УДК 004.93.1

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТКРЫТОЙ ДВУХРЕЖИМНОЙ СЕТИ С НЕАКТИВНЫМИ ЗАЯВКАМИ

Римашевский М. А.
Научный руководитель – Крук Ю.С., к.ф.-м.н., доцент

Рассматривается модификация сети Джексона, состоящая из N узлов. Все заявки, находящиеся в сети, подразделяются на два типа: обыкновенные, которые требуют обслуживания, и временно неактивные заявки, которые формируют отдельные очереди в узлах сети и не требуют обслуживания. В сеть поступает пуассоновский поток заявок с параметром λ. Каждая заявка входящего потока независимо от других заявок входящего потока направляется в i-ый узел с вероятностью p_{0i}, $\sum_{i=1}^{N} p_{0i} = 1$. В узлы сети поступают независимые пуассоновские потоки информационных сигналов с интенсивностями ν_i и φ_i, $i = \overline{1,N}$. Информационный сигнал, поступивший в i-ый узел с интенсивностью ν_i, уменьшает количество обыкновенных заявок на единицу и увеличивает на единицу количество неактивных заявок. В случае отсутствия в i-ом узле обыкновенных заявок сигнал покидает сеть. Информационный сигнал, поступивший в i-ый узел с интенсивностью φ_i, уменьшает на единицу количество неактивных заявок, увеличивая на единицу число обыкновенных заявок. В случае отсутствия в i-ом узле неактивных заявок сигнал покидает сеть. Описанные информационные сигналы не требуют обслуживания.

i-ый узел сети может находиться в одном из двух режимов функционирования $\left(l_i = \overline{0,1}, i = \overline{1,N}\right)$. Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \ldots, z_N(t))$, где $z_i(t) = (n_i(t), n_i'(t), l_i(t))$ – состояние i-го узла в момент времени t, где $n_i(t)$, $n_i'(t)$ – количество активных и соответственно неактивных заявок в i-ом узле в момент времени t, $l_i(t)$ – режим работы i-го узла. Пространство состояний случайного процесса $z_i(t)$ имеет вид

$$Z_i = \left\{ z_i = \left(n_i, n_i', l_i\right) \mid n_i, n_i' \geq 0,\ l_i = \overline{0,1} \right\}.$$

Нумерация обыкновенных (активных) заявок в очереди каждого узла производится от «хвоста» очереди к прибору, т. е. если в i-ом узле находится n_i активных заявок, то заявка, которая обслуживается, имеет номер n_i, а последняя заявка в очереди имеет номер 1. Временно неактивные заявки в очереди i-го узла нумеруются следующим образом:

заявка, последняя ставшая неактивной, имеет номер n_i'. Поступающий в узел i сигнал ν_i воздействует на активную заявку, имеющую номер 1, которая становится неактивной заявкой под номером $n_i'+1$. Сигнал φ_i воздействует на неактивную заявку, имеющую номер n_i', которая становится активной заявкой под номером 1.

Нулевой режим будем считать основным режимом работы, соответствующий максимальной степени работоспособности узла. Время работы узла, находящегося в состоянии $z_i = (n_i, n_i', l_i)$, в режиме l_i $(l_i = \overline{0,1},\ i = \overline{1,N})$ имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью τ_i ($\tau_i>0$) i-ый узел переходит в 1-ый режим, а с интенсивностью ρ_i ($\rho_i>0$) – в нулевой режим. Переключение прибора с одного режима в другой не изменяет общего количества заявок в узле сети.

Времена обслуживания активных заявок независимы и имеют показательное распределение с параметром $\mu_i(l_i)$ $(i=\overline{1,N})$. Дисциплина обслуживания активных заявок – LIFO.

После завершения обслуживания в i-ом узле каждая заявка независимо от других заявок мгновенно направляется в j-ый узел с вероятностью p_{ij}, а с вероятностью p_{i0} покидает сеть. Не ограничивая общности рассуждений, договоримся считать $p_{ii}=0,\ i=\overline{1,N}$.

Предполагается, что матрица вероятностей переходов $(p_{ij} : i, j = \overline{0,N})$, где $p_{00}=0$, неприводима. Система уравнений трафика принимает вид

$$\varepsilon_i = p_{0i} + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j p_{ji}\ .$$

Система уравнений трафика имеет единственное положительное решение $(\varepsilon_i,\ i=\overline{1,N})$ [1].

Случайный процесс $z_i(t)$ является однородным марковским процессом с непрерывным временем и пространством состояний $Z = Z_1 \times Z_2 \times \ldots \times Z_N$, где Z_i – пространство состояний i-го узла.

Пусть $[z, (n_i, n_i', l_i)]$ – N-мерный вектор $\tilde{z} \in Z$, у которого все компоненты, кроме i-ой, совпадают с координатами вектора $z \in Z$, а i-ая координата равна $(n_i, n_i', l_i) \in Z_i$. Пусть $[z, (n_i, n_i', l_i), (n_j, n_j', l_j)]$ – N-мерный вектор $\tilde{z} \in Z$, у которого все компоненты, кроме i-ой и j-ой, совпадают с координатами вектора $z \in Z$, а i-ая координата равна $(n_i, n_i', l_i) \in Z_i$, j-ая координата равна $(n_j, n_j', l_j) \in Z_j$. Если $q(x,y)$ – интенсивность перехода процесса $z(t)$ из состояния $x \in Z$ в состояние $y \in Z$, $q(x) = \sum_{y \neq x} q(x, y)$ –

интенсивность выхода из состояния x, то интенсивности переходов процесса $z(t)$ имеют вид

$$
\begin{gathered}
q\left(z,\left(n_i+1,n_i',l_i\right)\right)=\lambda p_{0i},\\
q\left(z,\left(n_i-1,n_i'+1,l_i\right)\right)=\nu_i I_{\left(n_i\neq 0\right)},\\
q\left(z,\left(n_i+1,n_i'-1,l_i\right)\right)=\varphi_i I_{\left(n_i'\neq 0\right)},\\
q\left(z,\left(n_i-1,n_i',l_i\right)\right)=\mu_i\left(n_i\right)p_{i0}I_{\left(n_i\neq 0\right)},\\
q\left(z,\left(n_i,n_i',l_i-1\right)\right)=\rho_i I_{\left(l_i=1\right)},\\
q\left(z,\left(n_i,n_i',l_i+1\right)\right)=\tau_i I_{\left(l_i=0\right)},\\
q\left(z,\left(n_i-1,n_i',l_i\right),\left(n_j+1,n_j',l_j\right)\right)=\mu_i\left(n_i\right)p_{ij}I_{\left(n_i\neq 0\right)},\\
i,j=\overline{1,N},z\in Z.
\end{gathered}
$$

Для всех остальных состояний $y \in Z$ $q(x,y)=0$.

Для исследуемой модели сети установлены условия эргодичности, составлена и решена система уравнений глобального равновесия с целью нахождения стационарного распределения вероятностей состояний сети. Запланирована разработка программного средства для компьютерного моделирования рассмотренной сети массового обслуживания.

Литература

1. Jackson, J.R. Jobshop-like Queueing Systems / J. R. Jackson // Manag. Sci. 1963. V. 10. №1. P. 131 – 142.

2. Gordon, W.J. Closed Queueing Nnetworks with Exponential Servers / W.J. Gordon, G.F. Newell // Oper. Res. 1967. No 15. P. 252 – 267.

3. Бочаров, П. П. Теория массового обслуживания: учебник / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. М. : РУДН, 1995. 529 с.

4. Tsitsiashvili, G. Sh. Distributions in stochastic network models / G. Sh. Tsitsiashvili, M. Osipova. NY : Nova Publishers Incorporated, 2008. 75 p.

5. Крук, Ю.С. Инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний сетей массового обслуживания с неактивными заявками / Ю. С. Крук, Ю. Е. Дудовская // Минск : БНТУ, 2016. – 131 с.