_1$  и  $\dot{\mathbf{V}}_1$  соответственно. Одним из наиболее простых путей разрешения данной проблемы является определение правых частей уравнений для векторов  $\dot{\mathbf{V}}_1$  и  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_1$  путем последовательных приближений. Сначала определяется правая часть для вектора  $\dot{\mathbf{V}}_1$  без учета слагаемых, содержащих  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_1$ :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}_1 &= m^{-1} \left[ \mathbf{R}_1 + \mathbf{P}_1 + \mathbf{F}_{c1} \right] - \\ &- \left( (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{V}_1) + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \Delta \mathbf{r}_1) \right) = \mathbf{Q}(\mathbf{V}_1, \boldsymbol{\omega}_1, \dot{\boldsymbol{\omega}}_1). \end{aligned}$$

В качестве начального приближения для векторно-матричного уравнения  $\dot{\mathbf{V}}_1 = \mathbf{Q}(\mathbf{V}_1, \boldsymbol{\omega}_1, \dot{\boldsymbol{\omega}}_1)$  можно использовать значение  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_1$ , полученное на предыдущем шаге вычислений. Затем определяется правая часть для вектора  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_1$  с учетом компонент вектора  $\dot{\mathbf{V}}_1$ , полученных на предыдущем шаге:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 &= \mathbf{J}_1^{-1} \left[ \mathbf{M}_{a1} + (\Delta \mathbf{a}_1 \times \mathbf{P}_1) + (\Delta \mathbf{a}_1 + 0.5 \mathbf{e}_1 L) \times \mathbf{F}_{c1} \right] - \\ &- \left( (\mathbf{J}_1 \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{J}_1 \boldsymbol{\omega}_1) + m \Delta \mathbf{r}_1 (\dot{\mathbf{V}}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{V}_1) \right). \end{aligned} \quad (33)$$

После этого определяется вектор  $\dot{\mathbf{V}}_1$  с учетом слагаемых, содержащих производные  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_1$ , полученных на предыдущем шаге:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}_1 &= m^{-1} \left[ \mathbf{R}_1 + \mathbf{P}_1 + \mathbf{F}_{c1} \right] - \\ &- \left( (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{V}_1) + (\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \Delta \mathbf{r}_1) + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \Delta \mathbf{r}_1) \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Процесс повторяется до тех пор, пока не будет получено достаточная для интегрирования точность приближения.

$$\begin{aligned} \|\dot{\boldsymbol{\omega}}_n - \dot{\boldsymbol{\omega}}_{n-1}\| &= \|\Delta \dot{\boldsymbol{\omega}}_n\| \leq \Delta \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\max}, \\ \|\boldsymbol{\omega}_n - \boldsymbol{\omega}_{n-1}\| &= \|\Delta \boldsymbol{\omega}_n\| \leq \Delta \boldsymbol{\omega}_{\max}, \\ \|\Delta \dot{\mathbf{V}}_n\| &= \|\dot{\mathbf{V}}_n - \dot{\mathbf{V}}_{n-1}\| \leq \Delta \dot{V}_{\max}, \\ \|\Delta \mathbf{V}_n\| &= \|\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_{n-1}\| \leq \Delta V_{\max}. \end{aligned} \quad (35)$$

где  $\Delta \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\max}, \Delta \boldsymbol{\omega}_{\max}, \Delta \dot{V}_{\max}, \Delta V_{\max}$  – максимально допустимые погрешности расчета компонент векторов  $\ddot{\mathbf{u}}_1, \dot{\mathbf{u}}_1$  и  $\dot{\mathbf{V}}_1, \mathbf{V}_1$  соответственно.

Экспериментальные данные по весовым, центровочным, тяговым, моментным и аэродинамическим характеристикам взяты из эскизного проекта на ЗУР В-601П и отчетов по войсковым стрельбовым испытаниям [18, 19, 20, 21].

### Результаты математического моделирования процесса наведения ЗУР на цель

Для оценки эффективности предлагаемой модификации МПН было выполнено математическое моделирование процесса наведения ЗУР на аэробаллистическую цель (например, тактический истребитель, летящий на высокой скорости (более 2.5 М) или совершающий маневр, противорадиолокационная ракета или управляемая / планирующая авиационная бомба) для граничных (экстремальных) по дальности, высоте, параметру и скорости цели точек зоны поражения. На рисунках (5...28) приведены зависимость сферических координат цели  $\varepsilon_2, \beta_2$ , ЗУР  $\varepsilon_1, \beta_1$ , относительных координат ЗУР  $\Phi_1, \Phi_2$ , а также ускорений ЗУР  $W_x, W_y, W_z$  в СКСК от полетного времени.

В процессе моделирования проведен сравнительный анализ точности наведения с использованием существующих МН (метод половинного / полного спрямления траектории – ПС, МПСТ) и вновь разработанной модификации метода пропорциональной навигации (ПН, ММПН) для различных типов траектории полета цели и условий встречи.

Для расчетов использовались типовые структуры измерителей координат цели и ракеты, работающие совместно с системой управления силовыми электрическими следящими приводами антенны сопровождения [18, 19, 20, 21]. СКО флуктуационной ошибки измерения УК цели задавалось равным  $\sigma_\varphi = 4$  угл.мин.

Начальные условия сведены в табл. 1, статистические оценки ошибок наведения и мгновенных промахов с использованием различных методов представлены в табл. 2, 3 и характеризуются следующими параметрами:

- координаты точки встречи ракеты с целью  $\mathbf{r}_m = (x_m \ y_m \ z_m)^T$  и скорость цели  $V_0$ ;
- используемый метод наведения ЗУР, а также тип и интенсивность маневра цели  $W_0$ ;
- СКО ошибки измерения УК цели  $\sigma_\varphi$ , определяющее величину флуктуационной перегрузки ЗУР;
- МО и СКО величины мгновенного промаха<sup>2</sup>  $\sigma_\gamma, m_\gamma \ \gamma_0 = \|\dot{\mathbf{a}}\|, \mathbf{h} = (0 \ \gamma_y \ \gamma_z)^T$  и ошибки

<sup>2</sup> Текущей мерой точности наведения, т.е. величиной, прогнозирующей наименьшее значение модуля относительной дальности, принято считать дальность, на которой ракета пролетит мимо цели, если с данного момента времени ракета и цель

наведения (линейного расстояния между ракетой и целью)  $\sigma_\zeta, m_\zeta$  в картинной плоскости  $h_0 = \|\mathbf{h}\|, \mathbf{h} = (0 \ h_y \ h_z)^T$  ;  
– МО и СКО нормальных ускорений ЗУР в СКСК в момент встречи.

Т а б л и ц а 1. Условия наведения и встречи

№	Координаты точки встречи $x, y, z, \text{ м}$	Скорость цели, м/с	Тип маневра
1	-2000, 100, 15000	500	нет
2	2000 14000 14000	750	нет
3	25000, 20000, 15000	300	нет
4	20000, 10000, 5000	300	МКП, $8g^3$

Т а б л и ц а 2. Сравнительный анализ ошибок наведения ЗУР на цель в точке встречи

№	$m_\gamma, \sigma_\gamma$ для $W_0$ , ММПН / МПСТ, м/с <sup>2</sup>	$m_\zeta, \sigma_\zeta$ для $h_0$ , ММПН / МПСТ, м
1	[-65, 06] / [50, 04]	[19, 3] / [24, 5]
2	[55, 05] / [75, 06]	[27, 4] / [37, 3]
3	[09, 07] / [19, 11]	[16, 3] / [39, 5]
4	[45, 08] / [23, 03]	[31, 3] / [18, 4]

Т а б л и ц а 3. Сравнительный анализ мгновенного промаха ЗУР в точке встречи

№	$m_\gamma, \sigma_\gamma$ для $W_0$ , ММПН / МПСТ, м/с <sup>2</sup>	$m_\gamma, \sigma_\gamma$ для $\gamma_0$ , ММПН / МПСТ, м
1	[-65, 06] / [50, 04]	[15, 2] / [21, 4]
2	[55, 05] / [75, 06]	[24, 3] / [32, 3]
3	[09, 07] / [19, 11]	[14, 3] / [35, 4]
4	[45, 08] / [23, 03]	[29, 3] / [16, 3]

Величина мгновенного промаха рассчитывалась по формуле, учитывающей влияние ненулевого нормального ускорения ЗУР в точке встречи:

$$\mathbf{h}_\gamma = \left[ \boldsymbol{\omega} \times (\Delta \mathbf{v} + \Delta \mathbf{a} \tau_y) \right] \tau_y, \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{\Delta \mathbf{r} \times \Delta \mathbf{v}}{\Delta r^2}, \quad (36)$$

$$\tau_y = \frac{\Delta \mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{v}_0}{\|\Delta \mathbf{v}\|}, \quad \Delta \mathbf{v}_0 = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\|\Delta \mathbf{v}\|}, \quad \Delta \mathbf{a} = \Delta \dot{\mathbf{v}},$$

где  $\tau_y$  – время до встречи с целью (упрежденное время встречи);  $\Delta \mathbf{a}$  – вектор относительного ускорения ракета – цель.

в относительном движении будут перемещаться прямолинейно, т.е. пор касательной к относительной траектории.

Эту дальность называют пролетом, или промахом. Возможны и другие меры текущей точности, например, расстояние, на котором ракета пролетит мимо цели, если с данного момента ускорение будет постоянным. В момент времени, когда вектор пролета совпадает с вектором дальности, расстояние между ракетой и целью минимально.

<sup>3</sup> Маневр с последовательно выполняемым кабрированием (набором высоты) в течение (8...10) с и пикированием в течение (8...10) с с нормальной перегрузкой цели в СКСК 80 м/с<sup>2</sup>.

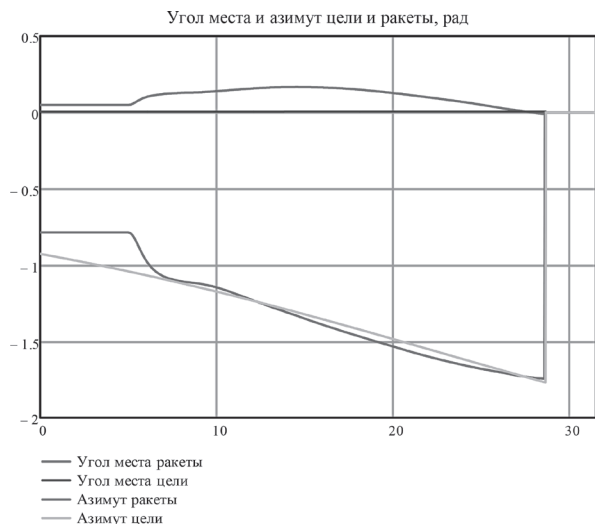


Рис. 5. Сферические координаты ракеты и цели при наведении методом ММПН (траектория 1)



Рис. 7. Ускорения ракеты в СкСК при наведении методом ММПН (траектория 1)

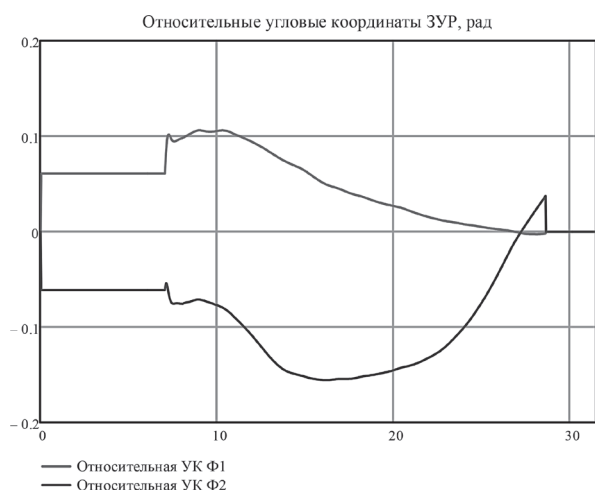


Рис. 9. Относительные координаты ракеты при наведении методом МПСТ (траектория 1)

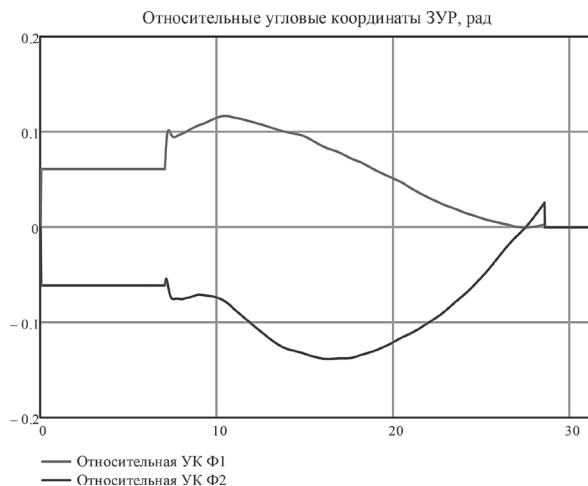


Рис. 6. Относительные координаты ракеты при наведении методом ММПН (траектория 1)

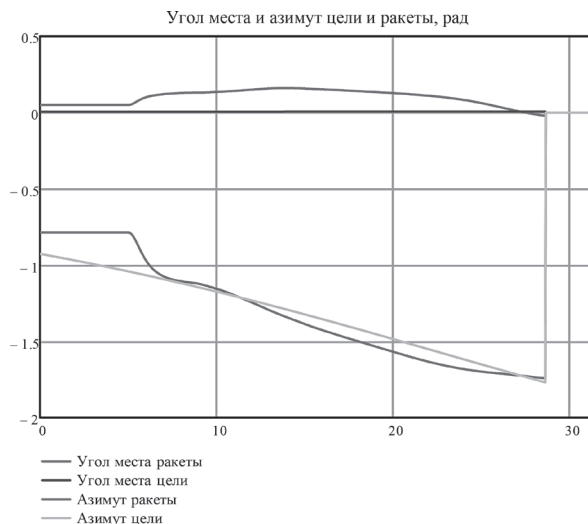


Рис. 8. Сферические координаты ракеты и цели при наведении методом МПСТ (траектория 1)

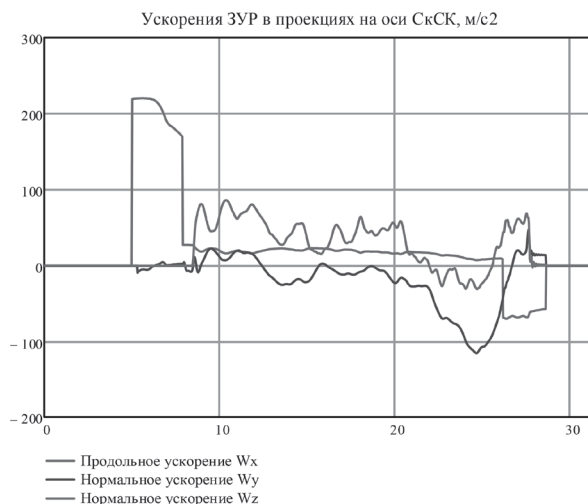


Рис. 10. Ускорения ракеты в СкСК при наведении методом МПСТ (траектория 1)



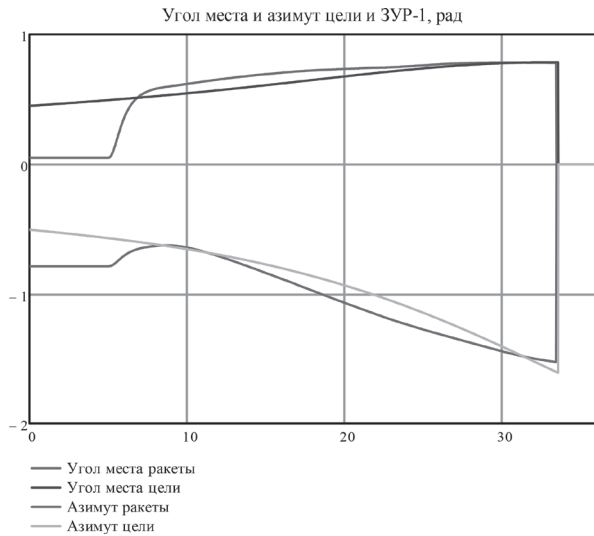


Рис. 11. Сферические координаты ракеты и цели при наведении методом ММПН (траектория 2)



Рис. 13. Ускорения ракеты в СсСК при наведении методом ММПН (траектория 2)

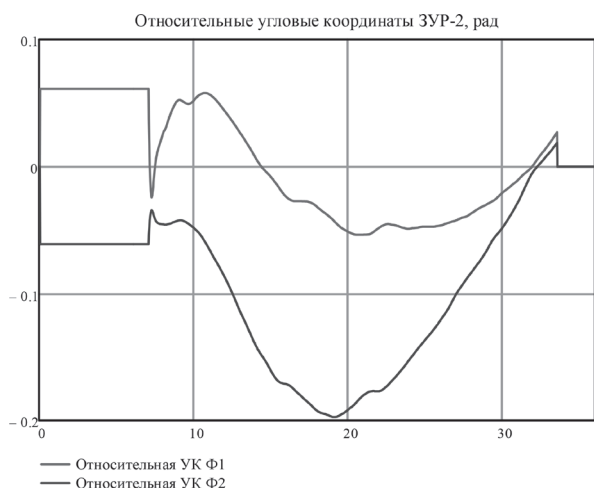


Рис. 15. Относительные координаты ракеты при наведении методом МПСТ (траектория 2)

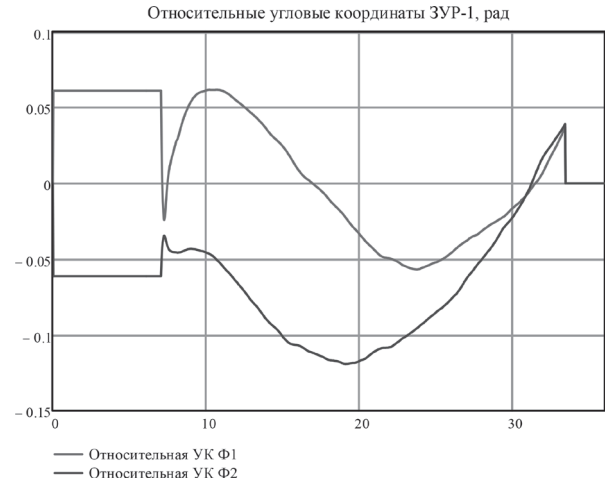


Рис. 12. Относительные координаты ракеты при наведении методом ММПН (траектория 2)

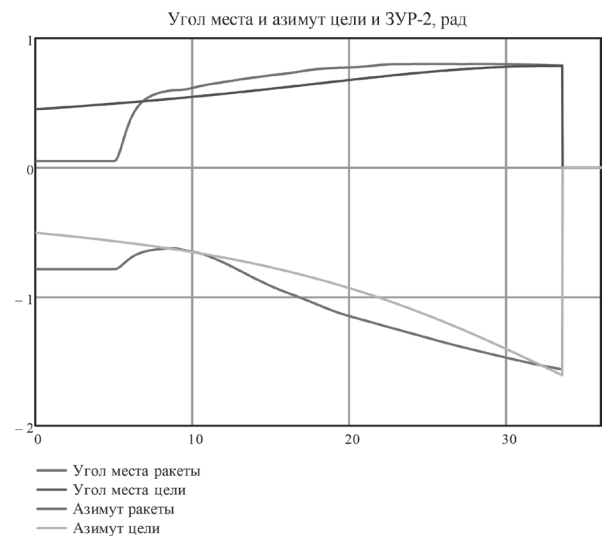


Рис. 14. Сферические координаты ракеты и цели при наведении методом МПСТ (траектория 2)



Рис. 16. Ускорения ракеты в СсСК при наведении методом МПСТ (траектория 2)

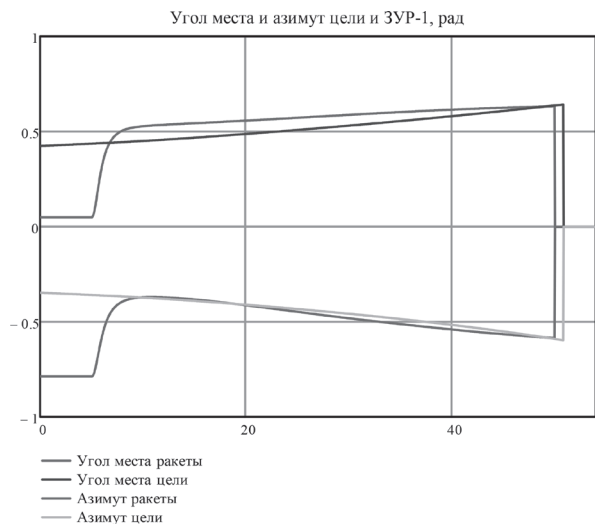


Рис. 17. Сферические координаты ракеты и цели при наведении методом ММПН (траектория 3)

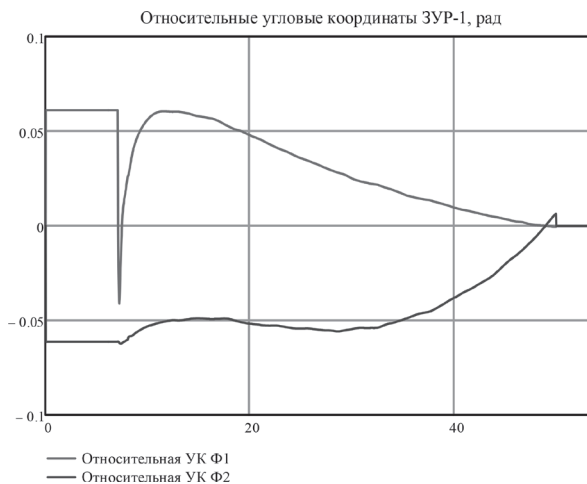


Рисунок 18. Относительные координаты ракеты при наведении методом ММПН (траектория 3)

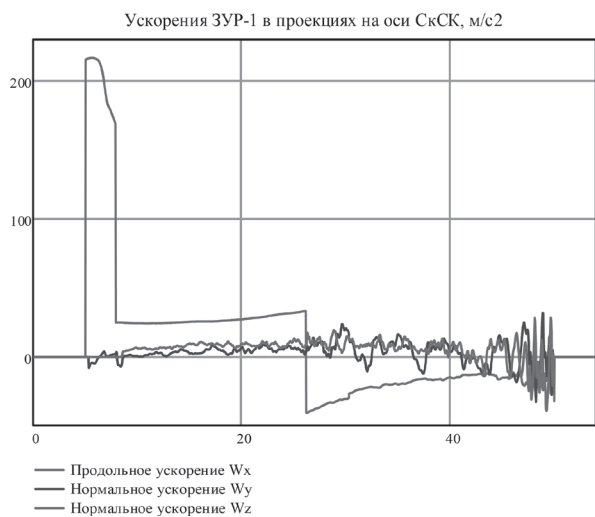


Рис. 19. Ускорения ракеты в СсСК при наведении методом ММПН (траектория 3)

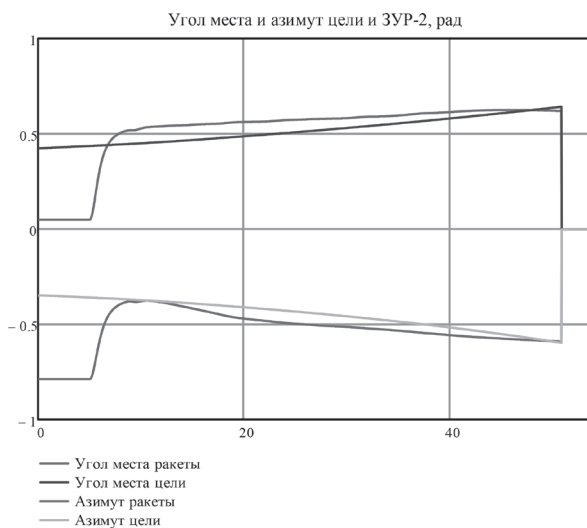


Рисунок 20. Сферические координаты ракеты и цели при наведении методом МПСТ (траектория 3)

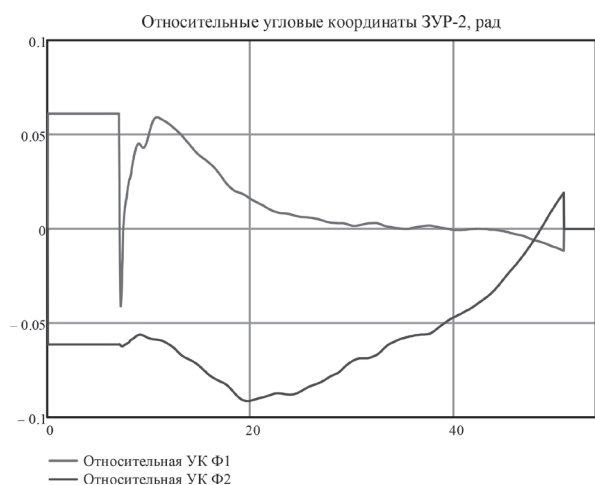


Рис. 21. Относительные координаты ракеты при наведении методом МПСТ (траектория 3)



Рис. 22. Ускорения ракеты в СсСК при наведении методом МПСТ (траектория 3)

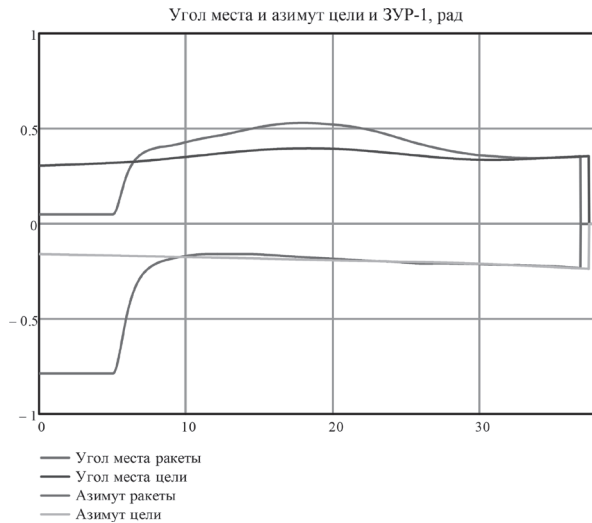


Рис. 23. Сферические координаты ракеты и цели при наведении методом ММПН (траектория 4)



Рис. 25. Ускорения ракеты в СКС при наведении методом ММПН (траектория 4)

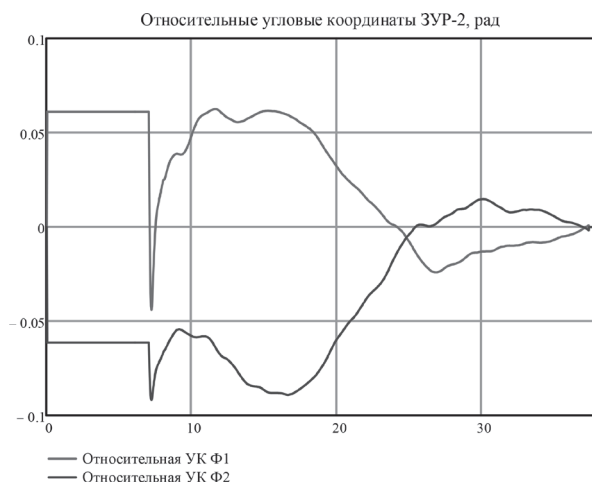


Рис. 27. Относительные координаты ракеты при наведении методом МПСТ (траектория 4)

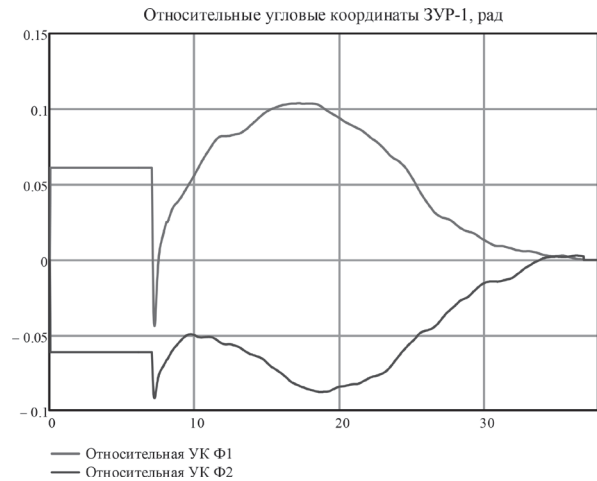


Рис. 24. Относительные координаты ракеты при наведении методом ММПН (траектория 4)

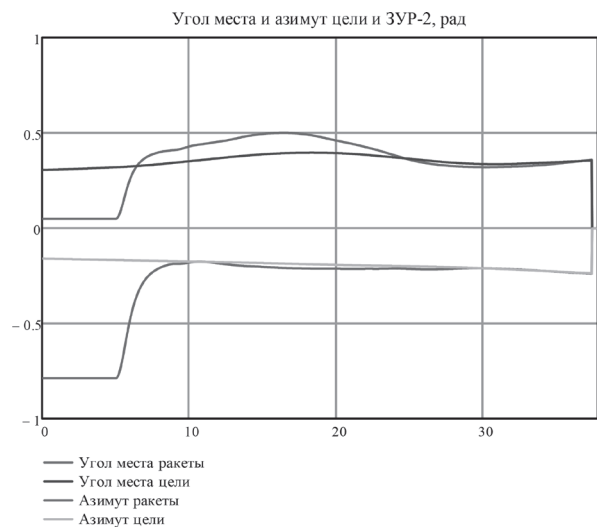


Рис. 26. Сферические координаты ракеты и цели при наведении методом МПСТ (траектория 4)



Рис. 28. Ускорения ракеты в СКС при наведении методом МПСТ (траектория 4)

Альтернативная форма записи выражения для текущего промаха (пролета) имеет вид [4, 5]:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_\gamma &= \mathbf{h}_0 + \dot{\mathbf{h}}_0 \tau_y, \Delta \mathbf{a}_0 = \frac{\Delta \mathbf{a}}{\|\Delta \mathbf{a}\|}, \Delta \mathbf{v}_0 = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\|\Delta \mathbf{v}\|}, \\ \mathbf{h}_0 &= (\Delta r - \Delta \mathbf{v}_0 (\Delta r \Delta \mathbf{v}_0)), \\ \dot{\mathbf{h}}_0 &= -(\Delta \mathbf{a}_0 (\Delta r \Delta \mathbf{v}_0) + \Delta \mathbf{v}_0 (\Delta r \Delta \mathbf{a}_0)). \end{aligned} \quad (37)$$

Линейная ошибка наведения  $\mathbf{h}_\zeta = (0 \ h_y \ h_z)^T$  оценивалась в момент равенства дальностей цели и ракеты согласно следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \Phi &= 0.707((\Delta \varepsilon + \Delta \beta \cos(\varepsilon_2))(\Delta \beta \cos(\varepsilon_2) - \Delta \varepsilon))^T \\ \mathbf{h}_\zeta (\Delta r = 0) &= r_1 (\Delta \varepsilon \ \Delta \beta)^T, \\ \mathbf{h}_\varphi (\Delta r = 0) &= r_1 (\Phi_1 \ \Phi_2)^T, \Delta \varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \Delta \beta = \beta_1 - \beta_2, \end{aligned} \quad (38)$$

где  $\Delta r$  – разность радиальных дальностей цели и ракеты;  $\mathbf{h}_\varphi$  – двухкомпонентный вектор линейной ошибки наведения в СК, повернутой на  $45^\circ$  относительно продольной оси.

Нормальные ускорения ЗУР в момент встречи рассчитывались следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}], \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}(\theta, \varphi) \frac{[\mathbf{v}_1 \times \mathbf{a}_1]}{\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1}, \\ \mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1 &= (v_{x1} \ v_{y1} \ v_{z1})^T, \mathbf{a}_1 = \ddot{\mathbf{r}}_1 = (\dot{v}_{x1} \ \dot{v}_{y1} \ \dot{v}_{z1})^T, \end{aligned} \quad (39)$$

где  $\mathbf{V} = (V_x \ 0 \ 0)^T$  – вектор скорости ЗУР в проекциях на оси СКСК;  $\mathbf{M}(\theta, \varphi)$  – матрица связи ЗСК и СКСК, зависящая от скоростных углов тангажа и рыскания  $\theta, \varphi$  ЗУР.

Сравнительный анализ результатов моделирования, приведенных в табл. 1, позволяет сделать следующие выводы:

– точность наведения ракеты на низколетящую цель для МПСТ и ММПН отличается незначительно (это связано с отсутствием учета влияния зеркальных отражения от земли); при росте интенсивности флуктуаций по каналу цели предпочтительно использовать ММПН, как менее чувствительный к ошибкам измерения на начальном и среднем участках траектории;

– для обстрела скоростной цели, летящей на больших высотах и предельном параметре, целесообразно использовать ММПН, который обеспечивает меньшее значение ошибки наведения при докритических углах упреждения

(из рис. 15 следует, что перехват цели на траектории 2 методом МПСТ в реальной ситуации невозможен, так как ЗУР выходит за пределы сектора сопровождения);

– для обстрела цели, находящейся на предельных дальностях и высоте, целесообразно использовать ММПН ввиду меньшего уровня флуктуационных перегрузок ракеты, обусловленных ошибками измерения УК цели;

– при наведении ракеты на маневрирующую цель и при отсутствии канала оценивания нормальных ускорений цели предпочтение следует отдавать МПСТ, как менее чувствительному к величине ускорения маневра и его продолжительности.

### Заключение

1. В работе предложен модифицированный МПН, учитывающий ограничения на сектор сопровождения ЗУР, несовпадение измерительной и СвСК, а также влияние неконтролируемых возмущающих воздействия, разработанный с использованием эвристического подхода и инженерных принципов проектирования.

2. Сравнительный анализ существующих и вновь разработанных методов показывает перспективность использования ММПН для перехвата скоростных целей, а также целей, летящих на предельной дальности и высотах.

3. Снижение величины ошибок наведения при использовании ММПН обусловлено меньшим порядком астатизма контура наведения (структурой кинематического звена) и, как следствие, более медленным ростом интенсивностью флуктуаций управляющего воздействия (УСВ вектора скорости ракеты) при увеличении ошибок измерений.

4. Направлением дальнейших исследований является учет пространственных кинематических связей относительного движения, введение управления ракеты по крену для повышения вероятности перехвата (поражения) цели, использование нелинейной фильтрации для оценивания координат и параметров движения, а также реализация эталонной модели ракеты, корректируемой по данным пространственно – распределенных измерителей координат ракеты, для устойчивого сопровождения при больших углах упреждения и на заключительном участке наведения.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Newell H. E. Guided Missile Kinematics. – Naval Research Labs. USA. – 1945.
2. Кан, В. Л. О точных решениях уравнений пропорциональной навигации / В. Л. Кан, А. С. Кельзон – Изв. вузов. Матем., 1962, №1. – с. 50–56.
3. Пугачев, В. С. Системы управления и динамика полета ракет / В. С. Пугачев, И. Е. Казаков, Д. И. Гладков; под ред. В. С. Пугачева. – М.: ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1965. – 615 с.
4. Кринецкий, Е. И. Системы самонаведения / Е.И. Кринецкий. – М.: Машиностроение, 1970. – 236 с.
5. Батков, А. М. Проектирование систем наведения / А. М. Батков, А. А. Горский, В. Ф. Левитин; под ред. Е. А. Федосова. – М.: Машиностроение, 1975. – 296 с.
6. Максимов, М. В. Радиоэлектронные системы самонаведения / М. В. Максимов, Г. И. Горгонов – М.: Радио и связь, 1982. – 304 с.
7. Казаков, И. Е., Мишаков А. Ф. Авиационные управляемые ракеты. Ч.2. Системы управления и динамика наведения управляемых ракет и бомб / И. Е. Казаков, А. Ф. Мишаков; под ред. И. Е. Казакова. – М.: ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1985. – 423 с.
8. Воронов, А. А. Теория автоматического управления: учебник для ВУЗов: в 2-х ч. / А. А. Воронов [и др.]; под ред. А. А. Воронова. – М.: Высшая школа, 1986. – Ч. 2. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления. – 504 с.
9. Dohi, N. Modified proportional navigation for a missile with varying velocity - comparison with the optimal guidance. / N. Dohi, Y. Baba, N. Takano. – The proceeding of 24th international congress of the aeronautical sciences ICAS – 2004. – Yokohama, Japan. – 2004. V. 7, p. 207–215.
10. Palumbo, Neil F. Modern homing missile guidance theory and techniques. / Neil F. Palumbo, Ross A. Blauwkamp, Justin M. Lloyd. – Johns Hopkins APL Technical digest, USA. – 2010. V.29. No. 1, p. 42–59.
11. Маркевич, В. Э. Аналитический синтез метода наведения сверхзвукового беспилотного летательного аппарата на основе многомерной нелинейной динамической модели. / В. Э. Маркевич // Сб. науч. тр./ ОИПИ НАН Беларуси. – Информатика. – 2017. – №2 (54). – с. 93–112.
12. Колесников, А. А. Проектирование многокритериальных систем управления промышленными объектами. / А. А. Колесников, А. Г. Гельфгат. – М.: Энергоатомиздат, 1993. – 304 с.
13. Колесников А. А. Синергетическая теория управления. Инварианты, оптимизация, синтез. / А. А. Колесников. – М.: Энергоатомиздат, Таганрог: Изд-во ТРТУ, 1994. – 344 с.
14. Эвристический алгоритм. [Электронный ресурс]. – 2014. – Режим доступа: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Эвристический\\_алгоритм](https://ru.wikipedia.org/wiki/Эвристический_алгоритм). – Дата доступа: 21.02.2018.
15. Лурье, А. И. Аналитическая механика. / А. И. Лурье. – М.: Госфизматлит, 1961. – 824 с.
16. Горбатенко С. А. Механика полета. Общие сведения. Уравнения движения: инженерный справочник. / С. А. Горбатенко [и др.]; под ред. С. А. Горбатенко. – М.: Машиностроение, 1969. – 420 с.
17. Кун, А. А. Основы построения зенитно – ракетных комплексов / А. А. Кун, В. Ф. Лукьянов, С. А. Шабан. – Минск: ВА РБ, 2001. – 327 с.
18. Эскизный проект ракеты В-601П системы 125. Книга 1. Определение характеристик ракеты. [Электронный ресурс]. – 2015. – Режим доступа: <http://www.historykrvo-2.ucoz.ru>. – Дата доступа: 11.01.2018
19. Эскизный проект зенитной управляемой ракеты В-601П. Книга 2. Динамика полёта и эффективность ракеты. [Электронный ресурс]. – 2015. – Режим доступа: <http://www.historykrvo-2.ucoz.ru>. – Дата доступа: 3.02.2018.
20. Исследование по расширению боевых возможностей комплекса С-125 по обстрелу скоростных целей, летящих скоростью более 560м/с". [Электронный ресурс]. – 2015. – Режим доступа: <http://www.historykrvo-2.ucoz.ru>. – Дата доступа: 7.03.2018.
21. Отчёт по испытаниям комплекса С–125, доработанного для улучшения боевых характеристик при стрельбе по маневрирующим целям. Том 2. 1973. [Электронный ресурс]. – 2015. – Режим доступа: <http://www.historykrvo-2.ucoz.ru>. – Дата доступа: 7.03.2018.

## REFERENCES

1. Newell H. E. Guided Missile Kinematics. – Naval Research Labs. USA. – 1945.
2. Kan, V. L. About exact solutions of the equations of proportional navigation / V. L. Kan, A. S. Kelzon – News of higher education institutions. Math, 1962, No. 1. – с. 50–56.
3. Pugachev, V. S. Control systems and dynamics of flight of missiles / V. S. Pugachev, I. E. Kazakov, D. I. Gladkov; under the editorship of V.S. Pugachev. – М.: HMIA of prof. N. E. Zhukovsky, 1965. – 615 pages.
4. Krinetsky, E. I. Systems of homing / E. I. Krinetsky. – М.: Mechanical engineering, 1970. – 236 pages.
5. Batkov, A. M. Design of systems of targeting / A. M. Batkov, A. A. Gorsky, V. F. Levitin; under the editorship of E. A. Fedosov. – М.: Mechanical engineering, 1975. – 296 pages.
6. Maximov, M. V. The radio-electronic systems of homing / M. V. Maximov, G. I. Gorgonov – М.: Radio and communication, 1982. – 304 pages.
7. Kazakov, I. E., Mishakov A. F. Aviation guided missiles. Ch.2. Control systems and dynamics of targeting of guided missiles and bombs / I. E. Kazakov, A. F. Mishakov; under the editorship of I.E. Kazakov. – М.: VVIA of prof. N. E. of Zhukovsky, 1985. – 423 pages.

8. **Ravens, A. A.** Theory of automatic control: the textbook for HIGHER EDUCATION INSTITUTIONS: in 2 h / A. A. Voronov [etc.]; under the editorship of A. A. Voronov. – M.: The higher school, 1986. – Ch.2. Theory of nonlinear and special systems of automatic control. – 504 pages.
9. **Dohi, N.** Modified proportional navigation for a missile with varying velocity – comparison with the optimal guidance. / N. Dohi, Y. Baba, H. Takano. – The proceeding of 24th international congress of the aeronautical sciences ICAS – 2004. – Yokohama, Japan. – 2004. V.7, p.207–215.
10. **Palumbo, Neil F.** Modern homing missile guidance theory and techniques. / Neil F. Palumbo, Ross A. Blauwkamp, Justin M. Lloyd. – Johns Hopkins APL Technical digest, USA. – 2010. V.29. No.1, p.42-59.
11. **Markevich, V. E.** Analytical synthesis of a method of guidance of the supersonic unmanned aerial vehicle on the basis of multidimensional nonlinear dynamic model. / V. E. Markevich // Sb. науч. тр. / OIPI NAN of Belarus. – Informatics. – 2017. – No. 2 (54). – page 93–112.
12. **Kolesnikov, A. A.** Design of multicriteria control systems of industrial facilities. / A. A. Kolesnikov, A. G. Gelfgat. – M.: Energoatomizdat, 1993. – 304 pages.
13. **Kolesnikov A. A.** Synergetic theory of control. Invariants, optimization, synthesis. / A. A. Kolesnikov. – M.: Energoatomizdat, Taganrog: TRTU publishing house, 1994. – 344 pages.
14. **Heuristic algorithm.** [Electronic resource]. – 2014. – Access mode: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Evristicalicheskiy\\_algorithm](https://ru.wikipedia.org/wiki/Evristicalicheskiy_algorithm). – Date of access: 21.02.2018.
15. **Lurye, A. I.** Analiticheskaya of the mechanic. / A. I. Lurye. – M.: Gosfizmatlit, 1961. – 824 pages.
16. **Gorbatenko S. A.** Mechanics of flight. General information. Equations of the movement: engineering reference book. / S. A. Gorbatenko [etc.]; under the editorship of S. A. Gorbatenko. – M.: Mechanical engineering, 1969. – 420 pages.
17. **Kuhn, A. A.** The basic of designed anti – aircraft guided missile / A. A. Kuhn, V. F. Lukyanov, S. A. Shaban. – Minsk: Military Academy the Republic of Belarus, 2001. – 327 pages.
18. **Outline sketch of the V – 601P ant – aircraft missile of system S – 125.** Book 1. Definition of characteristics of a missile. [Electronic resource]. – 2015. – Access mode: <http://www.historykpvo-2.ucoz.ru>. – Date of access: 1/11/2018
19. **Outline sketch of an anti – aircraft guided missile V - 601P.** Book 2. Dynamics of flight and efficiency of a missile. [Electronic resource]. – 2015. – Access mode: <http://www.historykpvo-2.ucoz.ru>. – Date of access: 2/3/2018.
20. **A research on expansion of fighting opportunities of the S-125 complex on firing of the high-speed purposes flying speed more 560 m/s’.** [Electronic resource]. – 2015. – Access mode: <http://www.historykpvo-2.ucoz.ru>. – Date of access: 3/7/2018.
21. **The report on tests of the S – 125 complex finished for improvement of fighting characteristics when firing at the maneuvering targets.** Volume 2. 1973. [Electronic resource]. – 2015. – Access mode: <http://www.historykpvo-2.ucoz.ru>. – Date of access: 3/7/2018.

Поступила  
02.04.2018

После доработки  
25.10.2018

Принята к печати  
30.11.2018

## MODIFIED METHOD OF PROPORTIONAL NAVIGATION TO INTERCEPT AEROBALLISTIC TARGETS WITH A LIMITED SECTOR GUIDANCE OF MISSILE

*The improved version of the algorithm realizing a method of proportional navigation for guidance of anti-aircraft guided missiles in the limited sector of the angular tracking connected with the line of sight of the aero ballistic target and the anticipations providing sustainable missile guidance with the maximum the angles of pre-emption, which aren't exceeding maximum permissible is considered. The analytical expressions describing the algorithm of calculation of guidance command and signals of correction, adaptive to parameters of the movement and realizing steady tracking and control of a guided anti-aircraft missile in the wide ranges of the radial distance, heights and speeds of the movement of aerodynamic target are given. Results of mathematical simulation of a problem of spatial interception of the aero-ballistic targets and also the comparative analysis and preliminary estimate of accuracy of guidance of the existing classical and modified versions of a method of proportional navigation are presented.*

**Keywords:** modified method of proportional navigation, guidance station missiles, anti-aircraft guided missile, the angular sector tracking, aeroballistics maneuvering target, a spatial model of the missile, the pointing errors.



**Маркевич Виталий Эдмундович** – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, г. Минск, пр-т Независимости, д.95/7, к.16, e-mail: [mark.vit@tut.by](mailto:mark.vit@tut.by). Мобильные телефоны для связи (персональный): +375 (29) 169-69-70, +375 (29) 508-01-73.

**Markevich Vitaliy Edmundovich** – Candidate of Engineering Sciences, leader scientist, OJSC “ALEVKURP”. E-mail: [mark.vit@tut.by](mailto:mark.vit@tut.by).



**Легкоступ Виктор Валерьевич** – аспирант БГУИР, младший научный сотрудник ОАО “АЛЕВКУРП”, г. Минск, пр-т Независимости, д.95/7, к. 16. e-mail: [legkostupvv@gmail.com](mailto:legkostupvv@gmail.com)

**Legkostup Victor Valeryevich** - post-graduate student of BSUIR, junior researcher, OJSC “ALEVKURP”.

E-mail: [legkostupvv@gmail.com](mailto:legkostupvv@gmail.com)

Мобильные телефоны для связи (персональный): +375 (33) 682 43 02

Городские телефоны для связи (общие):

+375 (17) 280-91-67, +375 (17) 280-48-27, +375 (17) 281-78-26.