



Министерство образования  
Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

---

Кафедра «Техническая физика»

# **ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ**

**Методические указания  
к лабораторной работе**

**Минск 2009**

Министерство образования Республики Беларусь  
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

---

Кафедра «Техническая физика»

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ  
ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ  
МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ  
КОЛЕБАНИЙ

*Методические указания  
к лабораторной работе*

Минск 2009

УДК 531.231 (076.5)  
ББК 22.213 я7  
О 62

С о с т а в и т е л и :

*А.Г. Головейко, И.К. Султанова, С.И. Шеденков*

Р е ц е н з е н т

доцент кафедры физики, канд. физ.-мат. наук *Н.П. Юркевич*

В методических указаниях рассмотрены основные вопросы динамики вращательного движения твердого тела, дано подробное описание величин, характеризующих вращательное движение, рассмотрены вопросы экспериментального определения моментов инерции твердых тел.

## Введение

Вращательное движение твердых тел встречается и используется в технике повсеместно. Перечень применения вращательного движения в разнообразных узлах машин и приборов очень велик. Это могут быть маховики, валы, шкивы, турбины, роторы, шпиндели, центрифуги, сепараторы, колеса транспортных средств, компакт-диски в компьютерах и т.д. Важнейшей величиной, которая определяет вращение таких тел, является их момент инерции. Подобно тому, как без данных о массе тела невозможно рассчитать его поступательное движение, так и без данных о моменте инерции тела невозможно рассчитать его вращательное движение. Как известно при поступательном движении тела его ускорение обратно пропорционально массе  $m$ . При вращательном движении тела его угловое ускорение обратно пропорционально не массе, а моменту инерции  $J$ . Таким образом  $m$  и  $J$  выражают инертные свойства одного и того же тела, только при поступательном движении эти свойства определяются массой, а при вращательном движении — моментом инерции. Важно подчеркнуть, что если масса данного тела однозначна, то момент инерции этого же тела может иметь самые различные значения в зависимости от выбора оси вращения. Поэтому нельзя утверждать, что «тело обладает моментом инерции  $J$ » без добавления слов «относительно данной оси вращения», поскольку при иной оси вращения момент инерции примет другое значение. Таких возможных значений столько, сколько возможных осей вращения, т. е. бесконечно много. Однако для избранной оси вращения момент инерции тела является вполне конкретной однозначной величиной.

Математический расчет момента инерции выполним только для тел простой геометрической формы, что недостаточно для решения реальных технических задач. Поэтому экспериментальное определение момента инерции является важной инженерной задачей. В данной работе Вам предлагается экспериментально определить момент инерции тела сложной геометрической формы методом крутильных колебаний.

## Цель работы

1. Ознакомиться с основными характеристиками тела при вращательном движении.
2. Определить момент инерции тела сложной геометрической формы с помощью крутильного маятника.

## Порядок теоретической подготовки к выполнению работы

Изучить и законспектировать в тетрадь ответы на контрольные вопросы.

## Приборы и принадлежности

1. Крутильный маятник.
2. Секундомер.
3. Эталонное и исследуемое тело.

## Содержание отчета по лабораторной работе

1. Цель работы.
2. Приборы и принадлежности к работе.
3. Схему лабораторной установки.
4. Физическую модель.
5. Математическая модель.
6. Таблица результатов измерений.
7. Результаты расчётов и расчет погрешностей.
8. Вывод.

## Момент инерции

Твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек, расстояние между которыми неизменно. Вращательным движением твердого тела называют такое движение, при котором все точки тела описывают окружности вокруг оси его вращения. Если тело может вращаться вокруг неподвижной оси, то изменение его движения зависит от действующего на тело момента сил. Моментом силы  $F$  относительно неподвижной точки  $O$  называется физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса-вектора  $r$ , проведенного из точки  $O$  в точку приложения силы  $B$ , на силу  $F$  (рис.1):

$$M = [rF],$$

где  $M$  – псевдовектор, направление которого совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от  $r$  к  $F$ .

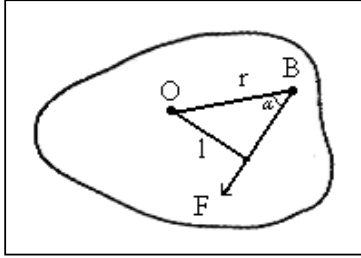


Рис. 1

Модуль момента силы

$$M = F r \sin \alpha = F l,$$

где  $l = r \sin \alpha$  – кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой  $O$ , называемое плечом силы.

Моментом силы относительно неподвижной оси  $x$  называется скалярная величина  $M_x$ , равная проекции на эту ось вектора  $M$  момента силы, определенного относительно произвольной точки  $O$  данной оси  $x$ . Причем значение  $M_x$  не зависит от выбора положения точки  $O$ .

Величина

$$J = m r^2$$

численно равная произведению массы материальной точки на квадрат расстояния до оси вращения, называется моментом инерции материальной точки. Для твердого тела момент инерции выражается суммой моментов инерции всех материальных точек, образующих тело:

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2 = J_1 + J_2 + \dots + J_n. \quad (1)$$

При вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной оси его угловое ускорение  $\varepsilon$  прямо пропорционально действующему на тело моменту сил  $M$  и обратно пропорционально его моменту инерции  $J$  относительно той же оси

$$\varepsilon = \frac{M}{J}.$$

Так выражается основной закон динамики вращения твердого тела, когда его ось вращения не меняет своей ориентации и своего положения в пространстве. Этот закон является исходным во всех расчетах вращательного движения, но расчеты не могут быть выполнены без данных о моменте инерции твердого тела. Момент инерции твердого тела относительно данной оси является *мерой инертности* тела при его вращательном движении.

Вращающееся твердое тело обладает кинетической энергией. Если ось вращения неподвижна, то кинетическая энергия определяется через угловую скорость вращения  $\omega$  и момент инерции тела  $J$  относительно данной оси:

$$W = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Выражение (1) определяет физическое содержание момента инерции, но оно не пригодно для вычисления этой величины. Необходимо от суммы с большим числом слагаемых перейти к интегралу. Для этого твердое тело можно представить состоящим из элементарных масс  $dm$ , каждая из которых обладает своим элементарным моментом инерции  $dJ = r^2 dm = r^2 \rho dV$  относительно данной оси вращения, так что

$$J = \int dJ = \int r^2 dm = \rho \int r^2 dV,$$

где  $\rho$  – плотность тела,  $r$  – расстояние элементарной массы до данной оси вращения, а  $J$  – момент инерции всего тела относительно этой же оси. Конкретное интегрирование требует дальнейшего

преобразования исходного интеграла путем перехода к декартовой системе координат  $x, y, z$ . Но результат такого преобразования зависит от того, где выбрать начало координат и как направить оси  $x, y, z$  по отношению к твердому телу. Самый простой вариант получается в том случае, когда за начало координат избирается центр масс твердого тела, а оси координат  $x, y, z$  направляются по его главным центральным осям.

*Центральными* называются все оси, проходящие через центр масс твердого тела. Их бесконечно много, но среди них есть три главные и они при любой форме тела взаимно перпендикулярны, как оси координат  $x, y, z$ . Направление главных осей по отношению к твердому телу определяется не геометрическими, а физическими условиями. Относительно одной из них момент инерции тела должен быть максимальным, относительно другой – минимальным, относительно третьей – иметь промежуточное значение. Моменты инерции относительно этих осей называются *главными центральными моментами инерции*, соответственно  $J_x, J_y, J_z$ .

Часто геометрические оси симметрии твердого тела приближаются или даже совпадают с главными осями. Так, если тело имеет форму поверхности вращения, то его ось вращения совпадает с одной из главных осей. Но это возможно только при идеальной форме тела и при полной его однородности, что не всегда выполняется.

Момент инерции  $J_c$  относительно любой центральной оси при ее ориентации под углами  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  к главным центральным осям  $x, y$  и  $z$  (рис. 2) определяется простым уравнением

$$J_c = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma. \quad (2)$$

При этом главные центральные моменты инерции  $J_x, J_y, J_z$  находят вычислением соответствующих интегралов. Однако такие интегралы берутся только в случае, когда тело имеет правильную простейшую геометрическую форму, например, форму цилиндра, диска, куба, параллелепипеда и т. п. В более сложных случаях  $J_x, J_y, J_z$  можно определить только экспериментально.

Таким образом, достаточно знать главные центральные моменты инерции  $J_x, J_y, J_z$  и углы  $\alpha, \beta, \gamma$  и момент инерции относительно любой центральной оси  $J_c$  находится простым вычислением по формуле (2). Момент инерции  $J$  относительно любой нецентральной оси,



параллельной данной центральной оси, вычисляется согласно *теореме Штейнера*

$$J = J_c + md^2,$$

где  $m$  – масса тела,  $a, d$  – расстояние между параллельными осями.

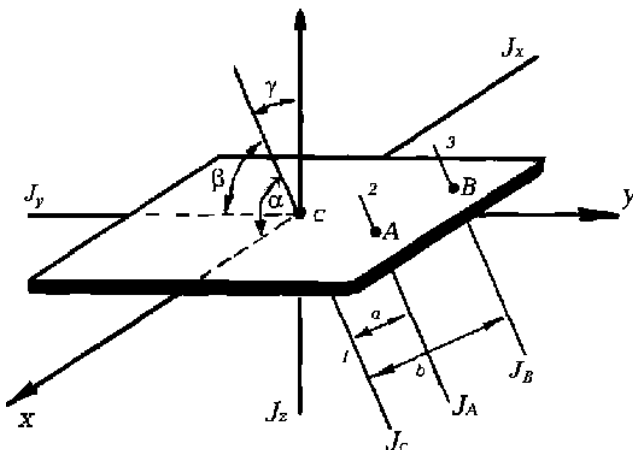


Рис. 2

На рис. 2 в качестве примера выделено три параллельные оси 1, 2 и 3, из которых ось 1 центральная (проходит через центр масс  $C$ ), а две другие 2 и 3 — нецентральные (проходят через точки  $A$  и  $B$ ). Согласно теореме Штейнера можно записать

$$J_A = J_c + ma^2; \quad J_B = J_c + mb^2; \quad J_B = J_A + m(b - a)^2.$$

### Определение момента инерции твердого тела методом крутильных колебаний

Крутильный маятник представлен функциональной схемой на рис. 3. Натянутая струна между базами  $A$  и  $B$  выполняет функции упругого элемента. При повороте рамки  $R$  (вместе с ее деталями  $P, ZN, K$ )

струна закручивается на некоторый угол  $\varphi$ , чем создается деформация кручения с возбуждением момента сил  $M$ , действующего на возвращение рамки к положению равновесия. Именно этим возвращающим моментом сил и обеспечиваются колебания крутильного маятника. Если деформация кручения струны не переходит в пластическую и остается строго упругой, то колебания крутильного маятника будут гармоническими и период колебаний будет постоянным и независимым от  $\varphi$  (при возникновении пластических деформаций колебания становятся ангармоническими).

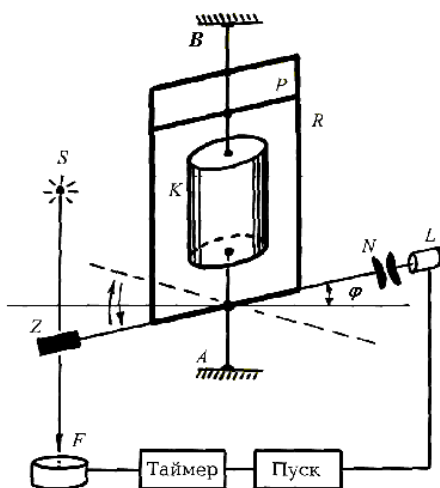


Рис. 3

Движение крутильного маятника носит колебательный характер и подчиняется двум законам, один из которых связан с упругой деформацией кручения струны, а другой – с вращением крутильного маятника:

$$M = -G \cdot \varphi \quad \text{и} \quad M = J\varepsilon, \quad (3)$$

где  $G$  – коэффициент упругости струны,  $\varphi$  – текущее угловое смещение маятника от положения равновесия,  $J$  – момент инерции маятника,  $\varepsilon$  – его угловое ускорение:

$$\varepsilon = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}.$$

Крутильные колебания маятника, как следует из (3), описываются следующим дифференциальным уравнением:

$$J \cdot \ddot{\varphi} + G \cdot \varphi = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \quad (4)$$

где принято обозначение

$$\omega^2 = \frac{G}{J}. \quad (5)$$

Уравнение такого вида соответствует гармоническому осциллятору и описывает его гармонические колебания, в данном случае колебания углового смещения маятника относительно его положения равновесия. Действительно, из решения дифференциального уравнения (4) следует, что колебания крутильного маятника являются гармоническими

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega \cdot t + \alpha),$$

где  $\varphi_0$  – амплитуда углового смещения, равная начальному угловому отклонению маятника перед запуском колебаний, а  $\omega$  – циклическая частота колебаний, связанная с периодом колебаний соотношением

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (6)$$

Из совместного решения (5) и (6) вытекают простые формулы для определения  $J$  или  $G$  через экспериментально определяемый период колебаний крутильного маятника

$$J = \frac{G}{4\pi^2} \cdot T^2 \quad \text{и} \quad G = \frac{4\pi^2 J}{T^2}. \quad (7)$$

Из этих формул следует, что данных о периоде колебаний недостаточно для измерения величин  $J$  или  $G$ , т. к. при определении одной из них необходимы еще данные о другой. Тем не менее, в данной работе предлагается такая методика эксперимента с крутильным маятником, когда  $J$  определяется только через  $T$  и сведения о величине  $G$  при этом не требуются.

Сначала на «холостом ходу» определяется период колебаний базовой рамки крутильного маятника  $T_0$ . Затем базовая рамка заправляется эталонным телом с известным моментом инерции  $J_0$  и снова определяется период колебаний маятника  $T_1$ , когда его общий момент инерции складывается из  $J_0$  и  $J_0$ . Наконец вместо эталонного тела базовая рамка заправляется исследуемым телом с неизвестным моментом инерции  $J$  и снова определяется период колебаний маятника  $T_2$ , когда его общий момент инерции складывается из  $J_0$  и  $J$ . Тогда в соответствии с (7) можно записать

$$J_0 = \frac{G}{4\pi^2} \cdot T_0^2; \quad J_1 = J_0 + J_0 = \frac{G}{4\pi^2} \cdot T_1^2; \quad J_2 = J_0 + J = \frac{G}{4\pi^2} \cdot T_2^2.$$

Из совместного решения этих уравнений вытекают окончательные расчетные формулы для определения момента инерции:

$$J_0 = J_0 \frac{T_0^2}{T_1^2 - T_0^2};$$

$$J = J_0 \frac{T_2^2 - T_0^2}{T_1^2 - T_0^2}.$$

В качестве эталонного твердого тела предлагается металлический цилиндр. После измерения массы и радиуса цилиндра, его момент инерции вычисляется по формуле

$$J_0 = \frac{1}{2} \cdot mR^2.$$

При этом предполагается такое закрепление цилиндра в базовой рамке, когда его геометрическая ось совпадает с осью вращения рамки.

## Порядок выполнения работы

1. Измерить массу и радиус эталонного тела (цилиндра) с помощью рычажных весов и штангенциркуля. Данные занести в табл. 1.

Таблица 1

$m, 10^{-3}\text{кг}$	$\Delta m, 10^{-3}\text{кг}$	$R, 10^{-2}\text{м}$	$\Delta R, 10^{-2}\text{м}$
	0,05		0,05

2. По данным табл. 1 рассчитать момент инерции эталонного тела и ошибки его определения:

$$J_3 = \frac{1}{2} mR^2; \quad \varepsilon = \frac{\Delta J_3}{J_3} = \frac{\Delta m}{m} + 2 \frac{\Delta R}{R}; \quad \Delta J_3 = \varepsilon J_3.$$

3. Включить секундомер, нажав кнопку «Сеть». Кнопки «Сбр», «Пуск», «Стоп» должны быть отжаты.

4. Повернуть базовую рамку до касания контактной площадки с электромагнитом. Запустить колебания крутильного маятника, нажав кнопку «Пуск».

5. Измерить время десяти полных колебаний  $t_0$ . Для этого необходимо нажать кнопку «Стоп» в момент, когда показание счетчика периодов колебаний будет равно девяти. Измерения повторить не менее трех раз. Данные занести в табл. 2.

6. Рассчитать значение периода колебаний базовой рамки  $T_0$  для трех случаев:

$$T_0 = \frac{t_0}{n}.$$

Найти среднее значение  $\bar{T}_0$ .

7. Заправить базовую рамку эталонным телом. Повторить измерения по п.п. 3–6 и определить значение периода колебаний базовой рамки с эталонным телом  $T_1$ . Все данные занести в табл. 2.

8. Заправить базовую рамку исследуемым телом. Определить период колебаний базовой рамки с исследуемым телом  $T_2$  (см. п.п. 3–6). Данные занести в табл. 2

Таблица 2

Колебания маятника без эталонного тела				Колебания маятника с эталонным телом				Колебания маятника с исследуемым телом			
$t_0, \text{с}$	$n$	$T_0, \text{с}$	$\Delta T_0, \text{с}$	$t_1, \text{с}$	$n$	$T_1, \text{с}$	$\Delta T_1, \text{с}$	$t_2, \text{с}$	$n$	$T_2, \text{с}$	$\Delta T_2, \text{с}$
	10				10				10		
	10				10				10		
	10				10				10		
		$T_0 =$	$\Delta T_0 =$			$T_1 =$	$\Delta T_1 =$			$T_2 =$	$\Delta T_2 =$

9. По данным табл. 2 рассчитать момент инерции базовой рамки крутильного маятника и ошибки его определения:

$$J_0 = J_3 \frac{T_0^2}{T_1^2 - T_0^2},$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\Delta J_0}{J_0} = \frac{\Delta J_3}{J_3} + \frac{2\Delta T_0 \cdot T_0}{T_0^2} + 2 \frac{T_1 \Delta T_1 + T_0 \Delta T_0}{(T_1^2 - T_0^2)},$$

$$\Delta J_0 = \varepsilon_0 \cdot J_0,$$

где значение  $\frac{\Delta J_3}{J_3} = \varepsilon_3$  берем из п. 2.

10. По данным табл. 2 рассчитать момент инерции исследуемого тела и ошибки его определения:

$$J = J_3 \frac{T_2^2 - T_0^2}{T_1^2 - T_0^2},$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta J}{J} = \frac{\Delta J_3}{J_3} + 2 \frac{(T_2 \Delta T_2 + T_0 \Delta T_0) \cdot (T_1^2 - T_0^2)}{(T_2^2 - T_0^2)(T_1^2 - T_0^2)} + 2 \frac{T_1 \Delta T_1 + T_0 \Delta T_0}{(T_1^2 - T_0^2)},$$

$$\Delta J = \varepsilon \cdot J.$$

11. Записать окончательный результат с учетом погрешностей.

## Литература

1. Сивухин, Д.В. Общий курс физики: в 2 т. / Д.В. Сивухин. – М.: Наука, 1989. – Т.1, гл. 5, §§ 32–35.
2. Детлаф, А.А. Курс физики: / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Высшая школа, 1989.
3. Савельев, И.В. Курс общей физики в 2 т. / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1977. – Т.1, §§ 38, 39.

## Контрольные вопросы

1. Что такое момент инерции материальной точки и твердого тела относительно данной оси вращения?
2. Что такое центральные и главные центральные оси вращения и по каким критериям определяется направление главных центральных осей по отношению к твердому телу?
3. Как связан с главными центральными моментами инерции момент инерции твердого тела относительно любой центральной оси?
4. Как между собой связаны моменты инерции твердого тела относительно двух параллельных осей? Теорема Штейнера?
5. Основной закон динамики вращения твердого тела?
6. Какова связь между моментом упругих сил и углом закручивания при деформации кручения упругого элемента?
7. При каких условиях колебания крутильного маятника будут гармоническими и при каких – ангармоническими?

Учебное издание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ  
ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ  
МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ  
КОЛЕБАНИЙ

*Методические указания  
к лабораторной работе*

С о с т а в и т е л и :  
ГОЛОВЕЙКО Алексей Георгиевич  
СУЛТАНОВА Ирина Константиновна  
ШЕДЕНКОВ Сергей Игнатович

Ответственный за выпуск И.Ю. Никитенко  
Компьютерная верстка Д.К. Измайлович

---

Подписано в печать 27.11.2009.

Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.

Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 0,87. Уч.-изд. л. 0,68. Тираж 100. Заказ 785.

---

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Белорусский национальный технический университет.

ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.

Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.