УДК 004.93.1

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТКРЫТОЙ СЕТИ С НЕАКТИВНЫМИ ЗАЯВКАМИ И ТРЕМЯ РЕЖИМАМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Ворохобко Г. В.
Научный руководитель – Крук Ю.С., к.ф.-м.н., доцент

Рассмотрим открытую сеть массового обслуживания, состоящую из N узлов. Все заявки, находящиеся в сети, подразделяются на обыкновенные (активные), которые требуют обслуживания, и временно неактивные, которые формируют отдельную очередь и не требуют обслуживания. В сеть поступает простейший поток заявок с параметром λ. Каждая заявка входящего потока независимо от других заявок направляется в i-ый узел с вероятностью p_{0i}, $\sum_{i=1}^{N} p_{0i} = 1$. Кроме того, в узлы сети поступают независимые простейшие потоки информационных сигналов с интенсивностями ν_i и φ_i, $i = \overline{1,N}$. Информационный сигнал, поступивший в i-ый узел с интенсивностью ν_i, уменьшает количество обыкновенных заявок на единицу и увеличивает на единицу количество неактивных заявок. В случае отсутствия в i-ом узле обыкновенных заявок сигнал покидает сеть. Информационный сигнал, поступивший в i-ый узел с интенсивностью φ_i, уменьшает на единицу количество неактивных заявок, увеличивая на единицу число обыкновенных заявок. В случае отсутствия в i-ом узле неактивных заявок сигнал покидает сеть. Описанные информационные сигналы не требуют обслуживания.

Предполагается, что i-ый узел может находиться в одном из трех режимов работы $(l_i = \overline{0,2}, i = \overline{1,N})$. Состояние сети в момент времени t описывается вектором $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \ldots, z_N(t))$, где $z_i(t) = (n_i(t), n_i'(t), l_i(t))$ – состояние i-го узла в момент времени t. Здесь $n_i(t)$, $n_i'(t)$ – число активных и соответственно неактивных заявок в i-ом узле в момент времени t, $l_i(t)$ – режим функционирования i-го узла. Пространство состояний случайного процесса $z_i(t)$ имеет вид

$$Z_i = \{ z_i = (n_i, n_i', l_i) : n_i, n_i' \geq 0,\ l_i = \overline{0,2} \}.$$

Нумерация обыкновенных заявок в очереди каждого узла осуществляется от «хвоста» очереди к прибору, т. е. если в i-ом узле находится n_i обыкновенных заявок, то заявка, которая обслуживается, имеет номер n_i, а последняя заявка в очереди имеет номер 1. Временно неактивные заявки в очереди i-го узла нумеруются следующим образом:

заявка, последняя ставшая неактивной, имеет номер n'_i. Поступающий в узел i сигнал ν_i воздействует на обыкновенную заявку, имеющую номер 1, которая становится неактивной заявкой под номером $n'_i + 1$. Сигнал φ_i воздействует на неактивную заявку, имеющую номер n'_i, которая становится обыкновенной заявкой под номером 1.

Назовем нулевой режим основным режимом работы. Время работы узла, находящегося в состоянии $z_i = (n_i, n'_i, l_i)$, в режиме l_i $(l_i = \overline{0,2}, i = \overline{1,N})$ имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью τ_i (τ_i>0) i-ый узел переходит в $(l_i + 1)$-ый режим $(l_i = \overline{0,1})$, а с интенсивностью ρ_i (ρ_i>0) – в $(l_i - 1)$-ый режим $(l_i = \overline{1,2})$. Переключение прибора с одного режима в другой сохраняет общее число заявок в узле.

Времена обслуживания активных заявок независимы и имеют показательное распределение с параметром $\mu_i(l_i)$ $(i = \overline{1,N})$. Заявки обслуживаются в порядке поступления.

Каждая заявка после завершения обслуживания в i-ом узле независимо от других заявок мгновенно направляется в j-ый узел с вероятностью p_{ij}, а с вероятностью p_{i0} покидает сеть. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать $p_{ii} = 0, \ i = \overline{1,N}$.

Предполагается, что матрица вероятностей переходов $(p_{ij} : i, j = \overline{0,N})$, где $p_{00} = 0$, неприводима. Система уравнений трафика принимает вид

$$\varepsilon_i = p_{0i} + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j p_{ji} .$$

Система уравнений трафика имеет единственное положительное решение $(\varepsilon_i, i = \overline{1,N})$ [1].

Процесс $z_i(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и пространством состояний $Z = Z_1 \times Z_2 \times ... \times Z_N$, где Z_i – пространство состояний i-го узла.

Обозначим через $[z, (n_i, n'_i, l_i)]$ N-мерный вектор $\tilde{z} \in Z$, у которого все координаты, кроме i-ой, совпадают с координатами вектора $z \in Z$, а i-ая координата равна $(n_i, n'_i, l_i) \in Z_i$. Через $[z, (n_i, n'_i, l_i), (n_j, n'_j, l_j)]$ обозначим N-мерный вектор $\tilde{z} \in Z$, у которого все координаты, кроме i-ой и j-ой, совпадают с координатами вектора $z \in Z$, а i-ая координата равна $(n_i, n'_i, l_i) \in Z_i$, j-ая координата равна $(n_j, n'_j, l_j) \in Z_j$. Если $q(x, y)$ – интенсивность перехода процесса $z(t)$ из состояния $x \in Z$ в состояние

$y \in Z$, $q(x) = \sum_{y \neq x} q(x, y)$ – интенсивность выхода из состояния x, то интенсивности переходов процесса $z(t)$ имеют вид

$$
\begin{gathered}
q\left(z, \left(n_i + 1, n_i', l_i\right)\right) = \lambda p_{0i}, \\
q\left(z, \left(n_i - 1, n_i' + 1, l_i\right)\right) = \nu_i I_{\{n_i \neq 0\}}, \\
q\left(z, \left(n_i + 1, n_i' - 1, l_i\right)\right) = \varphi_i I_{\{n_i' \neq 0\}}, \\
q\left(z, \left(n_i - 1, n_i', l_i\right)\right) = \mu_i(l_i) p_{i0} I_{\{n_i \neq 0\}}, \\
q\left(z, \left(n_i, n_i', l_i - 1\right)\right) = \rho_i(n_i, n_i', l_i) I_{\{l_i \neq 0\}}, \\
q\left(z, \left(n_i, n_i', l_i + 1\right)\right) = \tau_i(n_i, n_i', l_i) I_{\{l_i \neq 2\}}, \\
q\left(z, \left(n_i - 1, n_i', l_i\right), \left(n_j + 1, n_j', l_j\right)\right) = \mu_i(l_i) p_{ij} I_{\{n_i \neq 0\}}, \\
i, j = \overline{1, N}, z \in Z.
\end{gathered}
$$

Для всех остальных состояний $y \in Z$ $q(x, y) = 0$.

Для рассмотренной модели сети установлены условия эргодичности, составлена и решена система уравнений глобального равновесия с целью нахождения стационарного распределения вероятностей состояний сети. Запланирована разработка программного средства для компьютерного моделирования рассмотренной сети массового обслуживания.

Литература

1. Jackson, J.R. Jobshop-like Queueing Systems / J. R. Jackson // Manag. Sci. 1963. V. 10. №1. P. 131 – 142.

2. Gordon, W.J. Closed Queueing Nnetworks with Exponential Servers / W.J. Gordon, G.F. Newell // Oper. Res. 1967. No 15. P. 252 – 267.

3. Бочаров, П. П. Теория массового обслуживания: учебник / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. М. : РУДН, 1995. 529 с.

4. Tsitsiashvili, G. Sh. Distributions in stochastic network models / G. Sh. Tsitsiashvili, M. Osipova. NY : Nova Publishers Incorporated, 2008. 75 p.

5. Крук, Ю.С. Инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний сетей массового обслуживания с неактивными заявками / Ю. С. Крук, Ю. Е. Дудовская // Минск : БНТУ, 2016. – 131 с.