

**Белорусский национальный технический университет**  
Факультет транспортных коммуникаций  
Кафедра «Сопротивление материалов и теория упругости»

СОГЛАСОВАНО  
Заведующий кафедрой  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_ 2018 г.

СОГЛАСОВАНО  
Декан факультета  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_ 2018 г.

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО УЧЕБНОЙ  
ДИСЦИПЛИНЕ**

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

для специальности  
1-70 04 02 Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного  
бассейна

Составители: к.т.н., доцент Вербицкая О.Л , к.т.н. , доцент Шевчук Л.И.,  
к.т.н., доцент Зиневич С.И.

Рассмотрено и утверждено  
на заседании совета факультета транспортных коммуникаций  
26.03.2018 г. протокол № 7

## Перечень материалов

Курс лекций, практические занятия, лабораторные занятия, задание к контрольной работе, пример выполнения контрольной работы, материалы для самостоятельной работы, контрольные вопросы к экзамену, учебная программа дисциплины.

### Пояснительная записка

Учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Сопротивление материалов» предназначен для студентов второго курса обучения по специальности 1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна». Объем изучаемого раздела дисциплины в соответствии с учебным планом составляет 34 часа лекций, 18 часов практических занятий и лабораторных занятий 16 часов.

**Целью ЭУМК** является научить студентов проводить расчеты типовых элементов строительных конструкций на прочность, жесткость, устойчивость и долговечность. Правильно выбирать конструкционные материалы и форму сечений конструкций, обеспечивающие требуемые запасы надежности, безопасность их эксплуатации и экономичность сооружений.

**Особенности структурирования и подачи учебного материала.** Материал курса представлен в виде лекционного материала, практических занятий, лабораторных занятий, контрольной (самостоятельной) работы студентов и консультаций. Учебный материал четко разделен по темам курса и излагается в соответствии с учебной программой и в объеме, предусмотренном учебным планом.

**Рекомендации по организации работы с ЭУМК.** Изучение учебного материала в ЭУМК может быть использовано студентами дневной и заочной форм обучения. Предварительно следует изучить тему лекционного материала, затем ознакомиться и проанализировать решение задач соответствующей темы, представленной в разделе практических занятий. Самостоятельно решить индивидуальные задачи в соответствии с вариантом исходных данных. В случае появления вопросов при изучении учебного материала необходимо обратиться за консультацией к преподавателю.

## СОДЕРЖАНИЕ

1	КУРС ЛЕКЦИЙ	6
1.1	Общие понятия и определения	6
1.2	Центральное растяжение (сжатие)	20
1.3	Механические характеристики материалов	31
1.4	Методы расчета на прочность	33
1.5	Геометрические характеристики плоских сечений	35
1.6	Изгиб прямых стержней	53
1.7	Напряженное и деформированное состояние в точке	87
1.8	Чистый сдвиг	95
1.9	Кручение	103
1.10	Теории прочности	108
1.11	Статически неопределимые системы. Метод сравнения деформаций	114
1.12	Определение перемещений энергетическим методом. Метод Максвелла-Мора	127
1.13	Статически неопределимые системы. Метод сил	136
1.14	Сложное сопротивление	141
1.15	Устойчивость сжатых стержней	167
1.16	Динамический расчет строительных конструкций	177
1.17	Прочность при переменных напряжениях	183
1.18	Учет пластических деформаций при расчете элементов	187
2.	ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ	191
2.1	Расчет стержня переменной жесткости на статические нагрузки	191
2.2	Расчет плоской стержневой системы	194
2.3	Определение геометрических характеристик сечения сложной геометрической формы	197
2.4	Определение геометрических характеристик сечения, составленного из прокатных профилей	200
2.5	Построение эпюр внутренних сил и расчет на прочность шарнирно опертой балки	204
2.6	Построение эпюр внутренних сил и расчет на прочность защемленной балки	209
2.7	Расчет двутавровой балки на прочность и жесткость	211
2.8	Построение эпюр внутренних сил в плоских рамах	215
2.9	Исследование напряженного состояния в точке	219
2.10	Пример расчета заклепочного соединения	220
2.11	Пример расчета сварного соединения	221
2.12	Пример расчета стержня круглого сечения на кручение	222
2.13	Пример расчета статически неопределимого	224

	ступенчатого стержня	
2.14	Пример расчета статически неопределимого стержня на температурные воздействия	228
2.15	Расчет статически неопределимого стержня круглого (кольцевого) сечения на кручение	231
2.16	Расчет статически неопределимой плоской стержневой системы	234
2.17	Расчет статически неопределимой балки методом начальных параметров	237
2.18	Определение деформаций статически определимой балки методом Максвелла-Мора (способ Верещагина)	240
2.19	Расчет статически неопределимой балки методом сил (Максвелла-Мора)	244
2.20	Расчет балки на прочность и жесткость при плоском косом изгибе	247
2.21	Расчет балки на прочность и жесткость при пространственном косом изгибе	250
2.22	Расчет стержня на внецентренное растяжение (сжатие)	253
2.23	Расчет стержня круглого сечения, испытывающего кручение с изгибом	256
2.24	Построение эпюр внутренних сил в пространственном стержне	258
2.25	Подбор сечения сжатого стержня с учетом продольного изгиба	262
2.26	Определение несущей способности сжатого стержня кольцевого поперечного сечения с учетом продольного изгиба	263
2.27	Определение несущей способности сжатого стержня, составленного из двух уголков, с учетом продольного изгиба	264
2.28	Расчет балки на поперечный удар	265
3.	<b>ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ</b>	267
3.1	Введение	267
3.2	Краткие сведения об измерительных инструментах и приборах	267
3.3	Краткие сведения об основных строительных материалах	278
3.4	Виды испытания материалов и их назначение	284
3.5	Механические характеристики материалов	284
3.6	Испытание на растяжение	287
3.7	Испытание на сжатие	297
3.8	Определение модуля продольной упругости и коэффициента поперечной деформации	303
3.9	Определение модуля упругости второго рода (модуля	309

	сдвига)	
3.10	Исследование нормальных напряжений при плоском изгибе	316
3.11	Исследование деформаций при плоском изгибе	323
3.12	Подтверждение теоремы о взаимности перемещений	331
3.13	Исследование статически неопределимой балки	335
3.14	Исследование напряжений при косом изгибе	342
3.15	Исследование деформаций при косом изгибе	348
3.16	Исследование внецентренного растяжения	355
3.17	Исследование устойчивости сжатого стержня	362
4	<b>КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ</b>	369
4.1	Контрольные вопросы для защиты первой части контрольной работы	369
4.2	Контрольные вопросы для защиты второй части контрольной работы	370
4.3	Контрольные вопросы для защиты третьей части контрольной работы	371
5	<b>ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ</b>	374
5.1	Модули курса	374
5.2	Учебно-методическое обеспечение дисциплины	381
5.3	Информационное обеспечение дисциплины	381

# 1 КУРС ЛЕКЦИЙ

## 1.1 Общие понятия и определения

### 1.1.1 Сопротивление материалов и его место среди других курсов по механике твердого тела

*Все науки*, изучающие поведение твёрдых тел, объединены в одно научное направление, которое называется *механикой твёрдого деформируемого тела*. Самой общей наукой этого направления, в которой изучается поведение не только твердых, но и газообразных и жидких тел, является *реология*. Механика твердого тела включает основные разделы: теоретическая механика; сопротивление материалов; строительная механика; линейная (классическая) теория упругости; нелинейная теория упругости; теория пластичности; теория ползучести; теория упругости анизотропного тела; теория упругости неоднородного тела и др.

*Теоретическая механика* – это наука изучающая взаимодействие абсолютно твердых тел и их движение. Появление внутренних сил и их распределение внутри твердых деформируемых тел не рассматривается.

*Сопротивление материалов* - это инженерная дисциплина изучает распределение внутренних сил в прямых (или кривых) брусках. В основу исследований положена гипотеза плоских сечений. Изучаются вопросы прочности материалов при различных воздействиях на строительные конструкции, детали машин и механизмов.

*Строительная механика (классическая)* - занимается определением внутренних сил в сложных стержневых системах. В специальных разделах строительной механики изучаются пластины, оболочки, арки и др.

*Линейная (классическая) теория упругости* – изучает деформации и напряжения в линейно упругих телах: толстых брусках, пластинах, оболочках, массивах. Линейная теория упругости основывается на предположении об идеальной упругости тела и законе Гука. В отличие от сопротивления материалов гипотеза плоских сечений не принимается.

*Нелинейная теория упругости* – изучает деформации и напряжения в телах с нелинейной диаграммой деформирования материала. При этом закон деформирования должен быть обратимым.

*Теория пластичности* – изучает деформацию тел, имеющих нелинейную диаграмму деформирования. При этом процесс деформирования может быть необратим.

*Теория ползучести* - изучает изменение деформаций и напряжений во времени в результате начального нагружения тела

Самой сложной наукой в механике твердого тела является *реология*.

*Реология* - это наука, устанавливающая общие закономерности образования и развития во времени деформаций любого вещества от различных причин и в различных термодинамических и физико-химических условиях.

**Предметом исследования** в сопротивлении материалов является брус (прямолинейные и криволинейные, постоянного и переменного сечений стержни).

**Задачей сопротивления материалов** и других родственных дисциплин является создание прочных, устойчивых, долговечных и экономически выгодных сооружений и механизмов.

### **1.1.2 Краткие сведения об истории развития сопротивления материалов (науки о прочности)**

Создание прочных, надежных конструкций издавна интересует человечество. Используя метод проб и ошибок, а также, заимствуя некоторые решения у природы, были достигнуты значительные практические успехи. Вместе с тем, этот путь был отмечен техническими катастрофами и гибелью людей.

Историческим началом науки о прочности принято считать пятнадцатое столетие. Век Великих Географических открытий был ознаменован бурным развитием кораблестроения, военной техники и астрономии. Это, в свою очередь, вызвало необходимость решения многих задач прочности. Так, известно, что Леонардо да Винчи занимался испытанием канатов на прочность и пытался решить задачу о прочности балок.

Однако, поскольку Леонардо никогда не публиковал своих работ, основателем сопротивления материалов как науки считается Галилео Галилей, который занимался испытанием деревянных балок на изгиб и написал об этом книгу.

Большой вклад в развитие науки о прочности внесло открытие интегрального и дифференциального исчисления Ньютоном и Лейбницем.

В 1676 году английский ученый Роберт Гук опубликовал закон деформирования упругих тел (каково удлинение, такова сила), являющийся основным законом сопротивления материалов.

В 1809 году Томас Юнг ввел понятие модуля упругости, а в 1822 – Огюстен Луи Коши ввел понятие напряжения. Это дало возможность записать закон Гука в современном виде.

В 1829 году французский инженер и ученый Анри Навье издал первое руководство по сопротивлению материалов.

Дальнейшее развитие этой науки было вызвано бурным развитием промышленности и транспорта и связано с трудами таких ученых, как Эйлера, Кастилиано, Максвелла, Кулона, Мора, Журавского, Ясинского и др. Первый учебник «Сопротивление материалов» был написан великим русским ученым и инженером С.П. Тимошенко.

### **1.1.3 Внешние силы и их классификация**

Характер приложения нагрузки (статические, динамические, вибрационные, мгновенно приложенные нагрузки) оказывают

существенное влияние на прочность и долговечность строительных конструкций. Поэтому оценке характера нагрузки следует придавать большое значение. Для того, чтобы такую оценку упростить нагрузку классифицируют.

**Сосредоточенные силы** – это нагрузки, передающиеся на тело через площадку, размеры которой несравнимо малы по сравнению с размерами самого тела. Обозначается буквой  $F$ . Имеет размерность **Н, кН**.

*Примеры.*

Действие колеса локомотива на рельс, действие балки на консоль колонны (рис.1) и пр.

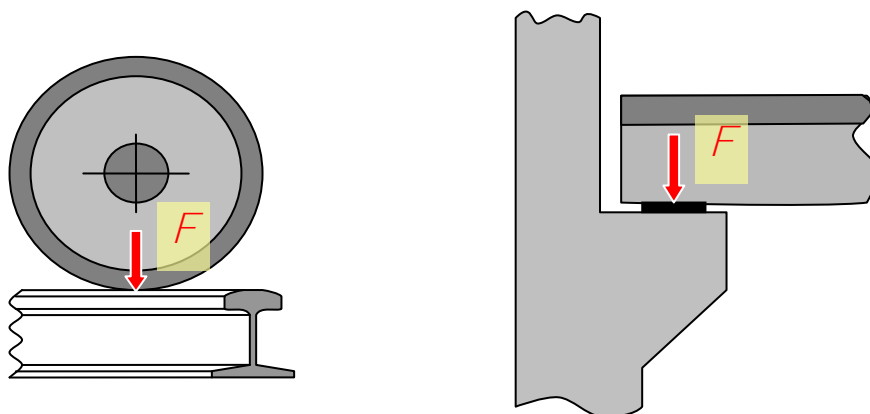


Рис.1. Действие колеса вагона на рельс и балки на консоль колонны

**Распределенные нагрузки** – это нагрузки, передающиеся на тело через площадки, размеры которых сравнимы с размерами самого тела.

Если нагрузка распределена по площади, то она обозначается обычно буквой  $p$  и имеет размерность **кН/м<sup>2</sup>**, если нагрузка распределена по линии, то она обозначается буквой  $q$  и имеет размерность **кН/м**.

*Пример.*

Действие напора воды на дамбу (рис.2).



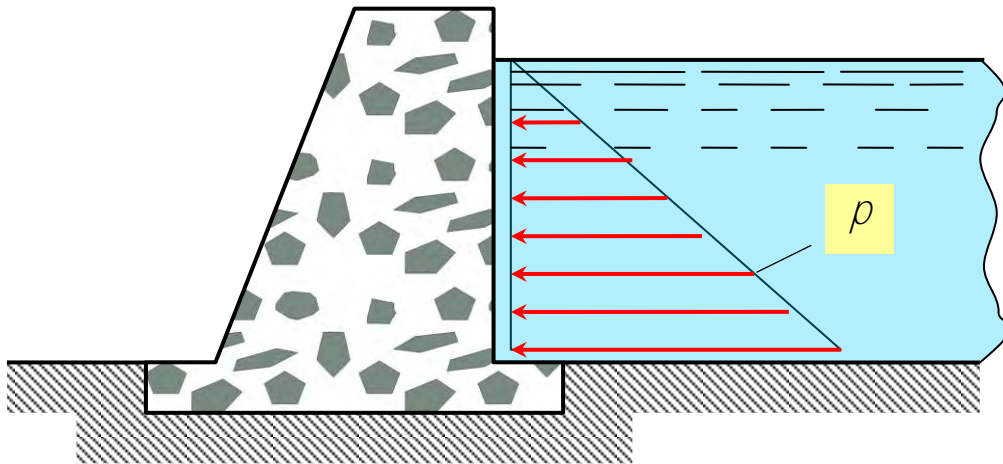


Рис. 2. Давление воды на дамбу

**Поверхностные силы** – это силы, возникающие в результате взаимодействия двух тел:  
 твердого и твердого;  
 твердого и жидкого;  
 твердого и газообразного  
 и приложены к их поверхностям.

Примеры поверхностных сил приведены на рисунке 3.

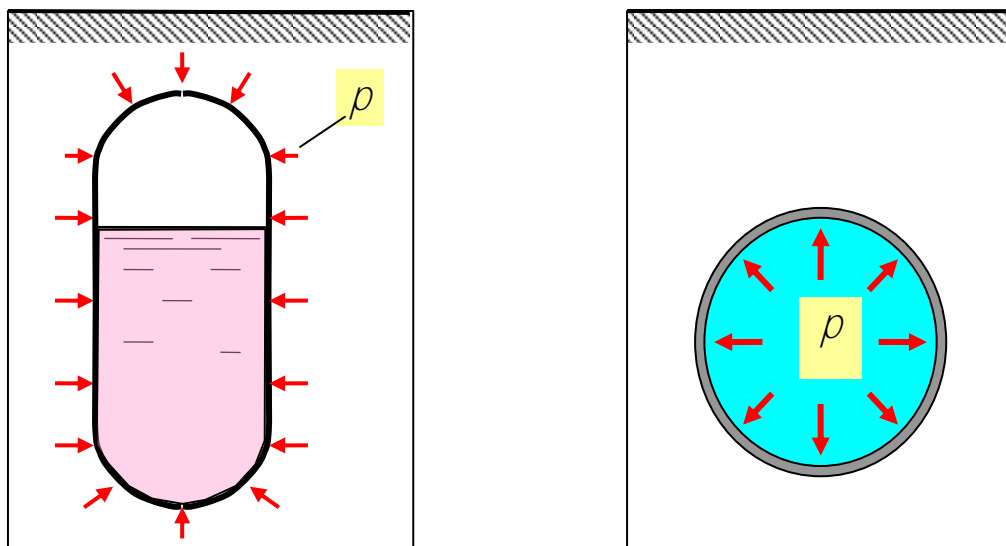


Рис. 3. Давление жидкости на стенки безнапорного трубопровода и давление газа на стенки трубы

**Объемные силы** – это силы, возникающие в результате взаимодействия полей (гравитационного (собственный вес), силы инерции, центробежные силы, электромагнитные силы и пр.). Эти силы распределены по всему или по части объема тела. Размерность таких нагрузок –  $\text{кН/м}^3$ .

**П р и м е р ы.** Действие сил на якорь электродвигателя, вес водонапорной башни. силы инерции при начале движения автомобиля и пр.

**Постоянные нагрузки** – это нагрузки, действующие на сооружение на протяжении всего срока службы самого сооружения.

**П р и м е р.** Собственный вес сооружения.

**Временные нагрузки** – это нагрузки, действующие ограниченный срок, меньший, чем срок службы самого сооружения.

**П р и м е р ы.** Нагрузка на кровлю от веса снега, нагрузка от давления ветра, нагрузка от технологического оборудования и др.

**Статическая нагрузка** – это нагрузка, изменяющаяся во времени настолько медленно, что ускорениями точек конструкции, а, следовательно, и силами инерции можно пренебречь.

**П р и м е р ы.** Собственный вес конструкции, нагрузка от веса снега и др.

**Динамические нагрузки** – это нагрузки, изменяющие свою величину или положение достаточно быстро. Поэтому силами инерции пренебречь нельзя, так как они соизмеримы с силами, вызванными статическими нагрузками.

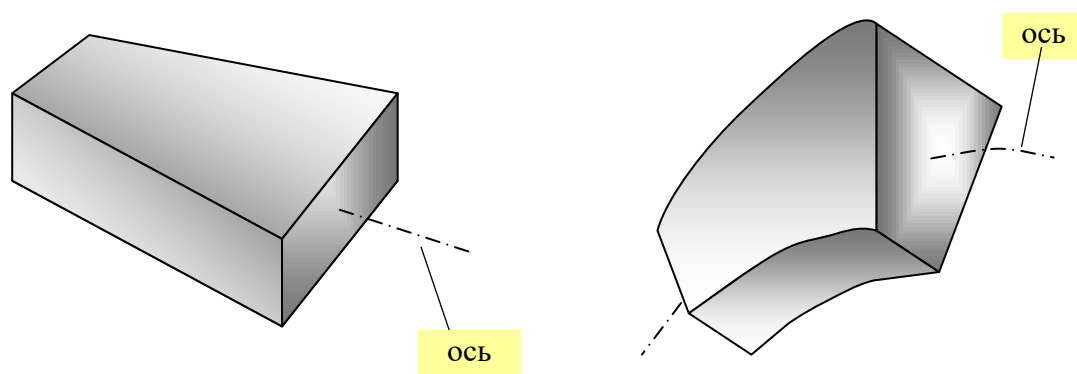
**П р и м е р ы.** Движение мостового крана, действие кузнечного молота на заготовку, забивка свай и др.

Вид нагрузки устанавливается исходя из субъективных предпосылок конструктора или в соответствии с нормами проектирования при выборе расчетной схемы строительной конструкции.

#### 1.1.4 Типы элементов строительных сооружений

Элементы сооружений по своей геометрической форме делятся на четыре типа – брус, пластина, оболочка и массив.

**Брус** – тело, у которого два основных размера малы по сравнению с третьим размером (рис.4).

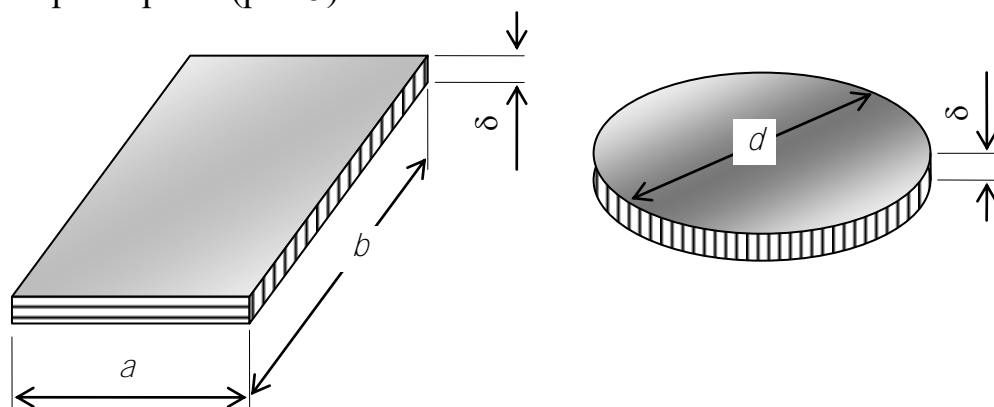


**Рис. 4.** Примеры прямолинейного и криволинейного брусев

**Осью бруса** называется линия, соединяющая центры тяжести всех поперечных сечений. Брус с прямолинейной осью называется **стержнем**.

**П р и м е р ы.** Балки, стойки рам, колонны.

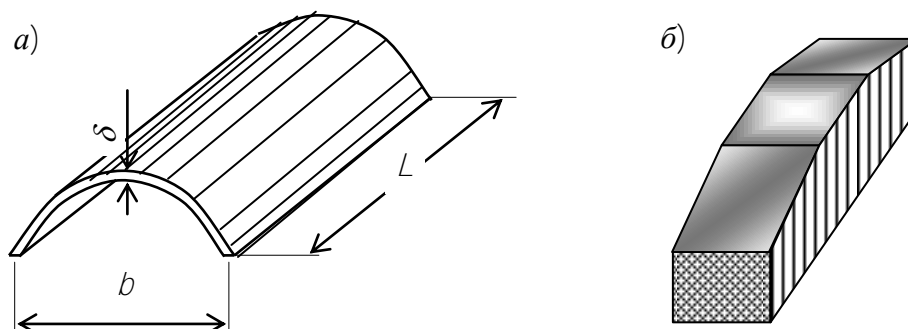
**Пластина (пластинка)** – это тело, ограниченное двумя плоскими поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с прочими размерами (рис.5).



**Рис. 5. Примеры прямоугольной и круглой пластин**

Пластины различаются по своей форме – прямоугольные, треугольные, круглые, эллиптические и др.

**Оболочка** – это тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с прочими (генеральными) размерами (рис.6, а).



**Рис. 6. Примеры цилиндрической оболочки (а) и фундаментной подушки (б)**

Оболочки различаются своей формой кривизны – цилиндрические, сферические, гауссовой кривизны и др.

**Массив** – это тело, у которого все три основные размеры одного порядка (рис.6, б).

### 1.1.5 Основные гипотезы (допущения) в сопротивлении материалов

Как и во всякой науке в сопротивлении материалов реальная природа рассматривается односторонне и идеализируется. Это достигается введением понятий, принятием гипотез и допущений.

1. Материал тела имеет **сплошное (непрерывное) строения**, то есть не принимается во внимание дискретное, атомарное строение вещества.

2. Материал элемента конструкции **однороден**, то есть во всех его точках механические свойства одинаковые.

3. Материал тела **изотропен**, то есть в любой его точке по всем направлениям механические свойства совершенно одинаковые. У **анизотропных тел**, например, у древесины механические свойства по разным направлениям разные. Под механическими свойствами следует понимать прочность или жесткость. Отметим, что прочность древесины вдоль волокон значительно (в два три раза) больше чем прочность поперек волокон (рис.7).

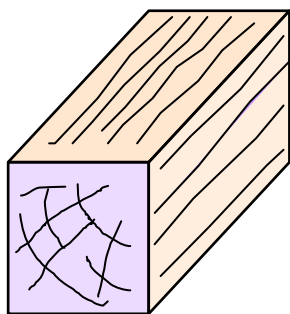


Рис. 7. Пример анизотропного материала (древесины)

4. В твердом теле до приложения нагрузки внутренние **начальные силы отсутствуют**. В действительности в элементах строительных конструкций или сооружения всегда имеются начальные внутренние силы, которые могут быть вызваны;

- неравномерным остыванием;
- неравномерной усадкой;
- неравномерным высушиванием;
- механической обработкой.

5. **Принцип суперпозиций** или **принцип независимости действия сил**. Результат действия на тело системы сил равен сумме результатов действия тех же сил, прикладываемых к телу последовательно и в любом порядке. Принцип независимости действия сил справедлив при соблюдении двух условий:

- а) **геометрической линейности** – перемещения точек механической системы, вызванные деформацией, малы по сравнению с ее размерами;
- б) **физической линейности** – перемещения, являющиеся результатом деформации системы, линейно зависят от нагрузки (то есть, если выполняется закон Гука).

6. **Принцип Сен-Венана** – в точках тела, достаточно далеко удаленных от места приложения нагрузки, величина внутренней силы весьма мало зависит от способа приложения нагрузки. Апримером может служить разрезание стального листа ножницами (рис.8).

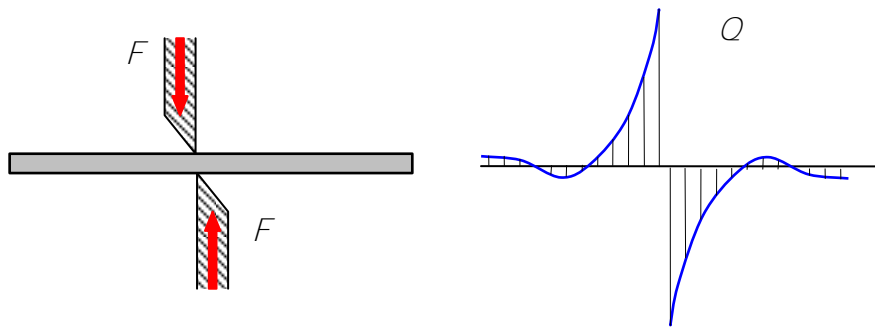


Рис. 8. Иллюстрация к принципу Сен-Венана (резание стального листа ножницами)

### 1.1.6. Понятие о деформациях

Изменение формы или размеров тела, вызванное нагрузкой, изменением температуры или другими воздействиями называется **деформацией**.

Деформация делится на два вида – линейные и угловые.

Изменение линейных размеров тела называется **линейной деформацией**. Линейную деформацию тела разделяют на абсолютную  $\Delta S$  и относительную линейную  $\epsilon$  деформации.

**Относительная линейная деформация в точке тела равна пределу отношения абсолютной деформации отрезка волокна к длине отрезка, если длина отрезка стремится к нулю**

$$\epsilon = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{S}, \quad (1)$$

где  $S$  – длина отрезка волокна;  $\Delta S$  – деформация (удлинение или укорочение) отрезка волокна (рис.9).

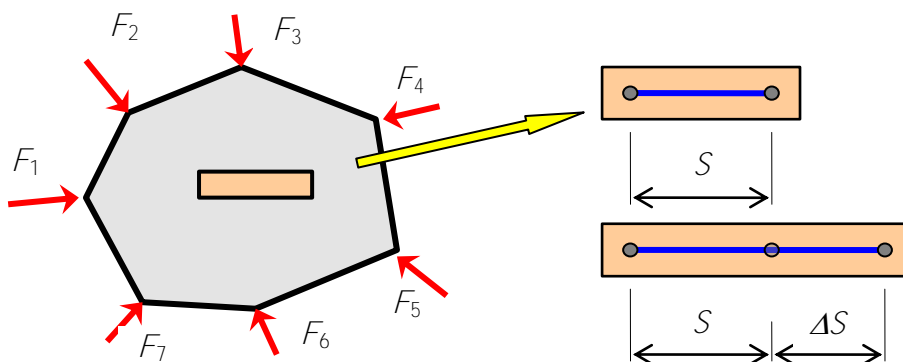


Рис. 9. Линейная деформация волокна тела

Изменение угловых размеров тела (рис.10) называется **угловой деформацией**.

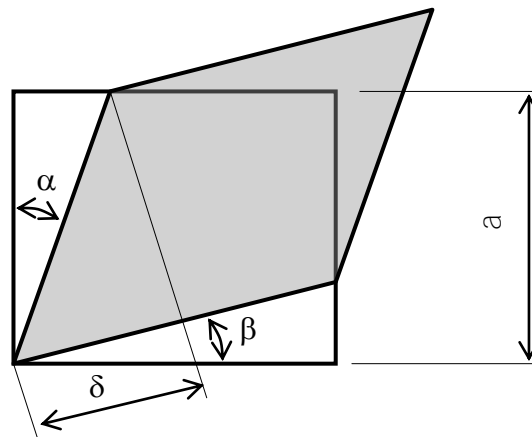


Рис. 10. Угловая деформация элемента

$$\gamma = \frac{\delta}{a} = \alpha + \beta, \quad (2)$$

где  $\delta$  – абсолютная угловая деформация (обычно не употребляется в расчетах);

$\gamma$  – относительная угловая деформация (угол сдвига), величина безразмерная.

### 1.1.7. Основные свойства твердого деформируемого тела

Все материалы в сопротивлении материалов характеризуются тремя основными свойствами – упругость, пластичность и ползучесть.

Деформации, полностью исчезающие после разгрузки тела, называются **упругими деформациями**.

Свойства тела восстанавливать после разгрузки свою первоначальную форму и размеры называется **упругостью**.

Деформации, сохраняемые телом после снятия нагрузки, называются **остаточными (пластическими) деформациями**.

Свойство материала давать остаточные деформации называется **пластичностью материала**.

Для некоторых материалов при определенных условиях наблюдаются деформации во времени. Свойства таких материалов изучается **теорией ползучести**. В теории ползучести выделяют два понятия: **релаксация** и **ползучесть**.

Явление увеличения деформаций во времени при постоянной нагрузке называется **ползучестью**.

Явление уменьшения напряжений во времени при постоянной деформации называется **релаксацией**.

Пластичность материала проявляется обычно при больших механических напряжениях, а ползучесть – при большой температуре.

### 1.1.8. Внешние и внутренние силы. Метод сечений

В сопротивлении материалов различают внешние и внутренние силы.

**Внешние силы** – это силы взаимодействия между отдельными телами.

**Внутренние силы** – это силы взаимодействия между частями одного и того же тела.

Внутренние силы передаются через межатомарные или межмолекулярные связи, которые всегда присутствуют в твердых телах.

Разрушение тел происходит за счет внутренних сил. Поэтому одной из главных задач сопротивления материалов является определение внутренних сил в конструкциях.

Для определения внутренних сил используется метод сечений. Суть метода сечений состоит в следующем.

1) Тело мысленно разделяется на две части в том месте, где требуется определить внутренние силы.

2) Одна часть вместе с приложенными к ней внешними силами, отбрасывается, а к оставшейся части, кроме приложенных к ней внешних сил, прикладываются внутренние силы, то есть силы действия отброшенной части на оставшуюся.

3) Считается, что оставшаяся часть вместе с приложенными к ней внутренними и внешними силами находится в состоянии равновесия. Используя уравнения равновесия, определяют внутренние силы.

4) По законам теоретической механики система внешних сил, приложенных к рассматриваемой части, приводится к главному вектору сил  $P$  и главному вектору момента  $M$ . Так как рассмотренная часть находится в состоянии равновесия, то главные вектора  $P$  и  $M$  внешних сил должны быть равны главным векторам силы и момента внутренних сил.

5) Главные вектора внутренних сил можно разложить на составляющие

$$\vec{P} \rightarrow N, Q_x, Q_y; \quad \vec{M} \rightarrow M_x, M_y, T. \quad (3)$$

6) Для определения составляющих внутренних сил используются уравнения равновесия рассматриваемой части стержня (4).

$$\begin{aligned} \sum X &= 0, \text{ определяется составляющая } Q_x; \\ \sum Y &= 0, \text{ определяется составляющая } Q_y; \\ \sum Z &= 0, \text{ определяется составляющая } N; \\ \sum M_x &= 0, \text{ определяется составляющая } M_x; \\ \sum M_y &= 0, \text{ определяется составляющая } M_y; \\ \sum M_z &= 0, \text{ определяется составляющая } T. \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что каждое уравнение содержит только одну составляющую внутренних сил, Поэтому для их определения даже не приходится решать систему уравнений.

Дадим определения.

**Продольная сила** ( $N$ , кН) – это внутренняя сила численно равная сумме проекций всех внешних сил, приложенных по одну сторону от сечения, на продольную ось стержня.

**Поперечная сила** ( $Q_x$  или  $Q_y$ , кН) – это внутренняя сила, численно равная сумме проекций всех внешних сил, приложенных по одну сторону от сечения, на соответствующую поперечную ось  $X$  или  $Y$ .

**Крутящий момент** ( $T$ , кНм) – это внутренняя сила, численно равная сумме моментов всех внешних сил, приложенных по одну сторону от сечения, относительно продольной оси стержня.

**Изгибающий момент** ( $M_x$  или  $M_y$ , кНм) – это внутренняя сила, численно равная сумме моментов всех внешних сил, приложенных по одну сторону от сечения, относительно соответствующей поперечной оси  $X$  или  $Y$ , проходящей через центр тяжести этого сечения.

### 1.1.9. Виды простых деформаций (сопротивлений) бруса

В сопротивлении материалов различают четыре вида простых сопротивлений бруса.

1. **Центральное растяжение (сжатие)** – вид сопротивления, при котором во всех поперечных сечениях участка стержня появляются только продольные силы  $N$ . Пример центрально сжатой колонны приведен на рисунке (рис. 11, а).

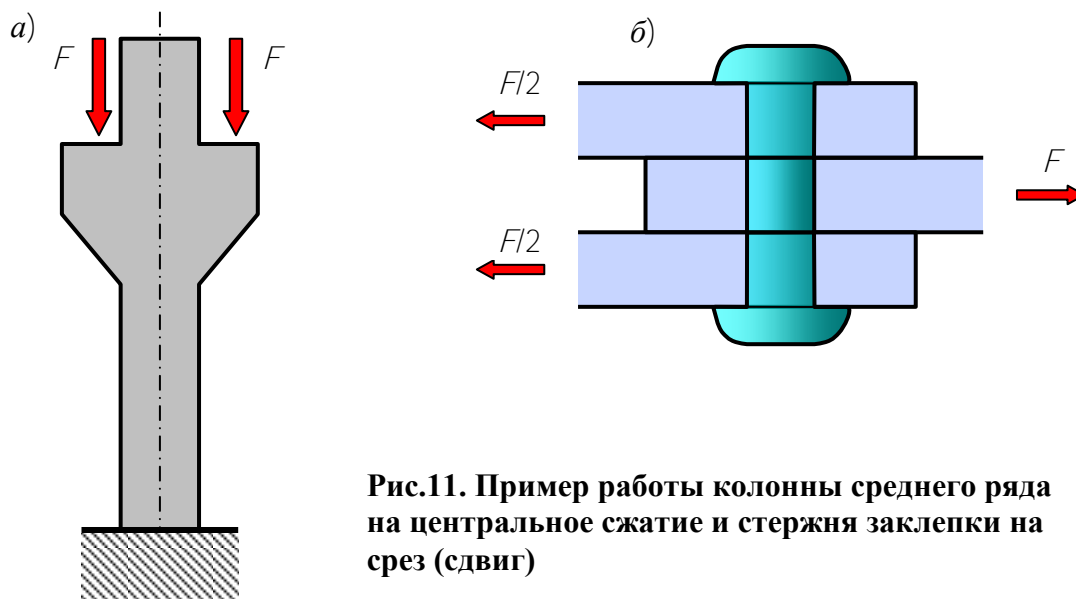


Рис.11. Пример работы колонны среднего ряда на центральное сжатие и стержня заклепки на срез (сдвиг)



2. **Сдвиг (срез)** – вид сопротивления, при котором в поперечных сечениях появляются только поперечные силы  $Q_x$  или  $Q_y$ . Действие сдвига испытывают стержни заклепки (рис. 11, б)

3. **Кручение** – вид сопротивления, при котором во всех поперечных сечениях участка стержня появляются только крутящие моменты  $T$ .

П р и м е р ы. Работа вала машины (механизма), иногда элементов пространственных конструкций. Чистый сдвиг можно также получить и при кручении тонкостенной трубки.

4. **Чистый изгиб** – это такой вид сопротивления, при котором во всех поперечных сечениях участка стержня появляются только изгибающие моменты  $M_x$  или  $M_y$ .

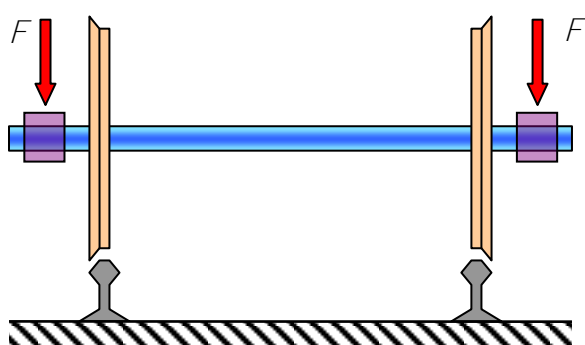
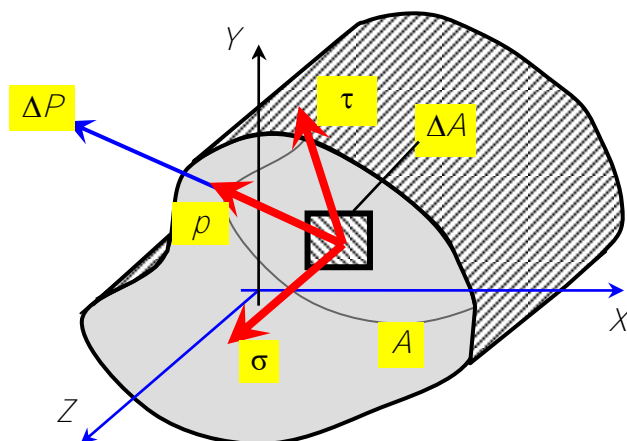


Рис.12. Средняя часть оси железнодорожного вагона испытывает чистый изгиб

#### 1.1.10. Понятие о напряжениях

Внутренние силы  $N$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  и  $T$  в поперечном сечении стержня в действительности не являются сосредоточенными силами. Они распределены по площади сечения по некоторым законам. Определение этих законов является одной из основных задач сопротивления материалов.

Распределение внутренних сил характеризуется их интенсивностью, которая измеряется напряжениями (механическими напряжениями). Введем понятие о напряжениях. Рассмотрим поперечное сечение стержня и напряжения в его точке.



**Рис.13. Полное, нормальное и касательное напряжения в точке**

Около произвольной точки выделим малую площадку  $\Delta A$ , через которую передается малая внутренняя сила  $\Delta P$  (рис.13).

**Полным напряжением**  $\rho$  (МПа) в точке называется величина, характеризующая интенсивность внутренней силы, равная пределу отношения внутренней силы  $\Delta P$ , передающейся через площадку  $\Delta A$ , если площадь  $\Delta A$  площадки стремится к нулю

$$\rho = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A}. \quad (5)$$

В расчетах полное напряжение редко используется. Обычно используются нормальное и касательное напряжения.

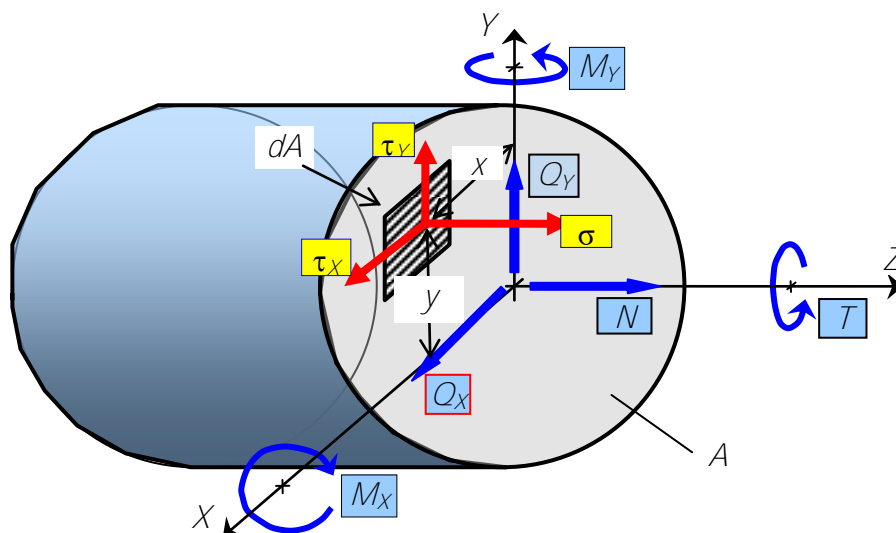
**Нормальным напряжением**  $\sigma$  (МПа) в точке называется величина, равная проекции полного напряжения на нормаль рассматриваемой площадки. Если нормальное напряжение вызывает сжатие, то оно считается отрицательным, если вызывает растяжение – принимается положительным.

**Касательным напряжением**  $\tau$  (МПа) в точке называется величина, равная проекции полного напряжения на плоскость рассматриваемой площадки. Правило расстановки знаков для касательного напряжения будет рассмотрено позже.

Такое разложение полного напряжения на нормальное и касательное сложилось исторически и вполне обосновано. опыты показывают, что материалы по-разному сопротивляются растяжению (сжатию) и сдвигу.

#### 1.1.11. Связь напряжений и внутренних сил

Для исследований характера распределения внутренних сил по площади сечения установим связь между внутренними силами и напряжениями. Полагаем, что распределение напряжений в пределах сечения выражается непрерывными функциями (рис.14).



**Рис.14. Внутренние силы, передающиеся через сечение, и напряжения в произвольной точке, передающиеся через площадку**

Элементарная продольная сила, передающаяся через площадку  $dA$  равна

$$dN = \sigma dA. \quad (6)$$

Предполагается, что в пределах элементарной площадки из-за ее малости напряжения  $\sigma$  распределены равномерно. Проинтегрируем левую и правую части записанного выражения (6) и получим

$$N = \int_A \sigma dA. \quad (7)$$

Элементарный момент относительно оси  $X$ , вызванный элементарной силой  $\sigma dA$ , передающейся через площадку  $dA$ , равен

$$dM_x = (\sigma \cdot dA) \cdot y = \sigma \cdot y \cdot dA. \quad (8)$$

Проинтегрируем левую и правую части выражения (8) и получим

$$M_x = \int_A \sigma y dA. \quad (9)$$

Остальные четыре связи напряжений и внутренних сил рекомендуется получить самостоятельно.

## 1.2 Центральное растяжение (сжатие)

### 1.2.1 Общие понятия. Определение продольных сил при центральном растяжении (сжатии)

Центральное растяжение (сжатие) появляется в тросе при буксировке или подъеме груза, в колоннах промышленных и гражданских зданий и пр.

Для удобства условимся всегда продольную ось обозначать буквой  $Z$ , а поперечные оси, то есть оси расположенные в плоскости поперечного сечения, буквами  $X$  и  $Y$ .

**Центральное растяжение (сжатие)** – это такой вид сопротивления, при котором в поперечных сечениях стержня появляются только продольные силы.

Продольная сила принимается положительной, если она вызывает растяжение материала или отрицательной – если сжатие.

В тех случаях, когда знак продольной силы неизвестен заранее, ее следует принимать положительной. В результате расчета знак силы уточняется.

Для вычисления продольной силы используется метод сечений.

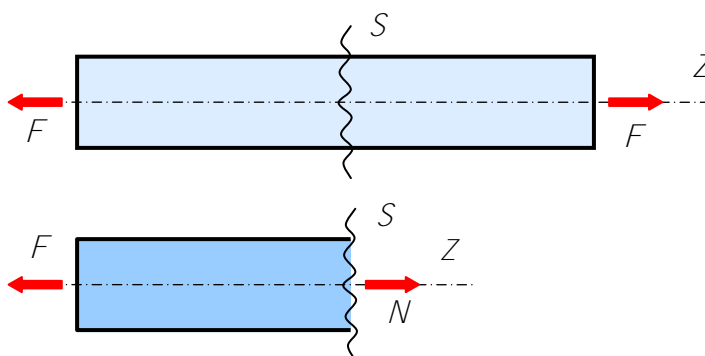


Рис.15. Определение продольной силы методом сечений

Разделим стержень, показанный на рисунке 15, поперечным сечением  $S$  на две части – левую и правую. Отбросим правую часть и рассмотрим левую часть с левой силой  $F$  и продольной силой  $N$ , которую прикладываем так, чтобы она растягивала материал оставшейся левой части стержня, то есть была положительной. Составим уравнение равновесия оставленной левой части стержня, которое будет содержать силу  $F$  и продольную силу  $N$

$$\sum Z=0, \quad -F+N=0, \quad N=F. \quad (10)$$

Решение уравнения (10) дает положительное значение продольной силы  $N$ , что подтверждает предположение о том, что продольная сила растягивающая.

В последствие будем полагать, что нагрузка, какая бы она не была, всегда положительная, а ее действие определяется направлением.

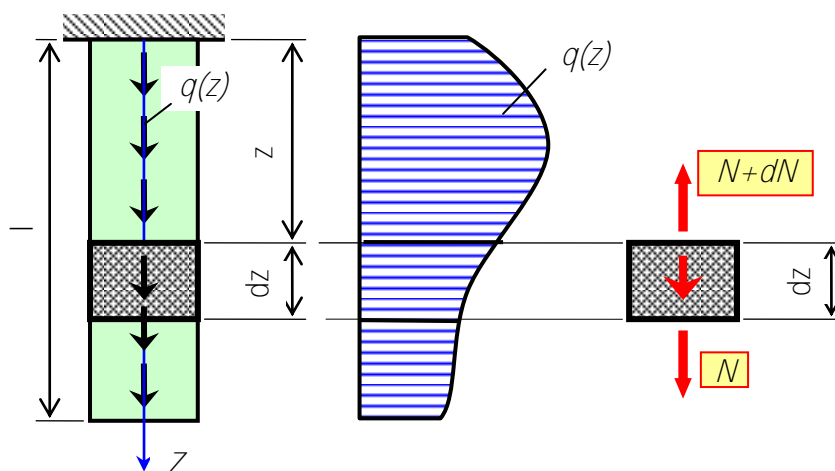
**Эпюрой продольной силы  $N$**  называется график, каждая ордината которого равна значению продольной силы в данном сечении. Эпюры и не только продольных сил отличаются от других графиков тем, что они построены по специальным правилам.

Основные правила построения эпюр:

- 1) ординаты откладываются перпендикулярно к линии отсчета;
- 2) эпюры всегда строятся в удобном масштабе и так, чтобы они легко читались, то есть без наложений и без затенения самой конструкции;
- 3) значения подписываются без указания знака и размерностей;
- 4) знаки проставляются на знаковых полях эпюры обычно в кружочках;
- 5) вся эпюра подписывается наименованием той величины, для которой она построена, и там же указывается размерность этой величины.

### 1.2.2 Дифференциальная зависимость между продольной силой и нагрузкой

Пусть дан стержень (рис.16), нагруженный распределенной по некоторому закону нагрузкой  $q(z)$ .



**Рис.16. Равновесие элементарного участка стержня, нагруженного распределенной нагрузкой**

Рассмотрим элементарный участок стержня длиной  $dz$ . Учитывая условие равновесия

$$\sum Z=0; \quad N-(N+dN)+qdz=0, \quad (11)$$

получим

$$q = \frac{dN}{dz}; \quad \text{или} \quad N = \int_z^l q dz. \quad (12)$$

Таким образом, производная от продольной силы  $N$  равна интенсивности распределенной нагрузки  $q$ . Полученная зависимость

используется для проверки эпюры  $N$ , а так же для вывода некоторых формул.

### 1.2.3. Напряжения в поперечном сечении бруса при центральном растяжении (сжатии)

Рассмотрим длинный стержень, испытывающий центральное растяжение, (рис.17).

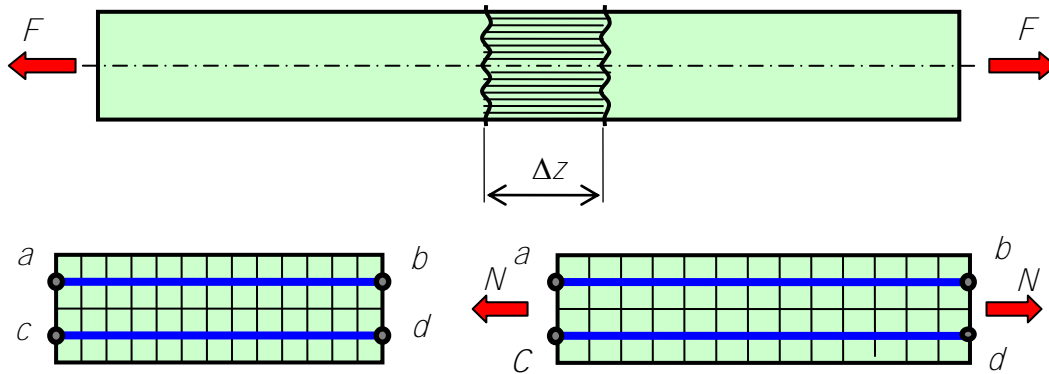


Рис.17. Деформации волокон участка стержня при центральном растяжении длинного стержня

Опыты показывают, что сечение  $b-d$  в результате деформации выделенного участка стержня переместиться параллельно само себе, оставаясь при этом плоским. Это означает, что волокна  $a-b$  и  $c-d$  удлиняются одинаково. Отсюда следует утверждение.

**Гипотеза Бернулли** (гипотеза плоских сечений). *Поперечные сечения плоские до деформации остаются плоскими и после деформации.*

На основании гипотезы Бернулли все продольные волокна стержня деформируются одинаково. Следовательно, напряжения в них также одинаковые, а значит напряжения и по всей площади поперечного сечения распределены равномерно.

$$\sigma = \text{const.} \quad (13)$$

Используя зависимость (7) между напряжениями  $\sigma$  и продольной силой  $N$ , получим

$$N = \int_A \sigma dA = \sigma \int_A dA = \sigma A \quad (14)$$

или

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad N = \sigma A. \quad (15)$$

Здесь  $N$  – продольная сила в поперечном сечении стержня;  $A$  – площадь поперечного сечения.

### 1.2.4. Напряжения в наклонном сечении стержня при центральном растяжении (сжатии).

Рассмотрим длинный центрально растянутый стержень. В средней части стержня проведем сечение под углом  $\alpha$  к поперечному сечению

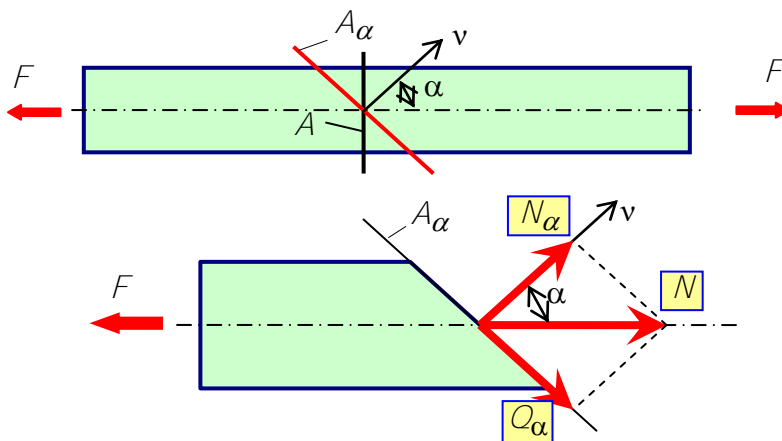


Рис.18. Внутренние силы в наклонном сечении центрально растянутого стержня

На рисунке 18 отмечены  $A$  – площадь поперечного сечения;  $A_\alpha$  – площадь наклонного сечения;  $\alpha$  – угол наклона сечения;  $N$  – продольная сила в растянутом стержне;  $N_\alpha$  – нормальная сила в наклонном сечении;  $Q_\alpha$  – поперечная (сдвигающая) сила в наклонном сечении.

$$A_\alpha = A / \cos(\alpha); \quad N_\alpha = N \cdot \cos(\alpha); \quad Q_\alpha = N \cdot \sin(\alpha). \quad (16)$$

Отсюда выразим нормальное напряжение

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{N_\alpha}{A_\alpha} = \frac{N \cdot \cos(\alpha)}{A / \cos(\alpha)} = \frac{N}{A} \cdot \cos^2(\alpha) = \sigma \cdot \cos^2(\alpha); \\ \tau_\alpha &= \frac{Q_\alpha}{A_\alpha} = \frac{N \cdot \sin(\alpha)}{A / \cos(\alpha)} = \frac{N}{A} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin(2\alpha). \end{aligned} \quad (17)$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma \cdot \cos^2 \alpha; \\ \tau_\alpha &= \sigma / 2 \cdot \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь  $\sigma$  – нормальное напряжение в поперечном сечении стержня. Проведем анализ напряженного состояния стержня:

при $\alpha=0$ ,	$\sigma_\alpha=\sigma$ ,	$\tau_\alpha=0$ ;
при $\alpha=45^\circ$ ,	$\sigma_\alpha=\sigma/2$ ,	$\tau_\alpha=\sigma/2$ ;
при $\alpha=90^\circ$ ,	$\sigma_\alpha=0$ ,	$\tau_\alpha=0$ .

Очевидно, что максимальные нормальные напряжения появляются при  $\alpha=0^\circ$ , то есть в поперечном сечении стержня. Максимальные касательные напряжения появляются в наклонном под углом  $45^\circ$  сечении и равны половине нормального напряжения.

### 1.2.5 Продольные и поперечные деформации центрально растянутого (сжатого) бруса. Закон Гука

Рассмотрим длинный стержень, подвергнутый центральному растяжению (рис.19)

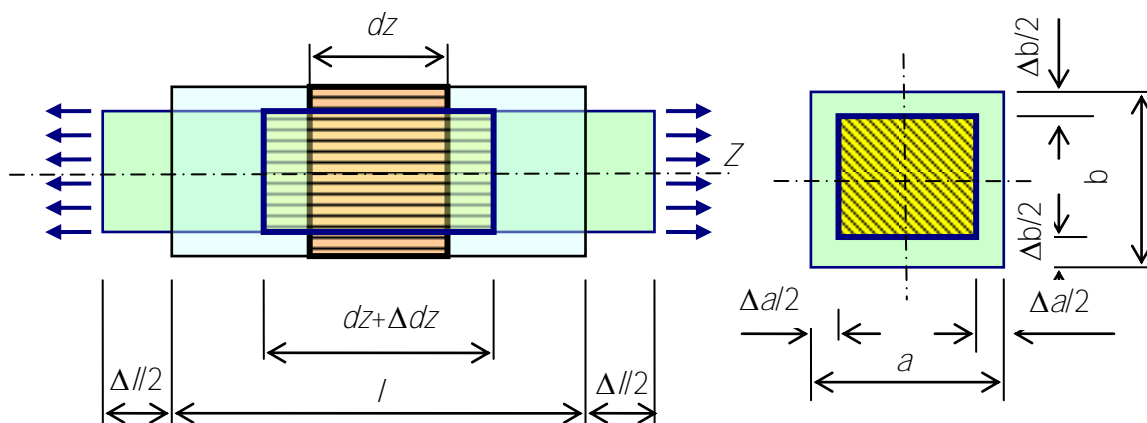


Рис.19. Продольные и поперечные деформации центрально растянутого стержня

Согласно определению относительная продольная деформация волокна равна

$$\varepsilon = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{S}. \quad (19)$$

Здесь длина волокна  $S$  равна длине элементарного участка  $dz$ . Поэтому

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz}. \quad (20)$$

Предел не записывается, потому что дифференциал  $dz$  и так стремится к нулю. Из полученной формулы следует

$$\Delta dz = \varepsilon \cdot dz. \quad (21)$$

Согласно гипотезе Бернулли все волокна находятся в одинаковых условиях. Кроме того, будем полагать, что по всей своей длине волокна



деформируются одинаково, так как рассматривается длинный стержень. Поэтому  $\varepsilon = const$ .

Проинтегрируем (то есть просуммируем) деформации по длине волокна и получим

$$\Delta l = \int_0^l \Delta dz = \int_0^l \varepsilon dz = \varepsilon \int_0^l dz = \varepsilon \cdot l. \quad (22)$$

Окончательно имеем

$$\Delta l = \varepsilon l \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (23)$$

Аналогичные рассуждения для поперечных деформаций приводят к выражениям

$$\varepsilon'_a = \frac{\Delta a}{a} \quad \text{и} \quad \varepsilon'_b = \frac{\Delta b}{b}. \quad (24)$$

Если материал изотропен, то

$$\varepsilon'_a = \varepsilon'_b = \varepsilon'. \quad (25)$$

*Отношение относительной поперечной деформации к относительной продольной деформации, взятое по абсолютной величине называется коэффициентом поперечной деформации или коэффициентом Пуассона.*

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (26)$$

Здесь  $\varepsilon'$  – относительная линейная поперечная деформация, то есть деформация по направлению перпендикулярному к направлению действия силы или нормального напряжения;

$\varepsilon$  – относительная линейная продольная деформация, то есть деформация по направлению действия силы или нормального напряжения.

Коэффициент Пуассона  $\nu$  – величина безразмерная и теоретически для изотропных материалов может принимать значения

$$0 \leq \nu \leq 0,5. \quad (27)$$

Если известен коэффициент Пуассона  $\nu$ , то, зная продольную деформацию, всегда можно найти поперечную деформацию

$$\varepsilon' = -\nu \varepsilon. \quad (28)$$

Продольная и поперечная деформации всегда имеют разные знаки. Коэффициент Пуассона характеризует способность материала давать поперечные деформации.

С п р а в к а.

Чугун серый	$\nu = 0,23 \div 0,27$	Бетон	$\nu = 0,16 \div 0,18$
Углеродистая сталь	$\nu = 0,24 \div 0,28$	Пробка	$\nu = 0,01 \approx 0,0$
Алюминий катанный	$\nu = 0,32 \div 0,36$	Резина	$\nu = 0,49 \approx 0,05$

**Закон Гука.** Для некоторых материалов экспериментально установлено, что до некоторого предела деформации изменяются упруго и прямо пропорционально напряжениям.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}. \quad (29)$$

Здесь  $E$  – модуль упругости первого рода или просто модуль упругости, измеряется в Па, МПа, ГПа.

С п р а в к а.

Чугун серый	$E = 113 \div 157$ ГПа
Углеродистая сталь	$E = 196 \div 206$ ГПа
Алюминий катанный	$E = 68$ ГПа
Бетон при пределе прочности 20 Мпа	$E = 17,8 \div 22,8$ ГПа
Древесина вдоль волокна	$E = 10 \div 12$ ГПа

Модуль упругости характеризует жесткость материала, то есть является мерой сопротивления материала продольному деформированию.

Физические коэффициенты  $E$  и  $\nu$  могут быть найдены только испытанием материала.

Деформация  $\varepsilon$  и  $\sigma$  – относительные величины

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}; \quad \sigma = \frac{N}{A}. \quad (30)$$

Подставим их в закон Гука (29)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA}. \quad (31)$$

Отсюда имеем закон Гука при центральном растяжении (сжатии) в абсолютных величинах

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}, \quad (32)$$

где  $N$  – продольная сила на рассматриваемом участке стержня;

$l$  – длина участка стержня;

$E$  – модуль упругости материала стержня;

$A$  – площадь поперечного сечения на рассматриваемом участке стержня.

Полученная формула справедлива, если стержень на рассматриваемом участке постоянного сечения и продольная сила во всех его поперечных сечениях постоянная.

Величина  $EA$  называется жесткостью стержня при центральном растяжении (сжатии).

### 1.2.6 Перемещения сечений бруса

Перемещение (смещение) сечения бруса равно деформации части бруса, расположенной между защемлением (опорой) и рассматриваемым сечением.

Перемещения, совпадающие с положительным направлением продольной оси  $Z$ , считаются положительными.

Если начало координат всегда располагать в защемлении бруса, а ось  $Z$  направлять в сторону самого бруса, то знак перемещения будет совпадать со знаком суммы деформаций участков стержня, расположенных между защемлением и рассматриваемым сечением.

### 1.2.7 Особенности расчета плоских стержневых систем

Ограничимся рассмотрением механических систем, содержащих хотя бы один абсолютно жесткий (очень жесткий) и шарнирно прикрепленный к неподвижной опоре стержень (элемент). Это ограничение упрощает ее расчет. Кроме того, также для упрощения расчета сделаем следующие предположения:

– абсолютно жесткий стержень может только поворачиваться около неподвижного шарнира;

– все точки диска, за исключением точки в неподвижном шарнире, движутся по дугам окружностей с центром в неподвижном шарнире;

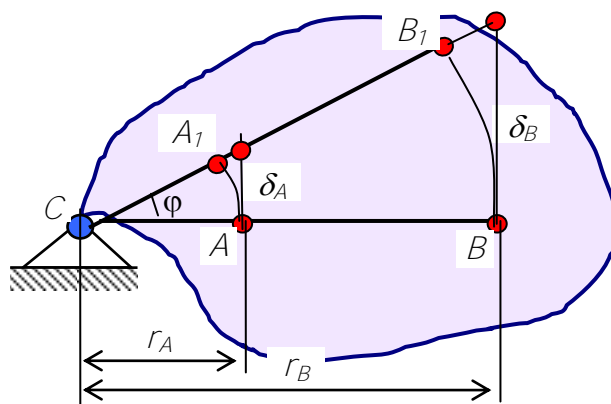
– перемещения точек диска малы по сравнению с размерами самого диска, поэтому для упрощения расчета принимаем, что точки движутся не по дугам окружностей, а по касательным к ним;

– считаем, что стержни системы деформируются по закону Гука;

– зависимости перемещений точек и радиусов, описываемых ими дуг, имеет вид

$$\frac{\delta_A}{r_A} = \frac{\delta_B}{r_B} = \dots = \frac{\delta_K}{r_K}. \quad (33)$$

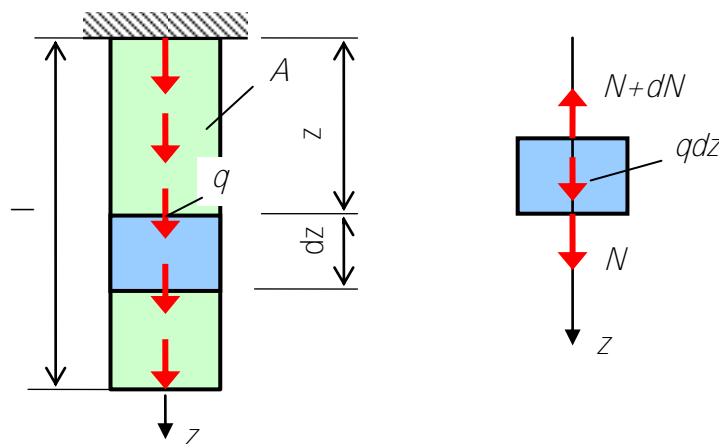
Здесь  $\delta_A, \delta_B, \delta_K, \dots$  – перемещения точек диска;  $r_A, r_B, r_K, \dots$  – радиусы дуг, по которым движутся эти точки при повороте диска около неподвижного шарнира  $C$  (рис.20).



**Рис.20.** Перемещения точек абсолютно жесткого диска при его повороте около неподвижного шарнира  $C$

### 1.2.8 Деформация стержня от собственного веса

Рассмотрим стержень, нагруженный собственным весом (рис. 21)



**Рис. 21.** Схема нагружения стержня собственным весом

Пусть  $\rho$  – плотность материала;  $g$  – ускорение свободного падения;  $A$  – площадь поперечного сечения. В этом случае интенсивность распределенной нагрузки равна весу стержня длиной в один метр

$$q = \rho \cdot g \cdot A. \quad (34)$$

Составим уравнение равновесия выделенного элементарного участка стержня

$$\sum Z = -N - dN + qdz + N = 0. \quad (35)$$

Отсюда имеем

$$dN=qdz. \quad (36)$$

Найдем продольную силу в выделенном сечении стержня. Эта продольная сила создается весом части стержня, расположенной ниже выделенного сечения. Для этого проинтегрируем левую и правую часть уравнения (36) на отрезке от  $l$  до  $z$ .

$$N=\int_z^l dN=\int_z^l qdz=qz\Big|_z^l=ql-qz=q(l-q)=\rho gA(l-z). \quad (37)$$

Окончательно имеем

$$N(z)=\rho gA(l-z). \quad (38)$$

Найдем нормальные напряжения, вызванные собственным весом

$$\sigma(z)=\frac{N}{A}=\frac{\rho gA(l-z)}{A}=\rho g(l-z). \quad (39)$$

Имеем

$$\sigma(z)=\rho g(l-z). \quad (40)$$

Найдем деформации стержня от собственного веса. Вначале выразим относительную линейную деформацию

$$\varepsilon=\frac{\Delta dz}{dz}=\frac{\sigma}{E}=\frac{\rho g(l-z)}{E}. \quad (41)$$

Отсюда получаем абсолютную деформацию элементарного участка стержня

$$\Delta dz=\frac{\rho g(l-z)}{E}. \quad (42)$$

Проинтегрируем левую и правую части выражения (42) по всей длине стержня

$$\Delta l=\int_0^l \Delta dz=\frac{\rho g}{E} \int_0^l (l-z) dz=\frac{\rho g}{E} \cdot \frac{(l-z)^2}{2} \Big|_0^l =\frac{\rho g l^2}{2E} \cdot \frac{A}{A}=\frac{\rho \cdot g \cdot (A \cdot l) \cdot l}{2EA}=\frac{G \cdot l}{2EA}. \quad (43)$$

Окончательно имеем

$$\Delta l=\frac{Gl}{2EA}. \quad (44)$$

Здесь  $G$  – вес стержня.

## 1.3 Механические характеристики материалов

Механические характеристики материалов делятся на две группы – характеристики прочности и характеристики пластичности.

### 1.3.1 Механические характеристики прочности

К механическим характеристикам прочности материалов относятся предел пропорциональности, предел текучести и предел прочности.

**Пределом пропорциональности ( $\sigma_{pr}$ , МПа)** называется механическая характеристика прочности равная максимальному напряжению, до которого еще справедлив закон Гука.

**Пределом текучести ( $\sigma_y$ , МПа)** называется механическая характеристика прочности равная напряжению, при котором происходят большие деформации без заметного изменения нагрузки.

**Пределом прочности ( $\sigma_u$ , МПа)** называется механическая характеристика прочности равная отношению максимальной нагрузки, которую способен выдержать образец, к первоначальной площади поперечного сечения.

Обратите внимание, что предел прочности – это не напряжение, а условная величина, равная отношению максимальной нагрузки и первоначальной площади поперечного сечения, но обозначается она так же, как и напряжение буквой  $\sigma_u$ . Это объясняется тем, что при испытании площадь поперечного сечения может меняться, особенно у пластичных материалов. Однако при расчете элементов строительных конструкций изменение площади их поперечных сечений не учитывается. Поэтому для определения предела прочности приходится силу относить к первоначальной площади поперечного сечения до испытания.

Иногда в качестве механических характеристик принимают касательные напряжения –  $\tau_{pr}$ ,  $\tau_y$  и  $\tau_u$ , если речь идет о сдвиге.

### 1.3.2 Механические характеристики пластичности

Обычно выделяют две основные характеристики пластичности материалов – это относительное остаточное удлинение  $\epsilon_r$  и относительное остаточное сужение  $\chi_r$ . Выражаются эти характеристики в процентах.

**Относительным остаточным удлинением ( $\epsilon_r$ , %)** называется механическая характеристика пластичности равная отношению абсолютного остаточного удлинения к длине образца до испытания, выраженная в процентах

$$\epsilon_r = \frac{l_r - l_0}{l_0} \cdot 100. \quad (45)$$

**Относительным остаточным сужением** ( $\chi_r$ , %) называется отношение разности площадей поперечного сечения до испытания и после испытания к площади сечения до испытания, выраженной в процентах.

$$\chi_r = \frac{A_0 - A_f}{A_0} \cdot 100. \quad (46)$$

## 1.4 Методы расчета на прочность

В истории развития науки о прочности можно выделить три основных метода – это метод разрушающих нагрузок, метод допускаемых напряжений и метод предельных состояний.

### 1.4.1 Метод разрушающих нагрузок

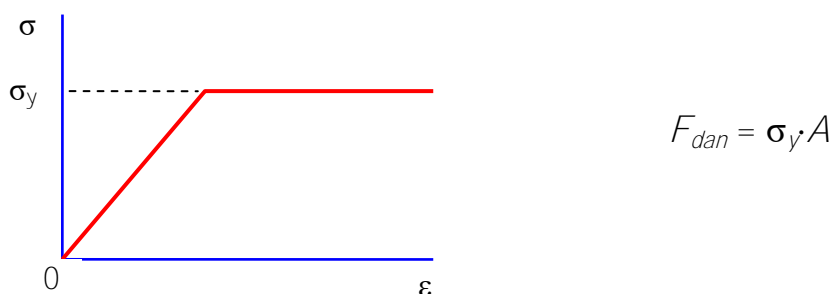
В качестве условия прочности ставится требование, чтобы наибольшая нагрузка на сооружение не превышала некоторой допускаемой нагрузки  $F_{adm}$ , которая равна разрушающей (опасной) нагрузки, деленной на коэффициент запаса прочности

$$F_{max} \leq F_{adm} = \frac{F_{dan}}{n}. \quad (47)$$

Коэффициент запаса прочности  $n$  принимается с учетом:

- разброса механических характеристик материала;
- отклонения величины нагрузок;
- качества и степени однородности материала;
- долговечности и назначения сооружения.

Разрушающая нагрузка при центральном растяжении (сжатии) для упругопластических материалов принимается с учетом диаграммы Прандтля (рис. 22).



**Рис. 22.** Диаграмма зависимости напряжений и деформаций для упругопластических материалов – диаграмма Прандтля

Разрушающая нагрузка при центральном растяжении (сжатии) для хрупких материалов вычисляется по формуле (48), а для упругопластических материалов по формуле (49)

$$F_{dan} = \sigma_u \cdot A. \quad (48)$$

$$F_{dan} = \sigma_y \cdot A. \quad (49)$$

Здесь  $A$  – площадь поперечного сечения стержня;

$\sigma_y$  – предел текучести;

$\sigma_u$  – предел прочности (временное сопротивление).

Этот метод использовался при расчете строительных конструкций, машин и механизмов до 50-х годов прошлого столетия.

### 1.4.2 Метод допускаемых напряжений

На смену методу разрушающих нагрузок пришел другой метод – метод допускаемых напряжений. В этом методе ставится требование, чтобы наибольшее напряжение не превышало допускаемого напряжения

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \leq \sigma_{adm}. \quad (50)$$

Допускаемое напряжение равно опасному напряжению, деленному на коэффициент запаса

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{dan}}{n}. \quad (51)$$

Для хрупких материалов опасным напряжением является предел прочности  $\sigma_u$ , а для пластических материалов – предел пластичности  $\sigma_y$ . Коэффициент запаса прочности принимается из тех же соображений, что и для метода разрушающих нагрузок.

### 1.4.3 Метод предельных состояний

Начиная с 60-лет прошлого столетия, в строительной отрасли при расчете конструкций перешли к более детальному методу – методу предельных состояний. Этот метод учитывает каждый фактор воздействия на сооружение в отдельности. Прежде всего следует объяснить, что такое предельное состояние.

*Предельным состоянием называется такое состояние конструкции, при котором она перестает удовлетворять заданным эксплуатационным требованиям.*



Целью этого метода является не допустить предельных состояний при эксплуатации и возведении сооружений. В нормах предельные состояния делятся на две группы:

1. По потере несущей способности.
2. По непригодности к нормальной эксплуатации вследствие недопустимых перемещений, колебаний и трещин.

Условие прочности имеет вид

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq R, \quad (52)$$

Здесь  $R$  – расчетное сопротивление материала (сопротивление, принимаемое при расчете данной конструкции).

Расчетное сопротивление равно

$$R = \frac{R^0}{K}, \quad (53)$$

где  $R^0$  – нормативное сопротивление материала, устанавливаемое нормами проектирования ( $R^0$  может быть равно пределу прочности  $\sigma_u$  или пределу текучести  $\sigma_y$ );

$K$  – коэффициент безопасности по материалу, устанавливается нормами проектирования и принимается не менее 1,0);

$N$  – расчетное усилие, определяемое при расчете сооружений

$$N = N_1^0 \cdot \eta_1 + N_2^0 \cdot \eta_2 + \dots + N_m^0 \cdot \eta_m, \quad (54)$$

где  $N_1^0, N_2^0, \dots, N_m^0$  – внутренние силы, возникающие в элементах конструкции от различных видов нормативных нагрузок – собственный вес, вес снега, давление ветра и пр.

$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$  – коэффициенты перегрузки, учитывающие случайные отклонения нагрузки от нормативных значений (вследствие изменчивости нагрузки);

$A$  – геометрическая характеристика поперечного сечения, соответствующая виду сопротивления элемента (площадь, осевой и полярный моменты сопротивления поперечного сечения).

## 1.5 Геометрические характеристики плоских сечений

### 1.5.1 Основные понятия и определения геометрических характеристик плоских сечений

Рассмотрим два случая изгиба пластины прямоугольного сечения.

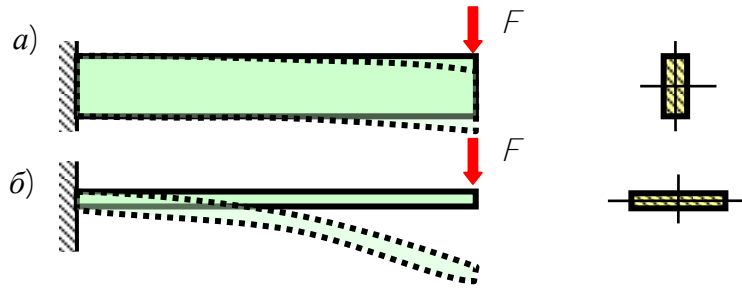


Рис. 23. Изгиб пластины в двух плоскостях

Очевидно, что прогиб в случае (рис.23, б) гораздо больше прогиба в случае (рис.23, а). При этом материал стержней и площадь поперечного сечения в обоих случаях одинаковые, а прогибы разные. Следовательно, площадь сечения не может полностью характеризовать сопротивление стержня изгибу. Поэтому при изгибе, кручении и других видах сопротивления следует использовать иные более сложные геометрические характеристики.

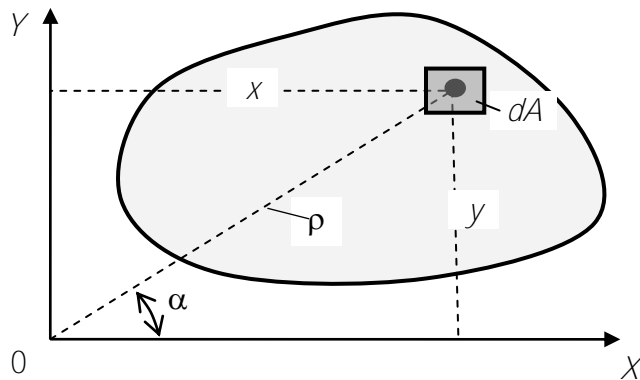


Рис. 24. Декартовые и полярные координаты точки сечения

Дадим определения некоторым геометрическим характеристикам плоских поперечных сечений.

**Статическим моментом**  $S_x$  ( $S_y$ ) **плоского сечения** относительно оси  $X$  ( $Y$ ) называется геометрическая характеристика равная интегралу

$$S_x = \int_A y dA; \quad S_y = \int_A x dA, \quad \text{см}^3. \quad (55)$$

Статический момент может быть равным нулем, меньше или больше нуля.

**Центром тяжести плоского сечения** является точка, координаты которой вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{S_y}{A}; \quad y_c = \frac{S_x}{A}. \quad (56)$$

Здесь  $X, Y$  – произвольные оси координат.

Отметим, что название этой очень важной в механике точки имеет ограниченный смысл. Ведь она (эта точка) существует и в том случае, когда тяжести нет. Но отдавая дань всей истории механики, оставим и будем пользоваться этим названием и впоследствии.

Отсюда следует, что статические моменты плоского сечения можно вычислить по формулам

$$S_x = A \cdot y_c; \quad S_y = A \cdot x_c. \quad (57)$$

Очень важным выводом является то, что если оси  $X$  и  $Y$  являются центральными, то координаты центра тяжести сечения равны нулю  $x_c=0$  и  $y_c=0$ . А это значит, что статические моменты относительно центральных осей всегда равны нулю

$$S_{x_c} = 0; \quad S_{y_c} = 0. \quad (58)$$

Центр тяжести всегда располагается на оси симметрии, если она имеется у сечения. К такому выводу можно прийти, рассуждая чисто логически. Например, пусть сечение имеет ось симметрии, и центр тяжести лежит не на оси симметрии, а где-то слева или справа от нее. Тогда по законам симметрии такая же точка должна располагаться по другую сторону от оси симметрии. Отсюда следует, что сечение имеет два центра тяжести, что невозможно по условию.

**Осевым (экваториальным) моментом инерции сечения** называется геометрическая характеристика численно равная интегралу

$$I_x = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A x^2 dA. \quad (59)$$

Отметим, что  $I_x, I_y$  – всегда величина положительная и измеряется в  $\text{см}^4, \text{м}^4$ .

**Полярным моментом инерции сечения** называется геометрическая характеристика равная интегралу

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA. \quad (60)$$

Полярный момент инерции всегда величина положительная, измеряется в  $\text{см}^4, \text{мм}^4$ .

Между полярными координатами и декартовыми координатами существует связь

$$\rho^2 = x^2 + y^2. \quad (61)$$

Подставим зависимость (61) в выражение для полярного момента инерции (60)

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) \cdot dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_x. \quad (62)$$

То есть, имеем связь полярного и осевых моментов инерции при условии, что оси  $X$  и  $Y$  взаимноперпендикулярные, а полюс расположен в точке пересечения этих осей

$$I_p = I_x + I_y. \quad (63)$$

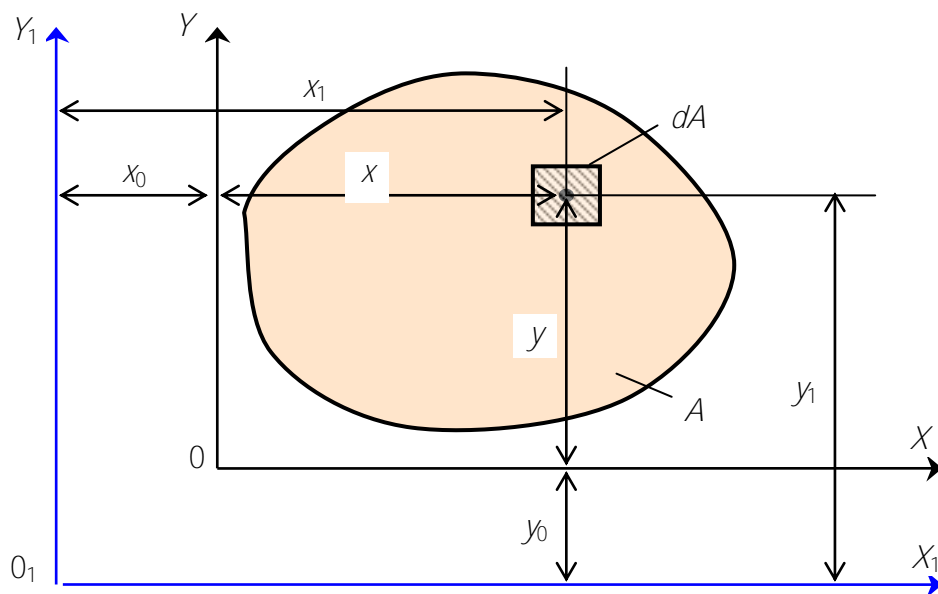
**Центробежным моментом инерции сечения** называется геометрическая характеристика равная интегралу

$$D_{xy} = \int_A xy dA. \quad (64)$$

Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным или равным нулю, а измеряется в  $\text{см}^4$ ,  $\text{м}^4$  и пр.

### 1.5.2 Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей

Пусть для сечения произвольной формы (рис.25) заданы значения  $A$ ,  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_p$ ,  $D_{xy}$ ,  $S_x$ ,  $S_y$  и известно положение центра тяжести. Требуется найти (выразить) моменты инерции этого сечения относительно осей  $X_1$ ,  $Y_1$ , проведенных параллельно осям  $X$ ,  $Y$  на расстоянии, соответственно,  $x_0$  и  $y_0$ .



**Рис. 25. Координаты точки сечения в исходной и производной системах координатных осей**

Очевидно, что между координатами выделенной точки существует связь

$$x_1 = x + x_0; \quad y_1 = y + y_0. \quad (65)$$

Найдем моменты инерции сечения относительно осей  $X_1$  и  $Y_1$

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= \int_A y_1^2 dA = \int_A (y + y_0)^2 dA = \int_A (y^2 + 2y \cdot y_0 + y_0^2) dA = \\ &= \int_A y^2 dA + 2y_0 \int_A y dA + y_0^2 \int_A dA = I_x + 2y_0 S_x + y_0^2 A. \end{aligned} \quad (66)$$

Аналогично для момента инерции  $I_{y_1}$ .

Найдем связь для центробежных моментов инерции

$$\begin{aligned} D_{x_1 y_1} &= \int_A x_1 y_1 dA = \int_A (x + x_0)(y + y_0) dA = \int_A (xy + x_0 y + y_0 x + x_0 y_0) dA = \\ &= \int_A xy dA + x_0 \int_A y dA + y_0 \int_A x dA + x_0 y_0 \int_A dA = D_{xy} + x_0 S_x + y_0 S_y + x_0 y_0 A. \end{aligned} \quad (67)$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= I_x + 2y_0 S_x + y_0^2 A; \\ I_{y_1} &= I_y + 2x_0 S_y + x_0^2 A; \\ D_{x_1 y_1} &= D_{xy} + x_0 S_x + y_0 S_y + x_0 y_0 A. \end{aligned} \quad (68)$$

Пусть оси  $X$  и  $Y$  будут центральными. Тогда статические моменты сечения относительно этих осей будут равны нулю  $S_x=0$ ,  $S_y=0$ . Зависимости

между моментами инерции (75) в этом случае упрощаются и принимают вид

$$I_{x_1} = I_{xc} + y_0^2 A; \quad I_{y_1} = I_{yc} + x_0^2 A; \quad D_{x_1 y_1} = D_{xc yc} + x_0 y_0 A. \quad (69)$$

Здесь  $x_0$  и  $y_0$  являются расстояниями между соответствующими осями координат  $X_c, X_1$  и  $Y_c, Y_1$ .

Из полученных зависимостей можно выразить моменты инерции сечения относительно центральных осей координат.

$$I_{xc} = I_{x_1} - y_0^2 A; \quad I_{yc} = I_{y_1} - x_0^2 A; \quad D_{xc yc} = D_{x_1 y_1} - x_0 y_0 A. \quad (70)$$

Очевидно, что осевой момент инерции относительно центральной оси всегда меньше осевого момента инерции относительно любой нецентральной оси параллельной центральной.

### 1.5.3 Моменты инерции сечений простых геометрических форм

Наиболее часто употребляемые формы сечений элементов конструкций являются сечения прямоугольной, треугольной и круглой форм.

Получим формулы для определения моментов инерции *сечения прямоугольной формы* (рис.26, а)

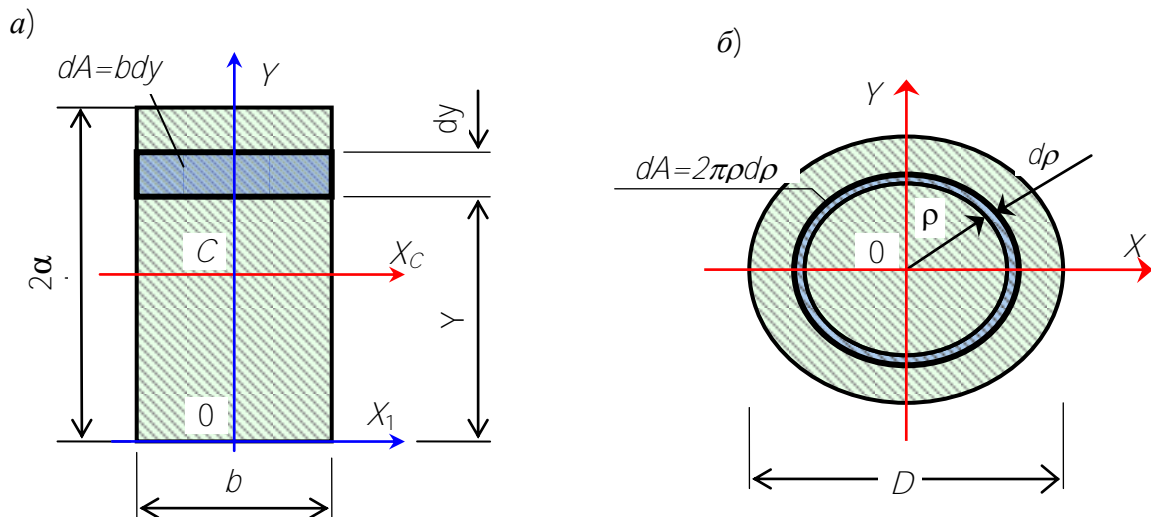


Рис. 26. Сечения прямоугольной (а) и круглой (б) форм

Согласно определению (66) выразим момент инерции относительно оси  $X_1$

$$J_{x_1} = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = b \int_0^h y^2 dy = \frac{by^3}{3} \Big|_0^h = \frac{bh^3}{3}. \quad (71)$$

Таким образом, момент инерции прямоугольного сечения относительно оси, проходящей через его основание, равен

$$J_{x1} = \frac{bh^3}{3}. \quad (72)$$

Получим формулу для момента инерции прямоугольного сечения относительно центральной оси, параллельной его основанию. Для этого используем зависимость моментов инерции относительно параллельных осей (76).

$$J_x = J_{x1} - y_0^2 A = \frac{bh^3}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 b \cdot h = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}. \quad (73)$$

Окончательно имеем

$$J_x = \frac{bh^3}{12}. \quad (74)$$

В формулах (72) и (74) в куб возводится размер той стороны, которая перпендикулярна оси, относительно которой вычисляется момент инерции.

Получим формулы для вычисления моментов инерции **сечения круглой формы** (рис.26, б)

В качестве элементарной площадки здесь удобно выбрать кольцо толщиной равной дифференциалу  $d\rho$ . Тогда полярный момент инерции равен по определению (67)

$$J_p = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{D/2} \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \int_0^{D/2} \rho^3 d\rho = \frac{2\pi\rho^4}{4} \Big|_0^{D/2} = \frac{2\pi d^4}{4 \cdot 16} = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (75)$$

Окончательно имеем

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (76)$$

Выведем формулу для вычисления осевого момента инерции круглого сечения, используя ранее полученные зависимости между полярным и осевыми моментами инерции (70),

$$J_x = J_y; \quad J_p = J_x + J_y = 2J_x = \frac{\pi D^4}{32}. \quad (77)$$

Отсюда следует, что осевой момент инерции сечения круглого сечения равен

$$J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64}. \quad (78)$$

Получим формулы для вычисления моментов инерции **сечения треугольной формы** (рис.27).

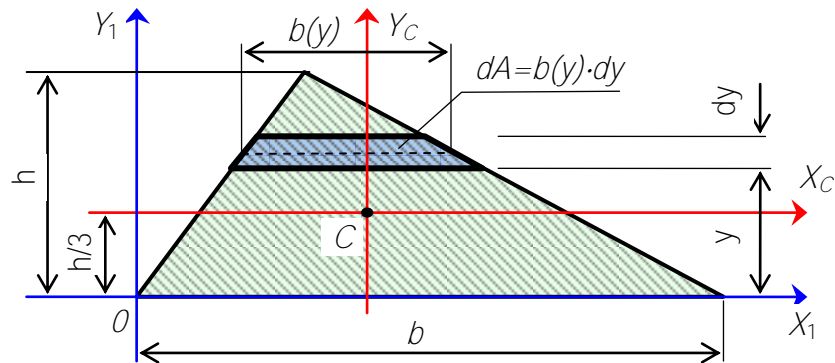


Рис. 27. Сечение треугольной формы

Ширина элементарной полоски меняется в зависимости от ее положения, то есть является функцией от  $y$ .

$$b(y) = b - \frac{b}{h} \cdot y. \quad (79)$$

Проверим, так ли это

$$\text{при } y=0, \quad b(0) = b - \frac{b}{h} \cdot 0 = b,$$

$$\text{при } y=h, \quad b(h) = b - \frac{b}{h} \cdot h = 0.$$

Очевидно, что выбранная функция подходит.

Момент инерции относительно оси  $X_1$  равен

$$\begin{aligned} J_{X_1} &= \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 b(y) dy = \int_0^h y^2 \cdot \left( b - \frac{b}{h} y \right) dy = b \int_0^h y^2 dy - \frac{b}{h} \int_0^h y^3 dy = \\ &= \frac{by^3}{3} \Big|_0^h - \frac{b}{h} \cdot \frac{y^4}{4} \Big|_0^h = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^4}{4h} = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}. \end{aligned} \quad (80)$$

Окончательно имеем формулу для вычисления момента инерции треугольного сечения относительно оси, проходящей через его основание.

$$J_{X_1} = \frac{bh^3}{12}. \quad (81)$$



Используя зависимость моментов инерции относительно параллельных осей (70), получим

$$J_{xc} = J_{x1} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot A = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot bh = \frac{bh^3}{12} - \frac{h^2}{9} \cdot \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{36}. \quad (82)$$

Окончательно имеем

$$J_x = \frac{bh^3}{36}. \quad (83)$$

Обратим внимание, что ось  $X_c$  является центральной осью, параллельной основанию треугольника.

#### 1.5.4 Зависимость моментов инерции при повороте осей

Пусть для сечения произвольной формы (рис.28) известны  $J_x, J_y, D_{xy}$  и  $A$ . Требуется выразить моменты инерции сечения относительно осей  $X_1$  и  $Y_1$ , повернутых по отношению к осям  $X, Y$  на угол  $\alpha$ . Отметим, что оси  $X$  и  $Y$  могут быть и не центральными

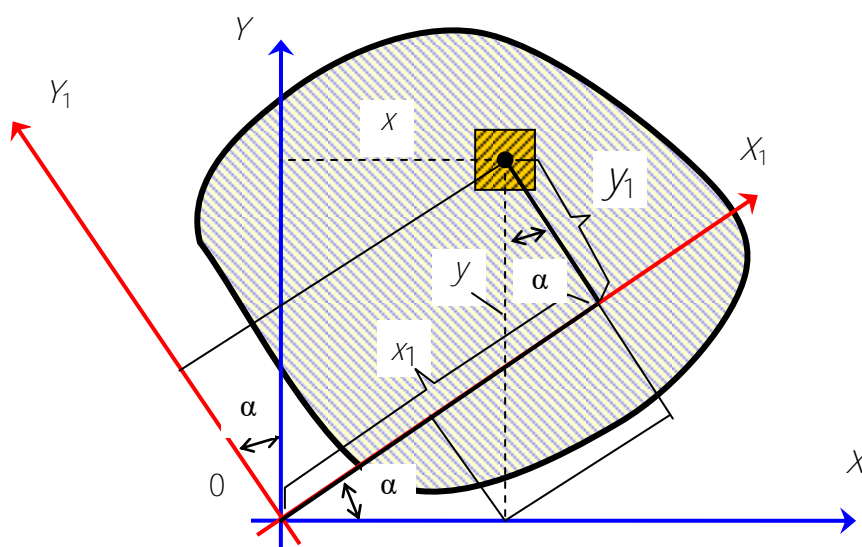


Рис. 28. Координаты точки сечения в исходных и произвольных системах координатных осей

Связь между координатами двух систем координатных осей установим по рисунку 28.

$$x_1 = x \cdot \cos(\alpha) + y \cdot \sin(\alpha); \quad y_1 = y \cdot \cos(\alpha) - x \cdot \sin(\alpha). \quad (84)$$

Осевой момент инерции относительно оси  $X_1$  равен

$$\begin{aligned}
J_{x_1} &= \int_A y_1^2 dA = \int_A [y \cdot \cos(\alpha) - x \cdot \sin(\alpha)]^2 dA = \\
&= \int_A [y^2 \cos^2(\alpha) - 2xy \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) + x^2 \sin^2(\alpha)] \cdot dA = \\
&= \cos^2(\alpha) \cdot \int_A y^2 dA - 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \int_A xy dA + \sin^2(\alpha) \cdot \int_A x^2 dA = \\
&= J_X \cos^2(\alpha) - D_{XY} \sin(2\alpha) + J_Y \sin^2(\alpha).
\end{aligned} \tag{85}$$

Аналогично получим выражение для момента инерции относительно оси  $Y_1$

Центробежный момент инерции сечения относительно осей  $X_1$  и  $Y_1$  равен

$$\begin{aligned}
D_{x_1 y_1} &= \int_A x_1 y_1 dA = \int_A [x \cdot \cos(\alpha) + y \cdot \sin(\alpha)] [y \cdot \cos(\alpha) - x \cdot \sin(\alpha)] dA = \\
&= \int_A [xy \cdot \cos^2(\alpha) - x^2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) + y^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - yx \cdot \sin^2(\alpha)] dA = \\
&= \int_A [(y^2 - x^2) \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + xy(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))] \cdot dA = \\
&= \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \left( \int_A y^2 dA - \int_A x^2 dA \right) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_A xy \cdot dA = \\
&= \frac{J_X - J_Y}{2} \cdot \sin(2\alpha) + D_{XY} \cdot \cos(2\alpha).
\end{aligned} \tag{86}$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned}
J_{x_1} &= J_X \cos^2(\alpha) + J_Y \sin^2(\alpha) - D_{XY} \sin(2\alpha); \\
J_{y_1} &= J_X \sin^2(\alpha) + J_Y \cos^2(\alpha) + D_{XY} \sin(2\alpha); \\
D_{x_1 y_1} &= \frac{J_X - J_Y}{2} \cdot \sin(2\alpha) + D_{XY} \cos(2\alpha).
\end{aligned} \tag{87}$$

Сложим моменты инерции относительно произвольных взаимно перпендикулярных осей  $X_1$  и  $Y_1$ .

$$\begin{aligned}
J_{x_1} + J_{y_1} &= (J_X \cos^2 \alpha + J_Y \sin^2 \alpha - D_{XY} \sin 2\alpha) + \\
&+ (J_X \sin^2 \alpha + J_Y \cos^2 \alpha + D_{XY} \sin 2\alpha) = \\
&= J_X (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + J_Y (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = J_X + J_Y.
\end{aligned} \tag{88}$$

Таким образом, выражение (88) подтверждает, что сумма моментов инерции относительно любой пары взаимно перпендикулярных осей,

пересекающихся в одной и той же точке (не обязательно в центре тяжести сечения), является величиной постоянной и равной полярному моменту сечения относительно точки пересечения этих осей.

### 1.5.5 Главные оси и главные моменты инерции

Рассмотрим сечение произвольной формы. Пусть оси поворачиваются около неподвижной точки  $C$  (рис.29).

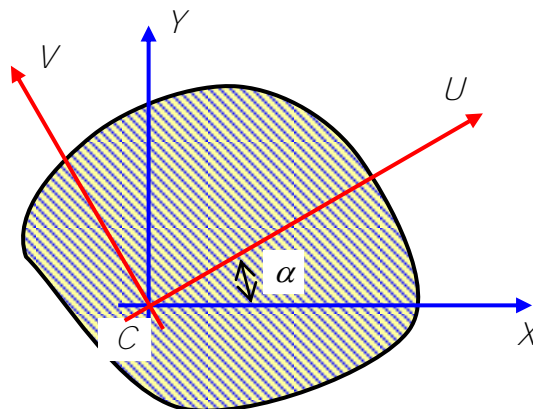


Рис. 29. Поворот осей относительно неподвижной точки  $C$

При изменении угла  $\alpha$  изменяются и моменты инерции сечения относительно поворачивающихся осей. Так как моменты инерции выражаются непрерывными функциями (94) с аргументом  $\alpha$ , то они должны иметь экстремальные значения. Обозначим оси, относительно которых моменты инерции принимают экстремальные значения буквами  $U$  и  $V$ . Причем условимся – ось с максимальным моментом инерции обозначать буквой  $U$ , а ось с минимальным моментом инерции буквой  $V$ . Найдем положение этих осей, то есть угол  $\alpha$ .

$$\frac{dJ_U}{d\alpha} = (J_X \cos^2 \alpha + J_Y \sin^2 \alpha - D_{XY} \sin 2\alpha)' = 0. \quad (89)$$

Отсюда получим уравнение

$$-J_X 2 \cos \alpha \cdot \sin \alpha + J_Y 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 2 D_{XY} \cos 2\alpha = 0. \quad (90)$$

Преобразуем и получим

$$-J_X \sin 2\alpha + J_Y \sin 2\alpha = 2 D_{XY} \cos 2\alpha. \quad (91)$$

Разделим на  $\cos 2\alpha$  и получим

$$-J_X \cdot \operatorname{tg} 2\alpha + J_Y \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = 2 D_{XY} \quad (92)$$

или

$$-(J_x - J_y) \cdot \operatorname{tg}(\alpha) = 2D_{xy}. \quad (93)$$

Отсюда получаем формулу для определения положения двух взаимно перпендикулярных осей, относительно одной из которых момент инерции принимает максимальное значение, а относительно другой – минимальное.

$$\operatorname{tg}2\alpha = -\frac{2D_{xy}}{J_x - J_y}. \quad (94)$$

Покажем, что центробежный момент относительно этих осей равен нулю. Для этого найдем угол поворота осей, относительно которых центробежный момент становится равным нулю.

$$D_{x_1y_1} = \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + D_{xy} \cos 2\alpha = 0. \quad (95)$$

Разделим уравнение (95) на  $\cos 2\alpha$ , на  $(J_x - J_y)$  и умножим на 2. В результате получим

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} + \frac{2D_{xy}}{J_x - J_y} = 0. \quad (96)$$

И окончательно получим выражение для угла наклона этих особенных осей инерции по отношению к первоначально взятым осям координат

$$\operatorname{tg}2\alpha = -\frac{2D_{xy}}{J_x - J_y}. \quad (97)$$

Очевидно, что угол наклона осей с экстремальными моментами инерции и угол наклона осей, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю одинаковые. Следовательно, высказанное предположение справедливо. Дадим название этим особенным осям инерции.

*Главными осями инерции называются две взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты принимают экстремальные значения.*

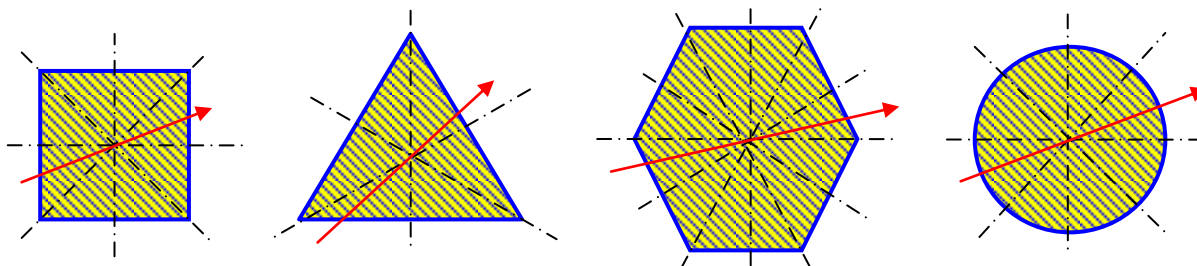
*Моменты инерции относительно главных осей называются главными моментами инерции.*

*Если главные оси проходят через центр тяжести сечения, то они называются главными центральными осями инерции, а моменты*

относительно этих осей – главными центральными моментами инерции.

Если сечение имеет ось симметрии, то эта ось и ей перпендикулярная ось, неважно является ли она сама осью симметрии или нет, будут главными осями инерции.

Если сечение имеет более чем две оси симметрии, то согласно определению, любая центральная ось является главной центральной осью инерции. Примеры приведены на рисунке 30.



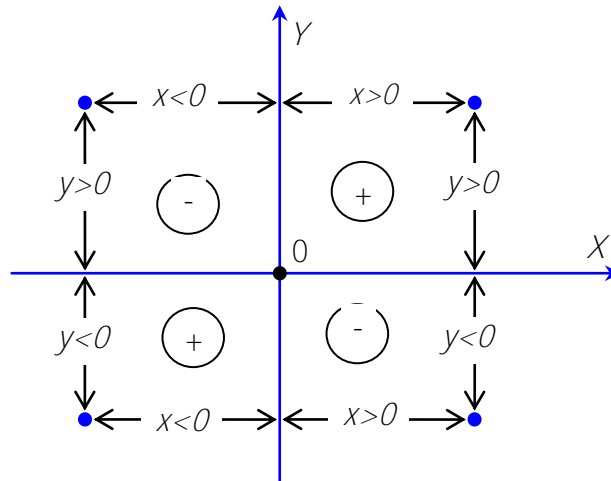
**Рис. 30. Любая центральная ось для сечений в форме квадрата, равностороннего треугольника, равностороннего многоугольника, круга является главной центральной осью инерции**

Главные моменты инерции плоского поперечного сечения вычисляются по формуле (без вывода)

$$J_{U,V} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4D_{xy}^2}. \quad (98)$$

Здесь  $J_U$  – больший главный момент инерции;  $J_V$  – меньший главный момент инерции, то есть  $J_U \geq J_V$ .

В некоторых случаях для определения знака или положения объектов удобно использовать правила построения и знаки квадрант координатной плоскости. Отметим, что квадранты образуются разделением координатной плоскости координатными осями на четверти. Квадранты ограничены с двух сторон координатными осями и неограниченны с двух других сторон (рис. 31).



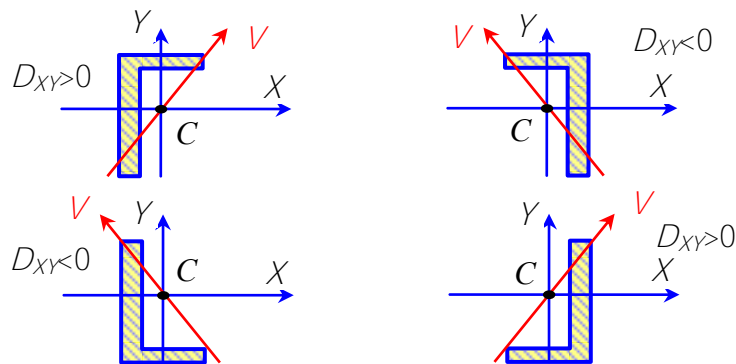
**Рис. 31. Расстановка знаков на квадрантах координатной плоскости**

Примем правило расстановки знаков квадрант. Будем считать, что если произведение координат точки величина положительная, то квадрант, в котором расположена эта точка, считается положительным, если произведение координат отрицательное, то квадрант считается отрицательным.

**Правило построения главных осей инерции.**

Ось  $V$  с меньшим главным моментом инерции  $J_V$  всегда откладываем на угол  $\alpha$  от оси  $X$  или  $Y$  с меньшим моментом инерции так, чтобы ось  $V$  проходила через квадранты, имеющие знак, совпадающий со знаком центробежного момента инерции  $D_{XY}$ .

Очень часто в составных сечениях встречаются элементы в виде равнополочных и неравнополочных уголков. На рисунке 32 показаны положения главных центральных осей инерции  $V$  с меньшим главным моментом инерции  $J_V$ .



**Рис. 32. Положение главной центральной оси инерции  $J_V$  с меньшим главным моментом инерции в сечениях, имеющих форму уголков**

### 1.5.6 Центробежный момент инерции прямоугольного треугольника

При поиске положения главных осей инерции и значений главных моментов инерции сечений сложной геометрической формы требуется определять центробежный момент инерции. А для этого требуется знать центробежные моменты инерции частей сечения простых геометрических форм. Для сечений прямоугольного и круглого сечений центробежный момент равен нулю. А вот для сечения треугольной формы его необходимо найти. Рассмотрим сечения в виде прямоугольного треугольника (рис.33).

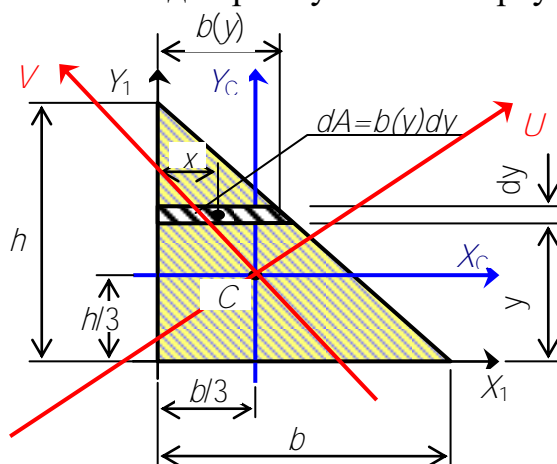


Рис. 33. Положение главных осей инерции сечение в форме прямоугольного треугольника

Зависимость ширины элементарной полоски от ее положения, то есть от  $y$ , имеет вид

$$b(y) = b - \frac{b}{h} \cdot y. \quad (99)$$

Зависимость координаты центра тяжести элементарной полоски от ее положения, то есть  $y$ , имеет вид

$$x = \frac{b(y)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left( b - \frac{b}{h} \cdot y \right). \quad (100)$$

В этом можно убедиться подстановкой  $y = 0$  и  $y = h$ .  
По определению

$$\begin{aligned}
D_{x_1y_1} &= \int_A xy dA = \int_0^h \frac{1}{2} \left( b - \frac{b}{h} y \right) \cdot y \cdot \left( b - \frac{b}{h} y \right) dy = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^h y \cdot \left( b^2 - 2b \frac{b}{h} y + \frac{b^2}{h^2} y^2 \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^h \left( b^2 y - 2b \frac{b}{h} y^2 + \frac{b^2}{h^2} y^3 \right) dy = \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{b^2 y^2}{2} - \frac{2b^2 y^3}{3h} + \frac{b^2 y^4}{4h^2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{b^2 h^2}{2} - \frac{b^2 h^2}{3} + \frac{b^2 h^2}{4} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{6b^2 h^2 - 2 \cdot 4b^2 h^2 + 3b^2 h^2}{12} \right) = \frac{b^2 h^2}{24}.
\end{aligned} \tag{101}$$

Воспользуемся зависимостью центробежного момента относительно параллельных осей и получим

$$D_{x_{сус}} = D_{x_1y_1} - A \frac{b}{3} \cdot \frac{h}{3} = \frac{b^2 h^2}{24} - \frac{1}{2} b \cdot h \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{h}{3} = \frac{b^2 h^2}{24} - \frac{b^2 h^2}{18} = -\frac{b^2 h^2}{72}. \tag{102}$$

Окончательно имеем формулу для вычисления центробежного момента инерции сечения треугольной формы относительно центральных осей, параллельных катетам треугольника.

$$D_{x_{сус}} = -\frac{b^2 h^2}{72}. \tag{103}$$

Примерное положение главных центральных осей инерции для сечений в виде прямоугольного треугольника показано на рисунке 34.

### 1.5.7 Геометрические характеристики сечений сложной формы

Сечения сложной формы делятся на части, имеющие простые геометрические формы – прямоугольники, треугольники, круги и др. К сечениям, имеющим простые формы, относятся те сечения, для которых легко можно указать положение центра тяжести, площадь, значения осевых и центробежного моментов инерции.

Статические моменты и моменты инерции сечения сложной формы вычисляются по формулам

$$S_X = \sum S_{x_i}; \quad S_Y = \sum S_{y_i}; \quad J_X = \sum J_{x_i}; \quad J_Y = \sum J_{y_i}; \quad D_{XY} = \sum D_{x_i y_i}. \tag{104}$$

**ВНИМАНИЕ.** Суммирование статических моментов и моментов инерции относительно разных осей не допускается.



### 1.5.8 Построение круга инерции

Закон изменения моментов инерции при повороте осей может быть представлен графически в виде круга (окружности) инерции. Координаты каждой точки круга (окружности) инерции равны осевому и центробежному моментам инерции сечения. На самом то деле, мы имеем дело с окружностью, выражающую графическую зависимость осевых и центробежного моментов инерции. Но исторически так сложилось, что эту окружность называли кругом инерции. Поэтому будем и мы ее так называть.

Круг инерции строится на координатной плоскости, образованной горизонтальной осью, где откладываются значения осевых моментов инерции, и вертикальной осью, на которой откладываются значения центробежных моментов инерции.

В связи с тем, что сейчас в распоряжении инженера имеются достаточно совершенные вычислительные средства, графические методы потеряли свою актуальность, так как и положение главных осей инерции и значения главных моментов инерции можно легко найти по формулам с помощью калькулятора. Однако, мы все равно рассмотрим этот метод, так как он дает нам иллюстрацию к формулам (94) и (98).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Центр круга инерции всегда расположен на горизонтальной оси  $J_x$ . Круг инерции всегда располагается справа от вертикальной оси  $D_{xy}$ .

Применение графического метода можно разделить на две задачи – прямую и обратную.

**П р я м а я з а д а ч а** – определение моментов инерции относительно заданной оси, когда известны положения, то есть угол наклона  $\alpha$  главных осей инерции к выбранным осям, и значения главных моментов инерции.

Отложим на горизонтальной оси  $J$  точки соответствующие значениям  $J_v$  и  $J_u$  (рис.35). Так как эти точки расположены диаметрально противоположно, то координату центра круга  $C$  получим как среднее арифметическое значение величин  $J_v$  и  $J_u$ . Нарисуем окружность с центром в точке  $C$  с радиусом, равным полуразности значений  $J_v$  и  $J_u$ . Из точки  $A$  проведем луч  $X$  под углом  $\alpha$ . Координаты точки пересечения луча  $X$  и окружности будет являться осевым  $J_x$  и центробежным  $D_{xy}$  моментами инерции рассматриваемого сечения. Затем под углом  $90^\circ$  проведем второй луч  $Y$ . Координаты точки пересечения этого луча и окружности будут соответственно равны значениям осевого момента инерции  $J_y$  и центробежного момента инерции  $D_{xy}$ .

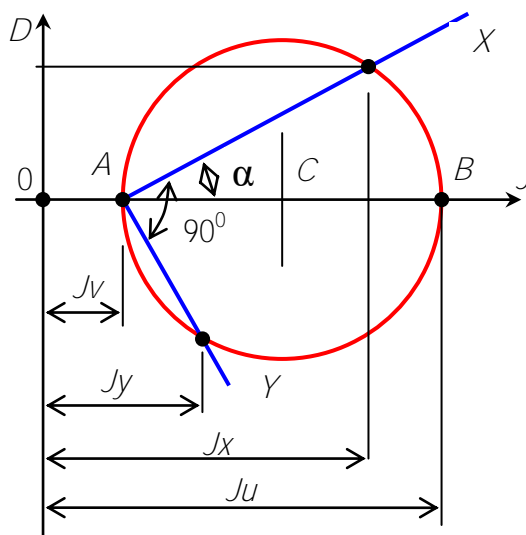


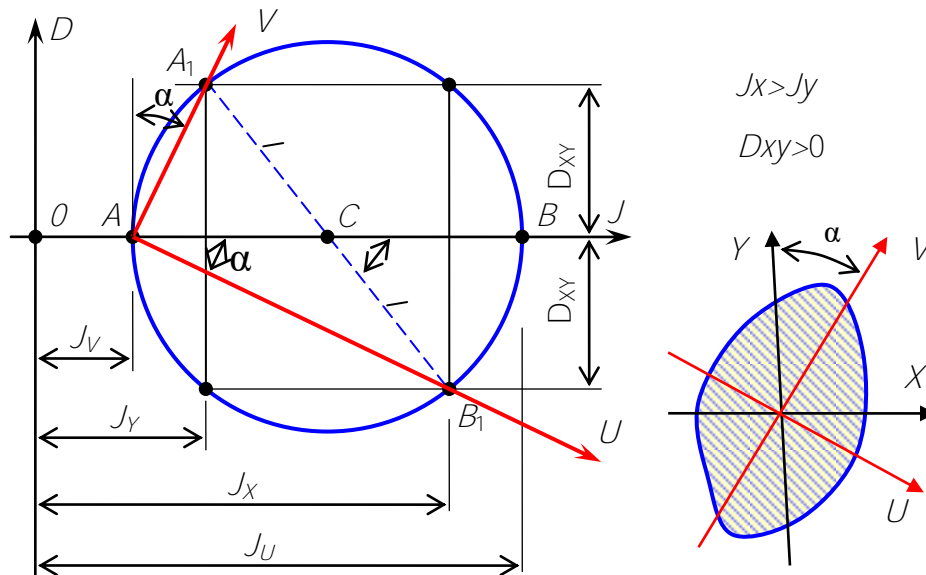
Рис. 34. Построение круга инерции при решении прямой задачи

**Обратная задача** – определение положения главных осей инерции и значения главных моментов инерции поперечного сечения, если известны осевые и центробежный моменты инерции относительно произвольных осей.

Для построения круга инерции отложим на оси  $J$  значения момента инерции  $J_x$ , а на оси  $D$  значение центробежного момента инерции  $D_{xy}$ . Используя указанные координаты, нанесем точку  $B_1$ . Затем отложим на оси  $J$  значение осевого момента инерции  $J_y$ , а на оси  $D$  значение центробежного момента инерции  $D_{xy}$ , взятого с противоположным знаком и получим точку  $A_1$ . Построим отрезок  $A_1B_1$ , пересечение которого с осью  $J$  дает нам центр окружности  $C$ . Учитывая, что центр окружности расположен на оси  $J$ , найдем его координаты как среднее арифметическое значений величин  $J_x$  и  $J_y$ .

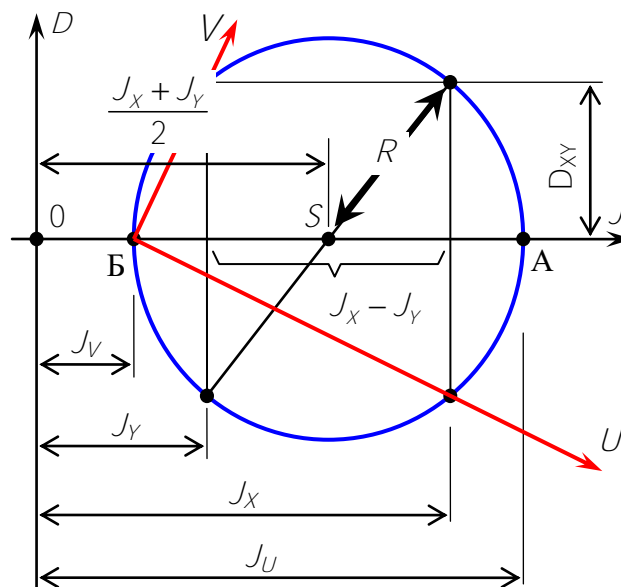
Радиусом, равным  $\sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + D_{xy}^2}$  проведем

окружность с центром в точке  $C$ . В результате получим точки пересечения окружности с горизонтальной осью  $J$  –  $A$  и  $B$ . Координаты этих точек на горизонтальной оси и будут значениями главных моментов инерции  $J_v$  и  $J_u$ . Направление оси  $U$  совпадает с направлением луча, проведенного через точки  $A$  и  $B_1$ , а направление оси  $V$  совпадает с направлением луча  $AA_1$



**Рис. 35. Построение круга инерции при решении обратной задачи**

Покажем на рисунке 36, как графическое изображение – круг инерции иллюстрирует формулу (98) для вычисления значений главных моментов инерции.



**Рис. 36. Круг инерции для иллюстрации формулы (98)**

Используя такой же порядок действия, как и при решении обратной задачи, построим круг инерции (рис. 36). Положение центра круга инерции определим как полусумма осевых моментов инерции  $J_x$  и  $J_y$

$$J_s = \frac{J_x + J_y}{2}. \quad (105)$$

Радиус круга инерции

$$R = \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + D_{xy}^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4D_{xy}^2}. \quad (106)$$

Отсюда следует, что координаты точки А или значение большего главного момента инерции вычисляется по формуле (107)

$$J_U = J_S + R = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4 \cdot D_{xy}^2}. \quad (107)$$

Координата точки Б или значение меньшего главного момента инерции вычисляются по формуле (108)

$$J_V = J_S - R = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4 \cdot D_{xy}^2}. \quad (108)$$

Таким образом, формула (98) графически имеет объяснение.

## 1.6 Изгиб прямых стержней

### 1.6.1 Основные понятия и определения в сопротивлении изгибу прямых стержней

Для удобства будем всегда обозначать продольную ось буквой  $Z$ , а поперечные оси, то есть оси, перпендикулярные продольной оси, буквами  $X$  и  $Y$ . Прямые стержни, нагруженные поперечной нагрузкой, в результате своей деформации искривляются. *Стержни, работающие преимущественно на изгиб, называются балками.* На изгиб работают плиты покрытия и перекрытия, подкрановые балки, ригеля и др.

**Чистый изгиб** – это такой вид сопротивления, когда в поперечном сечении появляются только изгибающие моменты, а все другие внутренние силы равны нулю.

Если в поперечных сечениях действует еще и поперечная сила, то такой вид сопротивления называется **поперечным изгибом**.

Если плоскость действия изгибающего момента содержит одну из главных центральных осей инерции сечения, то изгиб называется **плоским или простым**.

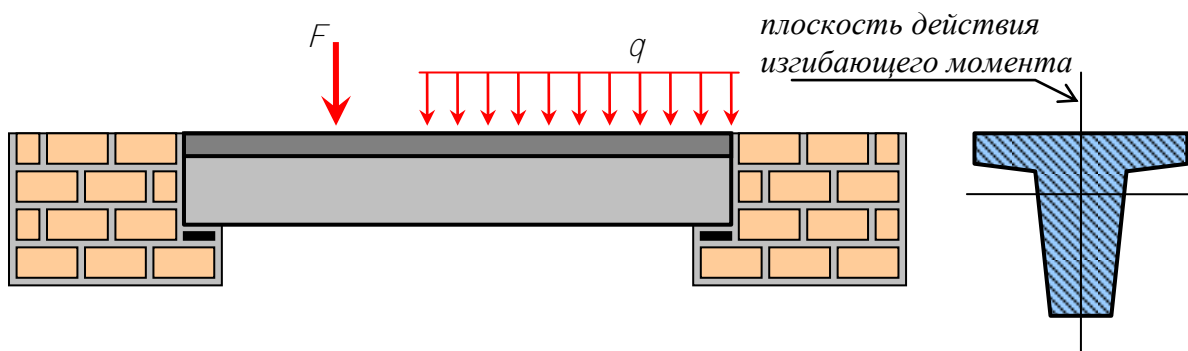


Рис. 37 Пример балки, испытывающей плоский поперечный изгиб

### 1.6.2 Типы опор и типы балок

**Шарнирно неподвижная цилиндрическая опора** – допускает свободный поворот сечения в одной плоскости, но не допускает смещения по горизонтальному и по вертикальному направлениям. На такой опоре могут появиться только две реакции –  $X_A$  и  $Y_A$ , так как она (опора) имеет две связи.

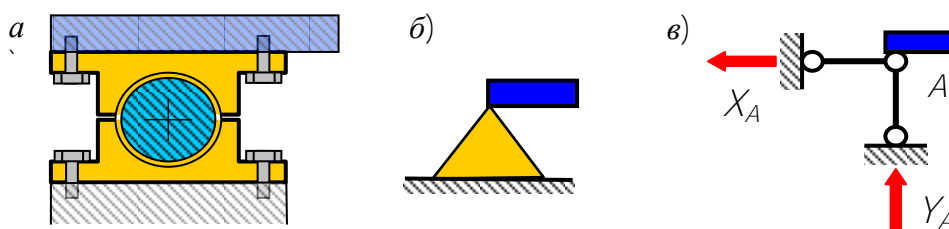


Рис. 38. Шарнирно-неподвижная опора: а) конструктивная схема; б) изображение опоры в сопротивлении материалов; в) изображение опоры в строительной механике

**Шарнирно-подвижная цилиндрическая опора** – допускает поворот и смещение опоры по одному из направлений. На такой опоре может появиться только одна реактивная сила  $X_A$  или  $Y_A$ , так как она (опора) имеет только одну связь.

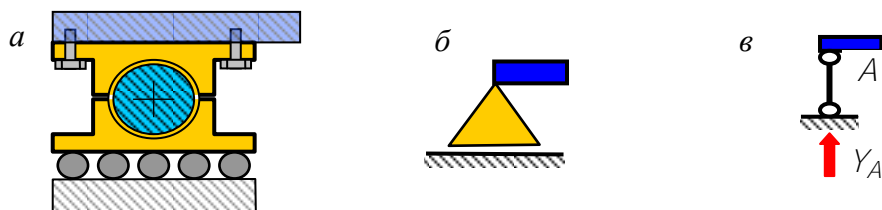


Рис. 39. Шарнирно-подвижная опора: а) конструктивная схема; б) изображение опоры в сопротивлении материалов; в) изображение опоры в строительной механике

Считается, что в шарнирных опорах силы трения отсутствуют.

**Заделка (защемление)** – не допускает поворота и смещений сечений. На такой опоре появляются две реактивные силы и реактивный момент, так как она имеет три связи.

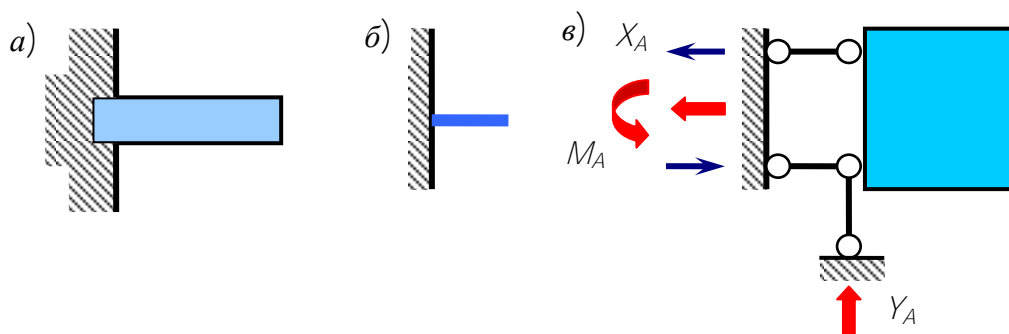


Рис. 40. Заделка (защемление): *а)* конструктивная схема; *б)* изображение опоры в сопротивлении материалов; *в)* изображение опоры в строительной механике

В зависимости от способа прикрепления балки к опоре различают типы балок – простая шарнирная балка (*а*), балка защемленная (*б*) и балка с консолями (*в*).

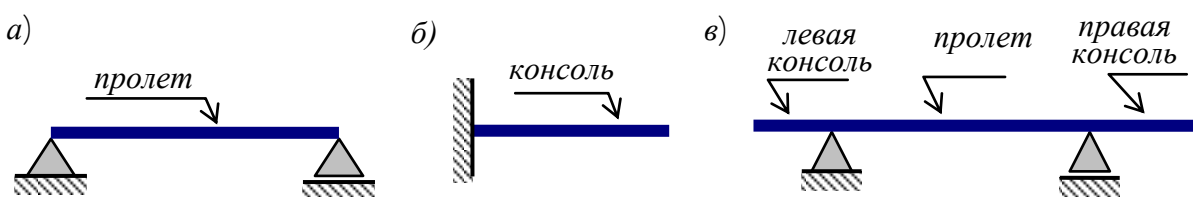


Рис. 41. Типы балок: *а)* простая шарнирная балка; *б)* консоль; *в)* балка с консолями

Часть балки, выступающая за левую (правую) крайнюю опору называется **консолью балки**.

Часть балки, расположенная между соседними опорами (в том числе и защемлением) называется **пролетом балки**.

### 1.6.3 Вычисление внутренних сил при поперечном изгибе балки

При изгибе балки в поперечных сечениях возникают поперечные силы и изгибающие моменты. Для определения внутренних сил используется метод сечений (см. далее).

Поперечная сила и изгибающий момент определяются из уравнений равновесия отсеченной части балки

$$Q_y = \sum F_i; \quad M_x = \sum M_x. \quad (109)$$

Поперечная сила, вызывающая сдвиг по ходу часовой стрелки, принимается положительной.

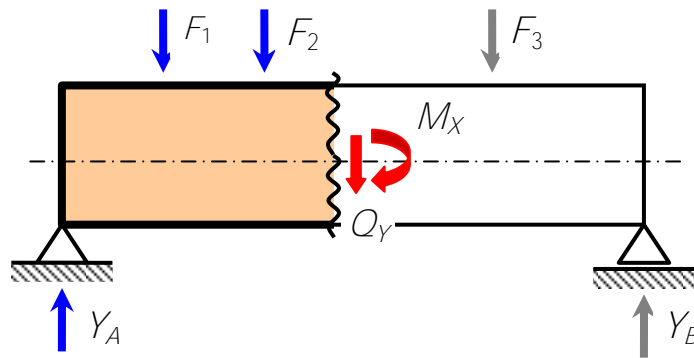


Рис. 42. Иллюстрация метода сечения при определении внутренних сил в балках

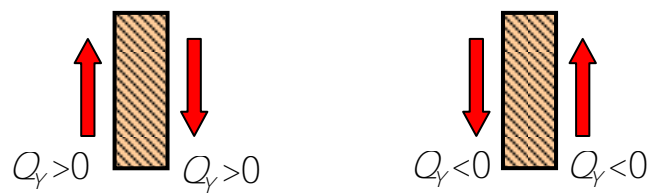


Рис. 43. Правило знаков для поперечных сил в балках

*Изгибающий момент, вызывающий растяжение нижних волокон балки, считается положительным.*



Рис. 44. Правило знаков для изгибающих моментов в балках

#### 1.6.4 Дифференциальная зависимость между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью нагрузки.

Рассмотрим консольную балку (рис.45).

Составим уравнения равновесия для элементарного участка балки

$$\sum M_0 = M_x - (M_x + dM_x) + Q_y \cdot \frac{dz}{2} + (Q_y + dQ_y) \cdot \frac{dz}{2} = 0. \quad (110)$$

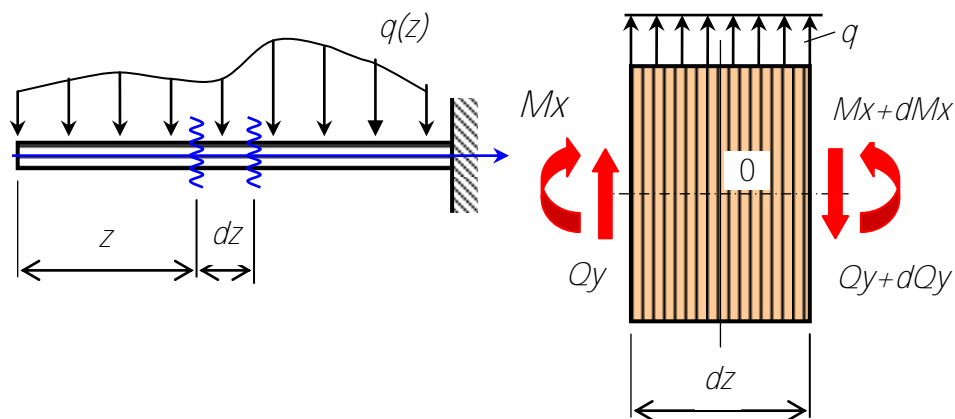


Рис. 45. Внутренние силы, действующие на элементарный участок балки

Отсюда получим

$$Q_y = \frac{dM_x}{dz}. \quad (111)$$

$$\sum Y = q \cdot dz + Q_y - (Q_y + dQ_y) = 0. \quad (112)$$

Отсюда имеем зависимость

$$q = \frac{dQ_y}{dz}. \quad (113)$$

Выполним подстановку формулы (111) в формулу (113) и получим

$$q = \frac{dQ_y}{dz} = \frac{d}{dz} \left( \frac{dM_x}{dz} \right). \quad (114)$$

$$q = \frac{d^2 M_x}{dz^2}. \quad (115)$$

### 1.6.5 Построение эпюр внутренних сил способом составления аналитических выражений

При построении эпюры  $Q_y$  положительные ординаты откладываем вверх, а отрицательные вниз.

При построении эпюры  $M_x$  положительные ординаты откладываем вниз, а отрицательные вверх.

Используя метод сечений, составляются аналитические выражения (функции) для  $Q_y$  и  $M_x$  на каждом характерном участке балки. По полученным функциям строятся графики (эпюры).



Пример.

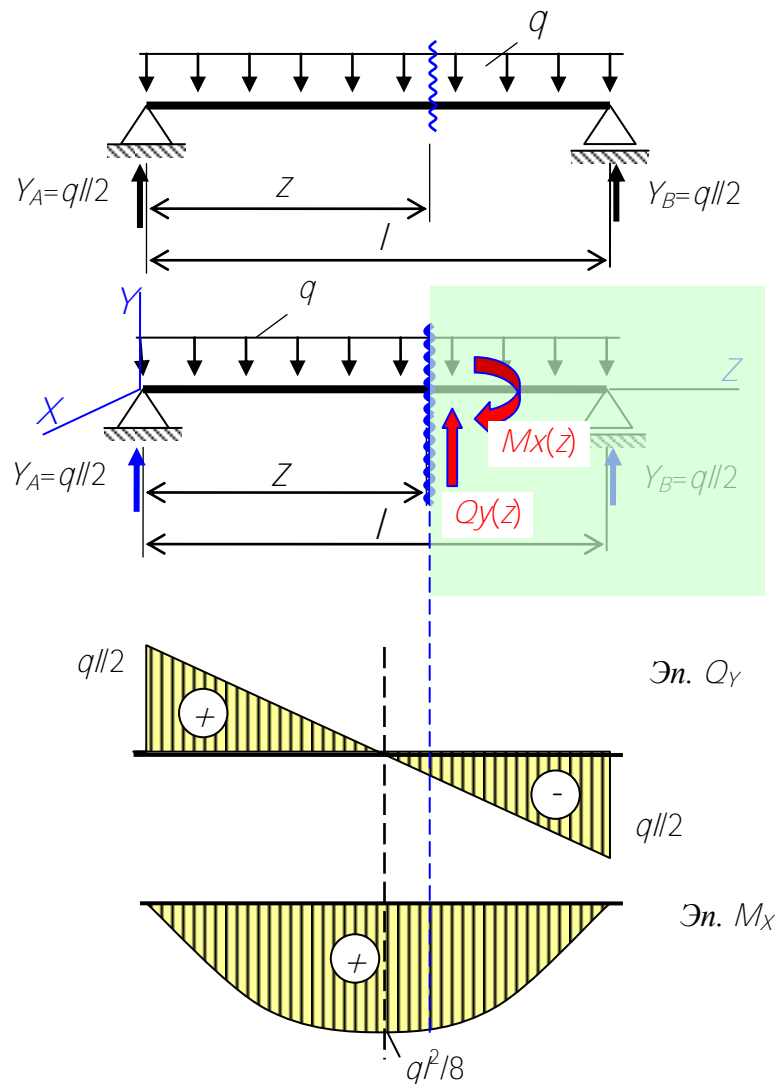
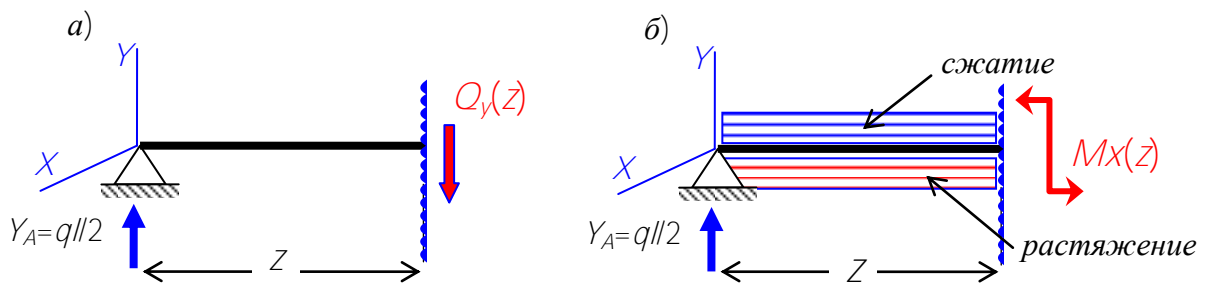


Рис. 46. Построение эпюр внутренних сил методом составления аналитических выражений (функций)

Реакции опор равны друг другу. Поэтому каждая из них равна половине равнодействующей от нагрузки  $q$

$$Y_A = Y_B = \frac{ql}{2}. \quad (116)$$

Для более четкого понимания выполним расчет от каждой внешней силы отдельно. Вначале приложим к левой части балки только реакцию  $Y_a$  на опоре  $A$  (рис. 47) и выразим поперечную силу и изгибающий момент как функции аргумента  $Z$  – координаты сечения.



**Рис. 47. Определение внутренних сил в сечении балки от реакции на левой опоре: а) поперечной силы; б) изгибающего момента**

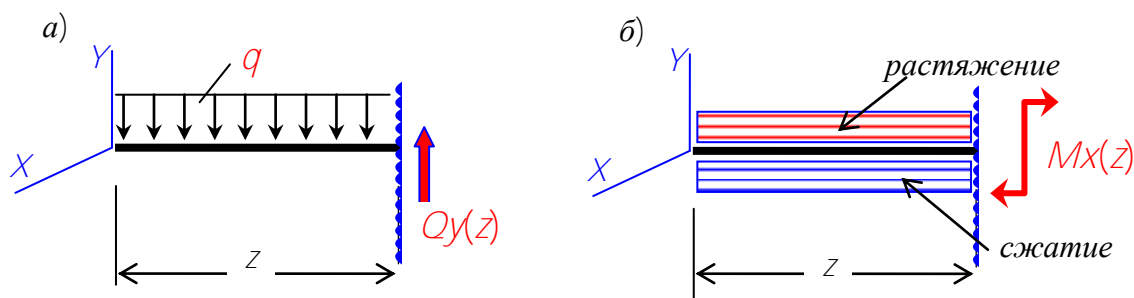
Реакция  $Y_A$  сдвигает рассматриваемую часть балки вверх. Материал сопротивляется этому сдвигу. Поэтому появляется поперечная сила  $Q_y$ , равная реакции  $Y_A$  и направленная вниз (рис. 47, а). Так как сдвиг, вызванный парой сил  $Y_A$  и  $Q_y$ , направлен по ходу часовой стрелки, то знак поперечной силы, согласно принятым правилам, принимается положительным.

$$Q_y = +Y_A = +\frac{ql}{2}. \quad (117)$$

Для наглядности изгибающий момент изобразим в виде пары сил (рис. 47, б). Реакция  $Y_A$  “пытается” повернуть левую часть балки относительно сечения  $S$  по ходу часовой стрелки. Поэтому изгибающий момент  $M_x$  направлен против хода часовой стрелки. Из рисунка (рис.47, б) очевидно, что верхняя стрелка пары сил, изображающей изгибающий момент, направлена в сторону продольных волокон, поэтому вызывает их сжатие. Нижняя стрелка пары сил, изображающих изгибающий момент  $M_x$ , направлена вправо, то есть из материала. Значит, она вызывает растяжение нижних продольных волокон. Отсюда следует согласно правилу знаков для изгибающих моментов, что изгибающий момент положительный.

$$M_x = +Y_A \cdot z = +\frac{ql}{2} \cdot z. \quad (118)$$

Затем приложим к левой части балки только часть равномерно распределенной нагрузки  $q$  (рис. 48, а) и так же выразим поперечную силу и изгибающий момент как функции аргумента  $z$  – координаты сечения.



**Рис. 48. Определение внутренних сил в сечении балки от части равномерно распределенной нагрузки  $q$**

Равнодействующая от части равномерно распределенной нагрузки, приложенной к рассматриваемой части балки, сдвигает рассматриваемую часть балки вниз. Материал сопротивляется этому сдвигу. Поэтому появляется поперечная сила  $Q_y$ , равная равнодействующей  $q \cdot z$  и направленная вверх (рис. 48, а). Так как сдвиг, вызванный парой сил  $q \cdot z$  и  $Q_y$ , направлен против хода часовой стрелки, то знак поперечной силы, согласно принятым правилам, принимается отрицательным.

$$Q_y = -qz. \quad (119)$$

Для наглядности изгибающий момент изобразим в виде пары сил (рис. 48, б) Равнодействующая части равномерно распределенной нагрузки  $q$  “пытается” повернуть левую часть балки относительно сечения  $S$  против хода часовой стрелки. Поэтому изгибающий момент  $M_x$  направлен по ходу часовой стрелки. Из рисунка (рис.48, б) очевидно, что верхняя стрелка пары сил, изображающей изгибающий момент, направлена из материала, поэтому вызывает растяжение верхних волокон. Нижняя стрелка пары сил, изображающих изгибающий момент  $M_x$ , направлена влево, то есть в сторону материала. Значит, она вызывает сжатие нижних продольных волокон. Отсюда следует согласно правилу знаков для изгибающих моментов, что изгибающий момент от части равномерно распределенной нагрузки положительный.

$$M_x = -q \cdot z \cdot \frac{z}{2} = -\frac{qz^2}{2}. \quad (120)$$

Учитывая принцип независимости сил, суммируем обе поперечные силы и оба изгибающих момента. В результате получим аналитические выражения для поперечной силы (121) и для изгибающего момента (122), вызванные всей нагрузкой на балку.

$$Q_y = \frac{ql}{2} - qz = \frac{q(l-z)}{2}. \quad (121)$$

$$M_x = \frac{ql}{2} \cdot z - q \cdot z \cdot \frac{z}{2} = \frac{qz(l-z)}{2}. \quad (122)$$

Используя полученные функции (121) и (122) вычислим значения поперечных сил и изгибающих моментов в отдельных сечениях балки:

при  $z=0$

$$Q_y = \frac{ql}{2}; \quad M_x = 0; \quad (123)$$

при  $z=l/2$

$$Q_y = 0; \quad M_x = \frac{ql^2}{8}; \quad (124)$$

при  $z=l$

$$Q_y = -\frac{ql}{2}; \quad M_x = 0. \quad (125)$$

По полученным значениям строим эпюру  $Q_y$ , учитывая, что график имеет вид прямой, и эпюру  $M_x$ , учитывая, что график имеет вид квадратной параболы (рис. 46).

Отметим, что при составлении аналитических выражений для поперечных сил и изгибающих моментов можно отбрасывать часть балки, расположенную левее от сечения или правее от сечения. Результаты в этом случае – аналитические выражения для  $Q_y$  и  $M_x$ , должны быть такими же, как в первом случае. Это часто используют для проверки.

### 1.6.6 Построение эпюр внутренних сил в балках способом

#### характерных сечений. Десять (золотых) правил анализа

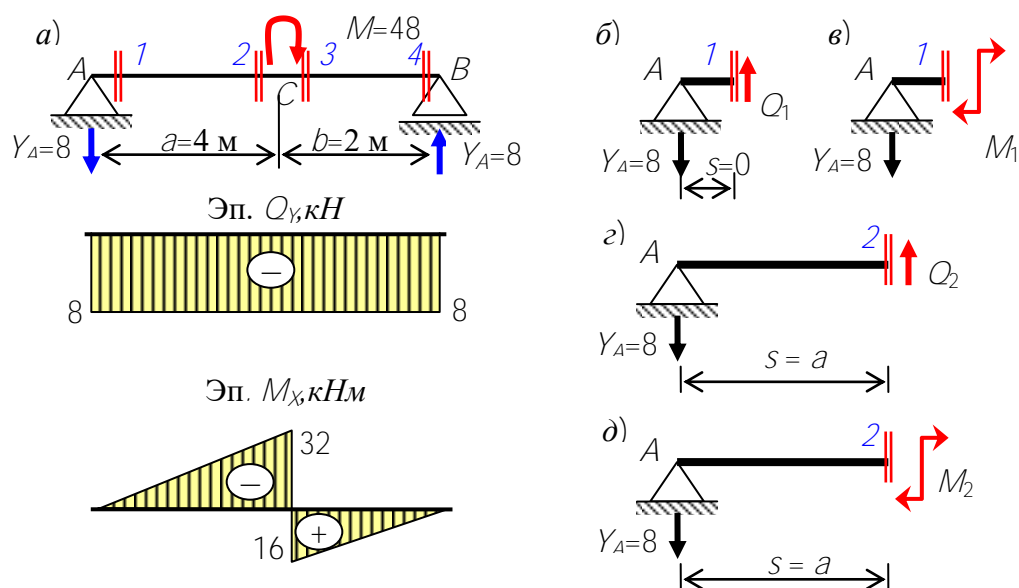
Этот способ более быстрый. На балке выделяются особые сечения – точки приложения сосредоточенных сил и моментов, начало и конец распределенной нагрузки, места расположения опор, начало и конец балки. Такие сечения следует отметить буквами или пронумеровать слева направо. Отмеченные сечения делят балку на участки. В этих сечениях вычисляются значения внутренних сил и наносятся на эпюры. Полученные точки соединяются с соблюдением очень важных и полезных следующих правил.

1. Анализ эпюр всегда выполнять слева направо. При анализе должны выйти из нуля и прийти в ноль.
2. В точке приложения сосредоточенного момента на эпюре изгибающих моментов  $M_x$  наблюдается разрыв (скачок) вниз, если момент направлен по ходу часовой стрелки, и вверх, если он направлен против хода часовой стрелки.
3. В точке приложения сосредоточенной силы на эпюре поперечных сил  $Q_y$  наблюдается разрыв (скачок) вниз, если сила направлена вниз, и разрыв (скачок) вверх, если сила направлена вверх.

4. В точке приложения сосредоточенной силы на эпюре изгибающих моментов  $M_x$  наблюдается излом с острием, направленным вниз, если сила направлена вниз, и вверх, если сила направлена вверх.
5. Если на участке балки нет распределенной нагрузки  $q$ , то поперечная сила  $Q_y$  на этом участке постоянная, а эпюра изгибающих моментов  $M_x$  имеет прямолинейный характер (линейная).
6. На участке балки, где приложена равномерно распределенная нагрузка  $q$ , эпюра поперечных сил  $Q_y$  имеет прямолинейный характер. Если нагрузка  $q$  направлена вниз, то поперечная сила  $Q_y$  уменьшается при движении по балке слева направо, а если вверх, то она увеличивается.
7. На участке, где приложена равномерно распределенная нагрузка  $q$ , эпюра изгибающих моментов  $M_x$  имеет вид квадратной параболы с выпуклостью вниз, если  $q$  направлена вниз, и вверх, если  $q$  направлена вверх.
8. В поперечном сечении, где поперечная сила  $Q_y$  равна нулю на эпюре изгибающих моментов  $M_x$  наблюдается экстремум.
9. Площадь эпюры поперечных сил  $Q_y$  на участке балки равна изменению изгибающего момента  $M_x$  на этом участке при условии, что эпюра изгибающих моментов  $M_x$  не имеет разрыва.
10. Если на участке балки поперечная сила  $Q_y$  положительная, то изгибающий момент  $M_x$  увеличивается. И, наоборот.

Отметим, что эти правила справедливы только в случае, если эпюра изгибающих моментов построена на растянутых волокнах балки

П р и м е р построения эпюр внутренних сил для элементарной балки методом характерных сечений (рис.49).



**Рис. 49. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов в балке методом характерных сечений от нагрузок в виде сосредоточенного момента**

Рассмотрим пример, показанный на рисунке (рис.49, а). Вначале, используя уравнения статического равновесия, определим реакции на левой и правой опорах балки. Так как нам заранее неизвестны направления реакций, будем предполагать, что обе реакции направлены вверх. Составим уравнения равновесия.

$$\sum M_A = M - Y_B \cdot (a + b) = 48 - Y_B \cdot (4 + 2) = 0, \quad Y_B = 8 \text{ кН.} \quad (126)$$

$$\sum M_B = M + Y_A \cdot (a + b) = 48 + Y_A \cdot (4 + 2) = 0, \quad Y_A = -8 \text{ кН.} \quad (127)$$

Реакция  $Y_B$  получилась отрицательной. Это опровергает наши предположения о направлении реакции на левой опоре. Исправим нашу ошибку и направим реакцию  $Y_A$  вниз (см. рис.49, а).

Рассмотрим часть балки, расположенной слева от сечения 1, к которой приложена единственная внешняя сила  $Y_A$ , направленная вниз и “пытающаяся” эту часть сдвинуть вниз. Материал сопротивляется такому сдвигу и в рассмотренном сечении появляется поперечная сила  $Q_1$ , направленная вверх и равная реакции  $Y_A$  (рис.49, б). Обе силы  $Y_A$  и  $Q_1$  вызывают сдвиг, направленный против хода часовой стрелки. Согласно принятому правилу знаков для поперечных сил, поперечная сила  $Q_1$  принимается отрицательной и равной  $Q_1 = -Y_A = -8 \text{ кН}$ .

Плечо  $s$  реакции  $Y_A$  стремится к нулю, так как сечение 1 мы провели бесконечно близко к опоре  $A$ , располагая его справа (рис.49, б). Поэтому создать момент  $Y_A$  не может. Значит, материалу не чему сопротивляться, и изгибающий момент  $M_1$  равен нулю  $M_1 = Y_A \cdot s = 8 \cdot 0 = 0$ .

Теперь проведем сечение 2 бесконечно близко к точке  $C$  слева и рассмотрим левую часть балки от этого сечения (рис.49, в). Повторяется ситуация, полученная для сечения 1. Поэтому и в сечении 2 появиться отрицательная сила равная реакции  $Y_A$ ,  $Q_2 = -Y_A = -8 \text{ кН}$ .

Реакция  $Y_A$  имеет плечо относительно сечения 2 и “пытается” повернуть левую часть балки против хода часовой стрелки. Материал сопротивляется и в сечении 2 появляется изгибающий момент  $M_2$ , направленный по ходу часовой стрелки. Изображая изгибающий момент в виде пары сил, можно видеть, что верхняя стрелка вызывает растяжение верхних волокон, а нижняя – сжатие нижних волокон. Согласно правилу знаков для изгибающих моментов момент  $M_2$  принимается отрицательным и равным

$$M_2 = -Y_A \cdot s = -Y_A \cdot a = -8 \cdot 4 = -32 \text{ кНм}$$

Аналогичными рассуждениями можно найти поперечные силы и изгибающие моменты в сечениях 3 и 4.

$$Q_3 = -Y_A = -8 \text{ кН}; \quad M_3 = -Y_A \cdot s + M = -Y_A \cdot a + M = -8 \cdot 4 + 48 = +16 \text{ кНм} \quad (128)$$

$$Q_4 = -Y_A = -8 \text{ кН}; \quad M_4 = -Y_A \cdot s + M = -Y_A \cdot (a + b) + M = -8 \cdot (4 + 2) + 48 = 0. \quad (129)$$

Проверим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, используя десять правил, приведенных выше.

- в точке  $A$  приложена сосредоточенная сила (реакция  $Y_A$ ) направленная вниз, поэтому на эпюре  $Q_Y$  наблюдается скачок так же направленный вниз и равный значению  $Y_A$ ;

- в точке  $B$  приложена сосредоточенная сила (реакция  $Y_B$ ) направленная вверх, поэтому на эпюре  $Q_Y$  наблюдается скачок так же направленный вверх и равный значению  $Y_B$ ;

- на участке 1-2 нет распределенной нагрузки, поэтому эпюра  $Q_Y$  постоянна, а эпюра  $M_X$  имеет прямолинейный характер;

- на участке 1-2 поперечные силы отрицательные, поэтому изгибающие моменты при движении слева направо уменьшаются, при этом изменение изгибающих моментов равно площади эпюры  $Q_Y$ ;

- в точке  $C$  к балке приложен сосредоточенный момент  $M$ , направленный против хода часовой стрелки, поэтому на эпюре изгибающих моментов наблюдается скачок, направленный вверх;

- на участке 2-3 нет распределенной нагрузки, поэтому эпюра  $Q_Y$  постоянна, а эпюра  $M_X$  имеет прямолинейный характер;

- на участке 2-3 поперечные силы отрицательные, поэтому изгибающие моменты при движении слева направо уменьшаются, при этом изменение изгибающих моментов равно площади эпюры  $Q_Y$ .

Таким образом, построенные эпюры поперечных и изгибающих моментов соответствуют выше перечисленным правилам. Следовательно, эпюры построены правильно. Построение эпюр методом сечений для балок с более сложной нагрузкой будут рассмотрены на практических занятиях.

### 1.6.7 Построение эпюр внутренних сил в плоских рамах

В сечениях элементов рам кроме поперечных сил и изгибающих моментов появляются еще и продольные силы  $N$ .

Для определения внутренних сил используется метод сечений.

В рамах на эпюре  $M_X$  знаки не ставятся. Ординаты эпюр откладываются в сторону растянутых волокон.

Знаки на эпюре  $Q_Y$  устанавливаются в каждом случае отдельно. В плоских рамах знак устанавливается в зависимости от направления сдвига – поперечная сила вызывающая сдвиг по ходу часовой стрелки считается положительной, а против хода часовой стрелки – отрицательной.

Растягивающая продольная сила принимается положительной, а сжимающая – отрицательной.

П р и м е р.

Вначале определим все внешние силы – реакции опор. Так как мы не знаем правильное направление реакций, будем предполагать, что реакции на опоре  $A$  направлены вправо и вверх, а на опоре  $B$  – вверх. Составим уравнения статического равновесия и получим значения реакций.

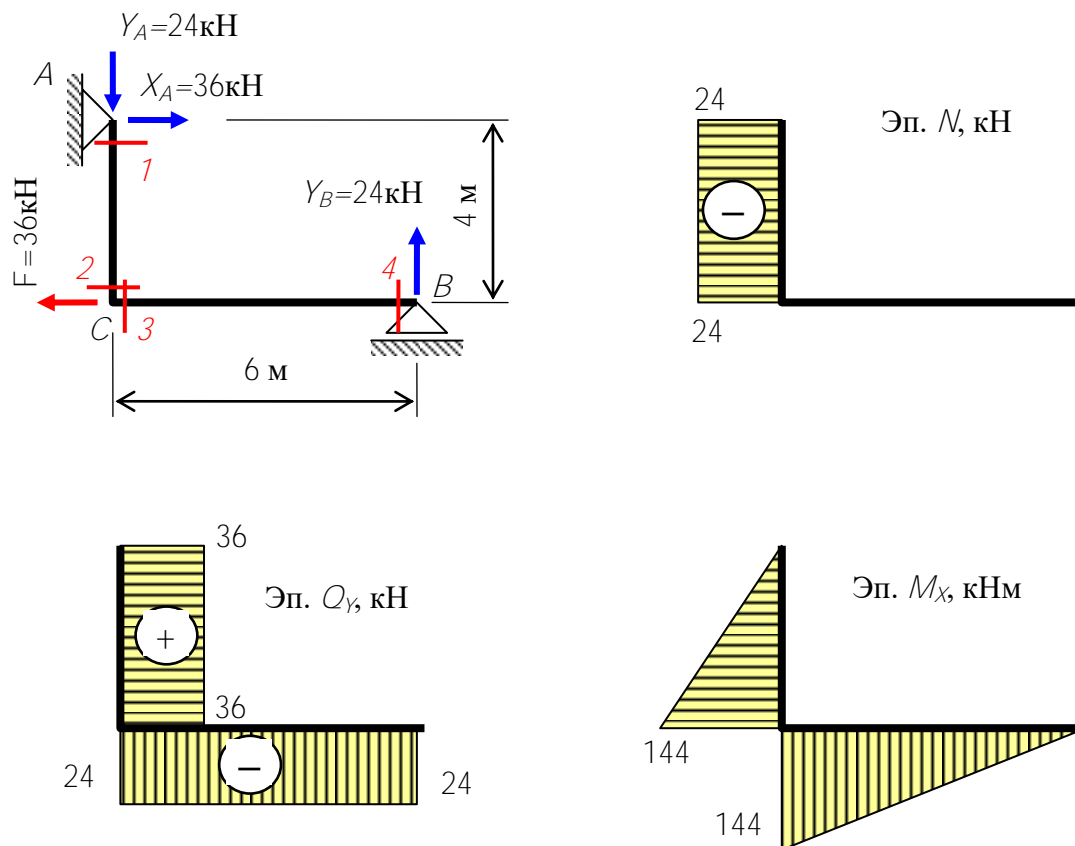


Рис. 50. Пример построения эпюр внутренних сил в плоской раме

$$\sum M_A = F \cdot 4 - Y_B \cdot 6 = 0; \quad 36 \cdot 4 - Y_B \cdot 6 = 0; \quad Y_B = 24 \text{ кН.} \quad (130)$$

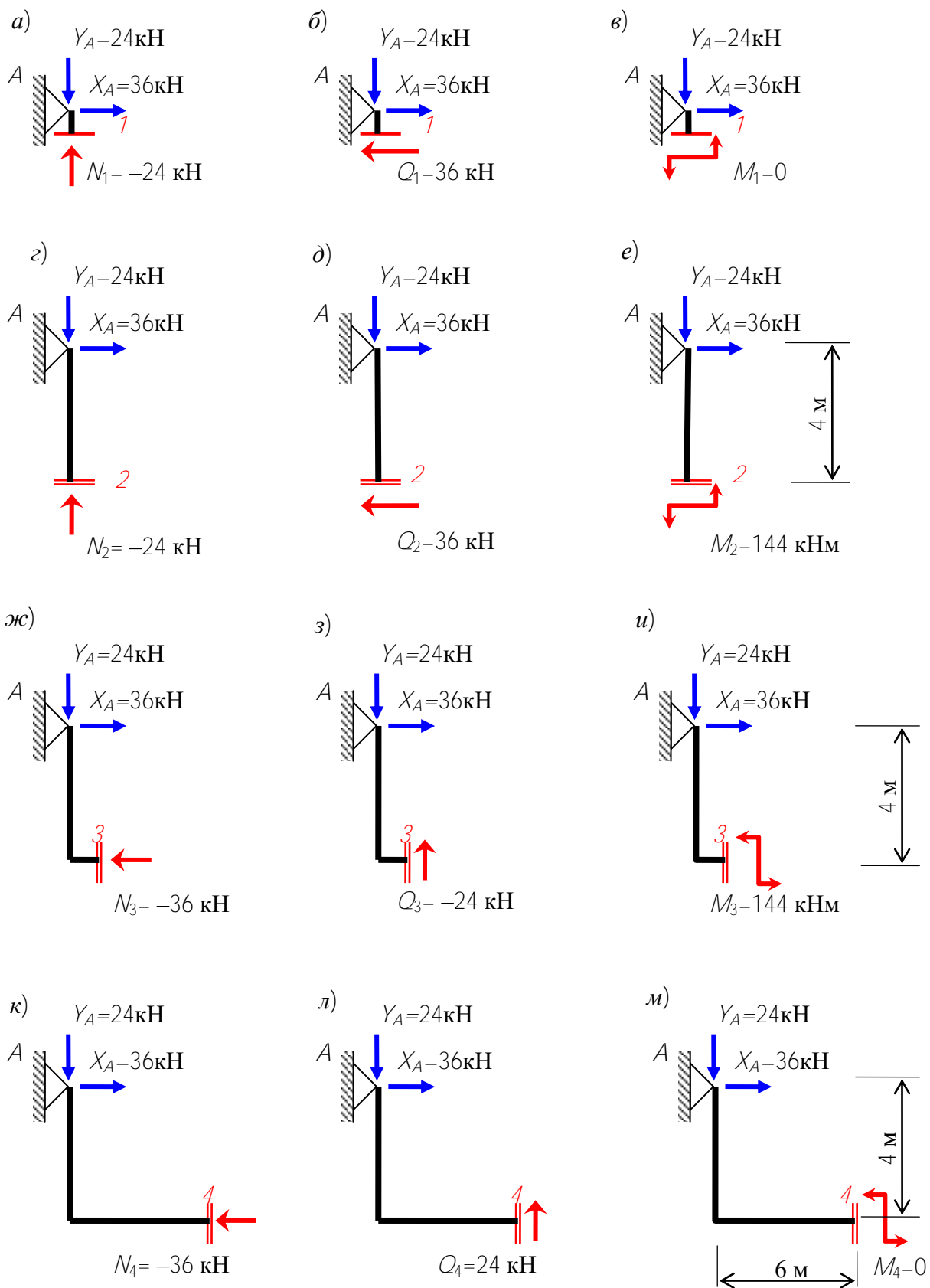
$$\sum Y = -Y_A + Y_B = 0; \quad -Y_A + 24 = 0; \quad Y_A = 24 \text{ кН.} \quad (131)$$

$$\sum M_B = -Y_A \cdot 6 - X_A \cdot 4 = 0; \quad 24 \cdot 6 - X_A \cdot 4 = 0; \quad X_A = 36 \text{ кН.} \quad (132)$$

Значения реакций получились положительными. Это значит, что мы “угадали” их правильное направление и изменять ничего не надо.

Используя метод сечений, вычислим продольные и поперечные силы, а также изгибающие моменты в сечениях 1, 2, 3 и 4 (рис.51).





**Рис. 51. Использование метода сечений для определения внутренних сил в рамах**

Определим внутренние силы в сечении 1.

Вертикальная реакция  $Y_A$  направлена вниз (рис.51, а). Для сохранения равновесия продольная сила  $N_1$  должна быть равна реакции  $Y_A$  и направлена вверх, то есть в сторону материала, а значит, вызывать сжатие материала. Поэтому продольную силу считаем отрицательной  $N_1 = -Y_A = -24 \text{ кН}$ .

Горизонтальная реакция на опоре  $A$  направлена вправо (рис.51, б), Поэтому поперечная сила  $Q_1$  должна быть направлена влево и равна реакции  $X_A$ . Обе силы  $X_A$  и  $Q_1$  вызывают сдвиг по ходу часовой стрелки. Поэтому поперечная сила считается положительной  $Q = +X_A = +36 \text{ кН}$ .

Обе реакции на опоре  $A$  не могут создать момент относительно сечения 1, так как плечо и одной и другой реакций равны нулю (рис.51, в). Поэтому изгибающий момент в этом сечении равен нулю  $M_1 = 0$ .

В сечении 2 продольная и поперечная силы (рис.51, г и д) по тем же соображениям равны продольной и поперечной силам в сечении 1  $N_1 = -Y_A = -24 \text{ кН}$ ,  $Q = +X_A = +36 \text{ кН}$ .

Горизонтальная реакция на опоре  $A$  создает момент относительно сечения, направленный по ходу часовой стрелки (рис.51, е). Для сохранения равновесия в сечении 2 появляется изгибающий момент равный моменту, созданному реакцией  $X_A$ , и направленному против хода часовой стрелки  $M_2 = X_A \cdot 4 = 36 \cdot 4 = 144 \text{ кНм}$ . При этом, изображая изгибающий момент в виде пары сил, можно установить, что он вызывает растяжение левых волокон вертикального участка рамы. Поэтому при построении эпюры изгибающих моментов его ординату следует откладывать влево.

Реакция опоры  $X_A$  направлена вправо (рис.51, ж), поэтому продольная сила  $N_3$  должна быть направлена влево, то есть в сторону материала. Поэтому продольная сила  $N_3$  отрицательная и равна горизонтальной реакции на опоре  $A$   $N_1 = -X_A = -36 \text{ кН}$ .

Вертикальная реакция  $Y_A$  направлена вниз (рис.51, з). Для сохранения равновесия поперечная сила в сечении 3 должна быть направлена вверх и равна реакции  $Y_A$ . Реакция  $Y_A$  и поперечная сила  $Q_3$  создают сдвиг, направленный против хода часовой стрелки. Поэтому считаем, что поперечная сила  $Q_3$  отрицательная  $Q = -Y_A = -24 \text{ кН}$ .

Горизонтальная реакция  $X_A$  создает момент относительно сечения 3, направленный по ходу часовой стрелки. Материал сопротивляется, в результате чего в сечении 3 появляется изгибающий момент  $M_3$ , направленный против хода часовой стрелки. Очевидно, что он вызывает растяжение нижних волокон горизонтальной части рамы  $M_3 = X_A \cdot 4 = 36 \cdot 4 = 144 \text{ кНм}$ .

Аналогично рассуждая можно установить, что в сечении 4 продольная и поперечная силы совпадают с продольной и поперечной силами в сечении 3  $N_4 = -X_A = -36 \text{ кН}$ ,  $Q_4 = -Y_A = -24 \text{ кН}$ .

В сечении 4 моменты создают обе реакции на опоре  $A$ , Эти моменты одинаковые, но направлены в разные стороны – одна от реакции  $Y_A$  против хода часовой стрелки, а другой от реакции  $X_A$  по ходу часовой стрелки. Поэтому изгибающий момент в сечении 4 равен нулю  $M_4 = +X_A \cdot 4 - Y_A \cdot 6 = +36 \cdot 4 - 24 \cdot 6 = 0$ .

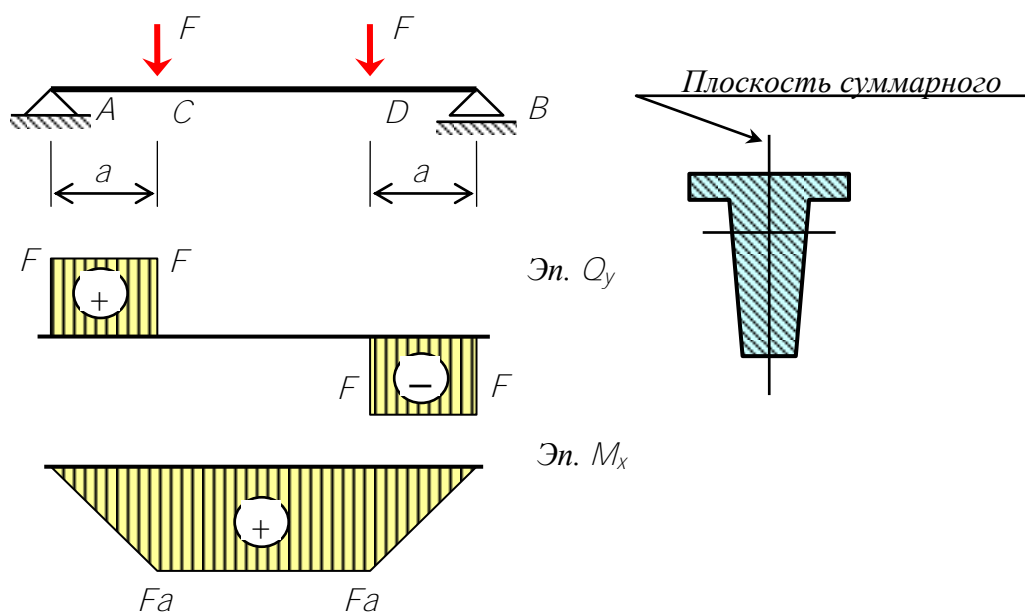
По результатам построены эпюры продольных сил, поперечных сил и изгибающих моментов (рис.50).

### 1.6.8 Определение нормальных напряжений в произвольной точке поперечного сечения балки при чистом изгибе

Рассмотрим балку, нагруженную двум, симметрично расположенными силами (рис. 52). В этом случае средняя часть балки  $CD$  подвергается чистому изгибу. Исследуем закон распределения нормальных напряжений в поперечном сечении балки.

Пусть плоскость суммарного изгибающего момента содержит одну из главных центральных осей инерции.

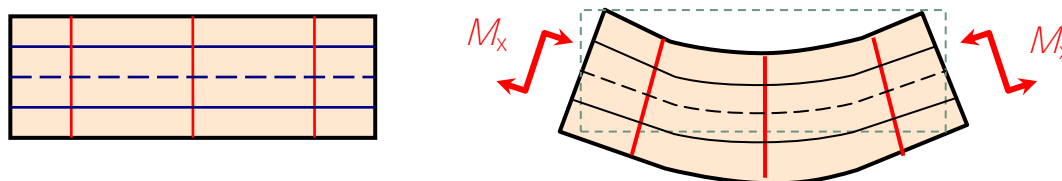
Поставленная задача является статически неопределимой, то есть решить ее нельзя с помощью только уравнений статического равновесия. К уравнениям равновесия необходимо присоединить уравнения совместности деформаций.



**Рис.52. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов при чистом изгибе балки**

Экспериментально установлено, что продольные волокна тонкой балки при ее изгибе искривляются, а поперечные сечения поворачиваются, оставаясь при этом плоскими. Отсюда следует справедливость гипотезы плоских сечений.

**Гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли)** – поперечные сечения плоские до деформации остаются плоскими и после деформации изгиба.



**Рис.53. Искривление элементарного участка балки при чистом изгибе**

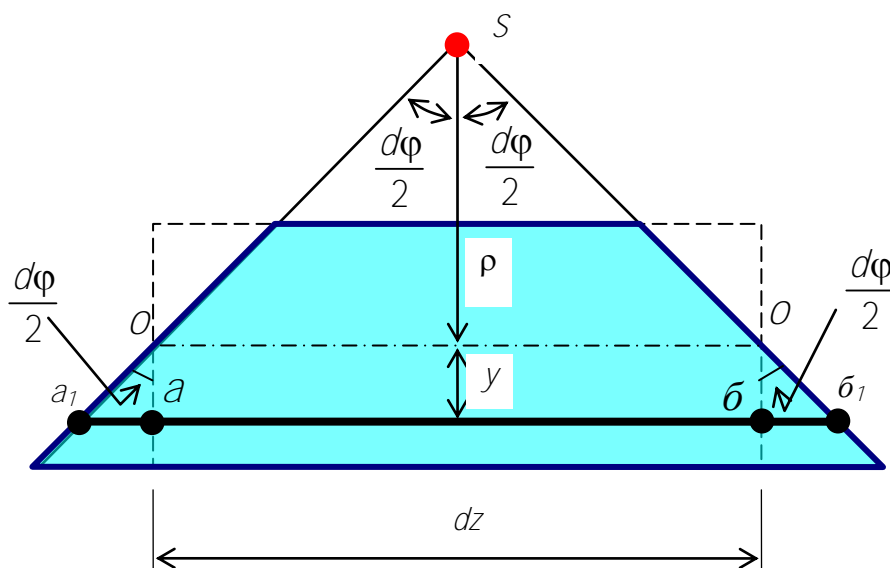
Справедливость этой гипотезы позволяет определить распределение нормальных напряжений при чистом изгибе.

Установлено, что при чистом изгибе часть продольных волокон удлиняется, а часть укорачивается. Однако, имеются волокна, которые не изменяют свою длину. Такие волокна называются **нейтральными**.

*Продольные волокна, не изменяющие свою длину при изгибе балки, называются **нейтральными**.*

*Поверхность (плоскость), образованная нейтральными волокнами называется **нейтральным слоем (нейтральной поверхностью, нейтральной плоскостью)**.*

*Линия, пересечения нейтрального слоя и плоскости поперечного сечения называется **нейтральной линией (нейтральной осью)**.*



**Рис.54. Упрощенная схема деформации участка балки, испытывающего чистый изгиб**

Обозначим буквой  $S$  центр изгиба элементарного участка балки. Пусть волокно  $O$ , положение которого мы еще не знаем, является нейтральным. Радиус кривизны нейтрального волокна обозначим буквой  $\rho$ . Рассмотрим деформацию произвольного волокна  $ab$ , удаленного от нейтрального волокна  $O$  на  $y$ . В результате искривления участка балки волокно  $ab$  получит деформацию и займет положение, обозначенное буквами  $a_1b_1$ .

$$\Delta dz = y d\varphi. \quad (133)$$

Учитывая, что

$$dz = \rho d\varphi, \quad (134)$$

имеем

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{y d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{1}{\rho} y. \quad (135)$$

Согласно решению теории упругости продольные волокна не оказывают давление друг на друга при чистом изгибе балки. Сопротивление материалов не может получить такого решения. Поэтому в ней это принимается как гипотеза.

**Гипотеза об отсутствии давлений (статическая гипотеза)** – продольные волокна при чистом изгибе не оказывают давление друг на друга.

Учитывая эту гипотезу, считаем, что все продольные волокна испытывают центральное растяжение или сжатие. Нормальные напряжения в продольных волокнах вычислим по закону Гука.

$$\sigma = E\varepsilon = E \left( \frac{1}{\rho} y \right) = E \cdot \frac{1}{\rho} \cdot y \quad (136)$$

Отсюда следует, что нормальные напряжения по высоте сечения распределены **по линейному закону**, то есть **прямо пропорциональны удаленности волокна от нейтрального слоя, которое равно  $y$** .

Определим положение нейтральной оси

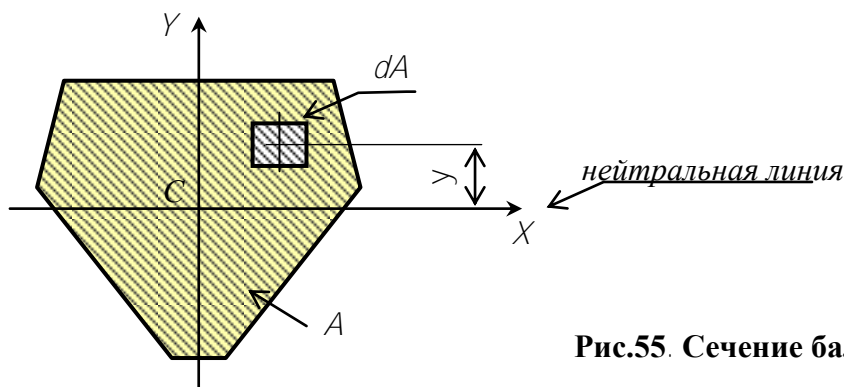


Рис.55. Сечение балки

Известно, что при чистом изгибе  $N=0$ . Тогда

$$N = \int_A \sigma dA = \int_A E \frac{1}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = \frac{E}{\rho} S_x = 0. \quad (137)$$

Так как

$$E \neq 0 \text{ и } \frac{1}{\rho} \neq 0 \quad (138)$$

следует, что  $S_x = 0$ , то есть ось  $X$  центральная ось сечения. Поэтому нейтральная ось  $X$  является центральной осью сечения. Значит для того, чтобы найти положение нейтральной оси, достаточно определить центр тяжести сечения.

Определим момент внутренних сил относительно нейтральной оси  $X$

$$M_x = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA = \int_A E \cdot \frac{1}{\rho} \cdot y \cdot y \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{E}{\rho} J_x. \quad (139)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E J_x}. \quad (140)$$

Подставим выражение (140) в формулу (143).

$$\sigma = E \frac{1}{\rho} y = E \frac{M_x}{E J_x} y = \frac{M_x}{J_x} y. \quad (141)$$

Окончательно имеем формулу для вычисления нормального напряжения в произвольной точке поперечного сечения балки при ее чистом изгибе

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y, \quad (142)$$

где  $J_x$  – момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной (центральной) оси  $X$ ;

$M_x$  – изгибающий момент в рассматриваемом сечении (из эпюры  $M$ );

$y$  – расстояние (координата) от нейтральной оси  $X$  до точки, где вычисляется нормальное напряжение.

Из полученной формулы, очевидно, что эпюра нормальных напряжений при чистом изгибе балки имеет прямолинейный характер. Максимальные нормальные напряжения появляются в наиболее удаленных от нейтральной оси волокнах балки. Поэтому при расчете балок на

прочность очень важно знать положение нейтральной оси на ее поперечном сечении.

Пример распределения нормального напряжения по высоте сечения тавровой балки приведен на рисунке 56.

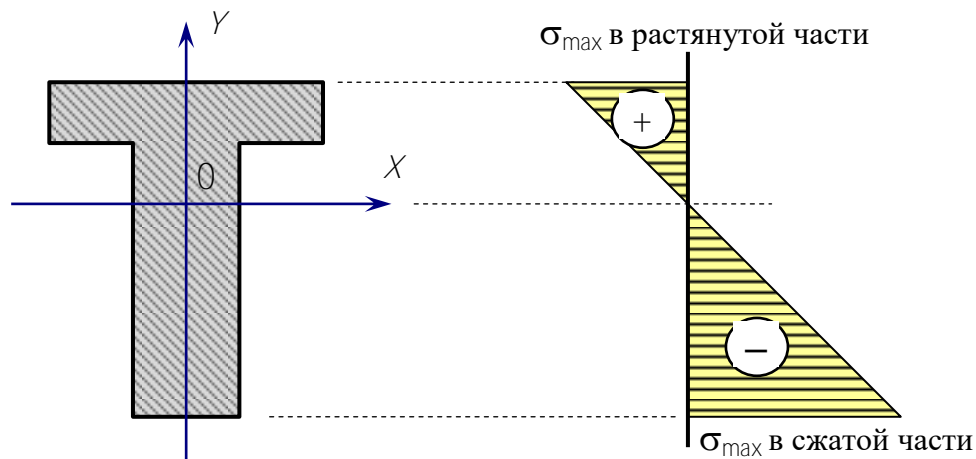
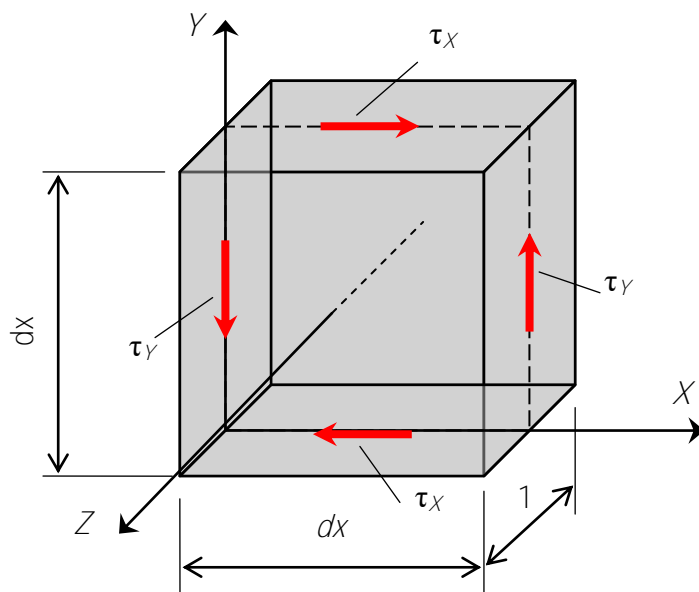


Рис. 56. Характер распределения нормальных напряжений по высоте сечения при чистом изгибе балки

### 1.6.9 Закон парности касательных напряжений

Рассмотрим элемент, взятый внутри нагруженного тела (рис.57). Пусть к площадкам этого элемента приложены только касательные напряжения. Обозначим касательное напряжение, действующее на площадках с нормалью  $X$  буквой  $\tau_Y$ , а на площадках с нормалью  $Y$  буквой  $\tau_X$ .

Элемент (рис.57) находится в состоянии равновесия. Составим уравнение равновесия – сумма моментов относительно оси  $Z$  равна нулю.



**Рис. 57. Элемент, на площадках которого действуют только касательные напряжения**

$$\sum M_z = -\tau_y \cdot 1 \cdot dy \cdot \frac{dx}{2} - \tau_y \cdot 1 \cdot dy \cdot \frac{dx}{2} + \tau_x \cdot 1 \cdot dx \cdot \frac{dy}{2} + \tau_x \cdot 1 \cdot dx \cdot \frac{dy}{2} = 0. \quad (143)$$

Отсюда следует, что

$$\tau_x = \tau_y. \quad (144)$$

*По двум взаимно перпендикулярным площадкам всегда действуют равные по величине касательные напряжения, направленные так, что поворачивают элемент в противоположных направлениях.*

### 1.6.10 Касательные напряжения при поперечном изгибе.

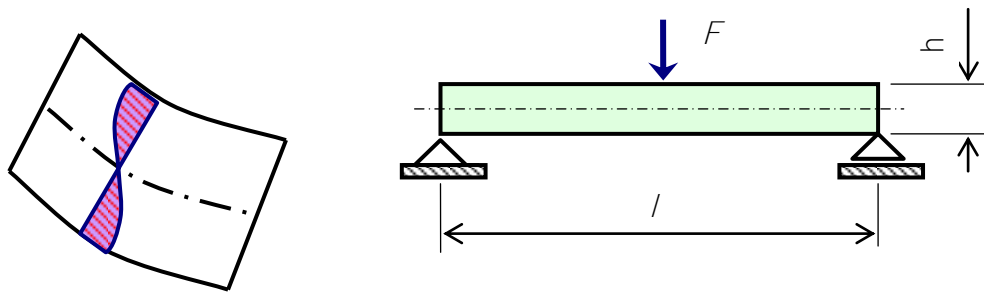
#### Формула Журавского

При поперечном изгибе в поперечных сечениях балки кроме изгибающих моментов появляются еще и поперечные силы, а, следовательно, и касательные напряжения. Согласно закону парности касательных напряжений и в продольных сечениях балки будут появляться касательные напряжения. Эти напряжения вызывают сдвиг продольных слоев (волокон) относительно друг друга, что приводит к искривлению поперечных сечений.

*Искривление поперечных сечений называется депланацией сечений.*

Экспериментально установлено, что величина депланации сечения зависит от отношения длины балки к высоте ее сечения.





**Рис.58. Деформация поперечных сечений за счет касательных напряжений**

Различают балки по отношению ее длины к высоте поперечного сечения:

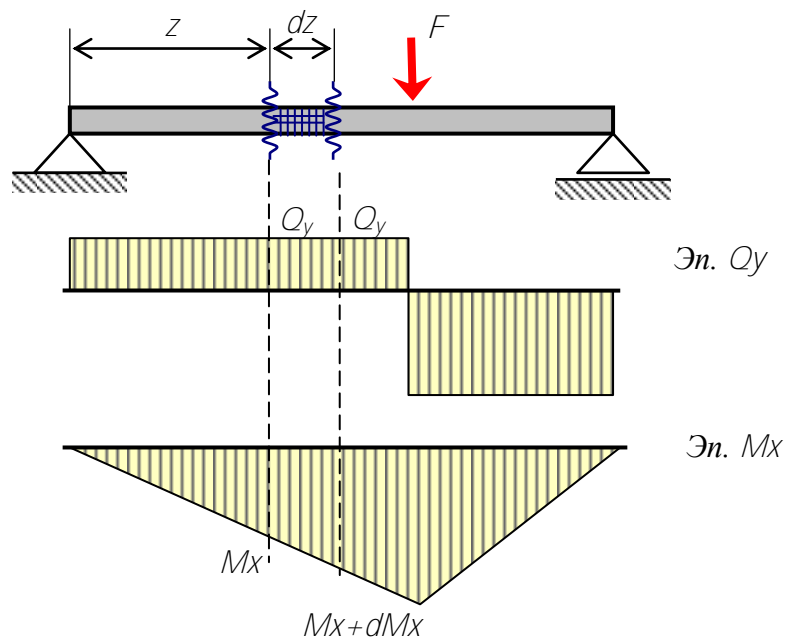
тонкие	$l/h \geq 10$
средней толщины	$5 < l/h < 10$
толстые (балки-стенки)	$l/h \leq 5$

Установлено, что деформация поперечных сечений в тонких балках незначительная и ею можно пренебречь. Поэтому формула (149) для нормальных напряжений в тонких балках при поперечном изгибе вполне приемлема.

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y. \quad (145)$$

Расчет толстых балок (плит) выполняется методами теории упругости и в сопротивлении материалов не рассматривается.

Рассмотрим балку, испытывающую поперечный изгиб.



**Рис.59. Балка, испытывающая поперечный изгиб**

Двумя сечениями выделим элементарный участок на балке и рассмотрим его подробнее.

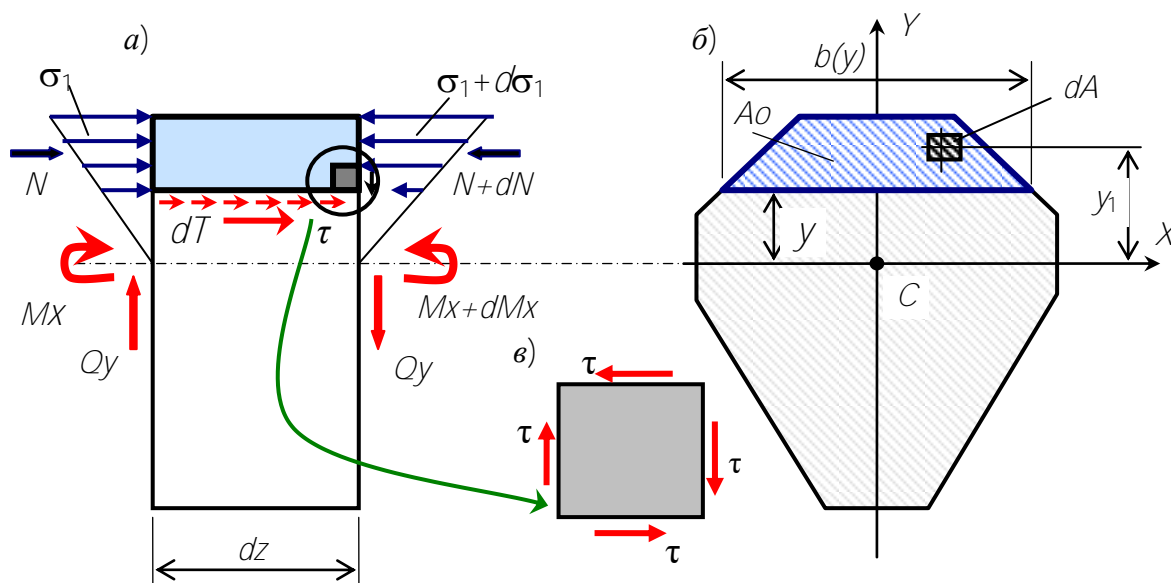


Рис. 60. Элемент балки, подвергнутый действию нормальных и касательных напряжений в поперечных и продольных сечениях при поперечном изгибе

В левом сечении (рис.60, а) изгибающий момент равен  $M_x$ , а в правом  $M_x + dM_x$ . Поэтому нормальные напряжения в отмеченной точке (рис.60, б) отличаются и равны слева

$$\sigma_1 = \frac{M_x}{J_x} \cdot y_1, \quad (146)$$

а справа

$$\sigma_1 + d\sigma_1 = \frac{M_x + dM_x}{J_x} \cdot y_1. \quad (147)$$

Отсюда следует, что изменение нормального напряжения на расстоянии  $dz$  равно

$$d\sigma_1 = \sigma_1 + d\sigma_1 - \sigma_1 = \frac{M_x + dM_x}{J_x} \cdot y_1 - \frac{M_x}{J_x} \cdot y_1 = \frac{dM_x}{J_x} \cdot y_1. \quad (148)$$

Тогда приращение силы равно

$$dN = \int_{A_0} d\sigma_1 dA = \int_{A_0} \frac{dM_x}{J_x} \cdot y_1 dA = \frac{dM_x}{J_x} \int_{A_0} y_1 dA = \frac{dM_x}{J_x} S_x^0. \quad (149)$$

*Д о п у щ е н и е* – будем полагать, что касательные напряжения распределяются по ширине сечения равномерно. Поэтому

равнодействующую касательных напряжений в горизонтальном сечении (рис.60, а) можно вычислить по формуле (150)

$$dT = \tau \cdot dz \cdot b. \quad (150)$$

Из условия равновесия справедливо равенство (151)

$$dT = dN. \quad (151)$$

Подставим выражения для  $dT$  и  $dN$  и получим

$$dT = \tau \cdot dz \cdot b = dN = \frac{dM_x}{J_x} \cdot S_x^0. \quad (152)$$

Отсюда следует выражение для касательного напряжения в продольном сечении балки на выделенном участке

$$\tau = \frac{dM_x}{dz} \cdot \frac{S_x^0}{J_x b} = \frac{Q_y S_x^0}{J_x b}. \quad (153)$$

Учитывая закон парности касательных напряжений, касательные напряжения и в поперечном сечении балки равны (рис.60, в)

$$\tau = \frac{Q_y S_x^0}{J_x b}, \quad (154)$$

где  $Q_y$  – поперечная сила в рассматриваемом сечении балки;

$S_x^0$  – статический момент отсеченной части сечения относительно нейтральной оси  $X$ ;

$J_x$  – момент инерции всего сечения относительно нейтральной оси  $X$ ;

$b$  – ширина сечения, на уровне точки в которой вычисляется касательное напряжение.

**Отсеченная часть** – это часть сечения, расположенная выше или ниже точки, где вычисляется касательное напряжение.

Максимальные касательные напряжения при поперечном изгибе появляются в точках, расположенных на нейтральной оси.

Полученная формула называется формулой Журавского и предназначена для вычисления касательных напряжений в произвольной точке сечения при поперечном изгибе балки.

**П р и м е р ы** распределения касательных напряжений по высоте сечения балки при ее поперечном изгибе.

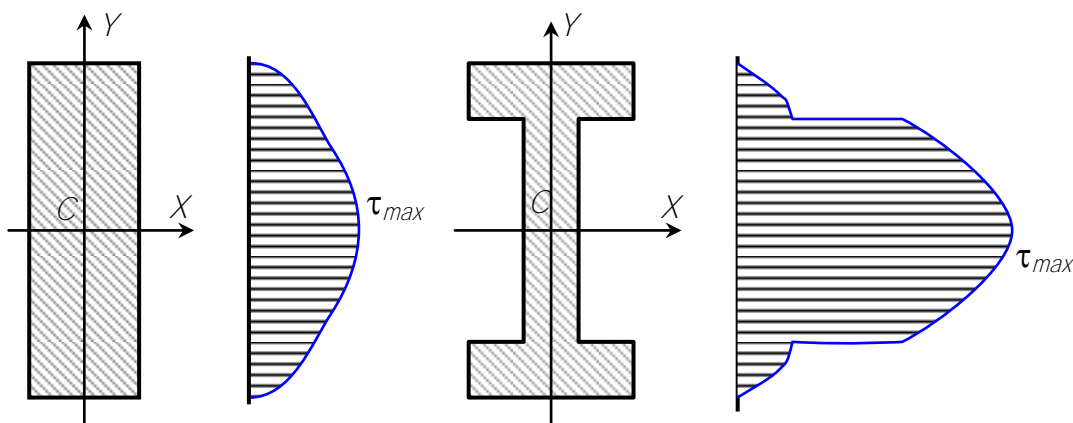


Рис.61. Примеры распределения касательных напряжений по высоте сечения

### 1.6.11 Проверка прочности балки при поперечном изгибе

Учитывая, что максимальные нормальные напряжения появляются в крайних волокнах балки, то есть волокнах максимально удаленных от нейтральной оси, получим условие прочности по нормальным напряжениям.

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{J_x} \cdot y_{max} = \frac{M_x}{J_x / y_{max}} \leq R. \quad (155)$$

Так как дробь  $J_x / y_{max}$  в знаменателе выражения (155) зависит только от формы и размеров сечения, то эту дробь так же можно считать геометрической характеристикой сечения балки. Обозначим ее одной буквой

$$\frac{J_x}{y_{max}} = W_x \quad (156)$$

и назовем эту величину **осевым моментом сопротивления сечения**. Момент сопротивления характеризует сопротивление сечения моменту и должен быть в знаменателе. Тогда условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе имеет вид

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} \leq R, \quad (157)$$

где  $M_x$  – изгибающий момент в рассматриваемом сечении (обычно берут его значения из эпюры и по абсолютной величине);

$W_x$  – осевой момент сопротивления поперечного сечения балки, измеряется в  $\text{см}^3$  и может быть только больше нуля;

$R$  – расчетное сопротивление материала балки.

Максимальное касательное напряжение при поперечном изгибе балки появляется на уровне нейтрального слоя (оси). Поэтому условие прочности по касательным напряжениям при поперечном изгибе балки имеет вид

$$\tau_{max} = \frac{Q_y S_x^0}{J_x b} \leq R_s, \quad (158)$$

где  $Q_y$  – поперечная сила в рассматриваемом сечении балки (обычно принимается максимальное значение по абсолютной величине);

$S_x^0$  – статический момент части сечения, расположенной по одну сторону от нейтральной оси относительно нейтральной оси  $X$ , то есть центральной оси сечения;

$J_x$  – момент инерции всего сечения относительно нейтральной оси  $X$ , то есть центральной оси сечения;

$b$  – ширина сечения на уровне нейтральной оси  $X$ , то есть центра тяжести.

### 1.6.12 Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

Перемещение центра тяжести сечения по направлению перпендикулярному к оси балки  $Z$ , вызванное ее искривлением, называется прогибом балки и обозначается буквой  $V$ . В некоторых случаях в строительстве и машиностроении требуется определять прогибы. Это связано с тем, что деформации некоторых строительных конструкций лимитированы. Так, например, ограничиваются прогибы балок и плит по эстетическим соображениям или с целью уменьшить динамику конструкций. Поэтому надо уметь определять перемещения и углы поворота сечений балок. Рассмотрим консоль, испытывающую поперечный изгиб.

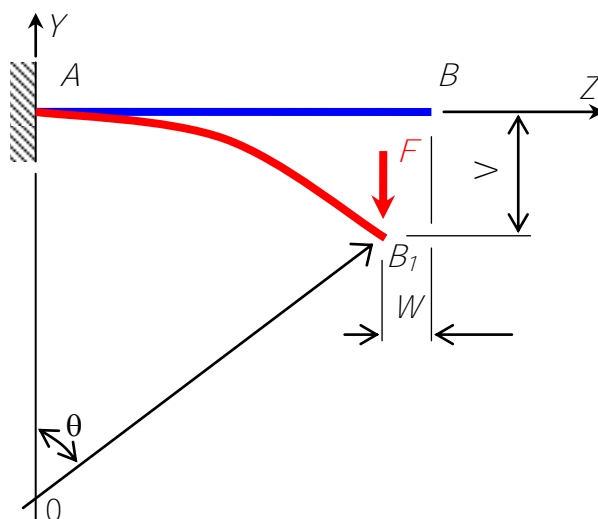


Рис.62. Перемещения конца консоли при поперечном изгибе

Пусть на конце консоли (рис.62) действует вертикальная сосредоточенная сила  $F$ . В результате в сечениях консоли появятся изгибающие моменты, которые приведут к искривлению балки (рис.62). Ее точка  $B$  переместится по направлению оси  $Z$  и по направлению оси  $Y$ . Эти перемещения, соответственно, обозначим  $W$  и  $V$ . Перемещение по горизонтальному направлению  $W$  незначительное и в расчетах им пренебрегают. Вертикальное перемещение (прогиб)  $V$  значительно больше горизонтального перемещения  $W$  и должно учитываться в расчетах.

Для определения прогибов воспользуемся уравнением для кривизны.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}. \quad (159)$$

Из курса высшей математики известно, что кривизна кривой линии может быть найдена по формуле

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2V}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (160)$$

Так как для реальных балок, встречающихся в строительстве, угол поворота поперечного сечения величина малая по сравнению с единицей

$$\theta = \frac{dV}{dz} \ll 1, \quad (161)$$

то квадратом производной можно пренебречь. Тогда формула для кривизны (160) упрощается и принимает вид

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2V}{dz^2}. \quad (162)$$

Левые части уравнений (159) и (162) равны. Следовательно, равны и правые части. Тогда приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки принимает вид

$$\boxed{\frac{d^2V}{dz^2} = \frac{M_x}{EJ_x}}. \quad (163)$$

### 1.6.13 Метод непосредственного интегрирования

Метод основан на непосредственном интегрировании полученного приближенного дифференциального уравнения. Последовательно интегрируем дифференциальное уравнение (163). Вначале запишем его так

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{dV}{dz} \right) = \frac{M_x}{EJ_x}. \quad (164)$$

Учитываем, что первая производная от прогиба является функцией угла поворота поперечных сечений

$$\frac{dV}{dz} = \theta(z) = \frac{M_x}{EJ_x}. \quad (165)$$

Подставляем выражение (165) в уравнение (164) и получим

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{dV}{dz} \right) = \frac{d}{dz} (\theta) = \frac{d\theta}{dz} = \frac{M_x}{EJ_x}. \quad (166)$$

Разделим дифференциалы

$$d\theta = \frac{M_x}{EJ_x} dz. \quad (167)$$

Проинтегрируем левую и правую части уравнения (167)

$$\theta = \int \frac{M_x}{EJ_x} dz + C_1. \quad (168)$$

Выразим угол поворота через прогибы

$$\theta = \frac{dV}{dz} = \int \frac{M_x}{EJ_x} dz + C_1. \quad (169)$$

Разделим дифференциалы

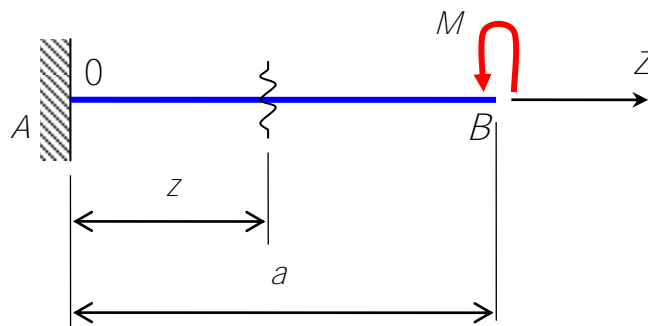
$$dV = \left( \int \frac{M_x}{EJ_x} dz + C_1 \right) dz. \quad (170)$$

Проинтегрируем левую и правую части уравнения и получим решение

$$V = \int dz \int \frac{M_x}{EJ_x} dz + C_1 z + C_2. \quad (171)$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  определяются из граничных условий на концах каждого участка балки. Число постоянных интегрирования равно удвоенному числу участков на балке. В этом недостаток рассматриваемого метода. Достоинством метода является возможность определения углов поворота и прогибов балки переменной жесткости и при любой по сложности нагрузке.

**П р и м е р.** Определение прогиба и угла поворота сечения балки методом непосредственного интегрирования. Рассмотрим защемленную балку постоянной жесткости (рис.63).



**Рис.63. Консоль, нагруженная сосредоточенным моментом, приложенным к ее концу**

Изгибающий момент выражается функцией

$$M_x(z) = M. \quad (172)$$

Угол поворота

$$\theta = \int \frac{M_x}{EJ_x} dz + C_1 = \int \frac{M}{EJ_x} dz + C_1 = \frac{M}{EJ_x} \int dz + C_1 = \frac{M}{EJ_x} z + C_1. \quad (173)$$

Прогиб

$$\begin{aligned} V &= \int dz \int \frac{M_x}{EJ_x} dz + C_1 z + C_2 = \int dz \int \frac{M_1}{EJ_x} dz + C_1 z + C_2 = \\ &= \frac{M_1}{EJ_x} \int dz \int dz + C_1 z + C_2 = \frac{M_1 z^2}{2EJ_x} + C_1 z + C_2. \end{aligned} \quad (174)$$



Определим постоянные интегрирования. Для этого используем условие на концах балки:

$$1) \text{ при } z = 0, \quad \theta = 0.$$

$$\theta = \frac{M}{EJ_x} z + C_1 = 0, \quad C_1 = 0; \quad (175)$$

$$2) \text{ при } z = 0, \quad V = 0.$$

$$V = \frac{M_1 z^2}{2EJ_x} + C_1 \cdot z + C_2 = 0, \quad C_2 = 0. \quad (176)$$

В результате получим аналитические выражения (функции) для углов поворота и прогибов балки.

$$\theta = \frac{M_1}{EJ_x} z, \quad V = \frac{M_1}{2EJ_x} z^2. \quad (177)$$

#### 1.6.14 Определение прогибов и углов поворота в балках методом начальных параметров

Если балка постоянной жесткости  $EJ$  и имеет несколько участков, то удобнее прогибы и углы поворота определять по методу начальных параметров. Возьмем приближенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = \frac{M_x}{EJ}. \quad (178)$$

Учтем, что производная от прогиба равна углу поворота

$$\frac{dV}{dz} = \theta. \quad (179)$$

Поэтому уравнение (178) можно записать в следующем виде

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{dV}{dz} \right) = \frac{d\theta}{dz} = \frac{M_x}{EJ}. \quad (180)$$

Разделим дифференциалы

$$d\theta = \frac{M_x}{EJ} dz. \quad (181)$$

Проинтегрируем левую и правую части уравнения

$$EJ \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^z M_x dz \quad (182)$$

или

$$E\theta - E\theta_0 = \int_0^z M_x dz. \quad (183)$$

В уравнении (183) перенесем  $E\theta_0$  в правую часть

$$E\theta = E\theta_0 + \int_0^z M_x dz. \quad (184)$$

Далее выразим угол поворота через прогибы

$$EJ \frac{dV}{dz} = E\theta_0 + \int_0^z M_x dz \quad (185)$$

или

$$EJ \cdot dV = E\theta_0 \cdot dz + \left( \int_0^z M_x dz \right) \cdot dz. \quad (186)$$

Проинтегрируем левую и правую части уравнения

$$EJ \int_{V_0}^V dV = E\theta_0 \int_0^z dz + \int_0^z dz \int_0^z M_x dz \quad (187)$$

или

$$EJV - EJV_0 = E\theta_0 z + \int_0^z dz \int_0^z M_x dz. \quad (188)$$

Перенесем  $EJV_0$  в правую часть уравнения (188) и получим

$$EJV = EJV_0 + E\theta_0 z + \int_0^z dz \int_0^z M_x dz. \quad (189)$$

Получена интегральная форма функции прогибов балки (189).  
Здесь  $V_0$  и  $\theta_0$  – начальные параметры. На основе полученной зависимости строится метод начальных параметров.

Для взятия интеграла в уравнении (189) от отдельных наиболее часто встречающихся видов нагрузок рассмотрим балку, нагруженную одним сосредоточенным моментом, одной сосредоточенной силой и одной равномерно распределенной нагрузкой (рис.64). Обозначим координаты точек приложения сосредоточенного момента и сосредоточенной силой,

соответственно,  $z_m$  и  $z_f$  Координата начала участка приложения равномерно распределенной нагрузки обозначим  $z_q$ .

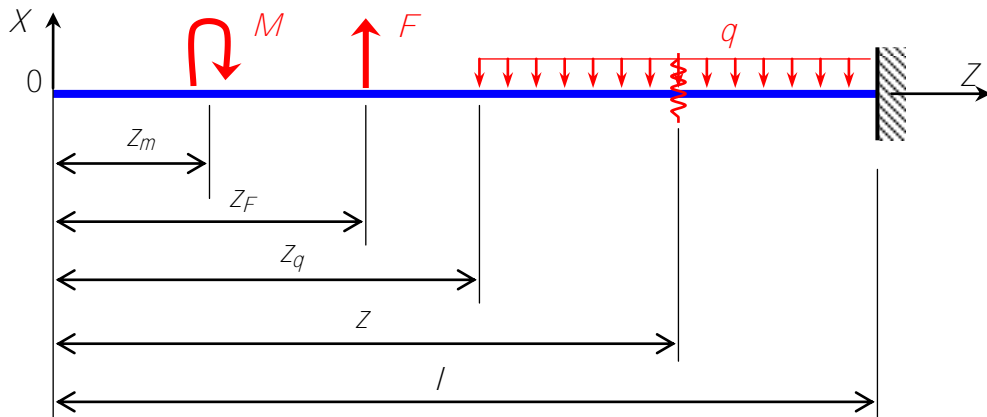


Рис.64. Балка, нагруженная сосредоточенным моментом, сосредоточенной силой и равномерно распределенной нагрузкой

Возьмем интеграл, содержащийся в уравнении (189):

– от сосредоточенного момента  $z_m \leq z \leq l$ ,  $M_x = M$ .

$$\int_{z_m}^z dz \int_{z_m}^z M dz = \int_{z_m}^z d(z - z_m) \int_{z_m}^z M \cdot d(z - z_m) = \frac{M(z - z_m)^2}{2}; \quad (190)$$

– от сосредоточенной силы  $z_f \leq z \leq l$ ,  $M_x = F \cdot (z - z_f)$

$$\int_{z_f}^z dz \int_{z_f}^z F(z - z_f) dz = \int_{z_f}^z d(z - z_f) \int_{z_f}^z F(z - z_f) \cdot d(z - z_f) = \frac{F(z - z_f)^3}{2 \cdot 3}; \quad (191)$$

– от распределенной нагрузки  $z_q \leq z \leq l$ ,  $M_x = \frac{q(z - z_q)^2}{2}$

$$\int_{z_q}^z dz \int_{z_q}^z \frac{q(z - z_q)^2}{2} dz = \int_{z_q}^z d(z - z_q) \int_{z_q}^z \frac{q(z - z_q)^2}{2} d(z - z_q) = \frac{q(z - z_q)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}. \quad (192)$$

Суммируя интегралы от всех видов нагрузок и полагая, что к балке могут быть приложены несколько нагрузок одного и того же вида, получим универсальное уравнение упругой оси балки.

$$EJV = \frac{EJV_0}{0!} + \frac{EJ\theta_0 z}{1!} \pm \sum \frac{M(z - z_m)^2}{2!} \pm \sum \frac{F(z - z_f)^3}{3!} \pm \sum \frac{q(z - z_q)^4}{4!}. \quad (193)$$

Преимущества метода начальных параметров заключается в том, что нам приходится находить только две постоянные интегрирования. Особенно это преимущество заметно, если на балке несколько участков. Однако, метод начальных параметров имеет и недостатки – балка должна быть постоянной жесткости на всей ее длине; слагаемые в универсальном

уравнении упругой оси балки могут отличаться на порядки (193). Поэтому при использовании метода начальных параметров предъявляются определенные требования.

Правила и требования.

- 1) Начало координат всегда выбирать в левой крайней точке балки.
- 2) Начальные параметры равны соответственно прогибу и углу поворота сечения на левом конце балки.
- 3) При вычислении прогибов или углов поворота сечения балки учитывать только слагаемые, содержащие силовые факторы, приложенные левее рассматриваемого сечения.
- 4) Знак перед слагаемым совпадает со знаком изгибающего момента в рассматриваемом сечении, вызванного силовым фактором, содержащимся в этом слагаемом.
- 5) Где-то начавшаяся равномерно распределенная нагрузка не должна заканчиваться до правого конца балки.

Уравнения углов поворота получается взятием производной от уравнения для прогибов (200).

$$EJ\theta = \frac{EJ\theta_0}{0!} \pm \sum \frac{M(z-z_m)}{1!} \pm \sum \frac{F(z-z_f)^2}{2!} \pm \sum \frac{q(z-z_q)^3}{3!}. \quad (194)$$

**П р а в и л о   з н а к о в.**

Прогиб вверх и поворот против хода часовой стрелки считаются положительными.

**П р и м е р.** Определение прогибов в балке методом начальных параметров (рис.65, а).

Подготовим балку согласно требованиям метода начальных параметров: начало координат поместить в левой крайней точке балки; продольную ось направить вправо; ось  $V$  направить вверх; пронумеровать участки балки слева направо; дополнить нагрузку  $q$  и приложить компенсирующую нагрузку  $q$  снизу вверх (рисю 65, б).

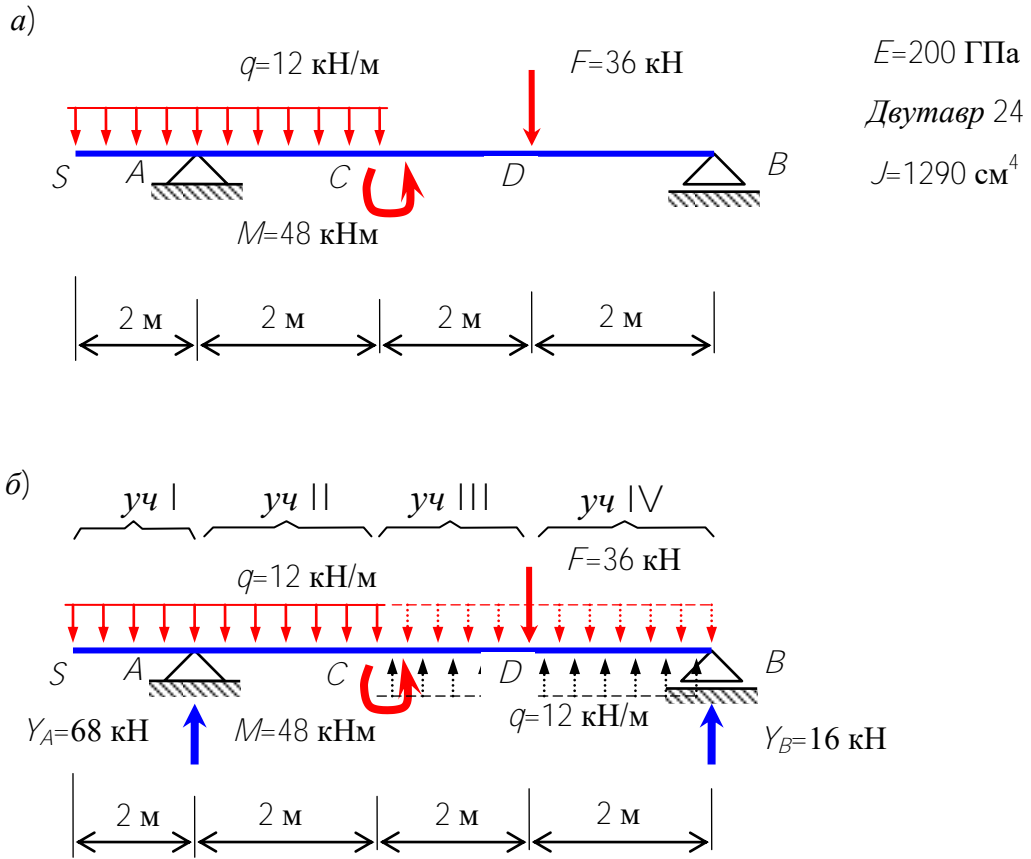
Вычислим реакции опор

$$\sum M_A = q \cdot 4 \cdot 0 - M + F \cdot 4 - Y_B \cdot 6 = 12 \cdot 4 \cdot 0 - 48 + 36 \cdot 4 - Y_B \cdot 6 = 0; \quad (195)$$

$$Y_B = 16 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = -q \cdot 4 \cdot 6 + Y_A \cdot 6 - M - F \cdot 2 = -12 \cdot 4 \cdot 6 + Y_A \cdot 6 - 48 - 36 \cdot 2 = 0; \quad (196)$$

$$Y_A = 68 \text{ кН}.$$



**Рис. 65. Шарнирно опертая балка, нагруженная сосредоточенным моментом, сосредоточенной силой и равномерно распределенной нагрузкой**

Составим универсальное уравнение упругой оси балки

$$EJV = EJV_0 + EJ\theta_0 \cdot z - \frac{q(z-0)^4}{24} \Big|' + \frac{Y_A(z-2)^3}{6} \Big|'' - \frac{M(z-4)^2}{2} + \frac{q(z-4)^4}{24} \Big|''' - \frac{F(z-6)^3}{6} \Big|^{IV} \quad (197)$$

По условию закрепления определим начальные параметры

1) На опоре  $A$   $z=2 \text{ м}$ , участок  $I$   $V=0$ .

$$EJV_A = EJV_0 + EJ\theta_0 \cdot 2 - \frac{12 \cdot (2-0)^4}{24} \Big|' = 0 \quad (198)$$

2) На опоре  $B$   $z=8 \text{ м}$ , участок  $III$   $V=0$ .

$$\begin{aligned}
 EJV = EJV_0 + E\theta_0 \cdot 8 - \frac{12 \cdot (8-0)^4}{24} \Big|' + \frac{68 \cdot (8-2)^3}{6} \Big|'' - \frac{48 \cdot (8-4)^2}{2} + \\
 + \frac{12 \cdot (8-4)^4}{24} \Big|''' = 0.
 \end{aligned}
 \tag{199}$$

Выполним вычисления и получим два уравнения с двумя неизвестными  $EJV_0$  и  $E\theta_0$ .

$$\begin{cases}
 EJV_0 + 2E\theta_0 - 8 \cdot 10^3 = 0; \\
 EJV_0 + 8E\theta_0 + 144 \cdot 10^3 = 0.
 \end{cases}
 \tag{200}$$

Решим систему и получим начальные параметры

$$E\theta_0 = -25,33 \cdot 10^3 \text{ Нм}^2; \quad EJV_0 = 58,66 \cdot 10^3 \text{ Нм}^3.
 \tag{201}$$

Вычислим прогиб в точке  $S$  ( $z = 0$ , участок I)

$$\begin{aligned}
 EJV_S = EJV_0 = 58,66 \cdot 10^3 \text{ Нм}^3. \\
 V_S = \frac{58,66 \cdot 10^3}{EJ} = \frac{58,66 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 22,74 \text{ мм}
 \end{aligned}
 \tag{202}$$

Подставляя данные в выражение (203) вычислим прогиб в точке  $D$  ( $z = 6$  м, участок III)

$$V_D = 27,91 \text{ мм}.
 \tag{203}$$

## 1.7 Напряженное и деформированное состояние в точке

### 1.7.1 Понятие о напряженном состоянии в точке

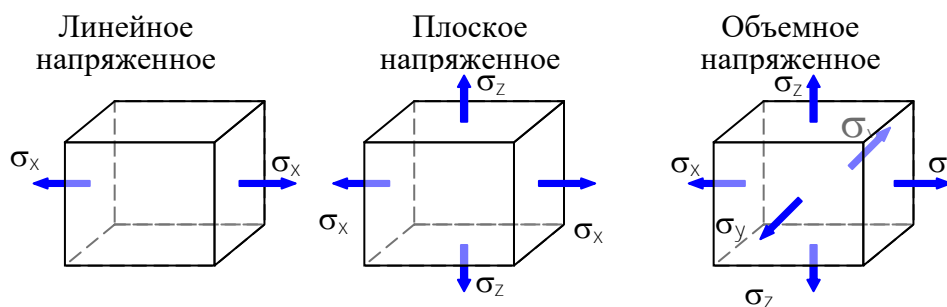
*Напряженным состоянием в точке называется совокупность напряжений действующих на всевозможных площадках, проведенных через эту точку.*

В механике твердого деформируемого тела различают три основных вида напряженных состояния – линейное (одноосное), плоское (двуосное) и объемное (трехосное). Дадим определения этим видам напряженных состояний. Для этого в нагруженном теле около внутренней точки вырежем элемент (рис.66).

*Если две пары противоположных площадок элемента свободны от напряжений, то имеет место линейное напряженное состояние.*

*Если одна пара противоположных площадок элемента свободна от напряжений, то имеет место плоское напряженное состояние.*

Если нет ни одной пары противоположных площадок элемента свободных от напряжений, то имеет место **объемное напряженное состояние**.



**Рис. 66. Примеры видов напряженных состояний**

### 1.7.2 Правила расстановки индексов и знаков

Существуют общие правила расстановки индексов и знаков для нормальных и касательных напряжений. Но в некоторых случаях имеет место и отступление этих общих правил. Рассмотрим общие правила.

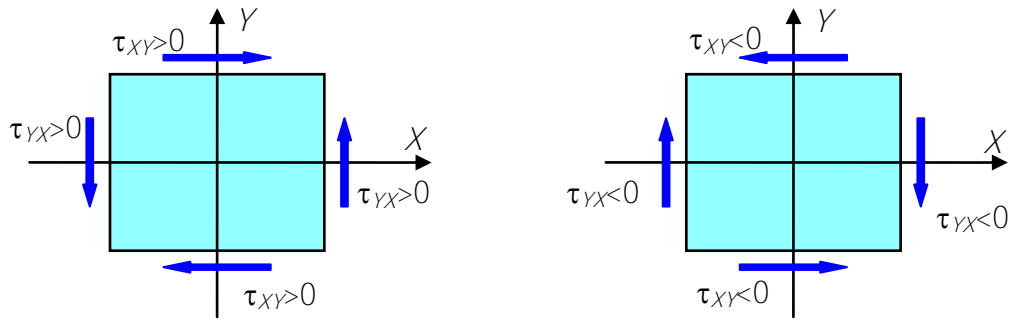
Нормальное напряжение имеет один индекс, совпадающий с обозначением оси, параллельно которой действует само напряжение.

Нормальные напряжения, вызывающие растяжение, считаются положительными, а сжатие – отрицательным.

Касательные напряжения имеют два индекса. Первый индекс совпадает с обозначением оси, по направлению которой действует само напряжение. Второй индекс совпадает с обозначением оси, параллельно которой направлена нормаль площадки, где действует напряжение.

Если направление касательного напряжения и внешней нормали площадки, где действует напряжение, одновременно совпадают или одновременно не совпадают с положительными направлениями соответствующих осей координат, то такие касательные напряжения считаются положительными.

Отметим, что в сопротивлении материалов принято, что знак касательного напряжения в балке от поперечной силы совпадает со знаком поперечной силы.



**Рис. 67. Пример обозначений и расстановки знаков касательных напряжений**

### 1.7.3 Напряжения на наклонной площадке при плоском напряженном состоянии

Рассмотрим элементарный параллелепипед, испытывающий плоское напряженное состояние (рис.68). Пусть под углом  $\alpha$  проведена площадка. Требуется получить выражения для нормального и касательного напряжений на этой наклонной площадке.

Установим зависимость площадей наклонной и координатных площадок

$$dA_x = 1 \cdot dy = dA_\alpha \cdot \cos\alpha; \quad dA_y = 1 \cdot dx = dA_\alpha \cdot \sin\alpha. \quad (204)$$

Составим уравнение равновесия

$$\sum X_1 = \sigma_\alpha \cdot dA - \sigma_x \cdot dA_x \cos\alpha - \tau_{xy} \cdot dA_y \cos\alpha - \sigma_y \cdot dA_y \sin\alpha - \tau_{yx} \cdot dA_x \sin\alpha = 0. \quad (205)$$

Подставим зависимость площадей (211) в уравнение равновесия (212)

$$\sigma_\alpha \cdot dA_\alpha - \sigma_x \cdot dA_\alpha \cos^2\alpha - \tau_{xy} \cdot dA_\alpha \sin\alpha \cdot \cos\alpha - \sigma_y \cdot dA_\alpha \sin^2\alpha - \tau_{yx} \cdot dA_\alpha \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0. \quad (206)$$

Сократим на  $dA_\alpha$ , приведем подобные и получим

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha. \quad (207)$$

Составим уравнение равновесия

$$\sum Y_1 = \tau_\alpha \cdot dA_\alpha + \sigma_x \cdot dA_x \sin\alpha + \tau_{xy} \cdot dA_y \sin\alpha - \sigma_y \cdot dA_y \cos\alpha - \tau_{yx} \cdot dA_x \cos\alpha = 0. \quad (208)$$



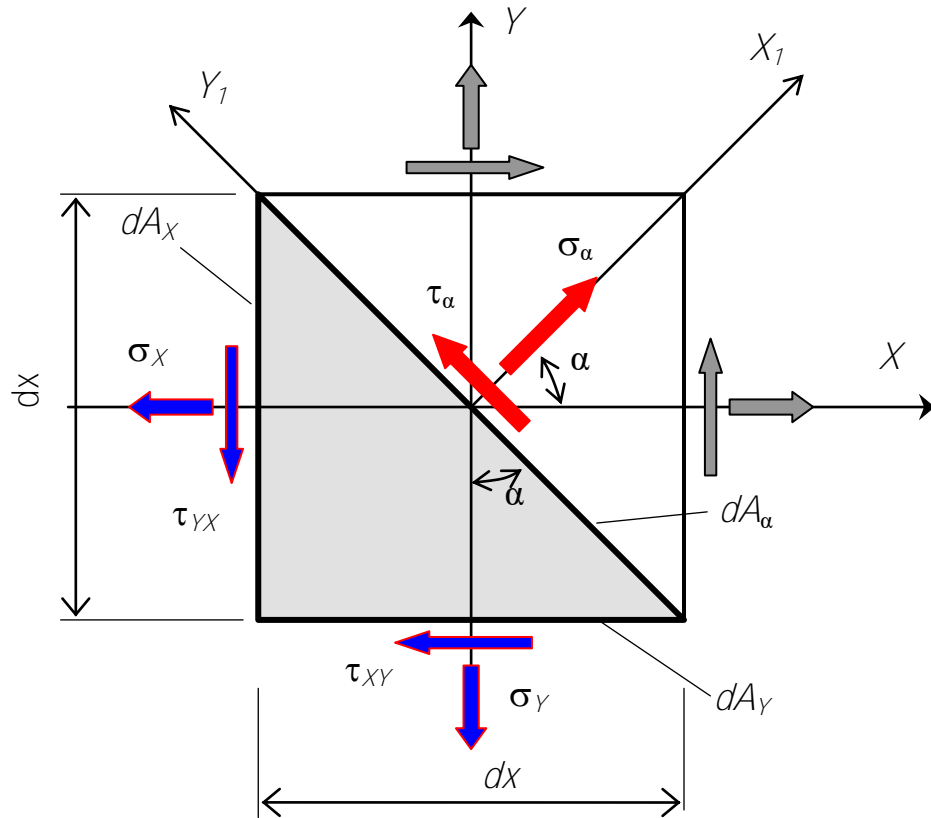


Рис.68. Напряжения, действующие на грани элемента и на наклонную площадку

Подставим в уравнение (208) зависимость площадей (204) и получим

$$\tau_{\alpha} \cdot dA_{\alpha} + \sigma_X \cdot dA_{\alpha} \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \tau_{XY} \cdot dA_{\alpha} \sin^2 \alpha - \sigma_Y \cdot dA_{\alpha} \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \tau_{YX} \cdot dA_{\alpha} \cos^2 \alpha = 0. \quad (209)$$

Сократим на  $dA_{\alpha}$ , приведем подобные и получим

$$\tau_{\alpha} = -\frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{XY} \cos 2\alpha. \quad (210)$$

Окончательно имеем выражения для вычисления нормальных и касательных напряжений на наклонной площадке при плоском напряженном состоянии.

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= \sigma_X \cos^2 \alpha + \sigma_Y \sin^2 \alpha + \tau_{XY} \sin 2\alpha; \\ \tau_{\alpha} &= -\frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{XY} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (211)$$

### 1.7.4 Главные площадки и главные напряжения

Если оси  $X_1$  и  $Y_1$  (рис.68) поворачивать, то при каком-то положении на наклонной площадке нормальное напряжение достигнет экстремального значения. Найдем положение такой площадки.

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} &= (\sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha)' = \\ &= -\sigma_x 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sigma_y 2 \cos \alpha \cdot \sin \alpha + \tau_{xy} 2 \cos 2\alpha = 0. \end{aligned} \quad (212)$$

Далее уравнение (212) разделим на 2 и приведем подобные

$$-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha = 0. \quad (213)$$

Слагаемые уравнения (213) умножим на 2, разделим на  $\cos 2\alpha$  и на  $(\sigma_x - \sigma_y)$  получим формулу для определения угла наклона такой особенной площадки, на которой нормальное напряжение принимает экстремальное значение (214).

$$\boxed{\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}}. \quad (214)$$

Сравнивая выражение (210) и уравнение (213), убеждаемся, что касательные напряжения на этих площадках равны нулю.

$$\tau_\alpha = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = 0. \quad (215)$$

Эти площадки настолько важны в механике твердого деформированного тела, что им присвоено специальное название.

*Три взаимно перпендикулярные площадки, на которых касательные напряжения равны нулю, а нормальные напряжения принимают экстремальные значения, называются **главными площадками**.*

*Нормальные напряжения, действующие на главных площадках, называются **главными напряжениями**.*

Главные напряжения индексируются цифрами. Для удобства и сокращения записей принята индексация главных напряжений по условию

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (216)$$

Главные напряжения для плоского напряженного состояния вычисляются по формуле (без вывода)

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (217)$$

Недостающее главное напряжение равно нулю.

### 1.7.5 Графическое представление плоского напряженного состояния. Круг напряжений (круг Мора)

Зависимость напряжений  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$  от угла наклона площадки  $\alpha$  имеет простую геометрическую аналогию в виде круговой диаграммы (рис.69), предложенной немецким ученым Отто Мором.

Из круга напряжений имеем.

Положение центра круга –

$$\sigma_c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}. \quad (218)$$

Радиус круга –

$$R_\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (219)$$

Координата точки  $B$  – это значение главного напряжения  $\sigma_1$

$$\sigma_1 = \sigma_c + R_\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (220)$$

Координата точки  $A$  – это значение главного напряжения  $\sigma_2$

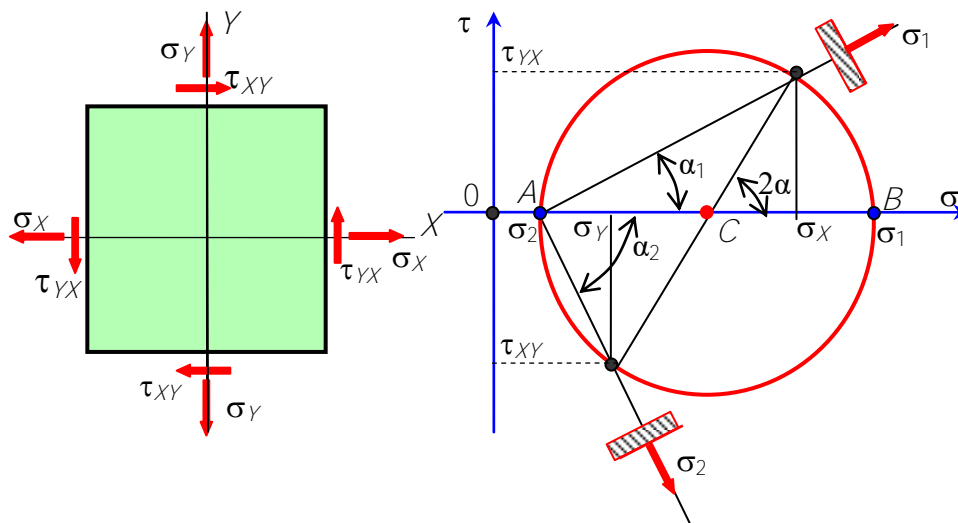
$$\sigma_2 = \sigma_c - R_\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (221)$$

Совместим формулы (227) и (228) в одно выражение

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (222)$$

Судя по рисунку (рис. 70), угол наклона главных площадок равен

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (223)$$



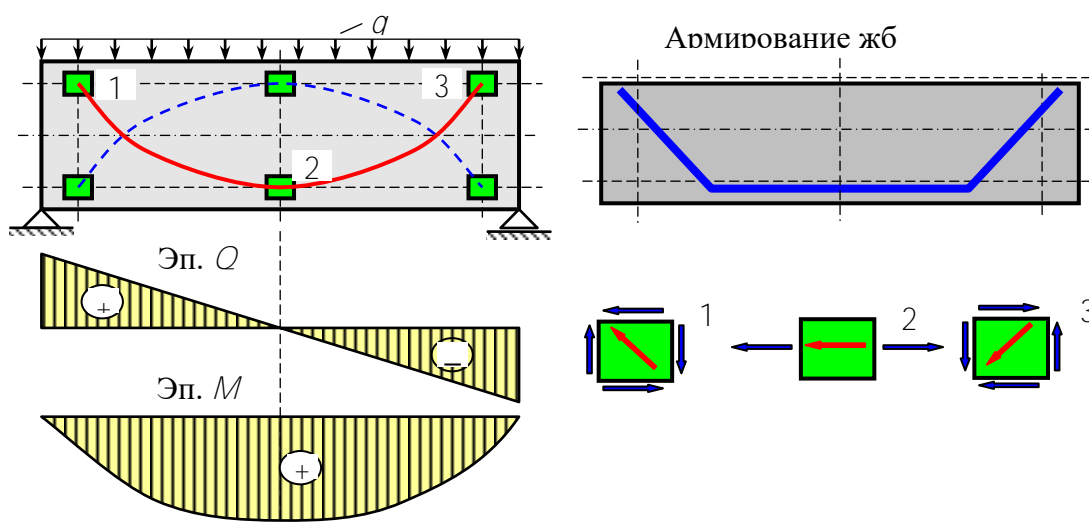
**Рис.69. Графическое представление плоского напряженного состояния кругом напряжений**

Правило построения главных площадок при плоском напряженном состоянии.

*Большее главное напряжение направлено по оси, полученной поворотом на угол  $\alpha$  оси площадки с большим нормальным напряжением в ту сторону, куда указывает касательное напряжение, приложенной к этой же площадке. Другое главное напряжение направлено перпендикулярно большему главному напряжению.*

### 1.7.6 Понятие о траекториях главных напряжений.

Наглядное представление о потоке внутренних сил в нагруженном теле дают траектории главных напряжений. Например, они имеют практическое значение при проектировании железобетонных конструкций.



**Рис.70. Траектории главных напряжений и армирование железобетонной балки**

### 1.7.7 Главные деформации и главные оси деформации

Математические зависимости при исследовании напряженного состояния в точке справедливы и при исследовании деформированного состояния в точке.

*В любой точке деформируемого тела всегда можно найти три взаимно перпендикулярные направления, на которых отрезки при деформации тела не искривляются, а имеют лишь линейные деформации, то есть удлиняются или укорачиваются. Такие направления называются **главными осями деформации**. Сами деформации по этим направлениям называются **главными деформациями**.*

При индексации главных деформаций должно выполняться условие

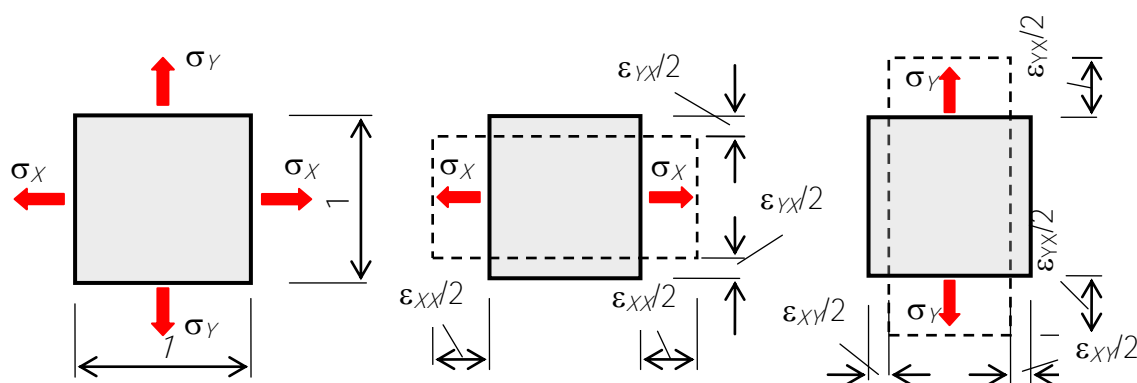
$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3. \quad (224)$$

Главные деформации, как и главные напряжения, являются экстремальными величинами.

*Для изотропных материалов в любой точке тела главные оси деформации совпадают с направлениями главных напряжений.*

### 1.7.8 Закон Гука при плоском и объемном напряженных состояниях

Рассмотрим элемент, находящийся в условиях плоского напряженного состояния (рис. 71). Пусть на его площадках действуют только нормальные напряжения.



**Рис.71. Представление плоского напряженного состояния на два линейных состояния**

Используя принцип независимости действия сил, рассмотрим деформации элемента поочередно от действия напряжения  $\sigma_x$  и от действия напряжений  $\sigma_y$ .

Условимся первым индексом обозначать направление деформации, а вторым индексом направление фактора, вызвавшего эту деформацию.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_x}{E}; \quad \varepsilon_{yx} = -\nu\varepsilon_{xx} = -\frac{\sigma_x}{E}. \quad (225)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_y}{E}; \quad \varepsilon_{xy} = -\nu\varepsilon_{yy} = -\frac{\sigma_y}{E}. \quad (226)$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E}; \quad (227)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yx} = \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E}. \quad (228)$$

Окончательно имеем выражение закон Гука для плоского напряженного состояния

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x). \end{aligned} \quad (229)$$

По аналогии запишем закон Гука для объемного напряженного состояния

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{aligned} \quad (230)$$

## 1.8. Чистый сдвиг

### 1.8.1. Понятие о чистом сдвиге

*Чистым сдвигом* называется такой вид плоского напряженного состояния, при котором по двум взаимно перпендикулярным площадкам, расположенным определенным образом, действуют только касательные напряжения.

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0. \quad (231)$$

Рассмотрим элемент, испытывающий чистый сдвиг (рис. 72). Учитывая условие (238), получим выражения для вычисления напряжений на наклонной площадке при чистом сдвиге.

$$\sigma_\alpha = \tau_{xy} \sin 2\alpha; \quad \tau_\alpha = \tau_{xy} \cos 2\alpha. \quad (232)$$

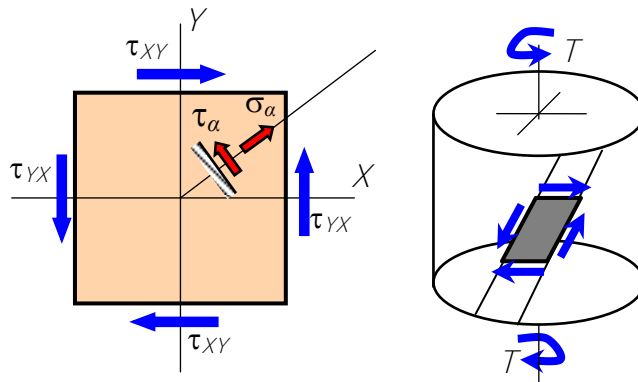


Рис. 72. Элемент, испытывающий чистый сдвиг

При чистом сдвиге линейные размеры элемента не изменяются. Изменяются только угловые размеры. Типичным примером случая, когда во всех точках тела материал испытывает чистый сдвиг, является кручение тонкостенной трубки.

### 1.8.2. Анализ напряженного состояния при чистом сдвиге

Определим положение главных площадок при чистом сдвиге. На главных площадках, неважно при каком виде сопротивления, появляются экстремальные нормальные напряжения. Чтобы найти положение этих площадок, то есть угол наклона  $\alpha$ , возьмем производную от функции (232), приравняем ее к нулю и решим полученное уравнение.

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} &= (\tau_{xy} \sin 2\alpha)' = \tau_{xy} 2 \cos 2\alpha = 0. \\ 2\alpha_1 &= 90^\circ; & \alpha_1 &= 45^\circ; \\ 2\alpha_2 &= 270^\circ; & \alpha_2 &= 135^\circ. \end{aligned} \quad (233)$$

Значения главных напряжений получим, подставив углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в выражения (232) и получим.

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \tau_{xy} \sin(2 \cdot 45^\circ) = \tau_{xy}; \\ \sigma_3 &= \tau_{xy} \sin(2 \cdot 135^\circ) = -\tau_{xy}. \end{aligned} \quad (234)$$

Таким образом, при чистом сдвиге главные напряжения (сжимающее и растягивающее) равны между собой. Их значения равны касательному напряжению чистого сдвига. Главные площадки расположены под углом  $45^\circ$  к площадкам чистого сдвига.

### 1.8.3. Закон Гука при чистом сдвиге

Если для линейных деформаций закон Гука справедлив, то он справедлив и для угловых деформаций. Сформулируем этот закон.

*Экспериментально установлено, что до определенного предела деформация сдвига происходит упруго, а ее величина прямо пропорциональна касательным напряжениям.*

$$\gamma = \frac{\tau}{G}; \quad \tau = G\gamma. \quad (235)$$

Здесь  $G$  – модуль упругости при сдвиге (модуль сдвига) или модуль упругости второго рода. Имеет размерность МПа.

для стали  $G = 78$  ГПа;

для алюминия  $G = 27$  МПа.

### 1.8.4. Зависимость между модулем упругости при растяжении (сжатии) и модулем сдвига

$E$ ,  $\nu$  и  $G$  – это физические коэффициенты, которые связывают деформации и напряжения. Для изотропных материалов основными физическими коэффициентами являются  $E$  и  $\nu$ . Все другие физические коэффициенты, а их достаточно много, являются производными и всегда могут быть выражены через основные  $E$  и  $\nu$ .

Установим связь между  $E$ ,  $\nu$  и  $G$ . Пусть на площадках элемента действуют только касательные напряжения. То есть элемент испытывает чистый сдвиг (рис. 73).

Выразим  $\Delta s$  через деформации сдвига

$$\Delta s = \delta \cdot \cos 45^\circ = a \cdot \gamma \frac{\sqrt{2}}{2} = s \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \gamma \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot s \cdot \gamma = \frac{1}{2} \cdot s \cdot \frac{\tau}{G}. \quad (236)$$

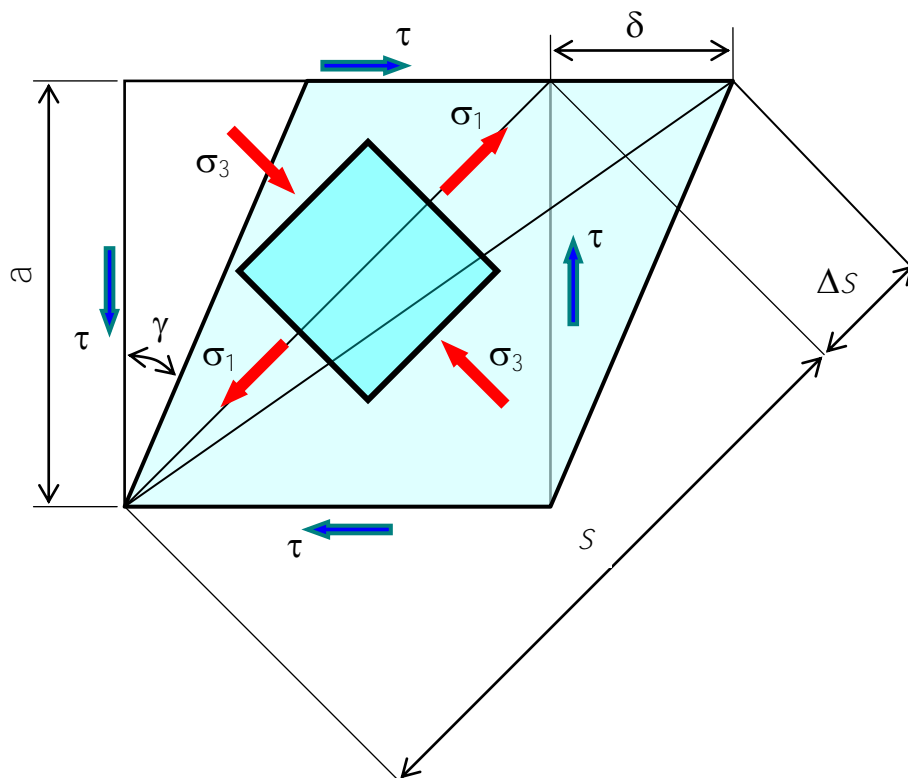
Выразим  $\Delta s$  через деформации растяжение-сжатие

$$\Delta s = \varepsilon_1 \cdot s = \frac{s}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_3) = \frac{s}{E} (\tau + \nu \tau) = \frac{1 + \nu}{E} \cdot \tau \cdot s. \quad (237)$$

Сократим на  $\tau$  и на  $s$ . В результате получим

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{G} = \frac{1 + \nu}{E}. \quad (238)$$





**Рис. 73. Деформации сдвига и растяжения-сжатия в элементе, испытывающий чистый сдвиг**

В результате получим зависимость

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (239)$$

### 1.8.5. Расчет болтовых (заклепочных) соединений на срез

В строительстве при изготовлении строительных конструкций наряду со сваркой очень часто используются болтовые и заклепочные соединения. Эти соединения используются в особо ответственных конструкциях или при наличии динамических или вибрационных нагрузках. Действительная работа болтовых и заклепочных соединений весьма сложна. Поэтому в сопротивлении материалов и курсе «Металлические конструкции» принимаются упрощения. Предполагается, что черные болты и заклепки могут разрушаться от среза. В заклепке может быть одна, две или (реже) три площадки среза, которые имеют форму круга диаметром равным диаметру стержня заклепки.

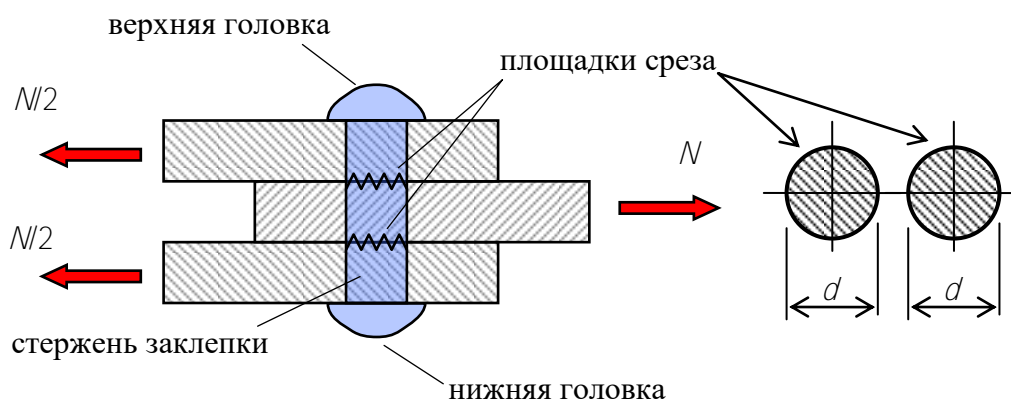


Рис. 74. Заклепочное соединение и его элементы

**Допущение 1е.** В предельном состоянии касательные напряжения по площадке среза распространяются равномерно и достигают расчетного сопротивления  $R_s$ .

**Допущение 2е.** Все заклепки (болты) соединения работают одинаково на срез.

Отметим, что это не так. Больше всего страдают крайние в ряду заклепок. С них начинается разрушение всего заклепочного соединения.

Учитывая принятые допущения, условие прочности имеет вид

$$\tau = \frac{N}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot n_s \cdot n} \leq R_s, \quad (240)$$

где  $N$  – сила, передающаяся через соединение;  
 $d$  – диаметр заклепки (стержня заклепки);  
 $n$  – количество заклепок в соединении (см пояснения ниже);  
 $n_s$  – количество площадок среза в одной заклепке;  
 $R_s$  – расчетное сопротивление одной заклепки на срез.

Для внесения ясности по вопросу заклепочных (болтовых) соединений, следует отличать узел и соединение. Будем считать, что соединение – это конструктивный элемент, соединяющий только два каких-либо элемента конструкции. Узел это конструктивный элемент, к которому сходятся или от которого расходятся два и более элемента конструкции. Узел может состоять из одного или нескольких соединений. На рисунке (рис. 75) показан узел нижнего пояса фермы, состоящая из пяти соединений. Каждое соединение передает на фасонку силу, появляющуюся в соответствующем элементе. Расчет следует производить каждого соединения в отдельности.

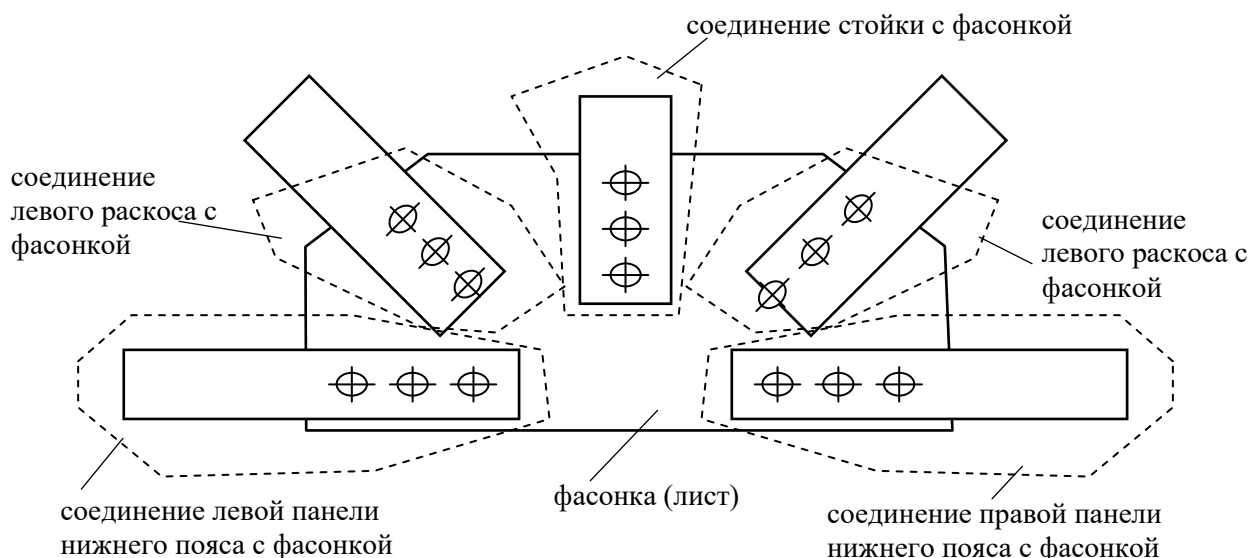


Рис. 75. Узел фермы нижнего пояса, состоящий из пяти соединений

### 1.8.6 Расчет болтовых (заклепочных) соединений на смятие

Причиной разрушения болтовых (заклепочных) соединений кроме среза может быть смятие их стержней. Рассмотрим стержень заклепки, подвергнутой смятию (рис. 76).

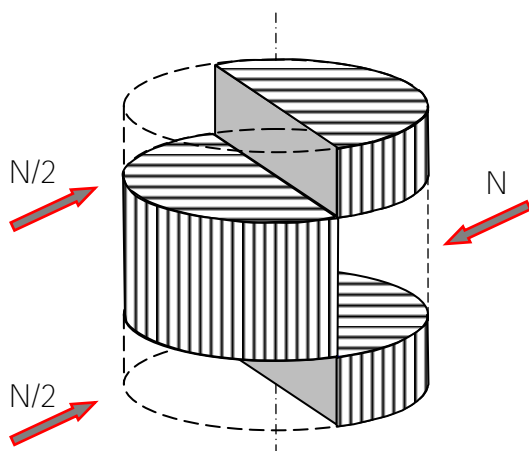


Рис. 76. Площадки смятия на стержне заклепки

Для расчета заклепочного (болтового) соединения на смятие приняты следующие допущения.

**Допущение 1е.** При расчете заклепки опасность на смятие оценивается средним напряжением, отнесенным к площади проекции поверхности контакта на диаметральною плоскость.

**Допущение 2е.** Все заклепки (болты) соединения работают

одинаково на смятие.

С учетом принятых допущений условие прочности заклепочного (болтового) соединения на смятие имеет вид

$$\sigma_p = \frac{N}{n \cdot d \sum t} \leq R_{pb}, \quad (241)$$

где  $N$  – сила, передающаяся через соединение;  
 $d$  – диаметр заклепки (стержня заклепки);  
 $n$  – количество заклепок в соединении;  
 $\Sigma t$  – меньшая сумма толщин элементов, сдвигаемых в одном направлении;  
 $R_{pb}$  – расчетное сопротивление заклепок (болтов) на смятие.

### 1.8.7 Расчет сварных соединений – угловых фланговых швов

В строительстве для соединения элементов конструкций чаще всего используется электросварка. Швы сварки разделяют на несколько видов: потолочные, вертикальные, лобовые, фланговые и другого вида швы. Мы рассмотрим фланговые угловые швы, разрушение которых происходит по наиболее сложной схеме (рис. 77).

Угловые фланговые швы разрушаются от среза.

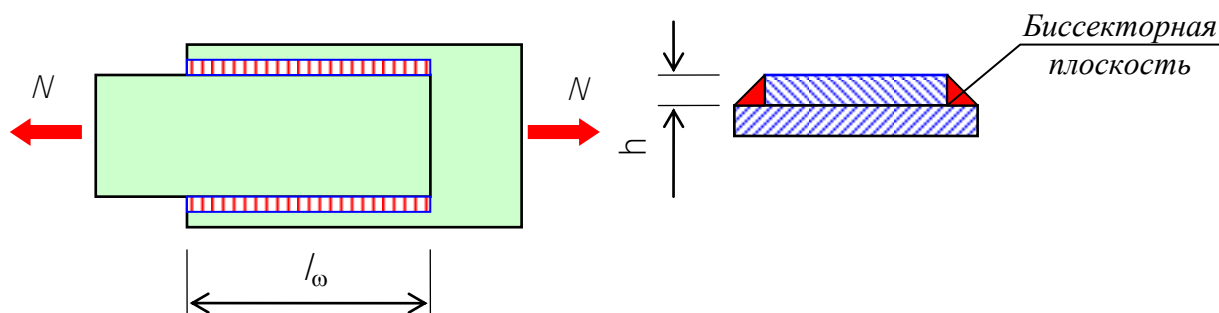


Рис. 77. Угловые фланговые швы

Приняты следующие упрощения.

**Допущение 1е.** Разрушение углового флангового шва происходит от среза по площадке в биссекторной плоскости.

**Допущение 2е.** В момент среза касательные напряжения распределяются равномерно по длине шва и достигают расчетного сопротивления.

Отметим, что в действительности касательные напряжения по длине углового флангового шва распределены неравномерно. Разрушение начинается с его краев.

Учитывая принятые допущения, условие прочности имеет вид

$$\tau = \frac{N}{\beta_t \cdot l_\omega \cdot h} \leq R_{\omega f}, \quad (242)$$

где  $N$  – сила, передающаяся через соединение;

$\beta_t$  – катет, зависящий от вида сварки

$$\beta_t = 0,7; 0,8; 0,9; 1,1;$$

$l_\omega$  – расчетная длина шва, принимаемая меньшей полной (проектной) длины на 10 мм (учет непровара в начале и в конце шва);

$h$  – толщина шва, принимаемая равной толщине соединяемого элемента с меньшей толщиной;

$R_{wf}$  – расчетное сопротивление угловых швов срезу по металлу шва (зависит от технологии сварки – тонкая и толстая обмазки, автоматическая и ручная сварка и пр.).

### 1.8.8 Основные понятия о процессе сварки

Рассмотрим электродугую сварку. Плавление металла свариваемых элементов происходит в электрической дуге между электродом и металлом элементов. Металл соединяемых элементов и электрода сплавляются, образуя сварной шов. В центре шва температура выше температуры плавления стали (больше  $1550^{\circ}\text{C}$ ).

По мере удаления от шва температура быстро уменьшается. Поэтому в некоторых частях шва металл закаляется и приобретает хрупкие свойства. Это ухудшает его прочность при динамических и вибрационных нагрузках.

Кроме того, за счет высокой температуры интенсивно происходят химические реакции металла с окружающим воздухом. В результате этого металл окисляется, что снижает прочность сварки. Чтобы изолировать место сварки от атмосферы применяют электроды с обмазкой. Обмазка вблизи дуги испаряется, образуя защитное облачко из инертных газов. Применяются электроды с толстой и тонкой обмазкой. Чем толще обмазка, тем качественнее сварка.

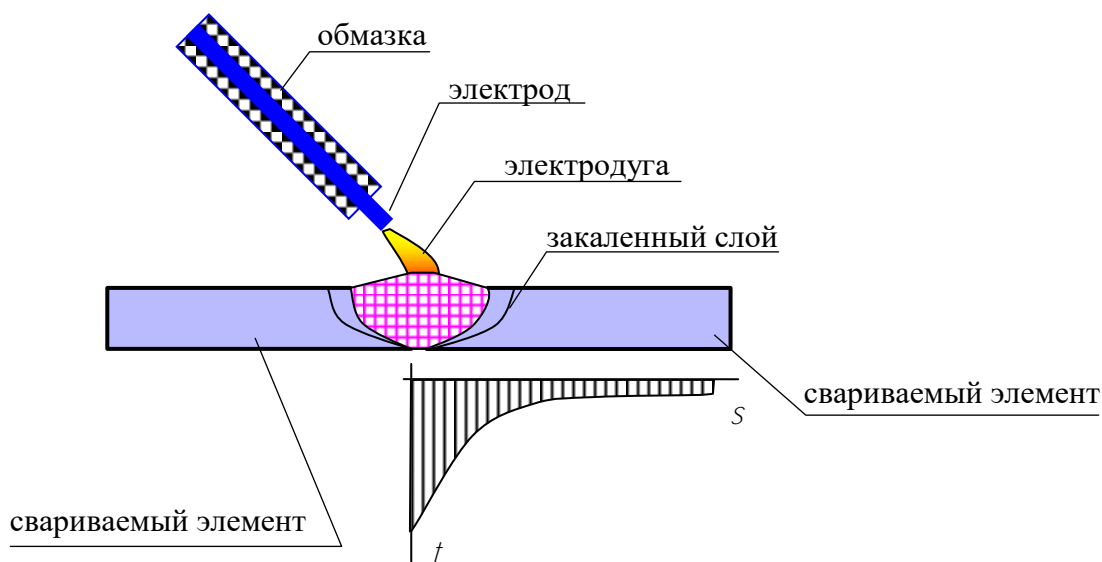


Рис. 78. Схема процесса сварки двух стальных элементов

### 1.8.9 Преимущества и недостатки заклепочных (болтовых) и сварных соединений

**Заклепочные (болтовые) соединения.**

**Преимущества:**

- хорошо работают на динамические и циклические нагрузки;
- легко контролируется качество соединения (визуально).

**Недостатки:**

- утяжеляют конструкцию за счет ослабления сечения элементов отверстиями под заклепки;
- трудоемкие в изготовлении;
- трудно автоматизируются.

**Сварные соединения.**

**Преимущества:**

- не утяжеляют конструкцию;
- нетрудоемкие в изготовлении и легко автоматизируются.

**Недостатки:**

- плохо работают на циклические и динамические нагрузки;
- трудно контролируется качество.

## 1.9. Кручение

### 1.9.1. Основные понятия. Вычисление крутящих моментов

На кручение работают многие детали машин и механизмов, некоторые элементы строительных конструкций. Для вычисления крутящих моментов используется метод сечений.

**Правило знаков.**

*Внешний момент вызывает положительный крутящий момент, если со стороны внешней нормали сечения он виден направленным по ходу часовой стрелки.*

### 1.9.2. Особенности деформирования стержня круглого сечения при кручении

Как показывают опыты ось стержня круглого (кольцевого) сечения при кручении остается прямолинейной, контуры сечения круглыми, а само сечение плоским. При кручении происходит поворот одного сечения относительно другого на некоторый угол, который называется **углом закручивания**.

В теории кручения сечений круглого (кольцевого) сечения принимают следующие гипотезы:

- 1) поперечные сечения плоские до деформации остаются плоскими и после деформации;
- 2) радиус в поперечном сечении в процессе закручивания стержня не искривляется.

На основании принятых гипотез кручение стержня круглого (кольцевого) сечения можно представить как результат сдвигов, вызванных поворотом одного поперечного сечения относительно другого поперечного сечения. Поэтому в поперечных сечениях возникают только касательные напряжения, а нормальные напряжения равны нулю.

### 1.9.3. Определение касательных напряжений при кручении сечений круглого (кольцевого) сечений

Рассмотрим элементарный участок стержня круглого сечения, подвергнутого кручению (рис. 79).

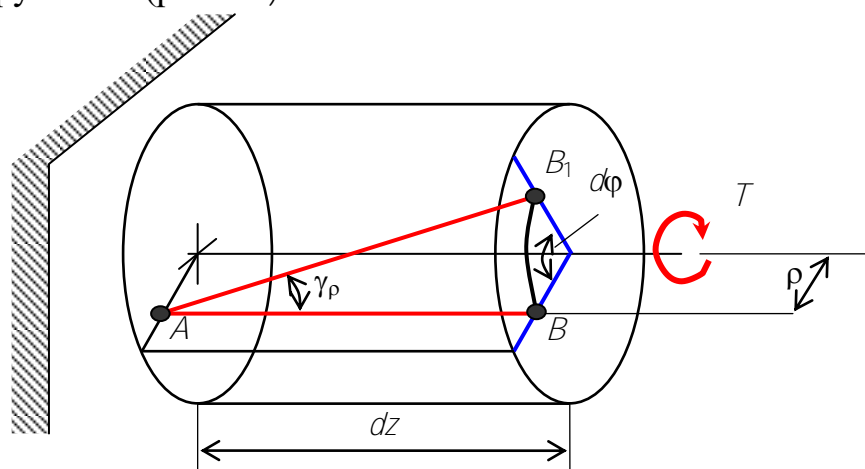


Рис. 79. Элементарный участок стержня, подвергнутого кручению

Рассмотрим продольное волокно, взятое на расстоянии  $\rho$  от оси стержня. Угол наклона (угол сдвига) волокна равен

$$\gamma_{\rho} = \frac{BB_1}{AB} = \frac{\rho d\varphi}{dz} = \rho \frac{d\varphi}{dz}. \quad (243)$$

Воспользуемся законом Гука при сдвиге

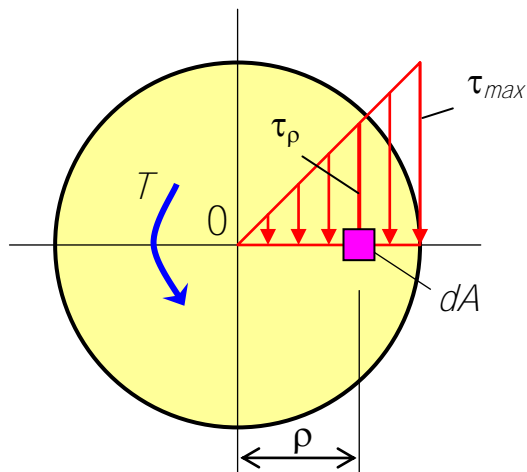
$$\tau_{\rho} = G \cdot \gamma_{\rho} = G \cdot \rho \cdot \frac{d\varphi}{dz}. \quad (244)$$

Следовательно, касательное напряжение в стержне круглого поперечного сечения при его кручении прямо пропорционально расстоянию от оси стержня до точки, где вычисляется напряжение. При этом, очевидно, что наибольшие напряжения появляются в точках поверхности стержня (рис. 80).

Отсюда имеем

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\tau_{\rho}}{G \cdot \rho}. \quad (245)$$

Установим связь между касательным напряжением и крутящим моментом.



**Рис. 80. Распределение касательных напряжений в поперечном сечении стержня, подвергнутого кручению**

$$dT = \tau_\rho \cdot \rho \cdot dA. \quad (246)$$

$$T = \int_A \tau_\rho \rho dA = \int_A G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot \rho \cdot \rho \cdot dA = \\ = G \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 dA = G \frac{d\varphi}{dz} J_\rho. \quad (247)$$

В итоге имеем

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{T}{GJ_\rho}. \quad (248)$$

В уравнениях (245) и (248) левые части равны, поэтому будут равны и правые части

$$\frac{\tau_\rho}{G \cdot \rho} = \frac{T}{G \cdot J_\rho}. \quad (249)$$

Отсюда имеем формулу для вычисления касательного напряжения при кручении в произвольной точке поперечного сечения

$$\tau_\rho = \frac{T}{J_\rho} \rho, \quad (250)$$

где  $T$  – крутящий момент в рассматриваемом сечении;  
 $J_\rho$  – полярный момент инерции круглого или кольцевого сечения.  
 Для круглого сечения полярный момент вычисляется по формуле

$$J_\rho = \frac{\pi d^4}{32}; \quad (251)$$

$\rho$  – расстояние от точки, где вычисляется касательное напряжение, до оси стержня.

#### **1.9.4. Деформации при кручении стержней круглого (кольцевого) сечений**

Для определения углов закручивания стержней круглого поперечного сечения используем дифференциальное уравнение (248).



$$\frac{T}{GJ_p} = \frac{d\varphi}{dz}. \quad (252)$$

Полагаем, что крутящий момент и диаметр стержня на этом участке постоянные. Отсюда имеем

$$d\varphi = \frac{T}{GJ_p} dz. \quad (253)$$

Проинтегрируем левую и правую части уравнения (253)

$$\varphi = \int_0^l \frac{T}{GJ_p} \cdot dz = \frac{T \cdot l}{G \cdot J_p}. \quad (254)$$

В результате получена формула для угла закручивания участка стержня круглого или кольцевого поперечного сечения постоянной жесткости и постоянным крутящим моментом

$$\Delta\varphi = \frac{T \cdot l}{G \cdot J_p}, \quad (255)$$

где  $T$  – крутящий момент на участке стержня;

$l$  – длина участка стержня;

$G$  – модуль сдвига;

$J_p$  – полярный момент инерции поперечного сечения;

$GJ_p$  – жесткость стержня при кручении.

Полученная формула называется **законом Гука при кручении**.

Иногда в расчетах требуется найти относительный угол закручивания, то есть угол закручивания, приходящийся на один метр длины стержня.

Относительный угол закручивания равен

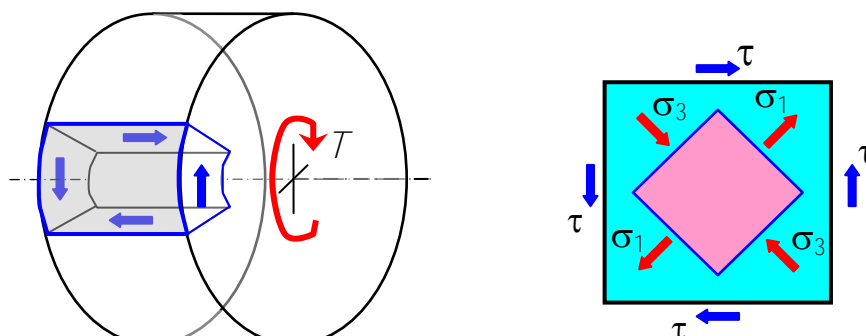
$$\theta = \frac{\Delta\varphi}{l} = \frac{T \cdot l}{G \cdot J_p} \cdot \frac{1}{l} = \frac{T}{G \cdot J_p}. \quad (256)$$

Окончательно имеем формулу для относительного угла закручивания стержня круглого или кольцевого сечений

$$\theta = \frac{T}{G \cdot J_p}. \quad (257)$$

### 1.9.5. Анализ напряженного состояния и вид разрушения стержней при их кручении в зависимости от материала

Рассмотрим участок стержня круглого поперечного сечения, подвергнутого кручению.



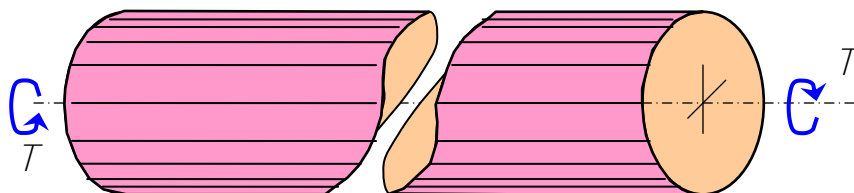
**Рис. 81. Напряженное состояние при кручении стержня круглого сечения**

Было установлено, что в круглом либо кольцевом поперечных сечениях стержня при кручении появляются только касательные напряжения. Учитывая закон парности касательных напряжений, и на продольных площадках появятся касательные напряжения (рис. 81). Следовательно, выделенный элемент испытывает чистый сдвиг. Поэтому главные площадки наклонены к площадкам поперечного сечения под углом  $45^\circ$ . При этом, главные напряжения равны касательным напряжениям.

$$\sigma_1 = \tau; \quad \sigma_3 = -\tau. \quad (258)$$

Отсюда следует, что траектории главных напряжений при кручении стержней круглого либо кольцевого поперечных сечений представляет собой винтовую линию, наклоненную к оси стержня под углом  $45^\circ$ .

Хрупкие материалы разрушаются от большего (растягивающего) главного напряжения (рис.82).



**Рис. 82. Разрушение хрупких материалов при кручении**

Упруго-пластические материалы хорошо сопротивляются растяжению и сжатию, но хуже сдвигу. Поэтому при кручении разрушаются от касательных напряжений (рис.83).

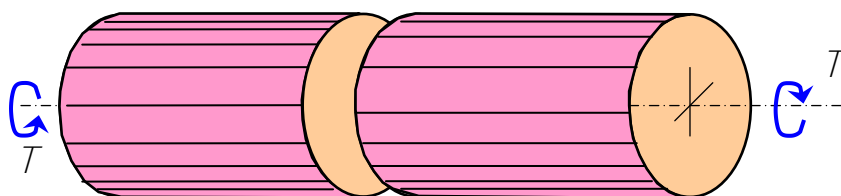


Рис. 83. Разрушение упруго-пластических материалов при кручении

Деревянный стержень плохо сопротивляется скалыванию вдоль волокон. Поэтому он разрушается от касательных напряжений на продольных площадках.

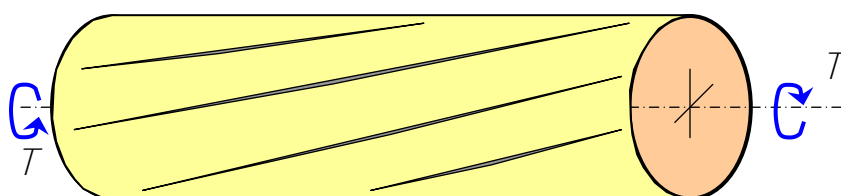


Рис. 84. Разрушение деревянного стержня при кручении

### 1.9.6. Расчет на прочность и жесткость стержня круглого или кольцевого сечений при кручении

Максимальные касательные напряжения в поперечном сечении стержня при кручении появляются в точках его поверхности. Получим формулу для вычисления этих максимальных касательных напряжений в стержнях круглого сечения.

$$\tau_{max} = \frac{T}{J_p} \cdot \rho_{max} = \frac{T}{J_p} \cdot D/2 = \frac{T}{\frac{J_p}{D/2}} = \frac{T}{W_p} \quad (259)$$

Из выражения (259) получим условие прочности при кручении стержня круглого сечения

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_p} \leq R_s, \quad (260)$$

где  $T$  – максимальный крутящий момент;  
 $R_s$  – расчетное сопротивление материала на срез;

$W_p$  – геометрическая характеристика поперечного сечения, называемая полярным моментом сопротивления

$$W_p = \frac{J_p}{D/2}. \quad (261)$$

Полярный момент сопротивления всегда величина положительная с размерностью  $\text{см}^3$ ,  $\text{мм}^3$  и пр.

Условие жесткости имеет вид

$$\Delta\varphi = \frac{T \cdot l}{G \cdot J_p} \leq \theta_{adm} \cdot l, \quad (260)$$

где  $T$  – крутящий момент на участке стержня;

$l$  – длина участка стержня;

$G$  – модуль сдвига;

$J_p$  – полярный момент инерции поперечного сечения;

$\theta_{adm}$  – относительный допускаемый угол закручивания.

## 1.10. Теории прочности

### 1.10.1 Основные понятия

Многие элементы строительных конструкций испытывают сложное напряженное состояние. Проведение испытаний материалов при сложном напряженном состоянии затруднительно или невозможно. Поэтому требуется создать такую методику расчета, которая позволила бы оценить степень опасности любого напряженного состояния, основываясь на результатах испытания при простом растяжении, сжатии, кручении и сдвиге. Такими методиками являются теории прочности. Для суждения о наступлении предельного состояния необходимо знать причину разрушения материала. Этот вопрос является сложным и до конца еще не решенным.

В каждой теории прочности выдвигается своя причина (критерий) разрушения. Поэтому и существуют десятки теорий прочности, а в идеале должна быть только одна.

### 1.10.2 Теория прочности Галилея-Лейбница, Клебша-Ренкина.

#### Первая теория прочности

Критерий прочности этой теории можно сформулировать следующим образом.

*Предельное состояние при сложном напряженном состоянии наступает тогда, когда наибольшее нормальное напряжение достигает величины предельного напряжения при одноосном растяжении.*

$$\sigma_{max} = \sigma_1 \leq \sigma_0, \quad (261)$$

где  $\sigma_1$  – величина наибольшего из главных напряжений для исследуемого напряженного состояния;

$\sigma_0$  – предельное напряжение, полученное по результатам испытания на одноосное растяжение.

Недостаток этой теории в том, что не учитываются два других главных напряжения. Эта теория имеет скорее историческое значение и практически не используется.

### 1.10.3 Теория прочности Мариотта–Грасгофа, Сен-Венана.

#### Вторая теория прочности

Критерий прочности второй теории прочности можно сформулировать следующим образом

*Причиной наступления предельного состояния является достижение наибольшей главной линейной деформации при сложном напряженном состоянии предельной относительной линейной деформации, полученной при испытании в условиях одноосного растяжения.*

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0, \quad (262)$$

где  $\varepsilon_1$  – большая главная деформация при исследуемом напряженном состоянии;

$\varepsilon_0$  – предельное значение относительной линейной деформации, полученное из опыта на одноосное растяжение.

Для объемного напряженного состояния

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]. \quad (263)$$

Для линейного напряженного состояния

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}. \quad (264)$$

Поставим условие

$$\frac{1}{E} [\sigma_1 - (\sigma_2 + \sigma_3)] \leq \frac{\sigma_0}{E}. \quad (265)$$

Условие наступления предельного состояния имеет вид

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_0, \quad (266)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – главные напряжения при сложном напряженном состоянии в конструкции;

$\sigma_0$  – опасное напряжение, полученное при испытании на одноосное растяжение;

$\nu$  – коэффициент Пуассона;

$\sigma_{eq}$  – эквивалентное напряжение.

#### 1.10.4 Теория прочности Кулона. Третья теория прочности

В третьей теории прочности в качестве критерия прочности принято наибольшее касательное напряжение.

*Причиной наступления предельного состояния является достижение наибольшего касательного напряжения величины предельного касательного напряжения, полученного из опыта при одноосном растяжении.*

$$\tau_{max} \leq \tau_0, \quad (267)$$

где  $\tau_{max}$  – расчетная величина максимального касательного напряжения для исследуемого напряженного состояния;

$\tau_0$  – предельное значение касательного напряжения, определенное испытанием материала на растяжение.

Из теории упругости известно, что для объемного напряженного состояния максимальное касательное напряжение равно

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad (268)$$

для одноосного растяжения

$$\tau_0 = \frac{\sigma_0}{2}. \quad (269)$$

Тогда условие наступления предельного состояния имеет вид

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_0. \quad (270)$$

Для плоского напряженного состояния  $\sigma_z=0$

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 = \left[ \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right] - \left[ \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right] = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (271)$$

Условие наступления предельного состояния имеет вид

$$\sigma_{eq} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq \sigma_0. \quad (272)$$

При поперечном изгибе балки  $\sigma_y = 0$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq \sigma_0. \quad (273)$$

Недостатком третьей теории прочности является то, что не учитывается влияние второго главного напряжения  $\sigma_2$ . Эта теории применяется для оценки степени опасности упругопластических материалов, примерно одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию.

### 1.10.5 Теория прочности Губера-Мизеса-Генки.

#### Четвертая теория прочности

Согласно четвертой теории прочности в качестве критерия прочности принята удельная потенциальная энергия изменения формы.

*Причиной наступления предельного напряженного состояния является достижение удельной потенциальной энергии изменения формы предельной величины удельной потенциальной энергии изменения формы при осевом растяжении.*

Удельная энергия – это энергия, отнесенная к объему тела. Полную потенциальную энергию представляют в виде суммы энергии, затраченной на изменение объема тела, и энергии, затраченной на изменение формы.

$$U = U_F + U_0. \quad (274)$$

Установлено, что решающее значение при разрушении материала имеет удельная энергия изменения формы.

Удельная энергия изменения формы для объемного напряженного состояния согласно решению теории упругости равна

$$u_F = \frac{1+\nu}{6E} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]. \quad (275)$$

Удельная энергия изменения формы при линейном напряженном состоянии равна

$$u_F = \frac{1+\nu}{6E} 2\sigma_1^2 \quad (276)$$

Для случая достижения предельного состояния при одноосном растяжении  $\sigma_1 = \sigma_0$  и при объемном напряженном состоянии можно записать равенство (277)

$$\frac{1+\nu}{6E} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] = u_F = \frac{1+\nu}{6E} 2\sigma_0^2. \quad (277)$$

Тогда условие наступления предельного состояния имеет вид

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]} \leq \sigma_0. \quad (278)$$

Для плоского напряженного состояния  $\sigma_2 = 0$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_3^2 \right]} \leq \sigma_0 = R. \quad (279)$$

При поперечном изгибе балки (без вывода)

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_{yz}^2} \leq \sigma_0 = R. \quad (280)$$

Энергетическая теория хорошо подтверждается экспериментами для упругопластических материалов и нашла широкое применение для расчета металлических конструкций.

### 1.10.6 Теория прочности Кулона-Мора

В теории Мора в отличие от выше изложенных теорий, не закладывается отдельный критерий, а на основе эксперимента устанавливается определенная зависимость прочностных свойств материала от вида напряженного состояния. Для объяснения этой зависимости используются круги напряжения (круги Мора).

Опыты показывают, что ошибка из-за не учета  $\sigma_2$  не превышает 10-15%. Поэтому влиянием  $\sigma_2$  пренебрегают. На основе опытов строятся круги напряжений и предельная огибающая (рис.85).

Критерий прочности формулируется следующим образом.



Причиной разрушения материала по теории Мора является достижение такого состояния, когда круг напряжений, соответствующий напряженному состоянию, выходит за пределы огибающей.

В практике расчетов огибающую заменяют прямой. Тогда условие наступления предельного состояния принимает вид

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - K\sigma_3 \leq \sigma_0, \quad (281)$$

где  $\sigma_{op}$ ,  $\sigma_{oc}$  – соответственно, предельное напряжение при растяжении и при сжатии;

$K$  – коэффициент, равный отношению

$$K = \frac{\sigma_{op}}{\sigma_{oc}}. \quad (282)$$

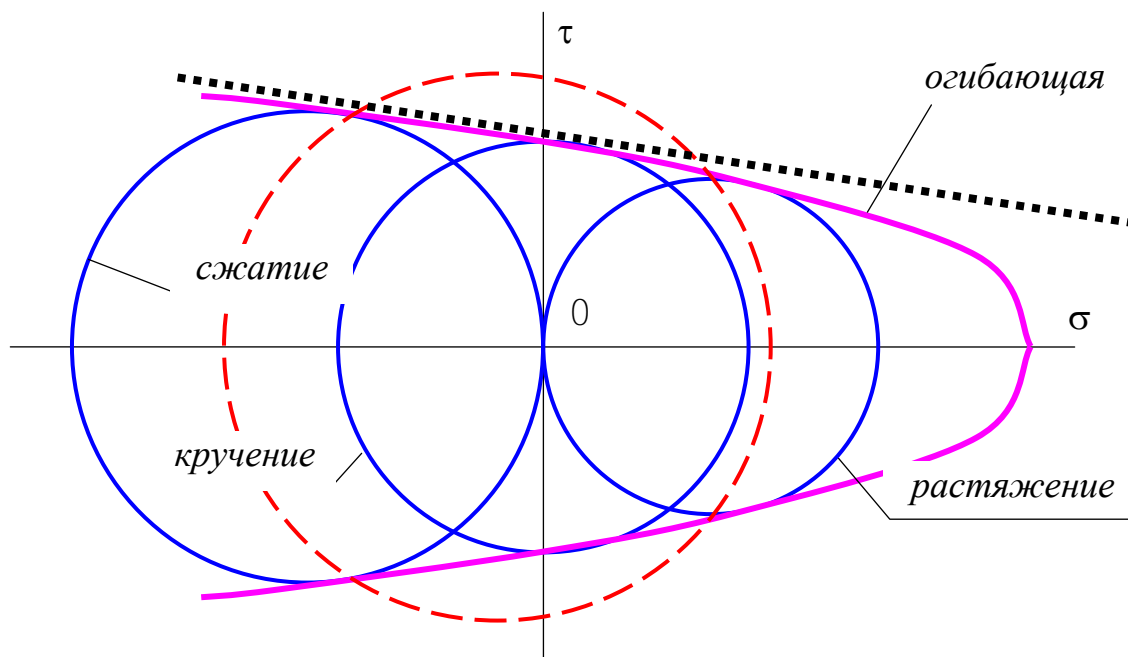


Рис. 85. Предельные круги напряжений и предельная огибающая

Теория Мора дает наиболее достоверные результаты для напряженных состояний, круги которых занимают промежуточное положение между предельным кругом сжатия и предельным кругом растяжения.

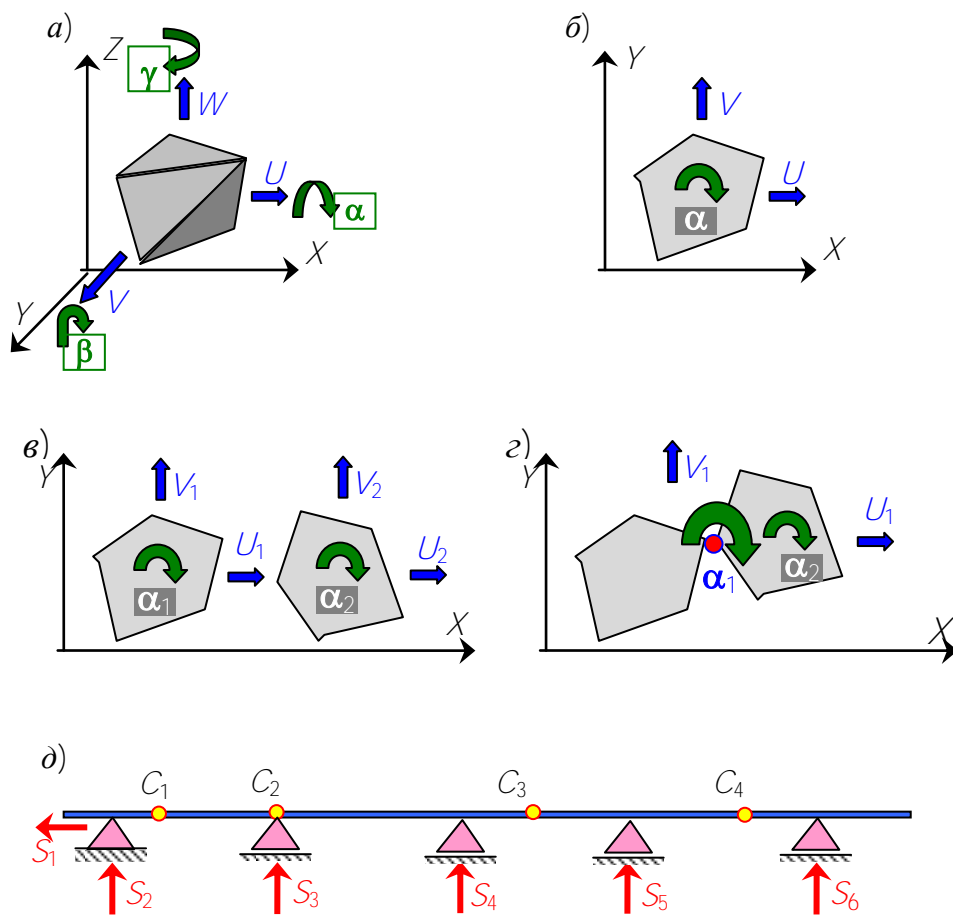
## 1.11. Статически неопределимые системы. Метод сравнения деформаций

### 1.11.1 Основные понятия о степенях свободы и статической неопределимости

Вначале рассмотрим вопрос о возможностях перемещения механических систем – степенях свободы. Это изучалось в курсе теоретической механики. Однако, считаем необходимым повторить это и в курсе сопротивления материалов.

Пусть абсолютно жесткое тело находится в пространства (рис. 86 а). Выберем произвольную систему координатных осей –  $X, Y, Z$ . В этом пространстве тело имеет возможность совершить шесть независимых движений – смещения по направлению каждой оси  $U, V, W$  и повороты около этих осей  $\alpha, \beta, \gamma$ . Таким образом, тело имеет шесть степеней свободы.

Теперь, поместим тело уже на плоскости, образованной координатными осями  $X$  и  $Y$  (рис. 86 б). Количество независимых движений этого тела равно трем – смещения по направлениям осей  $X$  и  $Y$  –  $U$  и  $V$ , а также поворот около начала координат  $\alpha$ . Количество степеней свободы равно трем.



**Рис. 86. Примеры определения количества степеней свободы**

Поместим на плоскость два абсолютно жестких не связанных друг с другом тела (рис. 86 в). Количество степеней свободы этой системы равно шести – три степени свободы одного тела  $U_1, V_1, \alpha_1$  и три степени свободы другого тела  $U_2, V_2, \alpha_2$ .

Однако, элементы конструкций чаще всего как-то связаны друг с другом и опорой. Каждая связь уменьшает количество степеней свободы на единицу. Соединим два тела шарниром (рис. 86 г). Полученная система в целом может совершить движения по направлению оси  $X$  и оси  $Y$  –  $U_1$  и  $V_1$ , а также поворачиваться около начала координат  $\alpha_1$ .

Кроме того, одно тело может поворачиваться относительно другого  $\alpha_1$  за счет связывающего их шарнира. Таким образом, шарнир уменьшил количество степеней свободы на два. Значит, установленный шарнир ограничивает возможность движений системы (рис. 86 г) на два, то есть шарнир, соединяющий оба тела, имеет две связи.

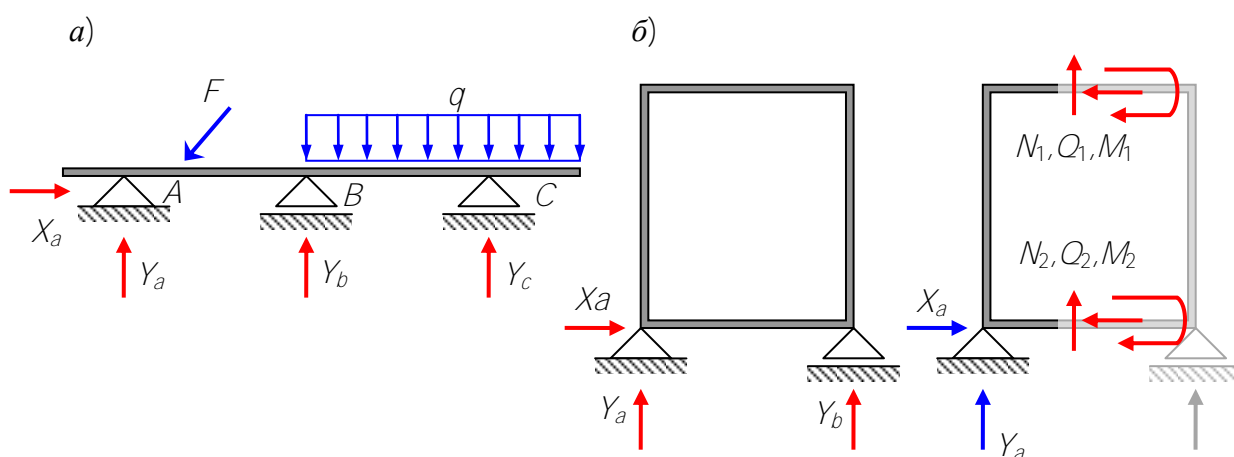
На рисунке (рис. 86 д) показана балка, разрезанная на пять частей четырьмя шарнирами  $C_1, C_2, C_3$  и  $C_4$  и опирающаяся на шарнирно неподвижную  $S_1S_2$  опору и шарнирно подвижные опоры  $S_3, S_4, S_5$  и  $S_6$ . Части балки в плоскости, образованной двумя осями  $X$  и  $Y$  в сумме имеют 15 степеней свободы. Шарнирно неподвижная опора слева и четыре шарнирно подвижные опоры ограничивают возможность шести

смещениям системы, а четыре шарнира, каждый из которых имеет по две связи, ограничивают возможность движений по восьми направлениям. Таким образом, система имеет только одну степень свободы  $15 - 6 - 8 = 1$ .

Сделанные выше рассуждения, очень важны при исследовании статически неопределимых механических систем. Дадим определение статически неопределимым системам.

**Статически неопределимыми системами** называются такие системы, у которых количество неизвестных реакций или внутренних сил превышает число уравнений равновесия. В этом случае реакции и внутренние силы методами статики найдены быть не могут. Любая статически неопределимая система характеризуется **степенью статической неопределимости**, которая равна разности числа неизвестных и числа линейно независимых уравнений равновесия. Статическая неопределимость может быть внутренней и внешней (рис.89).

Таким образом, для определения неизвестных в статически неопределимых системах следует иметь такое количество уравнений, которое было бы равно числу неизвестных. Если количества уравнений равновесия не хватает, то необходимо дополнительно составить уравнения, но уже не по условию статического равновесия, а из каких-то других соображений, например, по условию совместности деформаций элементов рассматриваемой конструкции. Такие уравнения будем называть **дополнительными**. Число дополнительных уравнений должно быть равным степени статической неопределимости механической системы.



**Рис. 87. Примеры механических систем с внешней (а) и с внутренней (б) статической неопределимостью**

На рисунке (рис.87 а) показана балка, опирающаяся на три опоры. Левая опора является шарнирно неподвижной и имеет две связи. Поэтому в ней появляются две реакции  $X_a$  и  $Y_a$ . Опоры B и C шарнирно подвижные,

имеют по одной связи. В каждой из них появляется по одной реакции  $Y_b$  и  $Y_c$ . То есть балка имеет четыре связи. Но балку следует рассматривать как тело расположенное в плоскости. Поэтому она имеет три степени свободы – перемещения по вертикальному и горизонтальному направлениям и поворот около неподвижной точки. Значит, степень статической неопределимости балки равна  $n=4-3=1$  и требуется составить одно дополнительное уравнение.

Дополнительное уравнение присоединяется к трем уравнениям равновесия. В результате получается система, содержащая четыре уравнения, то есть столько, сколько неизвестных. Решением этой системы уравнений, определяются все неизвестные – внешние (реакции) и внутренние (внутренние силы). Рассмотренная балка имеет внешнюю статическую неопределимость.

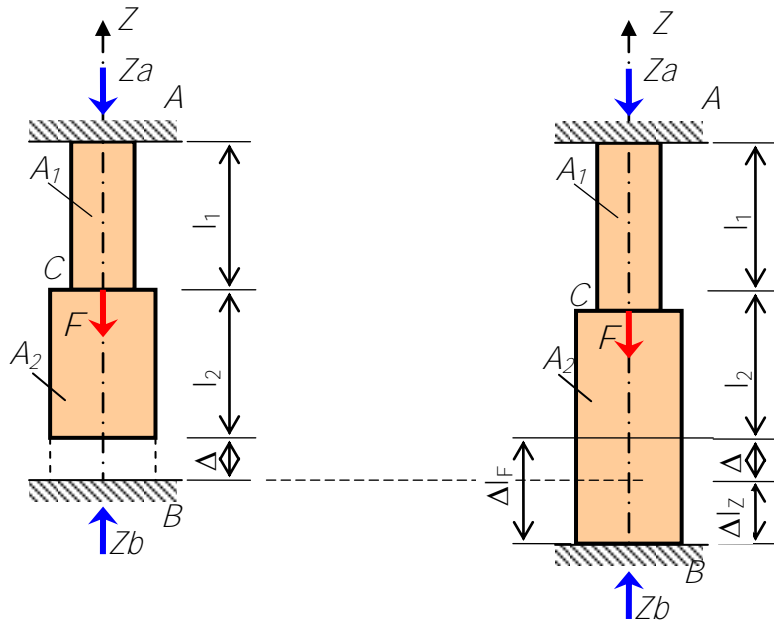
На рисунке (рис. 87 б) показана рама, расположенная в плоскости  $XU$  и опирающуюся на шарнирно неподвижную опору  $A$  с двумя связями и шарнирно подвижную опору  $B$ , с одной связью. Если рассматривать раму как одно тело, имеющую три степени свободы в плоскости  $XU$ , то ее следует рассматривать как статически определимую. В сумме опоры  $A$  и  $B$  имеют три связи, соединяющие раму с опорой. Поэтому количество уравнений равновесия равно количеству неизвестных сил (реакций) в этих связях. А это значит, что неизвестные реакции могут быть найдены только из уравнений равновесия. Значит рама внешне статически определимая.

Если нам понадобится найти не только реакции, но и внутренние силы в сечениях рамы, то уравнений статического равновесия не хватит. Вертикальным сечением разделим раму на две части – левую и правую, отбросим правую часть и рассмотрим левую (рис 87 б). Отброшенная правая часть действует на левую часть внутренними силами  $N_1, Q_1, M_1$  и  $N_2, Q_2, M_2$ . То есть всего неизвестных шесть, а уравнений равновесия можно составить только три. Очевидно, что уравнений недостаточно и требуется составить еще три дополнительных уравнения уже не по условию равновесия, а из условия совместности деформаций. Следовательно, рама внутренне трижды статически неопределимая.

Статически неопределимые системы являются более экономичными и часто применяются в строительстве. Однако, расчет таких конструкций более трудоемкий и сложный чем статически определимых конструкций.

### 1.11.2 Порядок расчета статически неопределимого ступенчатого стержня.

Рассмотрим ступенчатый стержень, закрепленный по концам двумя опорами. Стержень загружен одной сосредоточенной силой, направленной вдоль его продольной оси  $Z$ . Пусть при изготовлении ступенчатого стержня его длина оказалась меньше расстояния между опорами. В результате этого появился зазор  $\Delta$ .



**Рис. 88. Схема статически неопределимого ступенчатого стержня с зазором**

Если в процессе деформации нижний конец стержня достигает опоры  $B$ , то система становится статически неопределимой (один раз).

Число уравнений равновесия равно  $-1$ ,

число неизвестных реакций  $-2$ .

Запишем уравнение равновесия

$$\sum Z = Z_A - F + Z_B = 0. \quad (283)$$

Запишем уравнение совместности деформаций

$$\Delta/l_F + \Delta/l_{zb} = \Delta. \quad (284)$$

Учитывая закон Гука, получим

$$\frac{F \cdot l_1}{E \cdot A_1} - \frac{Z_B}{E} \left( \frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} \right) = \Delta. \quad (285)$$

Объединим оба уравнения (284) и (285) в систему и решим ее относительно неизвестных  $Z_A$  и  $Z_B$ . В результате получим значения неизвестных реакций  $Z_A$  и  $Z_B$ . Этот этап расчета называется **раскрытием статической неопределимости системы**. Дальнейший расчет выполняется так же, как и для статически определимого ступенчатого стержня. В результате определяются  $N$ ,  $\sigma$ ,  $\Delta l$ ,  $\varepsilon$ ,  $w$ .

Если зазора нет, то принимается  $\Delta=0$ . Если стержень оказался длиннее расстояния между опорами, то принимается  $\Delta < 0$ .

### 1.11.3. Температурные напряжения в статически неопределимом ступенчатом стержне

В статически определимых системах изменение температуры вызывает лишь деформации их элементов, так как этому ничто не препятствует. В статически неопределимых системах изменению размеров элементов за счет изменения их температуры препятствуют дополнительные связи. Поэтому изменение температуры статически неопределимой конструкции приводит к появлению температурных напряжений. Температурные напряжения являются опасными и часто приводят к повреждениям или разрушению конструкции.

Рассмотрим стержень кольцевого сечения, подвергнутый температурному воздействию. Пусть температура стержня повысилась на  $\Delta t$ . Большинство материалов при повышении температуры увеличивают свои размеры. Способность материала деформироваться при изменении температуры характеризуется коэффициентом температурного расширения  $\alpha$ , который может быть найден только испытанием и имеет размерность  $\text{град}^{-1}$ . Значения коэффициента температурного расширения можно найти в справочниках.

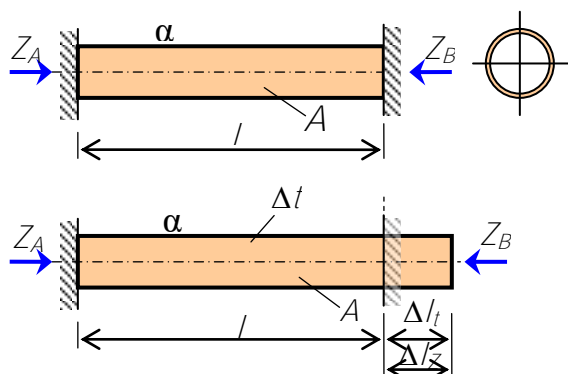


Рис. 89. Схема стержня, подвергнутого температурному воздействию

Количество уравнений равновесия – 1.

Количество неизвестных реакций – 2.

Степень статической неопределимости  $n = 2 - 1 = 1$ .

Следовательно, система один раз (однажды) статически неопределимая.

Рассмотрим деформации от каждого фактора в отдельности (рис. 89). При повышении температуры стержень удлинится на  $\Delta l_t$ . От действия реакции  $Z_B$  стержень укорачивается на  $\Delta l_Z$ .

Уравнение равновесия

$$\sum Z = Z_A - Z_B = 0. \quad (286)$$

Уравнение совместности деформаций

$$\Delta l_t + \Delta l_{zB} = 0. \quad (287)$$

По закону Гука и от температуры стержень получит деформации

$$\Delta l_{zB} = \frac{-Z_B \cdot l}{E \cdot A}, \quad \Delta l_t = \alpha \cdot l \cdot \Delta t. \quad (288)$$

Для стали коэффициент температурного расширения равен  $\alpha = 12,5$  град<sup>-1</sup>.

Дополнительное уравнение при отсутствии зазора имеет вид

$$\alpha \cdot l \cdot \Delta t - \frac{Z_B l}{EA} = 0. \quad (289)$$

Оба уравнения (286) и (289) объединяются в систему. В результате решения системы уравнений получаем значения реакций  $Z_A$  и  $Z_B$ . Это значит, что статическая неопределимость раскрыта. Дальнейший расчет выполняется как для статически определимого стержня.

Если стержень постоянного поперечного сечения, тогда реакция опоры равна

$$Z_B = \frac{\alpha \cdot l \cdot \Delta t}{l} EA = \alpha \cdot \Delta t \cdot E \cdot A. \quad (290)$$

Продольная сила во всех поперечных сечениях стержня равна  $N = -Z_B$ . Разделим продольную силу на площадь поперечного сечения стержня и получим температурные напряжения.

$$\sigma_t = \frac{-Z_B}{A} = \frac{-\alpha \cdot \Delta t \cdot E \cdot A}{A} = -\alpha \cdot \Delta t \cdot E. \quad (291)$$

Запишем эту важную формулу отдельно

$$\sigma_t = -\alpha \cdot \Delta t \cdot E. \quad (292)$$

Оказывается, что температурные напряжения не зависят от площади поперечного сечения стержня и его длины. Это следует учитывать при расчете конструкций, подвергнутых температурным воздействиям – увеличение площади поперечных сечений элемента не приводит к уменьшению температурных напряжений. То есть усиление конструкций, испытывающих температурное воздействие, нельзя добиться увеличением площадей поперечных сечений их элементов.



Для снижения температурных напряжений используются специальные приемы проектирования – компенсация температурных напряжений.

#### 1.11.4. Способы компенсации температурных напряжений в строительных и инженерных конструкциях

В большинстве случаев температурные напряжения в строительных конструкциях являются нежелательными и даже очень опасными. Поэтому используются различные способы устранения или снижения температурных напряжений.

1. В промышленных зданиях большой протяженности устраиваются температурные швы (рис. 90), то есть здание делится на отдельные блоки, каждый из которых работает автономно.

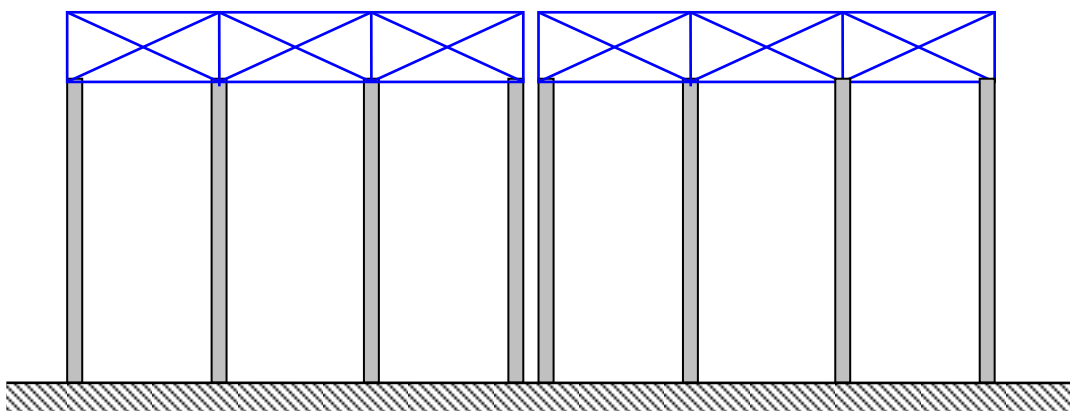


Рис. 90. Пример деления зданий большой протяженности на температурные блоки

2. В магистральных трубопроводах устраиваются температурные компенсаторы. Компенсаторы могут быть П-образные и сальниковые (рис.91).

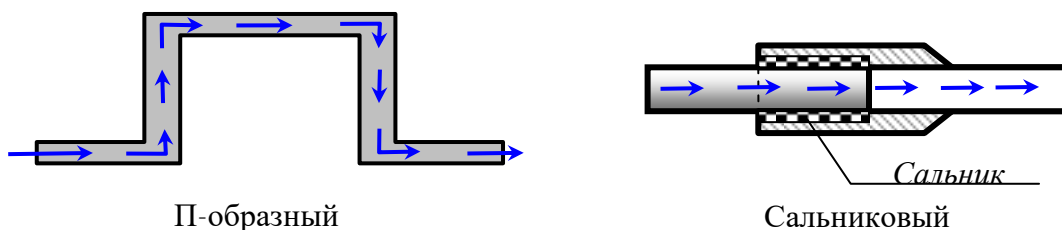


Рис. 91. Схемы П-образных и сальниковых компенсаторов

Достоинством П-образного компенсатора является его равнопрочность с трубопроводом – срок его службы равен сроку службы самого трубопровода. Недостатками является то, что он занимает большую площадь в плане. Это затрудняет его использование в городах. Кроме того, он увеличивает сопротивление прокачки жидкости.

Достоинством сальникового компенсатора является его компактность, а также то, что сопротивление прокачки жидкости он не увеличивает. Недостатками является необходимость устройства для него специальных колодцев, а также он плохо воспринимает вибрационные и сейсмические воздействия.

### 1.11.5. Расчет статически неопределимого стержня круглого или кольцевого сечения при кручении

Расчет статически неопределимого стержня на кручение аналогичен расчету статически неопределимого ступенчатого стержня на центральное растяжение (сжатие). Пусть дан стержень круглого или кольцевого сечений, закрепленный на концах (рис. 92). К стержню приложен момент  $T$ , расположенный в плоскости, перпендикулярной оси стержня. Требуется найти реакции опор, то есть раскрыть статическую неопределенность.

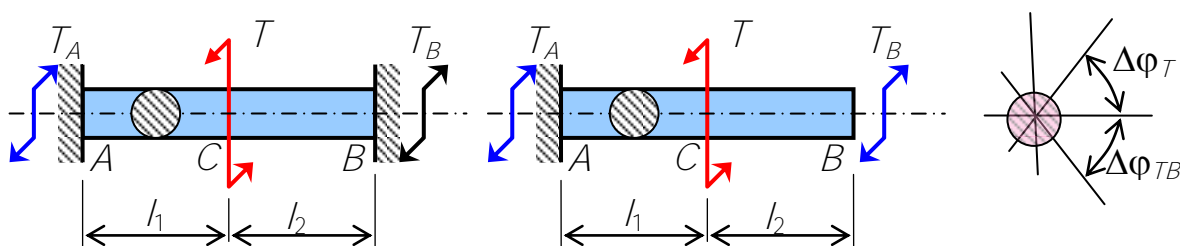


Рис. 92. Схема стержня, испытывающего кручение

Проведем кинематический анализ:

- количество уравнений равновесия – 1.
- количество неизвестных реакций – 2.

Отсюда следует, что система один раз статически неопределимая  $n = 2 - 1 = 1$ .

Составим уравнение равновесия

$$\sum M_Z = T_A - T + T_B = 0. \quad (293)$$

Составим уравнение совместности деформаций

$$\Delta\varphi_B^{om T} + \Delta\varphi_B^{om T_B} = 0. \quad (294)$$

Учитывая закон Гука, уравнение совместности деформаций запишем в следующем виде

$$\frac{T \cdot l_1}{G \cdot J_p} + \frac{-T_B \cdot l_1}{G \cdot J_p} + \frac{-T_B \cdot l_2}{G \cdot J_p} = 0. \quad (295)$$

Затем объединяем оба уравнения (293) и (295) в систему и решаем ее. В результате получим неизвестные реактивные моменты  $T_A$  и  $T_B$ . Это значит, что мы раскрыли статическую неопределенность. Дальнейший расчет, то есть вычисление крутящих моментов, касательных напряжений, углов закручивания, выполняется как для статически определимого стержня, работающего на кручение.

### 1.11.6. Расчет статически неопределимых стержневых систем

Ограничимся рассмотрением стержневых систем, содержащих абсолютно жесткий брус (диск), прикрепленный к шарнирной неподвижной опоре (рис. 93). Такое условие необходимо для упрощения расчета механической системы.

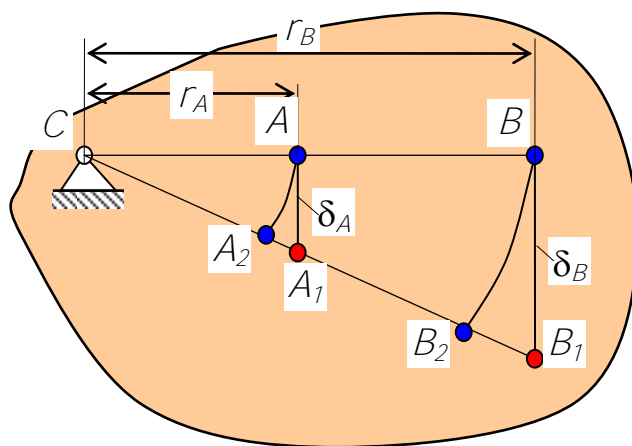


Рис. 93. Схема перемещений точек абсолютно жесткого диска

Отметим некоторые особенности перемещений точек и деформаций элементов таких систем:

- абсолютно жесткий диск не деформируется, то есть расстояние между любыми двумя его точками остается неизменным;
- перемещение точки диска при его повороте прямо пропорционально ее удаленности от центра поворота;
- любая точка диска, исключая точку закрепления, при его повороте перемещается по дуге окружности с центром в шарнире C;
- из-за малости перемещения дугу окружности заменяют касательной.

Учитывая перечисленные особенности и рисунок, получим равенства, основанные на пропорциях отрезков

$$\frac{\delta_A}{r_A} = \frac{\delta_B}{r_B} = \dots = \frac{\delta_k}{r_k}. \quad (296)$$

Рассмотрим порядок расчета таких систем на примере в общем виде (рис. 94).

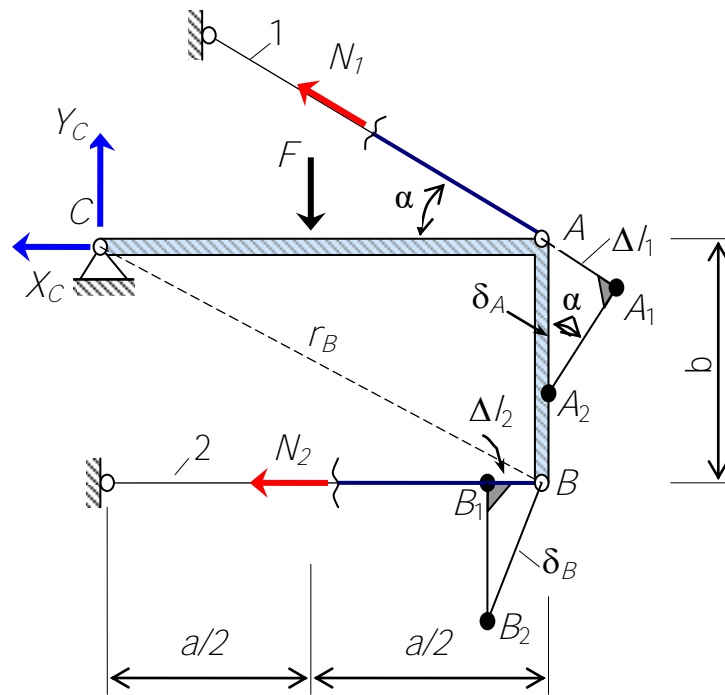


Рис. 94. Деформированная схема стержневой системы

Вначале установим степень статической неопределимости системы.

Число неизвестных равно 4 –  $X_c$ ,  $Y_c$ ,  $N_1$  и  $N_2$ .

Число линейно независимых уравнений равно 3 –

$$\sum X = -X_c - N_1 \cdot \cos \alpha - N_2 = 0; \quad (297)$$

$$\sum Y = Y_c - F + N_1 \cdot \sin \alpha = 0; \quad (298)$$

$$\sum M_c = F \cdot \frac{a}{2} - N_1 \cdot \sin \alpha \cdot a + N_2 \cdot b = 0. \quad (299)$$

Таким образом, система один раз (одинжды) статически неопределимая.

$$n = 4 - 3 = 1. \quad (300)$$

Требуется составить одно дополнительное уравнение. Это уравнение получаем на основе деформированной схемы системы.

Радиусы окружностей, по которым движутся ключевые точки  $A$  и  $B$  равны

$$r_A = a; \quad r_B = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (301)$$

Отношение перемещений ключевых точек  $A$  и  $B$  равно отношению радиусов тех окружностей, которые они описывают

$$\frac{\delta_A}{\delta_B} = \frac{r_A}{r_B}. \quad (302)$$

Отсюда имеем

$$\frac{\delta_A}{r_A} = \frac{\delta_B}{r_B} \quad (303)$$

или

$$\frac{\delta_A}{a} = \frac{\delta_B}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (304)$$

Полученное последнее выражение (304) называют уравнением совместности перемещений. Отметим, что отношение перемещений точек  $A$  и  $B$  всегда будет одинаковым независимо от того, какие нагрузки будут приложены к стержневой системе. Это отношение зависит только от положения этих точек.

Установим связь между перемещениями и деформациями.

Из треугольника  $\Delta A, A_1, A_2$  (рис.94) выразим перемещение точки  $A$  через деформацию первого стержня

$$\delta_A = \frac{\Delta l_1}{\sin \alpha}. \quad (305)$$

Из подобия треугольников  $\Delta B, B_1, B_2$  и  $\Delta A, B_1, C_2$  получим пропорцию

$$\frac{-\Delta l_2}{\delta_B} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (306)$$

Минус ставим по тому, что на схеме деформаций второй стержень имеет отрицательную деформацию, то есть укорачивается.

Отсюда получим

$$\delta_B = -\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b} \cdot \Delta l_2. \quad (307)$$

Найденные выражения (305) и (307) подставим в уравнение совместности перемещений (304). В результате получим **уравнение совместности деформаций**.

$$\frac{\Delta l_1}{a \cdot \sin \alpha} = -\frac{\Delta l_2}{b}. \quad (308)$$

Учитываем закон Гука и получим

$$\frac{N_1 \cdot l_1}{a \cdot \sin \alpha \cdot EA} = -\frac{N_2 \cdot l_2}{b \cdot EA_2}. \quad (309)$$

Присоединим полученное дополнительное уравнение к трем уравнениям равновесия (297), (298) и (299) и получим четыре уравнения с четырьмя неизвестными. Решив эту систему, получим значения всех неизвестных –  $Y_C$ ,  $X_C$ ,  $N_1$  и  $N_2$ . Этот этап расчета системы называется **раскрытием статической неопределимости**. Дальнейший расчет выполняется так же, как и для статически определимых систем.

### 1.11.7. Способы регулирования напряжений. Понятие о преднапряжении

При проектировании статически неопределимых систем требуется предварительно задавать жесткости элементов этой системы или их отношения. В противном случае задача будет неопределенной, то есть имеющей множество решений. Поэтому возможны случаи проектирования неэкономичных статически неопределимых конструкций. Такие конструкции могут иметь неоправданно большие запасы прочности. Одни элементы будут предельно загружены, а другие – недогружены.

Для повышения рациональности статически неопределимых конструкций используется регулирование напряжений, что реализуется преднапряжением. В преднапряженных конструкциях еще до их нагружения появляются напряжения. Преднапряжение конструкции создается укорочением или удлинением одного или нескольких элементов конструкции.

После приложения нагрузки напряжения в элементах конструкции “выравниваются” и распределяются более рационально. В идеальном случае во всех элементах конструкции напряжения должны быть равными расчетному сопротивлению.

При расчете преднапряженной конструкции главным вопросом является, как определить величину зазора (натяга) напрягаемого элемента, при котором наступит этот идеальный случай.

Преднапряжение часто применяется для железобетонных и металлических конструкций.

Схематически преднапряжение балки можно представить так, как показано на рисунке 95.

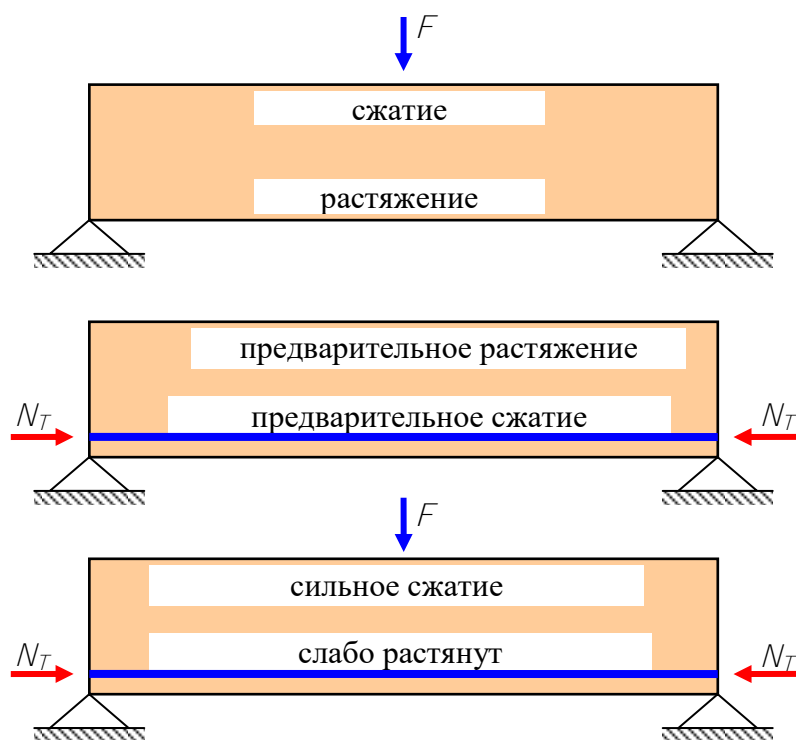


Рис. 95. Схема работы предварительно напряженной железобетонной балки

## 1.12. Определение перемещений энергетическим методом. Метод Максвелла-Мора

### 1.12.1. Теорема о взаимности работ внешних сил

Эта теорема впервые опубликована итальянским ученым Бетти (1823-1892 гг) и названа его именем.

Рассмотрим два состояния балки

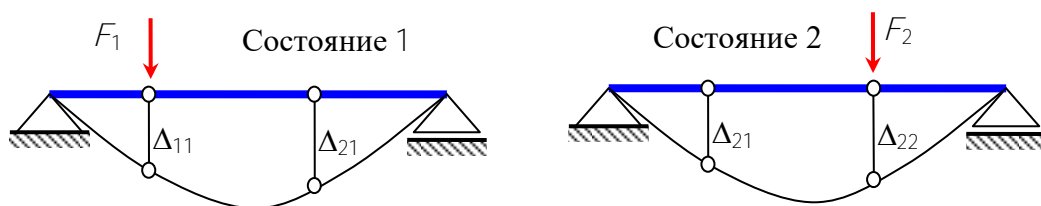


Рис. 96. Схема взаимных деформаций балки от действия сил

Поясним обозначения. Первый индекс обозначает направление перемещения, а второй – фактор, вызывающий это перемещение.

$\Delta_{11}$  – перемещение по направлению первой силы от действия первой силы;

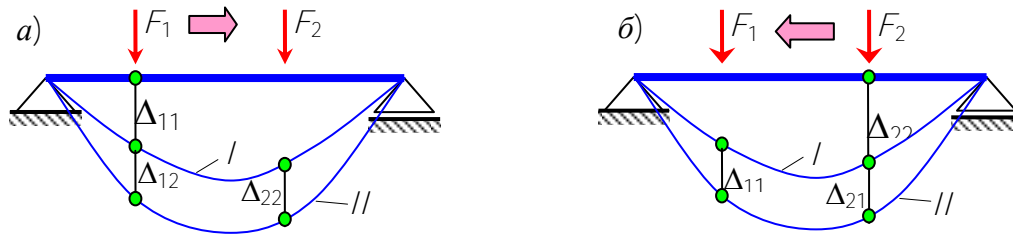
$\Delta_{21}$  – перемещение по направлению второй силы от действия первой силы;

$\Delta_{12}$  – перемещение по направлению первой силы от действия второй силы;

$\Delta_{22}$  – перемещение по направлению второй силы от действия второй силы.

Рассмотрим деформации балки при разных последовательностях приложения сил (рис.97).

Первый вариант загрузки (рис. 97, а) – вначале прикладываем силу  $F_1$ , потом силу  $F_2$ .



**Рис. 97. Деформации балки от действия первой силы, а затем второй (а) и деформация балки от действия второй силы, а затем первой (б)**

После загрузки балки первой силой она искривляется (по линии I). При этом образуется прогиб  $\Delta_{11}$ . Затем прикладываем вторую силу. Балка еще больше искривляется (по линии II) и появляются дополнительные прогибы  $\Delta_{12}$  и  $\Delta_{22}$ . Работа, совершенная этими силами, равна

$$A_1 = \frac{F_1 \cdot \Delta_{11}}{2}; \quad A_{22} = \frac{F_2 \cdot \Delta_{22}}{2}; \quad A_2 = F_1 \cdot \Delta_{12}. \quad (310)$$

Суммарная работа равна

$$A = A_1 + A_{22} + A_2. \quad (311)$$

Здесь  $A_2$  – возможная (виртуальная) работа первой силы.

Второй вариант загрузки (рис. 97, б) – вначале прикладываем силу  $F_2$ , потом силу  $F_1$ .

После загрузки балки второй силой она искривляется (по линии I). При этом образуется прогиб  $\Delta_{22}$ . Затем прикладываем вторую силу. Балка еще больше искривляется (по линии II). Появляются дополнительные прогибы  $\Delta_{21}$  и  $\Delta_{11}$ . Работа, совершенная силами, равна

$$A_{22} = \frac{F_2 \cdot \Delta_{22}}{2}; \quad A_1 = \frac{F_1 \cdot \Delta_{11}}{2}; \quad A_{21} = F_2 \cdot \Delta_{21}. \quad (312)$$

Суммарная работа равна

$$A = A_{22} + A_1 + A_{21}. \quad (313)$$

Здесь  $A_{21}$  – возможная (виртуальная) работа второй силы.

Мы знаем, что работа, совершенная системой сил не зависит от порядка их приложения.

$$A = A_2. \quad (314)$$



Поэтому, сравнивая выражения (310) и (313), приходим к выводу, что

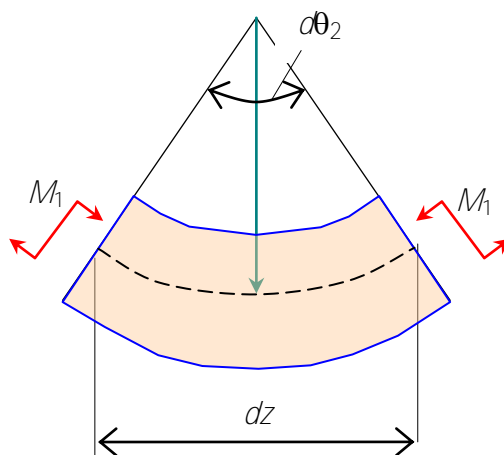
$$A_2 = A_{21}. \quad (315)$$

Сформулируем теорему о взаимности внешних сил.

**Работа внешних сил первого состояния на перемещениях второго состояния равна работе внешних сил второго состояния на перемещениях первого состояния.**

### 1.12.2. Теорема о взаимности работ внутренних сил

Пусть к балке (рис. 98) приложена сила  $F_1$ , которая вызывает в сечении изгибающий момент  $M_1$ . Приложим к балке еще и силу  $F_2$ , которая вызвала дополнительный угол поворота сечений на участке  $dz$  равный  $d\theta_2$ .



**Рис. 98. Схема деформации элементарного участка балки от действия нагрузки второго состояния**

Виртуальная работа внутренних сил от  $F_1$  на перемещениях, вызванных силой  $F_2$ , равна

$$dW_{12} = M_1 d\theta_2. \quad (316)$$

Здесь

$$d\theta_2 = \frac{dz}{\rho_2}. \quad (317)$$

Кривизна участка балки равна

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{M_2}{EJ_x}. \quad (318)$$

Отсюда имеем

$$d\theta_2 = \frac{M_2}{EJ_x} dz. \quad (319)$$

Подставим выражение (319) в формулу (316) и получим виртуальную работу внутренних сил на элементарном участке балки

$$dW_{12} = M_1 \frac{M_2}{EJ_x} d\theta_2, \quad (320)$$

где  $M_1, M_2$  – функции изгибающих моментов от сил  $F_1$  и  $F_2$ .

Виртуальная работа по всей длине балки равна интегралу

$$W_{12} = \int_0^l \frac{M_1 M_2}{EJ_x} dz. \quad (321)$$

Аналогично

$$W_{21} = \int_0^l \frac{M_2 M_1}{EJ_x} dz. \quad (322)$$

Отсюда, очевидно, что

$$W_{12} = W_{21}. \quad (323)$$

Сформулируем теорему о взаимности работ внутренних сил.

***Работа внутренних сил первого состояния на перемещениях второго состояния равна работе внутренних сил второго состояния на перемещениях первого состояния.***

### 1.12.3. Теорема о взаимности перемещений

Пусть  $F_1 = 1$  и  $F_2 = 1$ . Тогда получим, согласно теореме Бетти,

$$A_2 = F_1 \delta_{12} = A_{21} = F_2 \delta_{21}. \quad (324)$$

Отсюда имеем

$$\delta_{12} = \delta_{21}, \quad (325)$$

где  $\delta_{12}, \delta_{21}$  – перемещения, вызванные единичными силами.

Сформулируем теорему о взаимности перемещений.

***Перемещение точки приложения первой единичной силы по ее направлению, вызванное действием второй единичной силы, равно перемещению точки приложения второй единичной силы по ее направлению, вызванное действием второй единичной силы.***

### 1.12.4. Определение перемещений методом Максвелла-Мора

Рассмотрим балку, нагруженную нагрузкой общего вида – сосредоточенными моментами, силами и равномерно распределенными нагрузками. Обозначим это состояние балки состоянием  $k$ .

Рассмотрим эту же балку, нагруженную единичной силой  $F_1=1$ , приложенной в произвольной точке. Обозначим такое состояние балки  $i$ .

Пусть требуется определить перемещение точки, к которой приложена единичная сила (99).

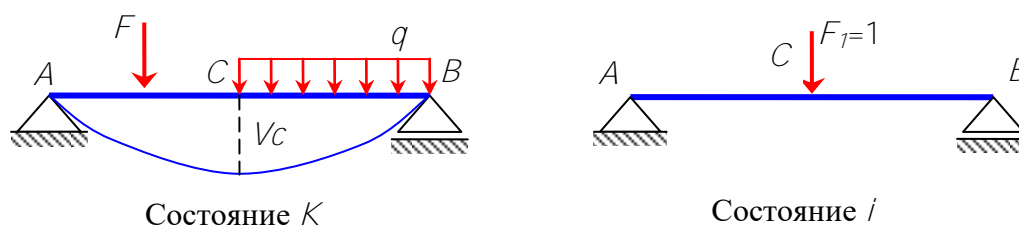


Рис. 99. Схемы нагружения балки нагрузкой и единичной силой

Работа внешних сил

$$A_k = A_{ki} = 1 \cdot V_c. \quad (326)$$

Работа внутренних сил

$$W_{ik} = W_{ki} = \int_0^l \frac{M_i M_k}{EJ} dz. \quad (327)$$

Учитываем закон сохранения энергии

$$A_k = W_{ik} \quad (328)$$

и получим

$$V_c = \int_0^l \frac{M_i M_k}{EJ} dz. \quad (329)$$

Запишем в общем виде

$$\Delta_M = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_k}{EJ} dz. \quad (330)$$

Полученное выражение называется интегралом Мора.

Здесь

$\Delta_M$  – линейное или угловое перемещение, вызванное изгибом балки;

$\bar{M}_i$  – функция изгибающего момента, вызванная единичной силой (черточка сверху означает, что эта величина от единичной силы);

$M_k$  – функция изгибающего момента от нагрузки;

$l$  – длина участков балки.

Интеграл берется на каждом участке отдельно, а затем все интегралы суммируются.

Аналогично для стержня, подвергнутого центральному растяжению–сжатию

$$\Delta_N = \sum \int_0^l \frac{\bar{N}_i N_k}{EA} dz. \quad (331)$$

Деформации стержня от сдвига

$$\Delta_Q = \mu \sum \int_0^l \frac{\bar{Q}_i Q_k}{GA} dz. \quad (332)$$

Здесь  $\mu$  – коэффициент, зависящий от формы сечения (по справочнику)  
Деформации стержня от кручения

$$\Delta_T = \sum \int_0^l \frac{\bar{T}_i T_k}{GJ_p} dz. \quad (333)$$

Таким образом, полная форма имеет вид

$$\Delta_{ik} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_k}{EJ_x} dz + \sum \int \frac{\bar{N}_i N_k}{EA} dz + \mu \sum \int \frac{\bar{Q}_i Q_k}{GA} dz + \sum \int \frac{\bar{T}_i T_k}{GJ_p} dz \quad (334)$$

В сечениях балки, испытывающей поперечный изгиб, продольные силы и крутящие моменты равны нулю  $N=0$ ,  $T=0$ . Влиянием поперечных сил на деформации балки пренебрегают. Поэтому, обычно, для балок используется только первый интеграл.

#### 1.12.5. Вычисление интеграла Мора способом Верещагина

Взятие интеграла Мора не всегда удобно и связано с необходимостью составления функции внутренних сил. Поэтому вместо интегрирования интеграла Мора можно воспользоваться графоаналитическим способом – способом перемножения эпюр (способом Верещагина). Рассмотрим этот метод подробнее.

Рассмотрим две эпюры (рис. 102). Пусть одна имеет произвольное очертание, а другая – прямолинейное.

Пусть жесткость балки на рассматриваемом участке величина постоянная  $EJ - const$ .

Тогда

$$\int_A^B \frac{\bar{M}_i M_k}{EJ} dz = \frac{1}{EJ} \int_A^B \bar{M}_i M_k dz. \quad (335)$$

Учтем, что

$$d\omega_k = M_k dz. \quad (336)$$

Возьмем интеграл

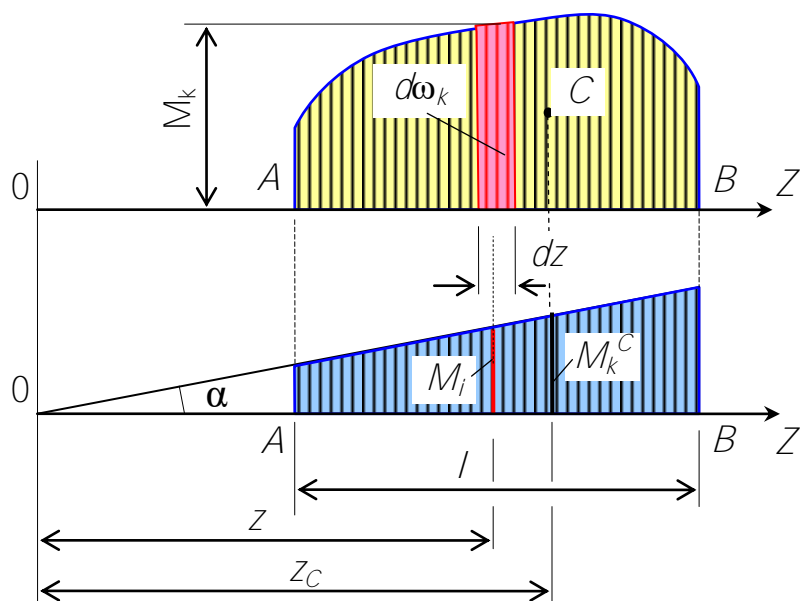


Рис. 100. Перемножение эпюры произвольного очертания и линейной эпюры способом Верещагина

$$\begin{aligned} \int_A^B \bar{M}_i M_k dz &= \int_A^B \frac{\bar{M}_i}{z} \cdot z \cdot M_k dz = \frac{\bar{M}_i}{z} \int_A^B z \cdot M_k dz = \frac{\bar{M}_i}{z} \int_A^B z \cdot \omega_k dz = \\ &= \frac{\bar{M}_i}{z} \cdot S_k^c = \frac{\bar{M}_i^c}{z_c} \cdot z_c^k \omega_k = \bar{M}_i^c \omega_k. \end{aligned} \quad (337)$$

Отметим, что отношение, вынесенное за знак интеграла, не зависит от координаты  $z$ .

$$\frac{\bar{M}_i}{z} = \frac{\bar{M}_i^c}{z_c} = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{const}. \quad (338)$$

Окончательно имеем

$$\int_A^B \frac{\bar{M}_i M_k}{EJ} dz = \frac{\omega_k \bar{M}_i^c}{EJ}. \quad (339)$$

Способ Верещагина перемножения эпюр можно сформулировать следующим образом.

**Интеграл Мора равен произведению площади эпюры  $M_k$  (любого очертания) на ординату прямолинейной эпюры  $\bar{M}_i$ , расположенную**

под центром тяжести эюры  $M_k$ , деленному на жесткость стержня  $EJ$ .

Интеграл (значение) считается положительным, если обе эюры изгибающих моментов расположены по одну сторону от оси балки. Если перемножаемые эюры располагаются по разные стороны от оси балки, то значение интеграла, полученное способом Верещагина, принимается отрицательным.

Отметим, что если брать интеграл непосредственно, то знак получается в результате вычислений "как бы автоматически". В способе Верещагина его следует ставить по вышеуказанному правилу.

Положительное значение интеграла означает, что направление перемещения совпадает с направлением единичной силы (или момента).

Способ вычисления интеграла Мора путем замены непосредственного интегрирования перемножением соответствующих эюр называется способом (или правилом) Верещагина, который предложил студент МИИЖТ Верещагин в 1924.

### 1.12.6. Разложение эюр на составляющие треугольной и параболической форм.

Любую эюру изгибающих моментов при загрузении балки сосредоточенными силами, моментами и равномерно распределенными нагрузками всегда можно представить как сумму эюр треугольного и параболического очертания (рис. 101).

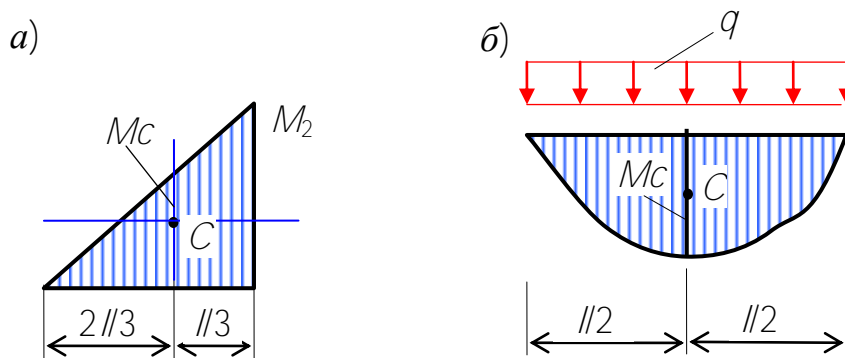


Рис. 101. Элементарные эюры треугольной (а) и параболической (б) форм

Эюры, приведенные на рисунке 101, мы можем назвать элементарными или простыми, так как для них легко определяется положение центра тяжести и площади.

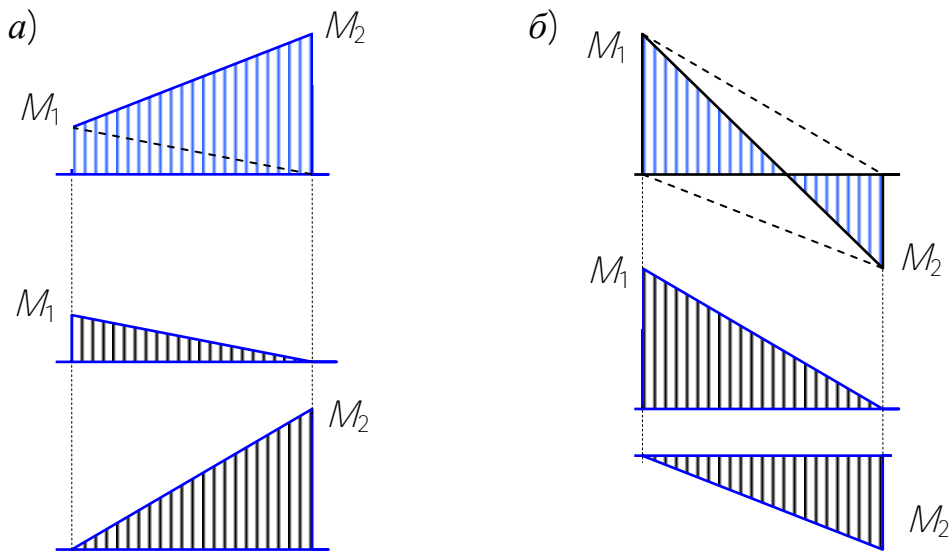
Площадь и центр тяжести треугольной эюры (рис. 101, а)

$$M_C = \frac{2}{3} \cdot M_2; \quad \omega = \frac{1}{2} \cdot l \cdot M_2. \quad (340)$$

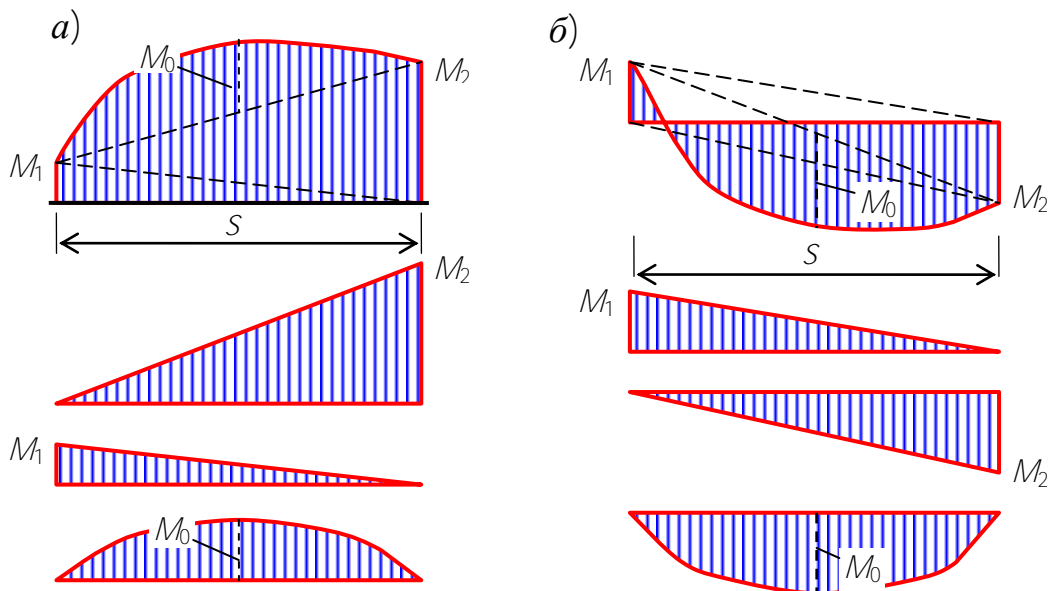
Площадь и центр тяжести параболической эюры (рис. 101, б)

$$M_c = \frac{ql^2}{8}; \quad \omega = \frac{2}{3} M_c \cdot l. \quad (341)$$

Покажем возможные варианты разложения эюр (рис. 102) и (рис. 103).



**Рис. 102. Примеры разложения эюр в форме обычной (а) и перекрученной (б) трапеций**



**Рис. 103. Разложение параболической обычной (а) и параболической перекрученной (б) трапеции**

## 1.13. Статически неопределимые системы. Метод сил

### 1.13.1. Нерезрезные балки. Основные понятия

Пусть балка расположена в плоскости  $ZY$ . В этом случае балка, способная воспринимать произвольную, должна быть прикреплена к опоре не менее чем тремя связями. Эти три связи называются *безусловно необходимыми*. Все остальные связи, если они есть, являются “*лишними*”.

Если связей недостаточно, то есть меньше трех, то система (балка) становится кинематически изменяемой и в качестве строительной конструкции непригодна. Если число связей больше чем требуется из условия кинематической неизменяемости, то есть больше чем три, то балка является статически неопределимой.

Число “лишних” связей определяется степенью статической неопределимости. Пусть дана балка на четырех опорах (рис. 104)

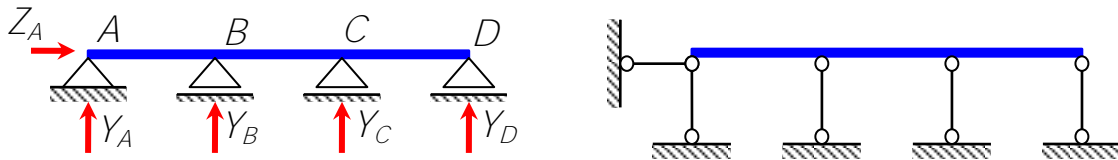


Рис. 104. Нерезрезная балка, прикрепленная к опоре пятью связями

Если балку рассматривать как жесткое тело (диск) на плоскости, то она имеет три степени свободы – смещения по горизонтальному и по вертикальному направлениям, а также поворот около любой неподвижной точки. Количество уравнений равновесия равно трем

$$\sum Z=0; \quad \sum Y=0; \quad \sum M_A=0. \quad (342)$$

Количество неизвестных совпадают с числом реакций и равно пяти –  $Z_A, Y_A, Y_B, Y_C, Y_D$ .

Степень статической неопределимости балки равна  $n=5-3=2$ . Значит балка один раз (однажды) статически неопределимая.

Бывают случаи, когда число связей больше чем три, а система (балка) все равно кинематически изменяемая. Пример приведен на рисунке (рис. 105).

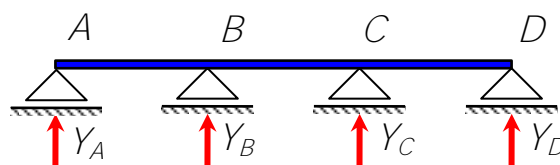


Рис. 105. Кинематически изменяемая система



### 1.13.2. Понятие об основной системе метода сил.

#### Эквивалентная система

Основная система строится путем отбрасывания (перерезывания) всех “лишних” связей. При этом основная система должна быть:

- *статически определимой;*
- *кинематически неизменяемой.*

Для любой неразрезной (статически неопределимой) балки можно построить бесконечное множество основных систем метода сил.

Какие-то варианты основной системы могут быть “более выгодными” или “невыгодными” по объему вычислений. Примеры основных систем для статически неопределимой балки приведены ниже (рис. 106).

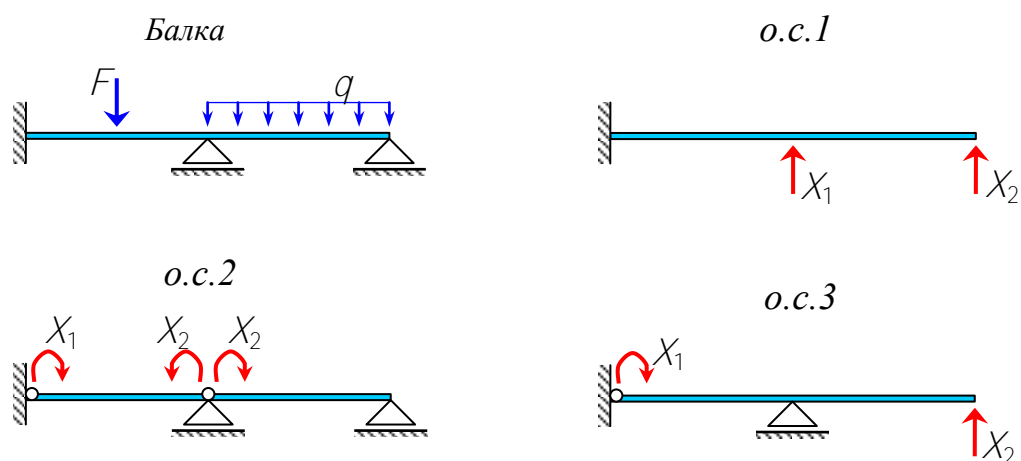


Рис. 106. Примеры построения основных систем для неразрезной балки

Для получения эквивалентной (равной по своим деформациям) системы по отношению к заданной основной системе требуется приложить неизвестные силы в перерезанных связях. Затем поставить условие, чтобы суммарная деформация от нагрузки и неизвестных по направлениям перерезанных связей была равна нулю.

Для иллюстрации возьмем пример дважды статически неопределимой балки (рис. 107).

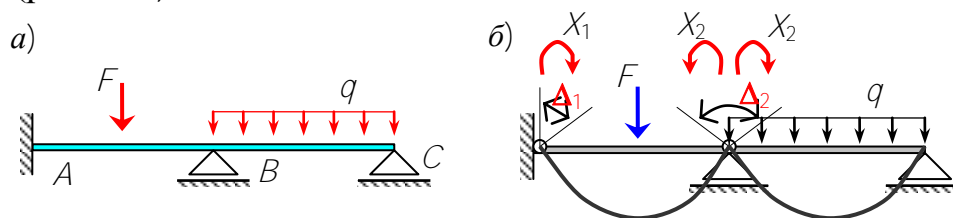


Рис. 107. Статически неопределимая (неразрезная) балка (а) и основная система с перемещениями и неизвестными силами в перерезанных связях (б)

Построим основную систему путем установки перерезывающих шарниров в защемлении А и над опорой В.

Составим уравнения совместности деформаций

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \Delta_{1X_1} + \Delta_{1X_2} + \Delta_{1F} = 0; \\ \Delta_2 &= \Delta_{2X_1} + \Delta_{2X_2} + \Delta_{2F} = 0.\end{aligned}\tag{343}$$

Поясним, что

$\Delta_{1X_1}$  – угол поворота сечения основной системы по направлению первой перерезанной связи от неизвестного  $X_1$ ;

$\Delta_{1X_2}$  – то же, от неизвестного  $X_2$ ;

$\Delta_{1F}$  – то же, от нагрузки;

$\Delta_{2X_1}$  – угол поворота сечения основной системы по направлению второй перерезанной связи от неизвестного  $X_1$ ;

$\Delta_{2X_2}$  – то же, от неизвестного  $X_2$ ;

$\Delta_{2F}$  – то же, от нагрузки;

Очевидно, что для рассматриваемой неразрезной балки перемещения  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  должны быть равны нулю. Сечение у опоры  $A$  повернуться не может из-за защемления. Поэтому  $\Delta_1 = 0$ . Левое и правое сечения над опорой  $B$  поворачиваются, но остаются параллельными. Значит, угол между ними  $\Delta_2 = 0$  остается равным нулю и после деформации балки.

Если поставленное нами условие

$$\Delta_1 = 0 \quad \text{и} \quad \Delta_2 = 0\tag{344}$$

выполняется для основной системы, основная система станет *эквивалентной* исходной (неразрезной) балке. Это значит, что и деформации, и внутренние силы в основной системе и в заданной балке будут совершенно одинаковые.

### 1.13.3. Канонические уравнения метода сил

Учитывая принцип независимости действия сил, деформации основной системы (358) можно представить следующим образом

$$\begin{aligned}\Delta_{1X_1} &= \delta_{11} X_1; & \Delta_{1X_2} &= \delta_{12} X_2; \\ \Delta_{2X_1} &= \delta_{21} X_1; & \Delta_{2X_2} &= \delta_{22} X_2,\end{aligned}\tag{345}$$

где  $\delta_{11}$  – перемещение основной системы по направлению первой перерезанной связи от единичной силы (момента), приложенной по направлению этой же первой связи;

$\delta_{12}$  – перемещение основной системы по направлению первой перерезанной связи от единичной силы (момента), приложенной по направлению второй перерезанной связи;

$\delta_{21}$  – перемещение основной системы по направлению второй перерезанной связи от единичной силы (момента), приложенной по направлению первой перерезанной связи;

$\delta_{22}$  – перемещение основной системы по направлению второй перерезанной связи от единичной силы (момента), приложенной по направлению этой же второй связи;

Тогда условие совместности деформаций (перемещений) примут вид

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_2 = 0. \end{cases} \quad (346)$$

Эти уравнения называются **каноническими уравнениями метода сил**, так как неизвестными являются силы (моменты).

**Канон** (*греч. κανών*) — неизменная (консервативная) традиционная, не подлежащая пересмотру совокупность законов, норм и правил в различных сферах деятельности и жизни человека.

Таким образом, каждое каноническое уравнение выражает следующее, что *сумма перемещений основной системы по направлению соответствующей перерезанной связи от неизвестных и нагрузки равна нулю. То есть каждое каноническое уравнение – это есть уравнение совместности деформаций (перемещений).*

Количество канонических уравнений метода сил всегда совпадает со степенью статической неопределимости балки (системы).

Коэффициенты и свободные члены канонических уравнений вычисляются по методу Максвелла–Мора (способом Верещагина). Хотя не исключается для этого использование других методов, например, метода начальных параметров.

Решив систему канонических уравнений, получим значения неизвестных, то есть *раскроем статическую неопределимость*. Затем, к основной системе прикладываются нагрузка и найденные неизвестные и строятся эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, как для статически определимой балки. Эти эпюры обычно называют окончательными.

*Отметим, что вместо того, чтобы заниматься статически неопределимой балкой в методе сил мы занимаемся статически определимой балкой, которая называется основной системой.*

#### 1.13.4. Определение перемещений в статически неопределимых балках

Определение перемещение в неразрезной (статически неопределимой) балке может быть сведено к определению перемещений в статически определимой балке. Для этого необходимо:

- раскрыть статическую неопределимость, то есть найти неизвестные;
- приложить к основной системе нагрузку и найденные неизвестные;
- построить окончательную эпюру изгибающих моментов;
- приложить к основной системе единичную силу в той точке, где требуется определить прогиб или единичный момент, где требуется определить угол поворота;
- построить единичную эпюру моментов, то есть эпюру моментов от этой единичной силы (момента);
- перемножить окончательную и единичную эпюры изгибающих моментов и результат перемножения разделить на жесткость балки.

Если получился прогиб (угол поворота) положительным, то это значит, что они совпадают по направлению с единичной силой (единичным моментом). В противном случае – они направлены противоположно направлениям единичной силы или единичного момента.

#### 1.13.5. Учет осадок опор при расчете неразрезных (статически неопределимых) балок

Рассмотрим неразрезную балку (рис. 108, а), которая опирается на четыре опоры, одна из которых (левая) является шарнирно неподвижной, а три других – шарнирно подвижные. Таким образом, имеется четыре связи. Если рассматривать балку как абсолютно жесткое тело в плоскости, то она имеет три степени свободы. Определим количество лишних связей  $n=4-3=1$ . Значит система является один раз статически неопределимой.

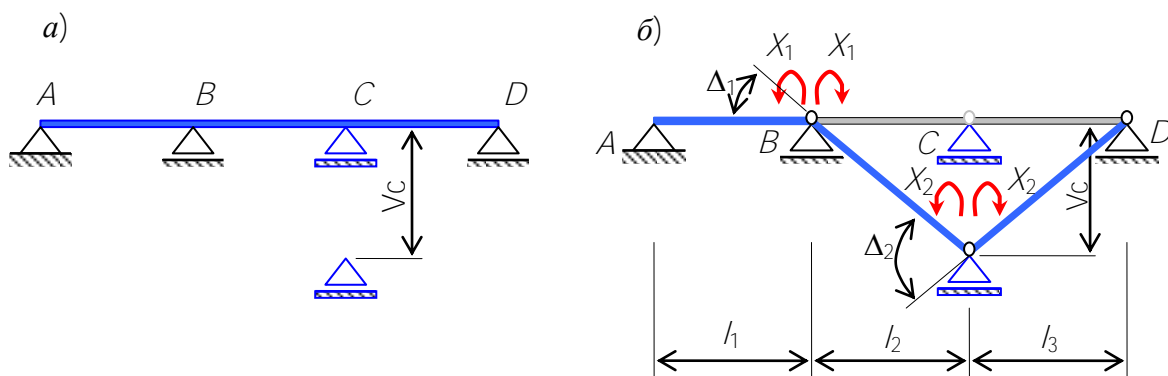


Рис. 108. Схема перемещений основной системы балки за счет осадки одной из ее опор

Пусть в результате осадки основания опора  $C$  переместится вниз на величину  $V_C$  (рис. 108, б). Тогда перемещения в основной системе по направлению неизвестных  $X_1$  и  $X_2$  равны

$$\Delta_1 = \frac{V_C}{l_2}; \quad \Delta_2 = \frac{V_C}{l_2} + \frac{V_C}{l_3}. \quad (347)$$

Тогда система канонических уравнений будет иметь вид

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1F} = \Delta_1; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2F} = \Delta_2. \end{cases} \quad (348)$$

*Таким образом, для учета осадок опор необходимо в правую часть канонических уравнений вместо нуля подставить перемещения по направлению неизвестных сил, вызванные только осадками опор.*

## 1.14. Сложное сопротивление

### 1.14.1. Общие понятия о сложном сопротивлении

Если в поперечном сечении бруса одновременно действует несколько компонентов внутренних сил, то считается, что он находится в условии сложного сопротивления.

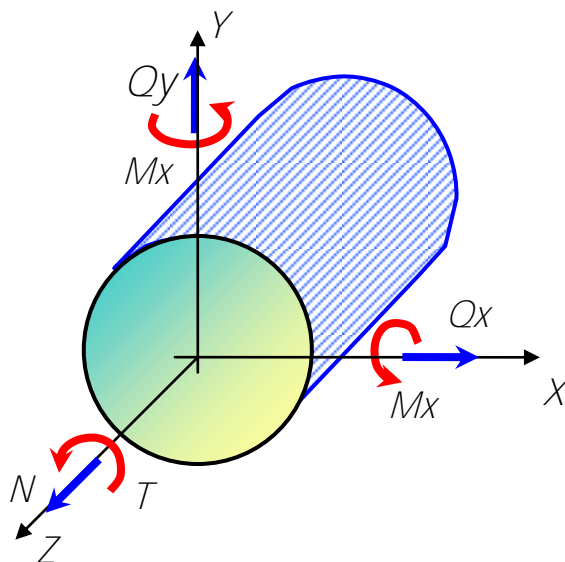


Рис. 109. Самый общий случай сопротивления стержня

Для вычисления напряжений в произвольной точке сечения используется принцип независимости действия сил. Вычисляются напряжения от каждой составляющей внутренних сил в отдельности, а затем результаты складываются:

от продольной силы

$$\sigma_{omN} = \frac{N}{A}, \quad (349)$$

от крутящего момента

$$\tau_{omT} = \frac{T}{J_p} \cdot \rho, \quad (350)$$

от изгибающего момента  $M_x$

$$\sigma_{omM_x} = \frac{M_x}{J_x} \cdot y, \quad (351)$$

от изгибающего момента  $M_y$

$$\sigma_{omM_y} = \frac{M_y}{J_y} \cdot x, \quad (352)$$

от поперечной силы  $Q_x$

$$\tau_{omQ_x} = \frac{Q_x S_x^o}{J_x b_{(y)}}, \quad (353)$$

от поперечной силы  $Q_y$

$$\tau_{omQ_y} = \frac{Q_y S_y^o}{J_y b_{(x)}}. \quad (354)$$

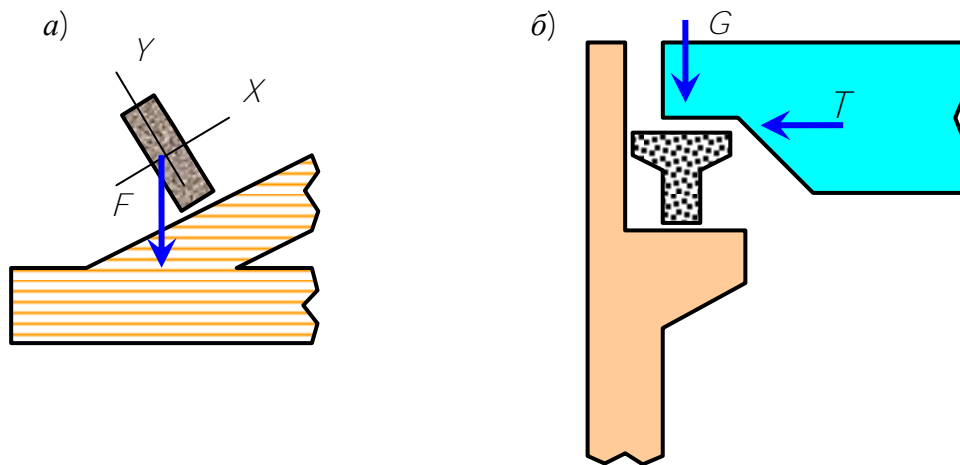
Нормальные напряжения складываются алгебраически, а касательные напряжения складываются геометрически.

Некоторым частным случаям сложного сопротивления даны названия. Например, *внецентренное сжатие*, *кручение с изгибом*, *изгиб с сжатием*, *косой изгиб* и др.

#### 1.14.2. Косой изгиб. Общие понятия

Изгиб бруса, при котором плоскость действия суммарного изгибающего момента в сечении не содержит ни одной из главных осей инерции этого сечения, называется *косым изгибом*.

Примеры.

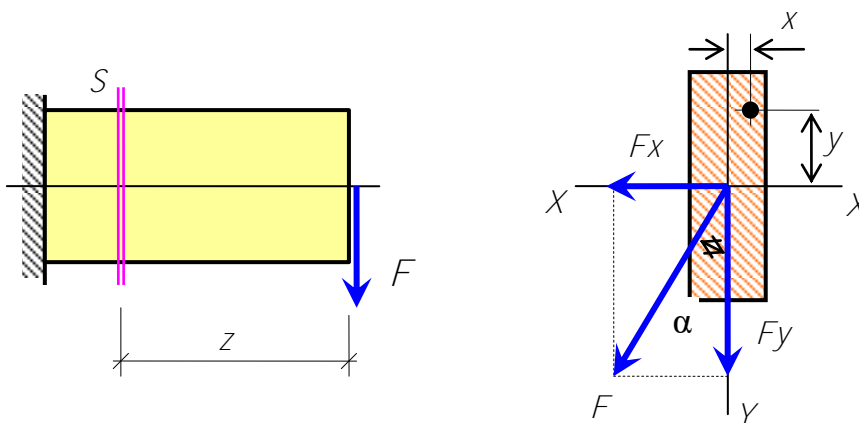


**Рис. 110. Примеры элементов конструкций, испытывающих косой изгиб:  
а) обрешетка кровли; б) подкрановая балка**

На косой изгиб могут работать обрешетки кровли, подкрановые балки, элементы пространственных стержневых систем (рис. 110) и др.

### 1.14.3. Определение напряжений при косом изгибе

Пусть дана консольная балка прямоугольного сечения, нагруженная на конце сосредоточенной силой  $F$  (рис. 111).



**Рис. 111. Консольная балка, испытывающая косой изгиб**

Разложим силу  $F$  на составляющие по направлению оси  $X$  и оси  $Y$ , являющимися главными осями инерции рассматриваемого сечения в связи с тем, что они являются осями симметрии сечения.

$$F_x = F \cdot \sin \alpha, \quad F_y = F \cdot \cos \alpha. \quad (355)$$

Каждая из составляющих сил вызывает в сечении  $S$  изгибающий момент

$$\begin{aligned} M_x &= F_y \cdot z = F \cdot z \cdot \cos \alpha = M \cos \alpha; \\ M_y &= F_x \cdot z = F \cdot z \cdot \sin \alpha = M \sin \alpha. \end{aligned} \quad (356)$$

Таким образом, при косом изгибе в одном сечении действуют два изгибающих момента – момент относительно оси  $X$  и момент относительно оси  $Y$ . Учитывая принцип независимости действия сил, определим нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения

$$\sigma = \sigma_{om Mx} + \sigma_{om My} \quad (357)$$

или

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x, \quad (358)$$

где  $M_x, M_y$  – изгибающие моменты в сечении относительно главных осей инерции  $X$  и  $Y$

$$M_x = M \cos \alpha; \quad M_y = M \sin \alpha, \quad (359)$$

где

$\alpha$  – угол между плоскостью суммарного изгибающего момента и осью  $Y$ ;

$J_x, J_y$  – главные центральные моменты инерции рассматриваемого сечения;

$x, y$  – координаты точки, в которой вычисляется напряжение.

**Для получения правильного знака оси  $X$  и  $Y$  следует направлять в сторону растянутых волокон, изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$  всегда принимать положительными, а координаты  $x$  и  $y$  со своим знаком.**

Если сечение имеет точку одновременно максимально удаленную от осей  $X$  и  $Y$ , то максимальные напряжения могут быть найдены по упрощенной формуле

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{J_x} y_{max} + \frac{M_y}{J_y} x_{max} = \frac{M_x}{J_x / y_{max}} + \frac{M_y}{J_y / x_{max}} \quad (360)$$

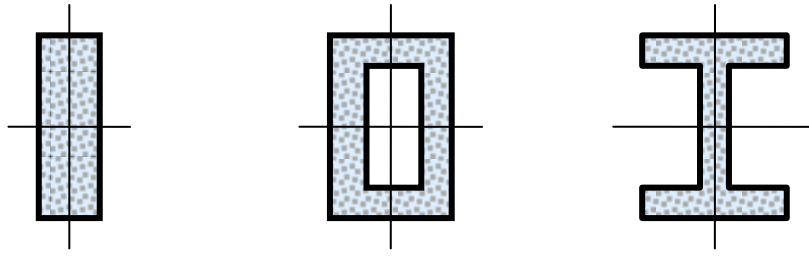
или

$$\sigma_{max} = \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} \leq R, \quad (361)$$

где  $W_x, W_y$  – осевые моменты сопротивления сечения относительно осей  $X$  и  $Y$ .

Примеры таких сечений приведены на рисунке (рис. 112)

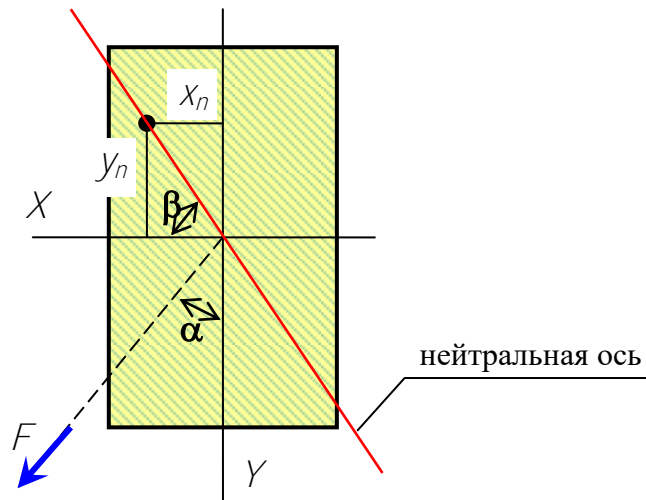




**Рис. 112. Примеры сечений, имеющих точки, максимально удаленные от главных центральных осей инерции – прямоугольное, коробчатое, двутавровое**

#### 1.14.4. Определение положения нейтральной оси при косом изгибе

Рассмотрим сечение прямоугольной формы (рис. 113). Так как это сечение имеет оси симметрии, поэтому известно положение его главных центральных осей инерции – это сами оси симметрии.



**Рис. 113. Положение нейтральной оси в прямоугольном сечении при косом изгибе**

*Линия, в каждой точке которой напряжения равны нулю, называется нейтральной линией (осью).*

Пусть  $x_n, y_n$  координаты точки, расположенной на нейтральной линии. При этом поставим условие, чтобы они не были равными нулю. В соответствии с определением нейтральной оси, поставим условие, чтобы нормальная напряжение в этой точке было равно нулю.

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y_n + \frac{M_y}{J_y} x_n = 0. \quad (362)$$

Так как  $\frac{M_x}{J_x}, \frac{M_y}{J_y}$  не зависят от координат точек сечения, то отсюда следует, что нейтральная линия – это прямая (381). Значит, ее можно называть **нейтральной осью**.

Разделим обе части уравнения (381) на  $x_n, M_x$  и умножим на  $J_x$ . В результате получим уравнение (382)

$$\frac{y_n}{x_n} + \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y} = 0. \quad (363)$$

Перенесем второе слагаемое на правую сторону уравнения (363) и получим

$$\frac{y_n}{x_n} = \operatorname{tg}\beta = -\frac{J_x}{J_y} \cdot \frac{M_y}{M_x} = -\frac{J_x}{J_y} \cdot \frac{M \sin\alpha}{M \cos\alpha} = -\frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg}\alpha. \quad (364)$$

Без учета знака получим

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg}\alpha. \quad (365)$$

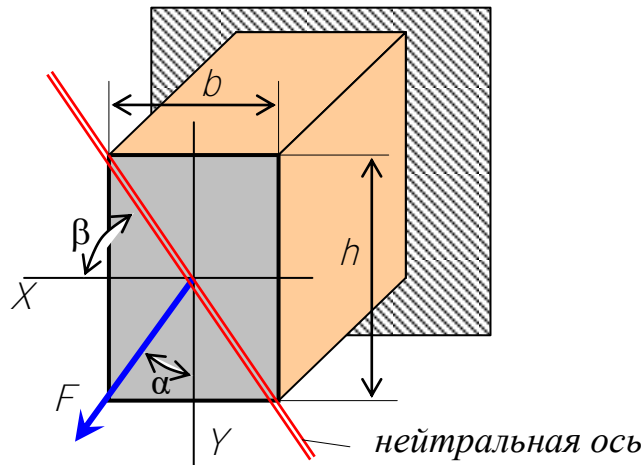
Из формулы (362), очевидно, что напряжение в центре тяжести сечения, то есть при  $x_n$  и  $y_n$  равным нулю, при косом изгибе равно нулю. Следовательно, нейтральная линия (ось) при косом изгибе всегда проходит через центр тяжести сечения, и наклонена к оси  $X$  под углом  $\beta$  (365).

**Угол  $\beta$  всегда откладываем от оси  $X$  так, чтобы нейтральная ось проходила через отрицательные квадранты, если оси  $X$  и  $Y$  направлять в сторону растянутых волокон.**

Если  $J_x \neq J_y$ , то, очевидно, что нейтральная ось не перпендикулярна силовой линии, то есть плоскости суммарного изгибающего момента, так как  $\alpha \neq \beta$ . Отметим, что плоскость суммарного изгибающего момента в сечении наклонена к оси  $Y$  под углом  $\alpha$  (рис.113).

Для сечений, у которых  $J_x = J_y$  (круг, квадрат, кольцо и др.) косою изгиб, согласно данному определению, вообще невозможен, так как любая центральная ось сечения является главной. Поэтому силовая плоскость будет всегда содержать одну из многочисленных главных осей инерции. Такой изгиб следует называть не косым изгибом, а **изгибом в двух плоскостях**.

*Рассмотрим частный случай косою изгиба.*



**Рис. 114. Консоль прямоугольного сечения, испытывающая косо**

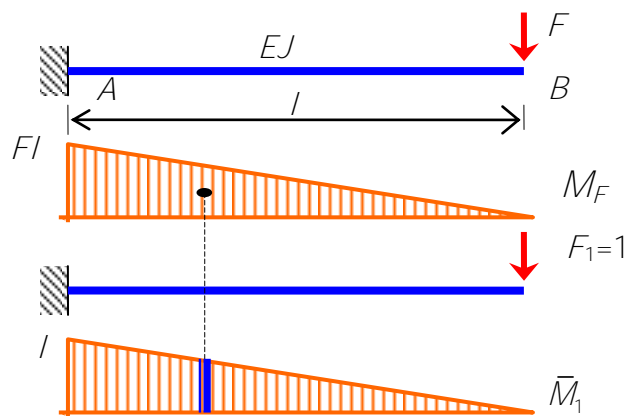
Дана балка прямоугольного сечения (рис.114). Пусть силовая плоскость проходит через диагональ сечения.

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg}\alpha = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{12}{hb^3} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{h^2}{b^2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{2}{h} = \frac{h}{b}. \quad (366)$$

Таким образом, нейтральная ось совпадает с другой диагональю сечения.

### 1.14.5. Определение прогибов балки при плоском и пространственном косо

Вначале получим выражения для прогиба консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой (рис.115). Для вычисления прогибов воспользуемся методом Максвелла-Мора.



**Рис. 115. Грузовая и единичная эпюры на консоли от сосредоточенной силы**

В результате получим прогиб в точке B

$$V_B = \frac{1}{EJ} \left\{ \frac{1}{2} F \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l \right\} = \frac{Fl^3}{3EJ}. \quad (367)$$

Косой изгиб разделяют на два вида – *плоский* и *пространственный*.  
*Косой изгиб называется плоским, если упругая ось балки является плоской кривой.*

*Косой изгиб называется пространственным, если упругая ось балки является пространственной кривой.*

Рассмотрим плоский косой изгиб (рис.116).

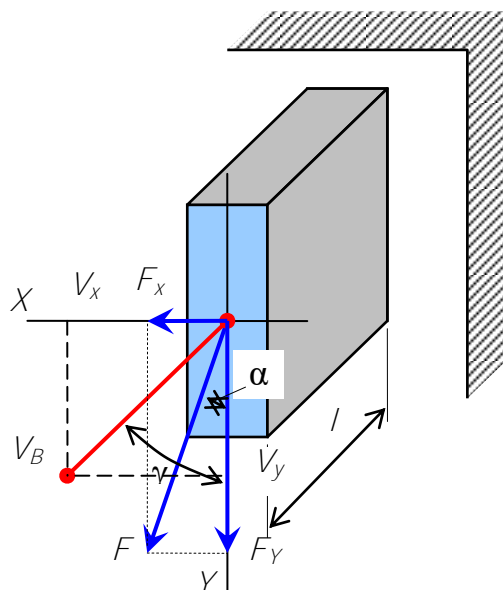


Рис. 116. Консоль, испытывающая плоский косой изгиб

Учитывая принцип независимости действия сил, найдем прогибы от составляющих сил  $F_x$  и  $F_y$ .

$$V_{Bx} = \frac{F_x l^3}{3EJ_y} \quad \text{и} \quad V_{By} = \frac{F_y l^3}{3EJ_x}. \quad (368)$$

Полный прогиб равен геометрической сумме прогибов в вертикальном и в горизонтальном направлениях

$$V_B = \sqrt{V_{Bx}^2 + V_{By}^2}. \quad (369)$$

Определим направление полного прогиба балки в точке  $B$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{V_{Cx}}{V_{Cy}} = \frac{F_x l^3}{3EJ_y} \cdot \frac{3EJ_x}{F_y l^3} = \frac{F_x}{F_y} \cdot \frac{J_x}{J_y} = \frac{F \sin \alpha}{F \cos \alpha} = \frac{J_x}{J_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (370)$$

Окончательно имеем

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{J_x}{J_y} \cdot \operatorname{tg}\alpha. \quad (371)$$

Так как

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg}\alpha, \quad (372)$$

то есть углы равны друг другу  $\gamma = \beta$ . Но углы откладываются от взаимно перпендикулярных осей  $X$  и  $Y$ , поэтому *направление полного прогиба при плоском косом изгибе перпендикулярно нейтральной оси.*

Вместе с тем, отметим, что при  $J_x \neq J_y$  направление полного прогиба не совпадает с направлением действия силы  $\alpha \neq \beta$ . ***Это и послужило причиной назвать этот вид сопротивления косым изгибом.*** И действительно сила действует в одном направлении, а полный прогиб направлен в другом.

Для пространственного косоуго изгиба положение, то есть угол  $\alpha$ , плоскости действия суммарного изгибающего момента для различных сечений балки разное и зависит от значений изгибающих моментов в нем  $M_x$  и  $M_y$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{M_y}{M_x}. \quad (373)$$

Поэтому для определения полного прогиба балки и его направления необходимо найти прогибы  $V_{sx}$  и  $V_{sy}$  в рассматриваемом сечении  $S$  по направлениям главных осей инерции  $X$  и  $Y$  отдельно, а затем их геометрически сложить. При этом прогибы определяются по общим правилам для плоского простого изгиба.

$$V_s = \sqrt{V_{sx}^2 + V_{sy}^2}. \quad (374)$$

Направление полного прогиба в сечении  $S$  можно установить по его проекциям

$$\operatorname{tg}\gamma_s = \frac{V_{sx}}{V_{sy}}. \quad (375)$$

*П р и м е ч а н и е.* Чтобы установить какой вид косоуго изгиба испытывает балка не обязательно строить ее упругую ось и увидеть, что она плоская или пространственная. Тем более, что это очень трудоемко и сложно. Достаточно лишь установить, что отношение моментов  $M_y/M_x$  для всех сечений одинаковое или неодинаковое. В первом случае имеет место плоский косоуго изгиб, а во втором – пространственный.

#### 1.14.6. Построение эпюр внутренних сил при косом изгибе балки

В поперечных сечениях балки при косом изгибе появляются две поперечные силы и два изгибающих момента:

$Q_X$  – поперечная сила, вызывающая сдвиг по направлению поперечной оси  $X$ ;

$Q_Y$  – то же, по направлению поперечной оси  $Y$ ;

$M_X$  – изгибающий момент относительно поперечной оси  $X$ ;

$M_Y$  – то же, относительно поперечной оси  $Y$ .

Для определения внутренних сил используется метод сечений. Нагрузка раскладывается на составляющие, лежащие в плоскостях  $ZX$  и  $ZY$ . Эпюры строятся отдельно – от составляющих в плоскости  $ZX$  и от составляющих в плоскости  $ZY$ .

При необходимости эпюры могут быть геометрически сложены.

#### 1.14.7. Порядок расчета на прочность балки при косом изгибе

При сложной форме сечения и различной прочности материала на растяжение и сжатие следует:

- 1) построить эпюры внутренних сил в двух плоскостях;
- 2) определить опасное сечение;
- 3) определить положение нейтральной оси;
- 4) найти опасные точки в растянутой части сечения и в сжатой части сечения;
- 5) проверить по условию прочности на растяжение и на сжатие

$$\sigma_s = \frac{M_X}{J_X} y_s + \frac{M_Y}{J_Y} x_s \leq R_s; \quad (376)$$

$$\sigma_t = \frac{M_X}{J_X} y_t + \frac{M_Y}{J_Y} x_t \leq R_t, \quad (377)$$

где  $x_t, y_t$  – координаты опасной точки в растянутой части сечения;

$x_s, y_s$  – координаты опасной точки в сжатой части сечения;

$R_t, R_s$  – расчетные сопротивления, соответственно, на растяжение и на сжатие.

*П р и м е ч а н и е.* Опасными точками сечения являются точки, максимально удаленные от нейтральной оси, так как в них появляются максимальные напряжения  $\sigma_{tmax}, \sigma_{smax}$ .

Для сечений прямоугольно подобной формы, то есть когда имеются точки одновременно максимально удаленные от главных центральных осей инерции  $X$  и  $Y$ , а также, когда материал имеет одинаковую прочность на растяжение и на сжатие, порядок расчета следующий:

- 1) построить эпюры внутренних сил в двух плоскостях;
- 2) определить опасное сечение в балке;
- 3) проверить по условию прочности

$$\sigma = \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} \leq R \quad (378)$$

или

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \cdot \frac{W_x}{W_x} = \frac{\left( M_x + \frac{W_x}{W_y} \cdot M_y \right)}{W_x} = \frac{M_{x \text{ red}}}{W_x}. \quad (379)$$

Окончательно имеем

$$\sigma = \frac{M_{x \text{ red}}}{W_x} \leq R, \quad (380)$$

где

$$M_{x \text{ red}} = M_x + \frac{W_x}{W_y} \cdot M_y \quad (381)$$

приведенный момент к изгибающему моменту  $M_x$ .

#### 1.14.8. Внецентренное растяжение (сжатие). Основные понятия.

**Внецентренное растяжение (сжатие)** – это такой вид сложного сопротивления, который вызван действием продольной силы, не совпадающей с продольной осью стержня.

Такой вид сопротивления испытывают опоры мостов, фундаменты под колонны, колонны промышленных корпусов (рис. 117) и др.

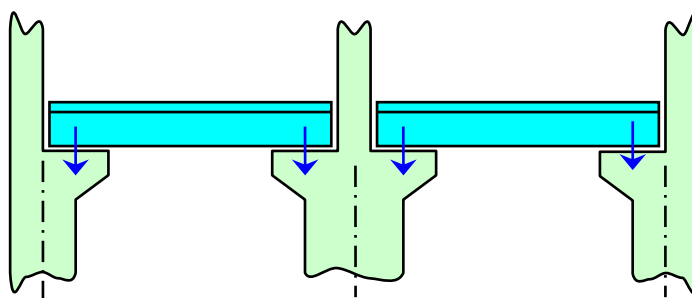
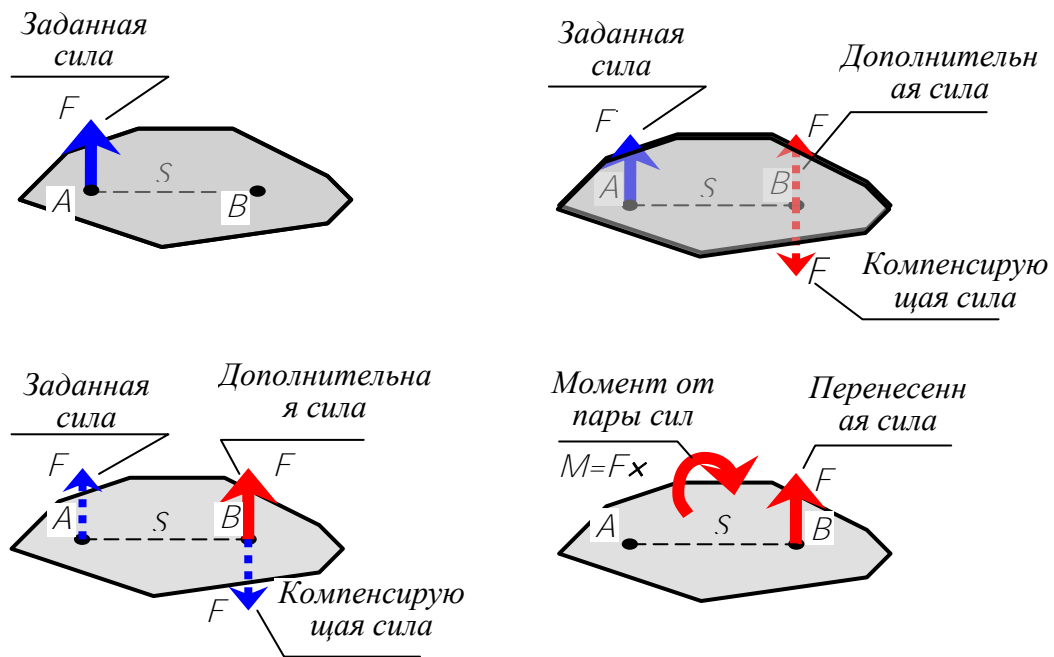


Рис. 117. Колонны поперечника промышленного корпуса

#### 1.14.9. Определение нормальных напряжений при внецентренном растяжении (сжатии).

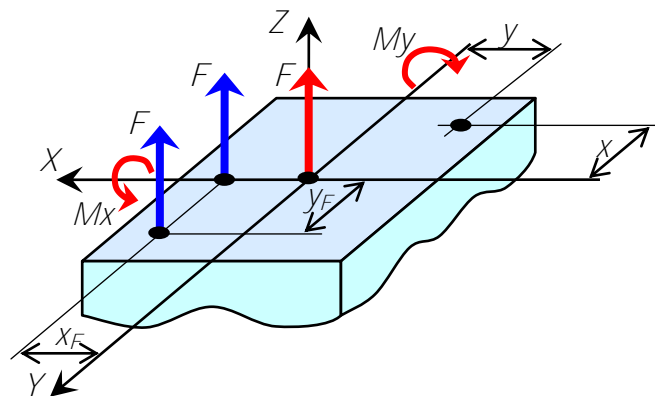
Вначале рассмотрим диск, к которому приложена сила  $F$  в точке  $A$  (рис. 118). Переместим силу  $F$  так, чтобы ее точка приложения оказалась в точке  $B$ .



**Рис. 118. Процесс параллельного перемещения силы**

Очевидно, что в результате параллельного переноса силы появляется момент, равный произведению исходной силы на расстояние переноса.

То же самое сделаем и для внецентренно приложенной к колонне силы. Только в этом случае будем перемещать ее дважды (рис. 119). Вначале переместим точку приложения силы на  $y_F$ , так, чтобы она оказалась на оси  $X$ , а затем на  $x_F$ , чтобы она оказалась на продольной оси колонны  $Z$ . В результате такого двойного переноса появляются два момента – момент относительно оси  $X$  ( $M_X = F \cdot y_F$ ) и момента относительно оси  $Y$  ( $M_Y = F \cdot x_F$ ).



**Рис. 119. Перенос внецентренно приложенной силы на продольную ось  $Z$**

Для удобства рассмотрим внецентренно сжатый стержень прямоугольного поперечного сечения (рис.119). Это удобно, потому, что заранее известны положения главных центральных осей инерции, которыми будут оси симметрии сечения.



В результате такого переноса кроме центрально приложенной силы  $F$  появятся еще два момента  $M_x$  и  $M_y$ . Так как эти моменты относительно поперечных осей, то они являются изгибающими.

$$N = F; \quad M_x = F \cdot y_F; \quad M_y = F \cdot x_F. \quad (382)$$

Таким образом, внецентренное растяжение (сжатие) приводится к трем простым видам сопротивления – **центральному растяжению (сжатию) и двум чистым изгибам**. Используя принцип независимости действия сил, вычислим напряжения в произвольной точке поперечного сечения стержня от каждого внутренней силы отдельно и сложим их.

$$\sigma = \sigma_{omN} + \sigma_{omM_x} + \sigma_{omM_y} \quad (383)$$

или

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x, \quad (384)$$

где  $N$  – продольная сила, равная внецентренно приложенной равнодействующей всех сил, приложенных к колонне  $N = \pm F$ . Если колонна внецентренно растянута, то принимаем знак “плюс”, если внецентренно сжата, то принимаем знак “минус”;

$M_x, M_y$  – изгибающие моменты, вызванные эксцентриситетом приложения равнодействующей силы

$$M_x = N \cdot y_F; \quad M_y = N \cdot x_F. \quad (385)$$

$A$  – площадь поперечного сечения колонны;

$J_x, J_y$  – главные центральные моменты инерции поперечного сечения колонны;

$x, y$  – координаты точки, в которой вычисляется напряжение.

Под силой  $F$  следует понимать равнодействующую всех сил, приложенных к колонне.

Полученная формула, согласно принципу Сен-Венана, справедлива для сечений достаточно далеко удаленных от места приложения нагрузки.

Сделаем преобразования и запишем эту формулу в другом виде.

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot y_F \cdot y}{J_x} \cdot \frac{A}{A} + \frac{N \cdot x_F \cdot x}{J_y} \cdot \frac{A}{A} = \quad (386)$$

$$= \frac{N}{A} \cdot \left( 1 + \frac{y_F \cdot y}{J_x/A} + \frac{x_F \cdot x}{J_y/A} \right) = \frac{N}{A} \cdot \left( 1 + \frac{y_F \cdot y}{I_x^2} + \frac{x_F \cdot x}{I_y^2} \right).$$

Окончательно имеем

$$\sigma = \frac{N}{A} \cdot \left( 1 + \frac{y_F \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_F \cdot x}{i_y^2} \right) \quad (387)$$

или

$$\sigma = \sigma_m \cdot \left( 1 + \frac{y_F \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_F \cdot x}{i_y^2} \right). \quad (388)$$

Здесь

$i_x = \sqrt{J_x/A}$ ;  $i_y = \sqrt{J_y/A}$  – радиусы инерции поперечного сечения (являются геометрическими характеристиками сечения и измеряются в см, мм, м и т.д.);

$x_F, y_F$  – координаты точки приложения равнодействующей;

$x, y$  – координаты точки, в которой вычисляется напряжение;

$N$  – продольная сила в сечении колонны;

$A$  – площадь поперечного сечения;

$\sigma_m$  – среднее напряжение в сечении колонны,  $\sigma_m = N/A$ .

#### 1.14.10. Определение положения нулевой линии (нейтральной оси) при внецентренном растяжении (сжатии)

Линия, соединяющая все точки сечения колонны, в которой напряжения равны нулю, называется **нулевой линией (нейтральной осью)**.

Пусть произвольная точка расположена на нулевой линии. Обозначим ее координаты  $x_n, y_n$ . Согласно определению, имеем

$$\sigma = \frac{N}{A} \cdot \left( 1 + \frac{y_F \cdot y_n}{i_x^2} + \frac{x_F \cdot x_n}{i_y^2} \right) = 0. \quad (389)$$

Так как  $N \neq 0$ , то выражение в скобках должно быть равным нулю

$$1 + \frac{y_F \cdot y_n}{i_x^2} + \frac{x_F \cdot x_n}{i_y^2} = 0. \quad (390)$$

Перенесем  $x_F$  и  $y_F$  в знаменатель знаменателя

$$1 + \frac{y_n}{i_x^2/y_F} + \frac{x_n}{i_y^2/x_F} = 0. \quad (391)$$

Так как  $i_x^2/y_F$  и  $i_y^2/x_F$  не зависят от координат точки сечения. Обозначим их

$$a_y = -i_x^2/y_F \text{ и } a_x = -i_y^2/x_F. \quad (392)$$

Тогда уравнение можно записать в следующем виде

$$\frac{y_n}{a_y} + \frac{x_n}{a_x} = 1. \quad (393)$$

Полученное уравнение – это уравнение прямой линии в отрезках. Здесь

$$a_x = -\frac{I_y^2}{X_F} \text{ и } a_y = -\frac{I_x^2}{Y_F} \quad (394)$$

– это отрезки, отсекаемые нулевой линией на главных центральных осях инерции (рис. 120).

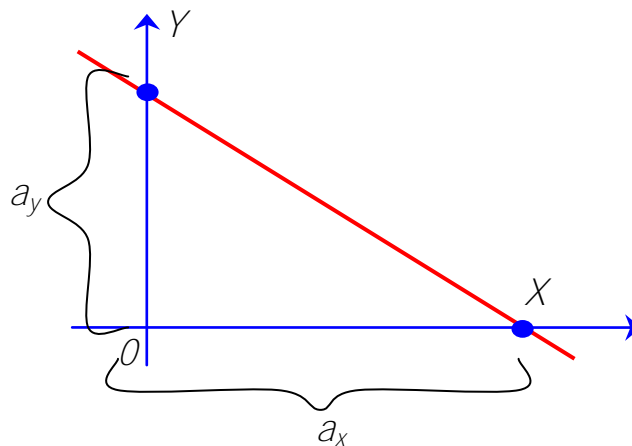


Рис. 120. Построение нулевой линии по отсекаемым отрезкам

#### 1.14.11. Свойства нулевой линии

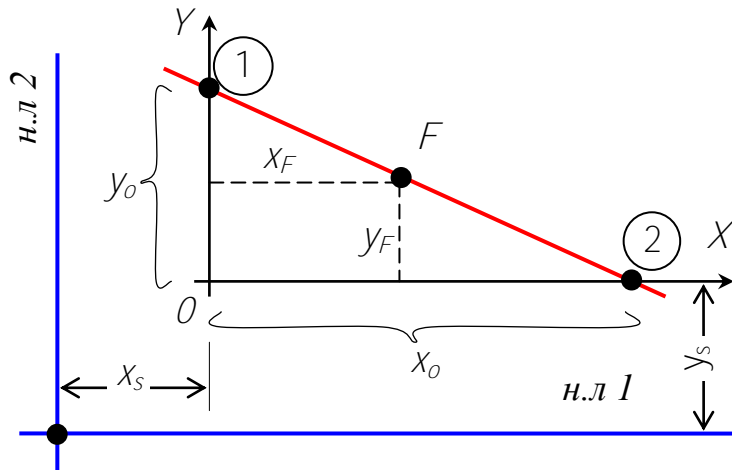
Перечислим свойства нулевой линии без доказательства.

1) Нулевая линия никогда не пересекает тот квадрант, в котором приложена равнодействующая сила.

2) Если точка приложения силы движется по прямой, пересекающей центр тяжести сечения, и приближается к центру тяжести, то нулевая линия смещается параллельно сама себе и удаляется от центра тяжести сечения.

3) Если точка приложения силы находится на оси  $X$  (на оси  $Y$ ), то нулевая линия перпендикулярна оси  $X$  (оси  $Y$ ).

4) Если точка приложения силы движется по прямой, не проходящей через центр тяжести сечения, то нулевая линия поворачивается около неподвижной точки. Докажем это утверждение



**Рис. 121. Положение нулевой линии при перемещении точки приложения силы из точки 1 в точку 2**

Пусть оси  $X$  и  $Y$  являются главными центральными осями инерции сечения. Поставим условие, чтобы точка приложения силы  $(x_F, y_F)$  двигалась по прямой 1-2. Уравнение прямой 1-2 в отрезках имеет вид

$$x_F/x_0 + y_F/y_0 = 1. \quad (395)$$

Если сила приложена в точке 1, то нулевая линия будет перпендикулярна оси  $Y$  и удалена от оси  $X$  на  $y_s$

$$y_s = -\frac{I_x^2}{I_y} / y_0. \quad (396)$$

Если сила приложена в точке 2, то нулевая линия будет перпендикулярна оси  $X$  и удалена от оси  $Y$  на  $x_s$

$$x_s = -\frac{I_y^2}{I_x} / x_0. \quad (397)$$

Вычислим напряжения в точке  $S$  при приложения силы в произвольной точке прямой 1-2.

$$\begin{aligned} \sigma_S &= \frac{N}{A} \cdot \left( 1 + \frac{x_F x_s}{I_y^2} + \frac{y_F y_s}{I_x^2} \right) = \frac{N}{A} \left[ 1 + \frac{x_F}{I_y^2} \left( -\frac{I_y^2}{x_0} \right) + \frac{y_F}{I_x^2} \left( -\frac{I_x^2}{y_0} \right) \right] = \\ &= \frac{N}{A} \left( 1 - \frac{x_F}{x_0} - \frac{y_F}{y_0} \right) = \frac{N}{A} (1 - 1) = 0. \end{aligned} \quad (398)$$

Таким образом, где бы не была приложена сила  $F$  на прямой 1-2, напряжение в точке  $S$  будет равно нулю. Следовательно, нулевая линия

при движении точки приложения силы  $F$  по прямой 1-2 будет поворачиваться около неподвижной точки  $S$ . Предположение доказано.

Иллюстрация свойств нулевой линии приведена на рисунке 122.

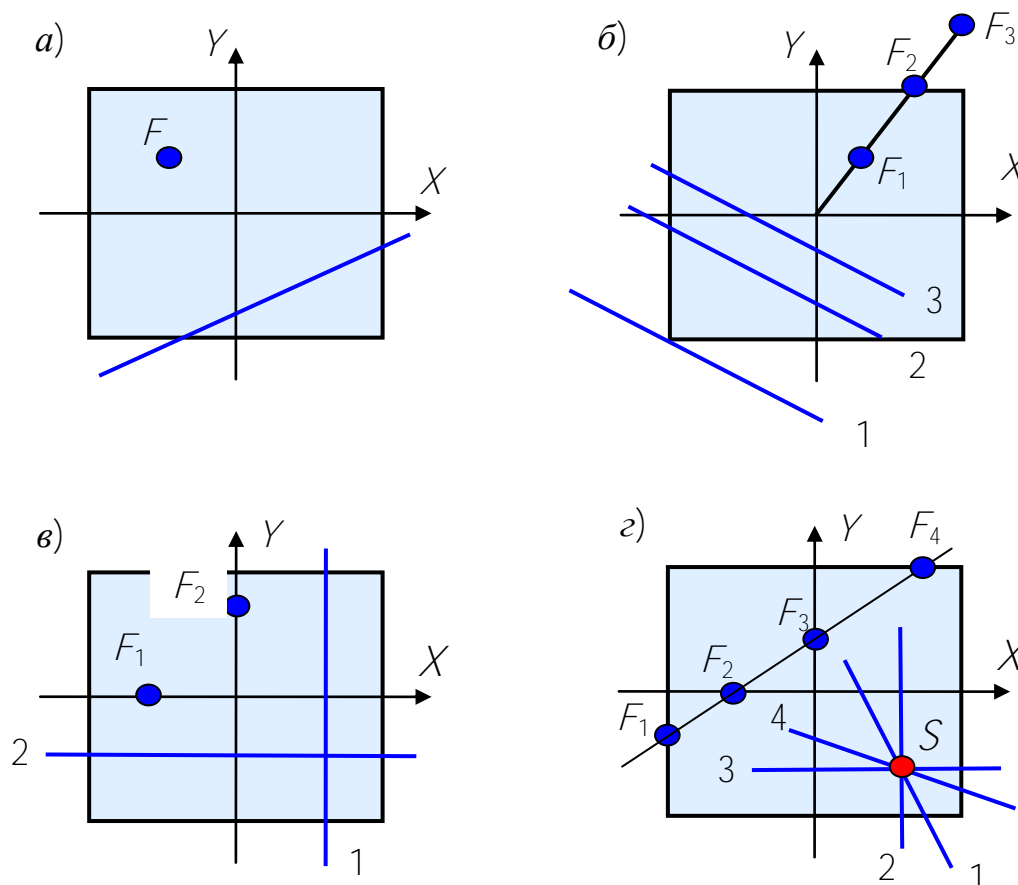


Рис. 122. Иллюстрация свойств нулевой линии – первое (а), второе (б), третье (в) и четвертое (г)

#### 1.14.12. Ядро сечения

**Ядро сечения** – это область, очерченная вокруг центра тяжести, при приложении силы в любой точке которой, во всех точках сечения появляются напряжения одного знака.

Для того, чтобы построить ядро сечения, необходимо рассмотреть всевозможные положения касательных к контуру выпуклой фигуры, описывающей сечение, и предположить, что это нулевые линии. Затем найти координаты точек приложения силы, соответствующих этим касательным нулевым линиям. Это и будут точки контура ядра сечения.

Отсекаемые отрезки нулевой линии определяются по формулам

$$a_x = -\frac{r_y^2}{x_F}; \quad a_y = -\frac{r_x^2}{r_x}.$$
 (399)

Отсюда получим формулы для вычисления координат точек приложения силы

$$x_F = -\frac{I_Y^2}{a_X}; \quad y_F = -\frac{I_X^2}{a_Y}. \quad (400)$$

#### 1.14.13. Свойства ядра сечения

Все, ниже перечисленные свойства ядра сечения могут быть доказаны.

В целях сокращения времени изложения теоретического материала здесь приведены эти свойства без доказательств.

- 1) Ядро сечения – это всегда выпуклая фигура.
- 2) Ядро сечения всегда содержит центр тяжести сечения.
- 3) Форма и размеры ядра сечения зависят только от формы и размеров сечения, но не зависят от величины силы, места ее приложения или материала стержня.
- 4) Ядро сечения всегда вытянуто в том направлении, в котором вытянуто само сечение. Если сечение никуда не вытянуто, то и ядро сечения никуда не вытянуто.
- 5) Если сечение симметрично, то и ядро сечения симметрично. При этом оси симметрии и сечения и ядра сечения совпадают. Если сечение имеет несколько осей симметрии, то ядро сечения имеет столько же осей симметрии.
- 6) Если сила приложена вне контура выпуклой фигуры, описывающей сечение, то нулевая линия пересекает и эту фигуру, и ядро сечения.
- 7) Если сила приложена на контуре выпуклой фигуры, описывающей сечение, то нулевая линия касается этой фигуры.
- 8) Если сила приложена внутри контура выпуклой фигуры, описывающей сечение, но вне ядра, то нулевая линия пересекает эту фигуру, но не пересекает и не касается ядра сечения.
- 9) Если сила приложена на контуре ядра сечения, то нулевая линия касается выпуклой фигуры, описывающей сечение.
- 10) Если сила приложена внутри ядра сечения, то нулевая линия не пересекает и не касается выпуклой фигуры, описывающей сечение.

#### 1.14.14. Примеры построения ядра сечения

Построим ядро сечения *прямоугольной формы* (рис.123).

Площадь и моменты инерции сечения

$$A = bh; \quad J_X = \frac{bh^3}{12}; \quad J_Y = \frac{hb^3}{12}. \quad (401)$$

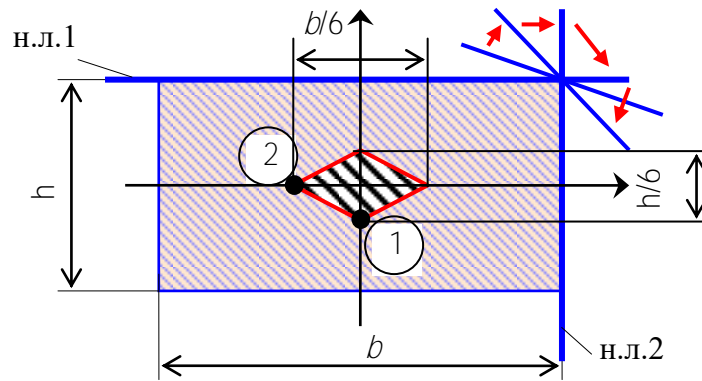


Рис. 123. Ядро сечения прямоугольной форме

Квадраты радиусов инерции сечения

$$r_x^2 = \frac{J_x}{A} = \frac{bh^3}{12 \cdot bh} = \frac{h^2}{12}; \quad r_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{b^3h}{12 \cdot bh} = \frac{b^2}{12}. \quad (402)$$

Отсеченные отрезки первой нулевой линии (рис. 129)

$$a_x \rightarrow \infty; \quad a_y = \frac{h}{2}. \quad (403)$$

Координаты соответствующей точки приложения силы

$$x_{F1} = -\frac{r_y^2}{a_x} = -\frac{r_y^2}{\infty} = -0; \quad y_{F1} = -\frac{r_x^2}{a_y} = -\frac{h^2}{12} \cdot \frac{2}{h} = -\frac{h}{6}. \quad (404)$$

Отсеченные отрезки второй нулевой линии

$$a_y = \frac{b}{2}; \quad a_x \rightarrow \infty. \quad (405)$$

Координаты соответствующей точки приложения силы

$$x_{F2} = -\frac{r_y^2}{a_x} = -\frac{b^2}{12} \cdot \frac{2}{b} = -\frac{b}{6}; \quad y_{F2} = -\frac{r_x^2}{a_y} = -\frac{r_x^2}{\infty} = 0. \quad (406)$$

Откладываем точки 1 и 2 на сечении. Из положения 1 в положение 2 нулевая линия, оставаясь касательной к сечению, попадает путем поворота около точки  $S$ . Каждому положению нулевой линии соответствует какая-то точка приложения силы. Так как нулевая линия поворачивается около неподвижной точки  $S$ , то точка приложения силы движется по прямой линии. Так как нулевая линия при этом в процессе поворота остается

касательной к сечению, то отрезок 1-2 является частью контура ядра сечения.

Очевидно, что ядро прямоугольного сечения имеет форму ромба, каждая полудиагональ которого равна одной третьей полуразмера сечения (рис. 123).

Построим ядро для сечения круглой формы (рис. 124).

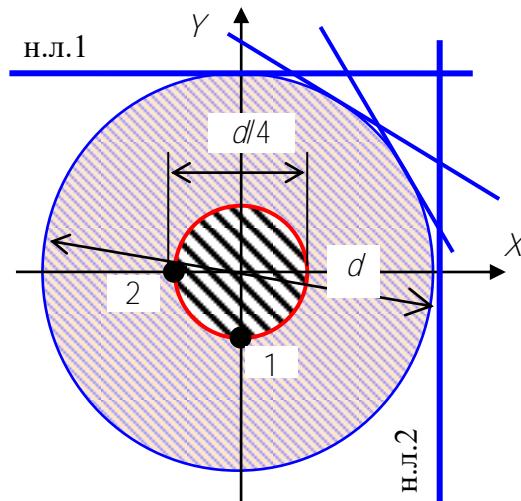


Рис. 124. Ядро сечения круглой форме

Площадь и моменты инерции сечения

$$A = \frac{\pi d^2}{4}; \quad J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (407)$$

Квадраты радиусов инерции сечения

$$i_x^2 = i_y^2 = \frac{J_x}{A} = \frac{\pi d^4}{64} \cdot \frac{4}{\pi d^2} = \frac{d^2}{16}. \quad (408)$$

Отсеченные отрезки нулевой линии 1

$$a_y = -\frac{d}{2}; \quad a_x \rightarrow \infty. \quad (409)$$

Координаты точки приложения силы, соответствующие нулевой линии 1.

$$x_F = -\frac{i_y^2}{\infty} = 0; \quad y_F = -\frac{i_x^2}{a_y} = -\frac{d^2/16}{d/2} = -\frac{d}{8}. \quad (410)$$

Отсеченные отрезки нулевой линии 2



$$a_x = -d/2; \quad a_y \rightarrow \infty. \quad (411)$$

Координаты точки приложения силы

$$y_F = -\frac{I_x}{\infty} = 0; \quad x_F = -\frac{I_y}{a_x} = -\frac{d^2/16}{d/2} = -\frac{d}{8}. \quad (412)$$

Очевидно, что нулевая линия не может попасть из положения 1 в положение 2, оставаясь касательной к сечению и поворачиваясь около неподвижной точки. Нулевая линия из положения 1 в положение 2 может попасть, оставаясь касательной к сечению только поворачиваясь около подвижной точки, движущейся по контуру круглого сечения. Поэтому контур ядра сечения является кривой – *окружностью* (рис. 124).

#### 1.14.15. Порядок расчета внецентренно сжатой колонны

1) Определить геометрические характеристики поперечного сечения – центр тяжести, площадь поперечного сечения и квадраты радиусов инерции.

2) Найти положение нулевой линии.

3) Определить положение (координаты) опасных точек в растянутой и в сжатой частях сечения колонны. Опасными точками являются точки максимально удаленные от нулевой линии.

4) Проверить условие прочности

$$\sigma_t = \frac{N}{A} \left( 1 + \frac{x_F x_t}{I_y} + \frac{y_F y_t}{I_x} \right) \leq R_t; \quad (413)$$

$$\sigma_s = \frac{N}{A} \left( 1 + \frac{x_F x_s}{I_y} + \frac{y_F y_s}{I_x} \right) \leq R_s.$$

Здесь

$x_F, y_F$  – координаты точки приложения равнодействующей;

$N = +F$ , если стержень внецентренно растянут и  $N = -F$ , если стержень внецентренно сжат;

$A$  – площадь поперечного сечения колонны;

$x_t, y_t$  – координаты опасной точки в растянутой части сечения;

$x_s, y_s$  – координаты опасной точки в сжатой части сечения;

$R_t, R_s$  – расчетные сопротивления материала, соответственно, на растяжение и на сжатие.

### 1.14.16. Изгиб с растяжением или сжатием

Изгиб со сжатием испытывают высотные сооружения – дымовые трубы, мачты, башни и др. (рис.125). На такие конструкции обычно действуют ветровая нагрузка и нагрузка от собственного веса.

Учитывая принцип независимости действия сил, получим напряжение в произвольной точке сечения

$$\sigma = \sigma_{omN} + \sigma_{omM_y} \quad (414)$$

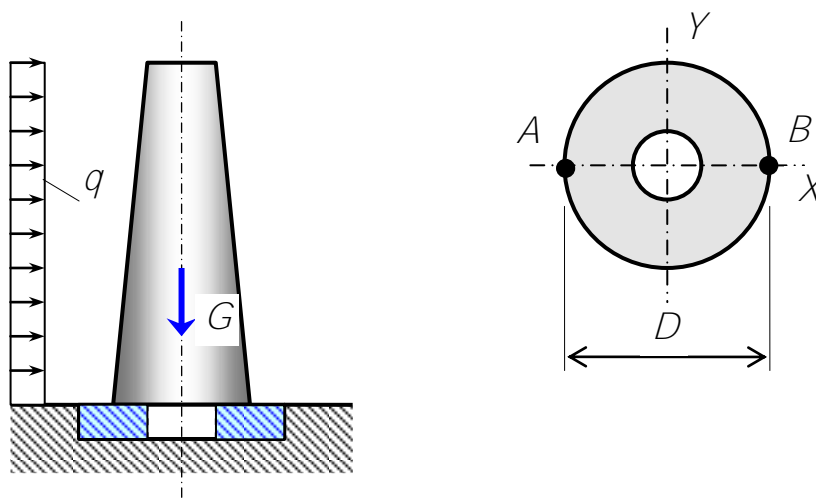


Рис. 125. Дымовая труба, испытывающая сжатие с изгибом

Точки *A* и *B* являются опасными. Условие прочности можно записать в следующем виде

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{W_y} \geq R, \quad (415)$$

где

*N* – продольная сила, вызванная собственным весом конструкции;

*A* – площадь поперечного сечения;

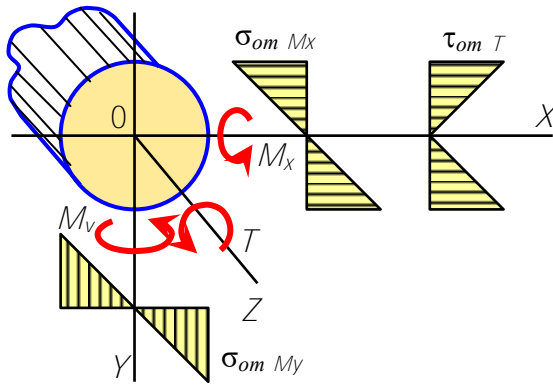
*M<sub>y</sub>* – изгибающий момент, вызванный поперечной нагрузкой;

*W<sub>y</sub>* – осевой момент сопротивления сечения;

*R* – расчетное сопротивление материала.

### 1.14.17. Изгиб с кручением

При изгибе с кручением в поперечных сечениях стержня появляются изгибающий и крутящий моменты. На кручение с изгибом работают элементы пространственных конструкций, валы машин, винтовые пружины и др.

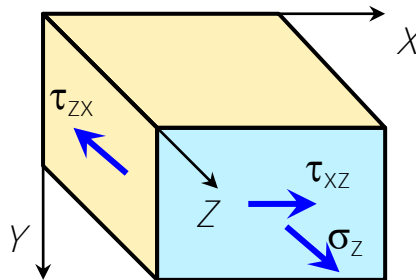


**Рис. 126. Распределение напряжений от внутренних сил при изгибе с кручением**

Рассмотрим стержень круглого сечения. Учитывая принцип независимости действия сил, напряжения в произвольной точке сечения равны сумме напряжений от кручения и от изгиба

$$\sigma_{от Mx} = \frac{M_x}{J_x} \cdot y_i; \quad \sigma_{от My} = \frac{M_y}{J_y} \cdot x_i; \quad \tau_{от T} = \frac{T}{J_p} \cdot \rho. \quad (416)$$

Анализ эпюр показывает, что опасная точка, обозначим ее буквой  $S$ , располагается на контуре сечения. Выделим около точки  $S$  элементарный параллелепипед (рис. 127).



**Рис. 127. Элемент, вырезанный вблизи поверхности стержня круглого сечения**

Очевидно, что выделенный элемент находится в условиях плоского напряженного состояния, так как площадки с нормалью  $Y$  свободны от напряжений. Поэтому главные напряжения могут быть вычислены по известной формуле

$$\sigma_{1/3} = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xz}^2}. \quad (417)$$

Так как  $\sigma_x = 0$ , имеем

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{xz}^2}; \quad \sigma_3 = \frac{\sigma_z}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{xz}^2} \quad (418)$$

По 3-й теории прочности условие наступления предельного состояния имеет вид

$$\sigma^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_0. \quad (419)$$

Подставим выражения для напряжений (418) в условие прочности (419)

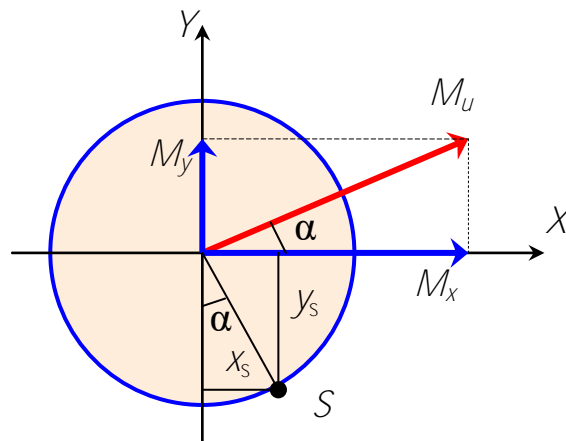
$$\sigma^{III} = \left( \frac{\sigma_z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{xz}^2} \right) - \left( \frac{\sigma_z}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{xz}^2} \right) = \quad (420)$$

$$= \frac{\sigma_z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{xz}^2} - \frac{\sigma_z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{xz}^2} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{xz}^2} \leq R.$$

Подставим выражения (416) для напряжений в опасной точке  $S$

$$\sigma^{III} = \sqrt{\left( \frac{M_x}{J_x} y_s + \frac{M_y}{J_y} x_s \right)^2 + 4 \frac{T^2}{J_p^2} r^2} \leq R. \quad (421)$$

Установим связь между моментами и координатами точки  $S$ . Для этого используем элементы векторной алгебры (рис. 128).



**Рис. 128. Связь между вектором суммарного изгибающего момента и векторами его компонент**

$$\begin{aligned} M_x &= M_u \cos \alpha; & M_y &= M_u \sin \alpha; \\ x_s &= r \cdot \sin \alpha; & y_s &= r \cdot \cos \alpha; \\ J_x &= J_y; & J_p &= 2J_x. \end{aligned} \quad (422)$$

После подстановки (422) в выражение (421) получим

$$\begin{aligned}\sigma^{III} &= \sqrt{\left(\frac{M_u \cos \alpha}{J_x} r \cos \alpha + \frac{M_u \sin \alpha}{J_y} r \sin \alpha\right)^2 + \frac{4T^2}{4J_x^2} r^2} = \\ &= \sqrt{\frac{M_u^2}{J_x^2} r^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \frac{4T^2}{4J_x^2} r^2} = \frac{\sqrt{M_u^2 + T^2}}{J_x}\end{aligned}\quad (423)$$

И, окончательно, для третьей теории прочности имеем

$$\sigma^{III} = \frac{M_u^{np}}{W_x} \leq R, \quad (424)$$

где

$$M_u^{np} = \sqrt{M_u^2 + T^2}. \quad (425)$$

По четвертой теории прочности имеем (без вывода)

$$\sigma^{IV} = \frac{M_u^{np}}{W_x} \leq R, \quad (426)$$

где

$$M_u^{np} = \sqrt{M_u^2 + 0,75 \cdot T^2}. \quad (427)$$

#### 1.14.18. Расчет пространственного ломаного стержня

Рассмотрим стержень, состоящий из ортогонально расположенных прямолинейных элементов. Участки такого стержня могут испытывать различные сложные сопротивления при разных сочетаниях внутренних сил в его сечениях. При расчете используются метод сечения и принцип независимости действия сил.

##### Порядок расчета ломаного стержня:

1. строятся эпюры внутренних сил на участках стержня;
2. устанавливается вид сопротивления каждого участка стержня;
3. определяются опасные сечения и опасные точки в них;
4. вычисляются напряжения в опасных точках сечения стержня и проверяется выполнение условия прочности с использованием какой-либо теории прочности.

При построении эпюр приняты следующие правила:

- 1) растягивающая продольная сила считается *положительной*, а сжимающая – *отрицательной*;
- 2) при направлении сдвига, соответствующего вкручивающемуся буравчику в соответствующую ось координат, то такой сдвиг (поперечная

- сила) считаются *положительным*, и напротив, если буравчик выкручивается из соответствующей оси координат, то – *отрицательным*;
- 3) если силовой фактор виден со стороны сечения, направленным по ходу часовой стрелки, то он вызывает положительный крутящий момент;
- 4) эпюры изгибающих моментов строятся на растянутом волокне и знак на них не проставляется;
- 5) Используем местные системы координатных осей, то есть для каждого участка принимаются свои оси координат; при этом продольную ось всегда обозначаем буквой  $Z$ , а поперечные оси –  $X$  и  $Y$ .

Рассмотрим пример построения эпюр в ломанном пространственном стержне. Пусть длина всех участков одинаковая и равная  $a$ .

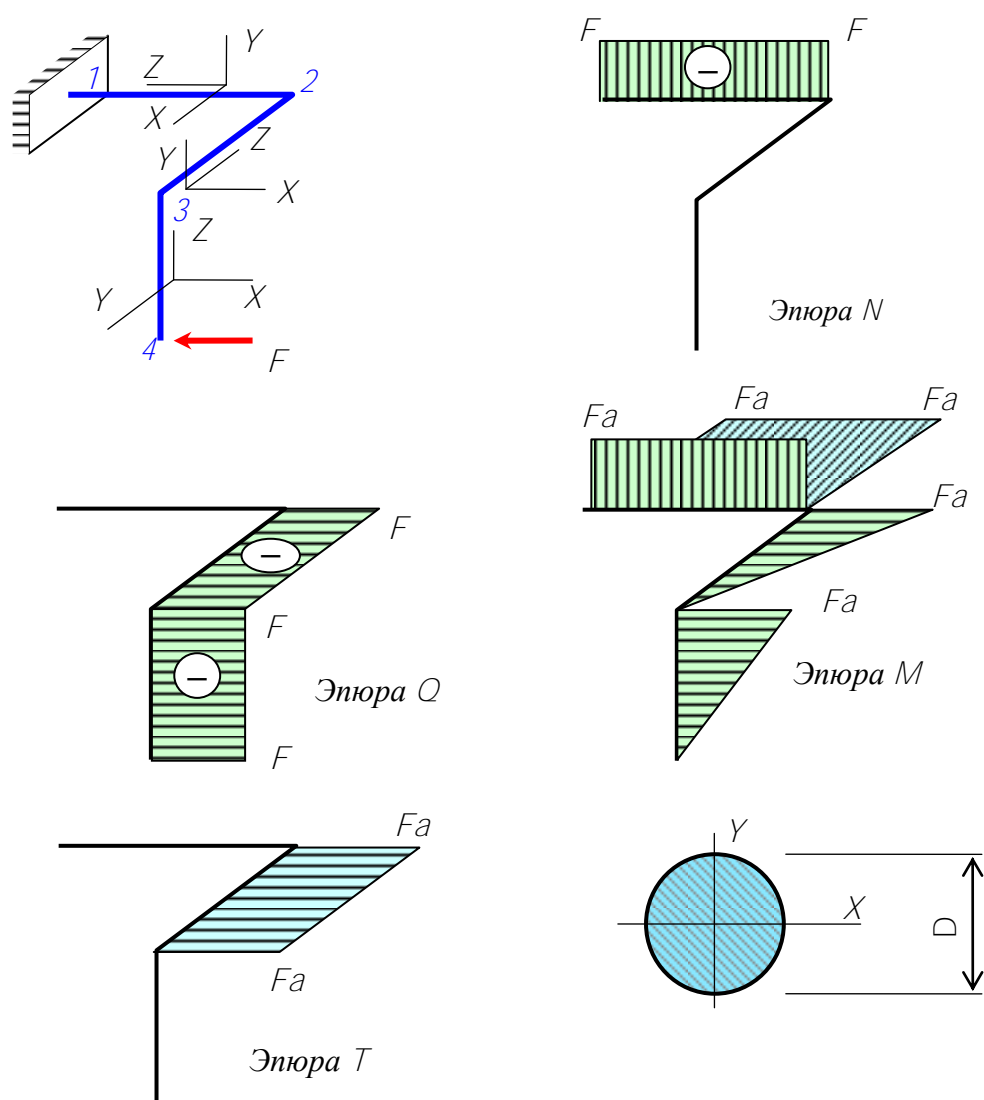


Рис. 129. Эпюры внутренних сил в пространственном ломаном стержне

Для проверки прочности следует установить вид сопротивления на каждом участке стержня:

*верхний горизонтальный* – внецентренное сжатие с изгибом в двух направлениях;

*средний горизонтальный* – поперечный изгиб с кручением;

*вертикальный* – простой поперечный изгиб.

## 1.15. Устойчивость сжатых стержней

### 1.15.1. Методы решения задач на устойчивость

Вопросы устойчивости сжатых элементов в строительстве имеют одно из важнейших значений. Существует несколько основных методов расчета конструкций с учетом возможной потери устойчивости. Кратко изложим принципы этих методов.

#### *Динамический метод.*

Наиболее общим методом исследования устойчивости является динамический метод. Предполагается, что исследуемая форма равновесия каким-либо образом нарушена. По характеру возникающего при этом движения судят об устойчивости или неустойчивости исследуемой формы равновесия. Если движения представляют собой колебания с постоянно возрастающей амплитудой, то исследуемая форма равновесия является неустойчивой. В противном случае она устойчива.

#### *Метод Эйлера.*

Появление смежных форм равновесия называется *бифуркацией* или *разветвлением форм равновесия*. Существует понятие о *точке бифуркации*. Для определения точки бифуркации используется способ Эйлера. Основная идея метода Эйлера заключается в предположении, что смежные формы равновесия существуют. Из уравнения, характеризующую эту форму определяют нагрузку, при которой она становится возможной.

#### *Энергетический метод.*

Суть энергетического метода состоит в исследовании изменения полной энергии системы при переходе из исходной формы равновесия в возмущенную форму равновесия. Критическому значению нагрузки соответствует нулевое значение этого изменения.

### 1.15.2. Основные понятия об устойчивости

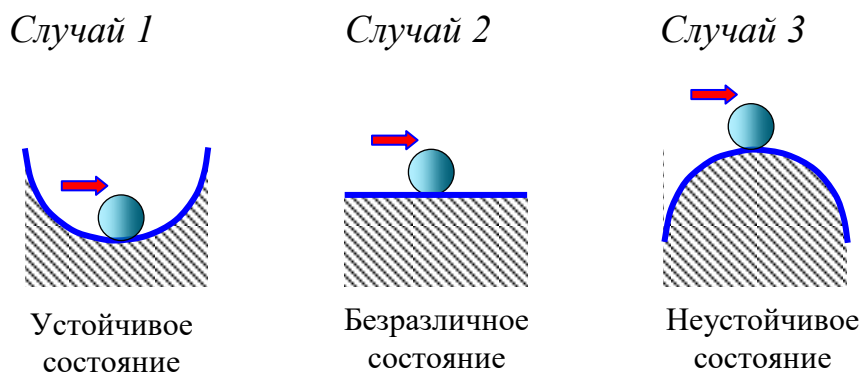
Во многих случаях выполнение условия прочности при центральном сжатии является недостаточным для нормальной (безопасной) эксплуатации сооружения. Возможно разрушение сжатых стержней, плит, оболочек, связанное с их потерей устойчивости – внезапного изменения формы с последующим разрушением. Дадим понятия устойчивого и неустойчивого состояний равновесия.

*Если малые возмущения вызывают малые отклонения системы от состояния равновесия и после снятия возмущения система*

самостоятельно способна вернуться в свое первоначальное состояние, то такое состояние называется **устойчивым состоянием равновесия**.

Если малые возмущения вызывают большие отклонения от состояния равновесия и после снятия возмущения система самостоятельно не способна вернуться в свое первоначальное состояние, то такое состояние называется **неустойчивым состоянием равновесия**.

Поясним эти понятия на примере с равновесием шарика (рис. 146).



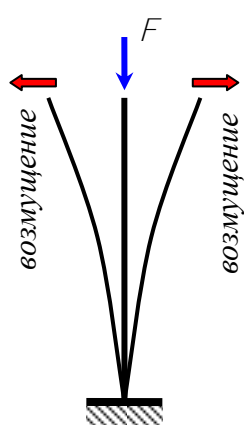
**Рис. 130. Пример устойчивого и неустойчивого состояний равновесия шарика**

**Случай 1.** Шарик находится в устойчивом состоянии равновесия. От действия возмущения шарик отклонится от своего первоначального состояния, а затем после снятия возмущения он самостоятельно вернется в первоначальное состояние.

**Случай 3.** Шарик находится в неустойчивом состоянии равновесия. От действия возмущения шарик отклонится от своего первоначального состояния, а затем после снятия возмущения он не сможет самостоятельно вернуться в первоначальное состояние.

**Случай 2** Шарик находится в безразличном состоянии равновесия. Бесконечное множество положений шарика являются его состояниями равновесия. То есть имеет место бифуркация – разветвление форм равновесия.

Аналогия наблюдается и для сжатого стержня.



**Рис. 131. Пример потери устойчивости сжатого стержня**

При малой сжимающей силе  $F < F_{cr}$  сжатый стержень находится в устойчивом состоянии равновесия и возвращается в исходное (прямолинейное) положение после снятия возмущения (случай 1). При большой сжимающей силе  $F > F_{cr}$  прямолинейная форма стержня является неустойчивой. Сколь угодно малые возмущения



вызывают большие отклонения стержня от прямолинейной формы равновесия. После устранения возмущения стержень самостоятельно не может вернуться в свое первоначальное положение – прямолинейной форме равновесия.

**Под возмущениями следует понимать неучтенные воздействия на конструкцию.** Например, моменты за счет случайных эксцентриситетов, начальное искривление стержня, искривление стержня за счет воздействия температуры и др.

*Сопротивление сжатого стержня изгибу, появившемуся в результате потери устойчивости, называется **продольным изгибом**.*

Продольный изгиб опасен тем, что нарастание деформаций происходит очень быстро при постоянной сжимающей силе. Разрушение происходит внезапно без заметных внешних признаков.

Таким образом, продольный изгиб является опасным для конструкций. Его допускать нельзя. Поэтому поперечные размеры элементов сжатых конструкций должны назначаться не только из условия прочности на центральное сжатие, но и из условия

$$\sigma \leq \sigma_{cr} = F_{cr} / A_{br}, \quad (428)$$

где  $\sigma_{cr}$  – критическое напряжение;

$F_{cr}$  – критическая сжимающая сила;

$A_{br}$  – площадь поперечного сечения брутто, то есть без учета местных ослаблений.

### 1.15.3. Метод Эйлера определения критической сжимающей силы для стержня

**Леона́рд Э́йлер** (нем. *Leonhard Euler*; 4 (15) апреля 1707, Базель, Швейцария — 7 (18) сентября 1783, Санкт-Петербург, Российская империя) — швейцарский, немецкий и российский математик, внёсший значительный вклад в развитие математики, а также механики, физики, астрономии и ряда прикладных наук.

При малой сжимающей силы  $F < F_{cr}$  прямолинейный стержень находится в состоянии устойчивого равновесия. Такое состояние только одно – прямолинейная форма (случай 1).

При большой сжимающей силе  $F > F_{cr}$  прямолинейный стержень находится в состоянии неустойчивого равновесия. Такое состояние может быть только одно – прямолинейна форма (случай 3).

Но имеется граничное состояние, когда  $F = F_{cr}$ . В этом случае сжимаемый стержень находится в безразличном состоянии равновесия. Прямолинейная форма равновесия сжатого стержня в этом случае не является единственной. Форм равновесия становится бесконечное множество. При этом и незначительно искривленные стержни тоже будут

находиться в состоянии равновесия. То есть происходит бифуркация форм равновесия (случай 2).

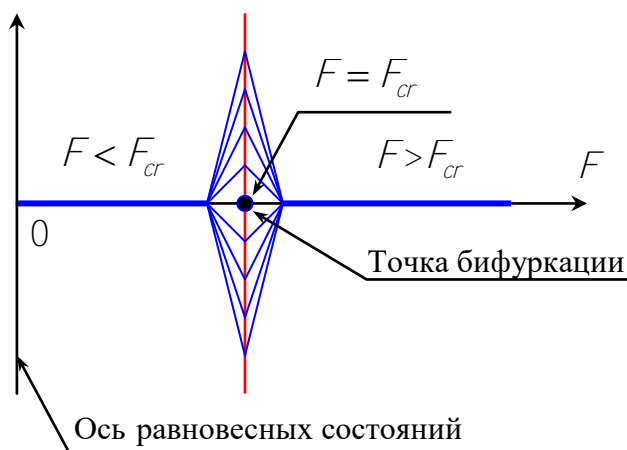


Рис. 132. Иллюстрация форм равновесия сжатого стержня

Согласно определению Эйлера – *наименьшее значение сжимающей силы, при которой происходит разветвление форм равновесия, называется критической силой.*

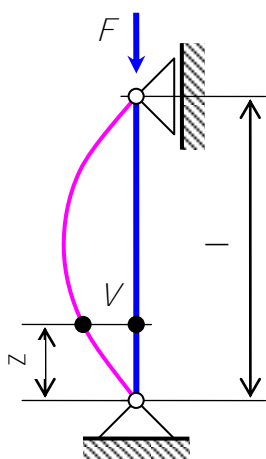


Рис. 133. Схема искривления стержня в момент потери устойчивости

Рассмотрим сжатый прямолинейный стержень. Изгибающий момент от продольной силы равен

$$M = F \cdot V \quad (429)$$

Дифференциальное уравнение изгиба имеет вид

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = -\frac{M}{EJ} = -\frac{F}{EJ} V \quad (430)$$

Для удобства обозначим

$$k^2 = \frac{F}{EJ} \quad (431)$$

Тогда

$$\frac{d^2 V}{dz^2} + k^2 V = 0 \quad (432)$$

Решение дифференциального уравнения(432) имеет вид

$$V = A \cos(kz) + B \sin(kz) \quad (433)$$

Подставим решение (452) в уравнение (451) и убедимся, что оно удовлетворяется.

$$-Ak^2\cos(kz) - Bk^2\sin(kz) + k^2 A\cos(kz) + k^2 B\sin(kz) = 0. \quad (434)$$

Для определения коэффициентов  $A$  и  $B$  воспользуемся граничными условиями при  $z=0$ ;  $V=0$ .

$$V = A\cos(k \cdot 0) + B\sin(k \cdot 0) = 0. \quad (435)$$

Отсюда имеем значение  $A=0$ .

Следовательно, решение уравнения можно выразить более просто

$$V = B \cdot \sin(kz). \quad (436)$$

То есть, стержень в момент потери устойчивости искривляется по синусоиде.  
при  $z=l$ ;  $V=0$

$$V = B\sin(kl) = 0. \quad (437)$$

Требуется определить, при каких условиях решение (437) возможно. Если  $B=0$ , то стержень не искривляется. Этот случай не рассматривается, так как противоречит условию задачи.

Поэтому

$$\sin(kl) = 0. \quad (438)$$

Это условие выполняется при

$$kl = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots, \pm n\pi, \quad (439)$$

где  $n$  – числа натурального ряда.

Учитывая выражение для  $k$ , получим форму искривления сжатого стержня и выражение для критической силы. Рассмотрим только положительные значения и выразим значение критической силы согласно принятому решению.

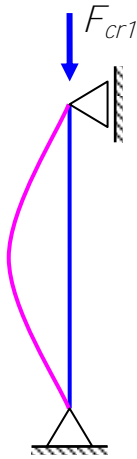


Рис. 134. Искривление стержня в форме одной полуволны

синусоиды (рис. 134).

При  $kl = \pi$ ,

$$k^2 \rho = \pi^2,$$

$$\frac{F_{cr1}}{EJ} \rho = \pi^2,$$

$$F_{cr1} = \frac{\pi^2 EJ}{\rho}.$$

В этом случае стержень в момент потери устойчивости принимает форму одной полуволны

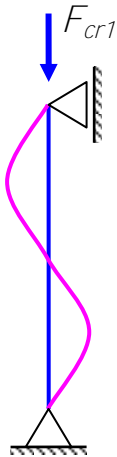


Рис. 135. Искривление стержня в форме двух полуволн

полуволн синусоиды (рис. 135).

И так далее .....

При  $kl = 2\pi$ ,

$$k^2 \rho = 4\pi^2,$$

$$\frac{F_{cr2}}{EJ} \rho = 4\pi^2,$$

$$F_{cr2} = \frac{4\pi^2 EJ}{\rho}.$$

В этом случае стержень в момент потери устойчивости принимает форму двух

*Для реального стержня следует принимать во внимание только минимальную критическую силу*

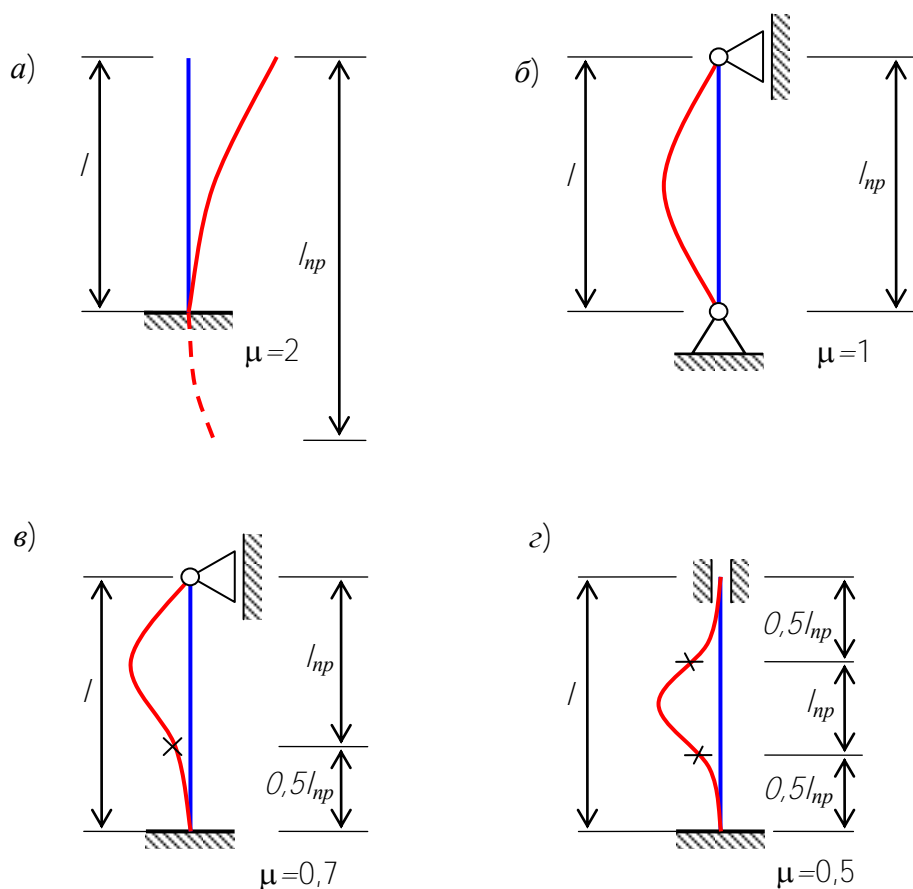
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{\rho} \quad (440)$$

Формула Эйлера опубликована в 1744 г. *Формула Эйлера справедлива только в случае упругой деформации материала стержня, так как при ее выводе используется дифференциальное уравнение упругой оси стержня при изгибе.*

#### 1.15.4. Влияние способов закрепления сжатого стержня на величину критической силы

Рассмотрим четыре способа закрепления сжатого стержня. Для каждого вида закрепления стержня необходимо решить дифференциальное уравнение изгиба стержня:

- 1) зашпелен нижним концом (рис. 136, а);
- 2) шарнирно закреплен обоими концами (рис. 136, б);
- 3) зашпелен на нижнем конце и шарнирно закреплен верхним концом (рис. 136, в);
- 4) зашпелен верхним и нижним концами (рис. 136, г).



**Рис. 136. Формы искривления сжатого стержня при различных способах закрепления стержня: а) зашпелен нижним концом; б) шарнирно закреплен обоими концами; в) зашпелен нижним концом и шарнирно закреплен верхним концом; г) зашпелен обоими концами**

После обобщения всех решений, установлено, что для указанных закреплений критическая сила определяется по общей объединенной формуле

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}, \quad (441)$$

где  $\mu$  – коэффициент приведения длины;  
 $l_{пр}$  – приведенная длина стержня

$$l_{\mu} = \mu l. \quad (442)$$

**Приведенной длиной стержня называется длина участка стержня, на котором, при потере устойчивости сжатого стержня, укладывается одна полуволна.**

Что означает **приведенная** – это приведенная к длине в задаче Эйлера, когда оба конца стержня закреплены шарнирно.

В общем случае сжатый стержень может потерять устойчивость из одной либо из другой главных плоскостях. Если приведенные длины стержня в разных плоскостях разные и главные моменты инерции отличаются друг от друга, то следует вычислять критические силы при потере устойчивости в обеих плоскостях, а затем выбрать в качестве расчетной меньшую из них.

### 1.15.5. Пределы применимости формулы Эйлера.

#### Формула Ясинского

Если критические напряжения больше предела пропорциональности, то применять формулу Эйлера нельзя, так как в момент потери устойчивости в стержне появляются пластические деформации. Возможность применения формулы Эйлера требует выполнения условия (462)

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l)^2} \cdot \frac{J}{A} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l)^2} \cdot l^2 = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu l}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пр}. \quad (443)$$

Здесь  $l$  – радиус инерции сечения стержня;  
 $\lambda$  – гибкость стержня, величина безразмерная и всегда больше нуля

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}. \quad (444)$$

В результате получим

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (445)$$

Критическая сжимающая сила равна

$$F_{cr} = \sigma_{cr} A_{br}. \quad (446)$$

Пусть  $\sigma_{cr} = \sigma_{pr}$ , тогда верхний предел гибкости можно определить по формуле (466)

$$\lambda_u = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}}. \quad (447)$$

Для ст.3 значения модуля упругости и предела пропорциональности примем по справочной информации

$$\sigma_{pr} \approx 200 \text{ МПа}; \quad E = 200 \text{ ГПа}; \quad \pi^2 \approx 100.$$

Подставим эти значения в формулу (466) и получим верхний предел гибкости

$$\lambda_u = \sqrt{\frac{10 \cdot 200 \cdot 10^9}{200 \cdot 10^6}} \approx 100. \quad (448)$$

Если  $\lambda > \lambda_u$ , то можно применять формулу Эйлера. Если  $\lambda < \lambda_u$ , то формулу Эйлера применять нельзя, так как при потере устойчивости стержня в нем появляются не только упругие, но и пластические деформации. В этом случае следует использовать эмпирическую формулу Ф.С.Ясинского (эмпирическая – это значит полученная по результатам эксперимента).

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda, \quad (449)$$

где  $a, b$  – эмпирические, то есть полученные экспериментально, коэффициенты, зависящие от материала стержня

$$\text{для Ст.3} \quad a = 310 \text{ МПа}, \quad b = 1,14 \text{ МПа}, \quad \lambda_u = 100.$$

$$\text{для сосны} \quad a = 293 \text{ МПа}, \quad b = 1,94 \text{ МПа}, \quad \lambda_u = 110.$$

#### 1.15.6. Расчет сжатого стержня любой гибкости

В зависимости от гибкости сжатого стержня критические силы и критические напряжения вычисляются по разным формулам.

1) При  $0 \leq \lambda \leq 50$  – стержень настолько короткий, что разрушение от чистого сжатия происходит раньше, чем потеря его устойчивости. В этом случае принимается

$$\sigma_{cr} = \sigma_{y/u}. \quad (450)$$

2) При  $50 < \lambda \leq \lambda_u$  – стержень теряет устойчивость, испытывая упругопластические деформации. Для вычисления критической силы (или критического напряжения) используется формула Ясинского

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda. \quad (451)$$

3) При  $\lambda > \lambda_u$  – стержень теряет устойчивость в упругой стадии. Критическую силу (критические напряжения) вычисляются по формуле Эйлера

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (452)$$

Для большей наглядности применения формул при расчете сжатого стержня на устойчивость построим диаграмму критических напряжений.

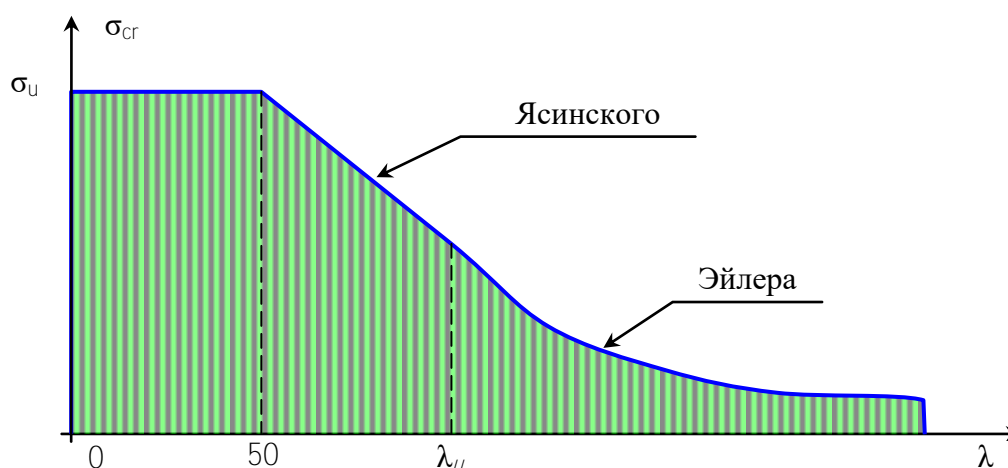


Рис. 137. Диаграмма критических напряжений

### 1.15.7. Практический расчет сжатых стержней

Напряжение в сжатом стержне должно быть меньше критического напряжения

$$\sigma = \frac{N}{A_{br}} \leq \frac{F_{cr}}{A_{br}} = \sigma_{cr}, \quad (453)$$

где  $N$  – продольная сжимающая сила;

$A_{br}$  – площадь поперечного сечения брутто, то есть площадь, принятая без учета местных ослаблений.

**Местные ослабления** – это ослабления стержня на небольшом участке его длины. Экспериментальные исследования показали, что местные ослабления (например, отверстия под заклепки или болты и др) не оказывают заметного влияния на величину критической силы.

Для надежности работы стержня в расчет вводится коэффициент запаса устойчивости

$$\sigma = \frac{N}{A_{br}} \leq \frac{\sigma_{cr}}{n_y}. \quad (454)$$



Правую часть выражения (454) умножим и разделим на  $R$

$$\sigma = \frac{N}{A_{br}} \leq \frac{\sigma_{cr} R}{n_y R} = \left( \frac{\sigma_{cr}}{n_y R} \right) \cdot R. \quad (455)$$

Обозначим выражение в скобках отдельной буквой

$$\varphi = \frac{\sigma_{cr}}{n_y R} \quad (456)$$

и назовем величину  $\varphi$  – *коэффициентом уменьшения основного расчетного сопротивления материала при продольном изгибе*. (по СНиП  $\varphi$  – *это коэффициент продольного изгиба*).

Коэффициент  $\varphi$  зависит от гибкости и материала сжатого стержня.

Тогда условие прочности принимает вид

$$\sigma = \frac{N}{A_{br}} \leq \varphi R. \quad (457)$$

Коэффициент продольного изгиба  $\varphi$  определяется по таблицам СНиП. Приведем фрагмент этой таблицы.

$\lambda$	$\varphi$ , для Ст.3
0	1,00
10	0,99
20	0,97
...	...

## 1.16. Динамический расчет строительных конструкций

### 1.16.1. Общие понятия о динамических расчетах строительных конструкций

Некоторые нагрузки на строительные конструкции сравнительно быстро меняют свою величину или положение. Такие нагрузки называются *динамическими*.

**П р и м е р ы.** Действие поезда на мост, работа штампового прессы, работа машин и механизмов с маховиками, забивка свай копром и др.

Динамические нагрузки вызывают колебательные движения частей сооружений. Поэтому при расчете следует учитывать силы инерции. Отметим, что *признаком динамической задачи является необходимость учета сил инерции*. При решении динамических задач используются два метода – *дифференциальный* и *интегральный*.

**Дифференциальный метод** основан на составлении дифференциального уравнения динамического равновесия и получение уравнения движения частей сооружения. Анализ уравнения движения позволяет получить ускорения точек сооружения, а значит и сил инерции, которые учитываются в расчете. Этот метод связан с большими математическими проблемами – решением больших систем дифференциальных уравнений.

Так, например, достаточно простая задача динамического расчета однопролетной П-образной рамы при одномассовом сгущении ее элементов потребует решения системы двух дифференциальных уравнений. При этом, вычисляя деформации, следует ограничиться учетом только изгибом элементов рамы.

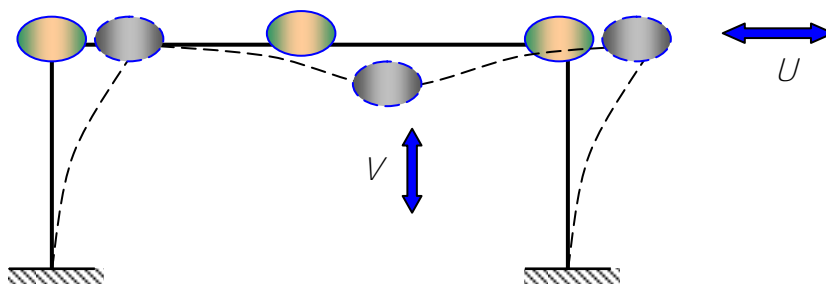


Рис. 138. Расчетная схема П-образной рамы для динамического расчета

**Интегральный метод** основан на использовании динамического коэффициента. Этот метод чаще всего используется при расчете строительных конструкций.

**Динамический коэффициент** равен отношению исследуемой величины при динамическом воздействии к значению этой же величины при статическом воздействии.

$$S_D = k_D \cdot S_{ст}, \quad (458)$$

где  $S_{ст}$  – исследуемая величина при статическом приложении нагрузки ( $N$ ,  $M$ ,  $V$ ,  $\sigma$  и др.)

$k_D$  – динамический коэффициент, определяемый аналитически или экспериментально.

Динамический коэффициент зависит от:

- вида динамической нагрузки;
- размеров конструкции;
- массы конструкции;
- жесткости элементов конструкции

и др.

### 1.16.2. Учет сил инерции при расчете троса

Пусть тело весом  $G$  подымается на тросе с ускорением  $a$  (рис. 139). Вес троса  $q$ . Если тело не опускается и не подымается, то сила  $N$  равна

$$N_{ст} = G + qz. \quad (459)$$

Если тело ускоренно подымается с ускорением  $a$ , то для определения натяжения троса необходимо составить уравнение движения тела, взять вторую производную и получить ускорение. Однако, этого можно не делать, если использовать принцип Даламбера.

**Принцип Даламбера – движущуюся систему можно рассматривать как находящуюся в равновесии, если ко всем ее точкам присоединить дополнительно силы инерции.**

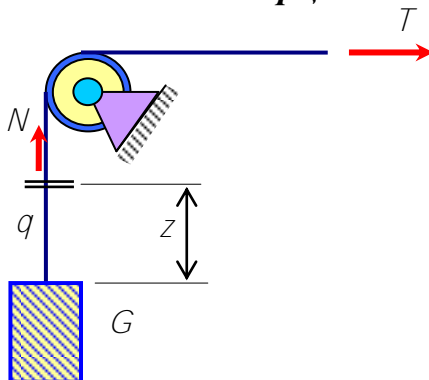


Рис. 139. Схема поднятия груза на тросе

Силы инерции численно равны произведению массы на ускорение и направлены в сторону, противоположную ускорению

$$F_{ин} = \frac{G+qz}{g} \cdot a, \quad (460)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения.

Суммарная сила равна

$$N_{д} = N_{ст} + N_{ин} = (G+qz) + \frac{G+qz}{g} \cdot a = (G+qz) \left( 1 + \frac{a}{g} \right). \quad (461)$$

Окончательно имеем

$$N_{д} = k_{д} \cdot N_{ст}. \quad (462)$$

В результате получаем формулу для динамического коэффициента

$$k_{д} = 1 + a/g. \quad (463)$$

Используя динамический коэффициент и зная статическое напряжение, можно найти динамическое напряжение

$$\sigma_{\text{д}} = \frac{N_{\text{д}}}{A} = \frac{k_{\text{д}} N_{\text{ст}}}{A} = k_{\text{д}} \cdot \sigma_{\text{ст}}. \quad (464)$$

Окончательно имеем

$$\sigma_{\text{д}} = k_{\text{д}} \cdot \sigma_{\text{ст}} \quad (465)$$

Аналогично можно найти прогибы от динамической нагрузки

$$V_{\text{д}} = k_{\text{д}} \cdot V_{\text{ст}}. \quad (466)$$

Если тело ускоренно опускается, то следует принимать  $a < 0$ .

### 1.16.3. Расчет на удар

Дадим определение такому явлению как удар.

**Удар** – это взаимодействие движущихся тел в результате их соприкосновения, приводящее к изменению скоростей их точек.

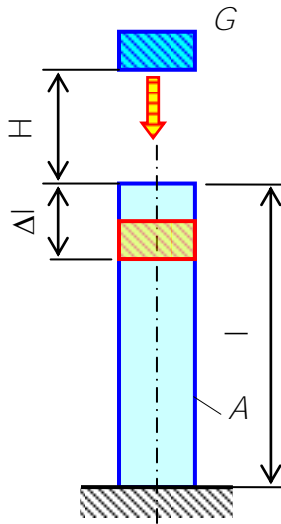
*Примеры.* Действие кузнечного молота на заготовку, удар копра при забивке свай и др.

Процесс удара – это сложное механическое явление. Чтобы упростить расчет в сопротивлении материалов, приняты следующие допущения.

#### **Допущения.**

- 1) После удара двух тел оба тела движутся с одинаковой скоростью и в одном направлении.
- 2) Материал соударяющихся тел испытывает только упругие деформации.
- 3) Кинетическая энергия удара полностью переходит в потенциальную энергию упругих деформаций тел.

Рассмотрим задачу о продольном ударе по стержню (рис. 140).



**Рис. 140. Схема к расчету стержня на продольный удар**

Потенциальная энергия деформации стержня равна при статическом приложении нагрузки – когда тело просто установить на торец стержня

$$U_{cm} = \frac{1}{2} G \cdot \Delta l_{cm} = \frac{1}{2} G \cdot \Delta l_{cm} \cdot \frac{\Delta l_{cm}}{\Delta l_{cm}} = \frac{1}{2} \frac{G \cdot (\Delta l_{cm})^2}{\Delta l_{cm}} = \frac{G \cdot \Delta l_{cm}^2}{2 \cdot \frac{Gl}{EA}} = \frac{(\Delta l_{cm})^2 EA}{2l}. \quad (467)$$

Аналогично выражается потенциальная энергия при динамическом приложении нагрузке – ударе

$$U_{\text{д}} = \frac{(\Delta l_{\text{д}})^2 EA}{2l}. \quad (468)$$

Кинетическая энергия удара равна потенциальной энергии поднятого тела  $G$

$$T = G(H + \Delta l_{\text{д}}). \quad (469)$$

По закону сохранения энергии имеем

$$T = U_{\text{д}}. \quad (470)$$

Отсюда получим уравнение

$$\frac{(\Delta l_{\text{д}})^2 EA}{2l} = G(H + \Delta l_{\text{д}}); \quad (471)$$

Раскроем скобки, разделим левую и правую части уравнения (471) на  $EA$  и умножим на  $2l$

$$\Delta l_{\text{д}}^2 = 2H \frac{Gl}{EA} + 2\Delta l_{\text{д}} \frac{Gl}{EA} \quad (472)$$

Учтем, что  $G/EA = \Delta/_{ct}$  и получим квадратное уравнение относительно неизвестного  $\Delta/_{д}$

$$\Delta/_{д}^2 - 2\Delta/_{ct}H - 2\Delta/_{д}\Delta/_{ct} = 0. \quad (473)$$

Приведем уравнение (510) к привычному виду квадратного уравнения

$$\Delta/_{д}^2 - 2\Delta/_{cm} \cdot \Delta/_{д} - 2H \cdot \Delta/_{cm} = 0. \quad (474)$$

Из математики известно, что решение неполного квадратного уравнения

$$x^2 + px + q = 0 \quad (475)$$

имеет вид

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \quad (476)$$

Воспользуемся решением квадратного уравнения и получим

$$\Delta/_{д} = \Delta/_{cm} + \sqrt{\Delta/_{cm}^2 + 2H\Delta/_{cm}}; \quad (477)$$

Приведем выражение (514) к виду

$$\Delta/_{д} = \Delta/_{cm} \left(1 + \sqrt{1 + 2H/\Delta/_{cm}}\right). \quad (478)$$

Окончательно имеем

$$\Delta/_{д} = k_{д}\Delta/_{cm}, \quad (479)$$

где  $\Delta/_{cm}$  – деформация при статическом приложении нагрузки;

$\Delta/_{д}$  – деформация при динамическом приложении нагрузке (ударе);

$k_{д}$  – динамический коэффициент при ударе равен

$$k_{д} = 1 + \sqrt{1 + 2H/\Delta/_{cm}}. \quad (480)$$

Используя динамический коэффициент (480) можно найти напряжения при ударе. Правда, для этого требуется знать статическое напряжение.

$$\sigma_{д} = k_{д}\sigma_{cm}. \quad (481)$$

## 1.17. Прочность при переменных напряжениях

### 1.17.1. Основные понятия о расчете конструкций при переменных напряжениях

Экспериментально установлено, что при переменных напряжениях, гораздо меньших опасных напряжений от постоянной нагрузки, происходит разрушение материала. Существует несколько представлений о причинах разрушения конструкций от переменных напряжений. Приведем одно из таких пояснений.

*П о я с н е н и е.* Металлы имеют поликристаллическую структуру и сложены множеством кристаллов различного размера и различной ориентации. При нагружении металлического образца появляется неоднородное поле напряжений. Среднее напряжение может быть меньше опасного, а в отдельных точках на контактах кристаллов за счет концентрации они могут быть больше опасного.

В таких точках происходит разрушение материала и появляются микротрещины. При каждом повторяющемся нагружении трещины растут, так как сами являются концентраторами напряжений. Это приводит к появлению макротрещин и к разрушению элемента.

Вводится понятие о накоплении повреждений и разрушению материала от повторяющихся нагрузок.

**Усталость** – процесс постоянного накопления повреждений материала при действии переменных напряжений, приводящий к образованию трещин и разрушению.

Свойство материала сопротивляться усталостному разрушению называется **выносливостью**.

### 1.17.2. Виды циклов напряжений

Функция  $f(x)$  - периодическая, если существует такое отличное от нуля число  $T$ , что для любого  $x$  из области определения функции имеет место:  $f(x + T) = f(x)$ . Такое наименьшее число  $T$  называется **периодом функции**.

Для периода можно дать и такое определение.

Минимальной промежуток времени, в течение которого напряжение и его производная по времени принимают соответственно одинаковые значения, называется **периодом**  $T, c$ .

Изменение напряжений за один период называется **циклом напряжения**.

Максимальное отличие функции, взятое по абсолютной величине, от его среднего значения называется **амплитудой**.

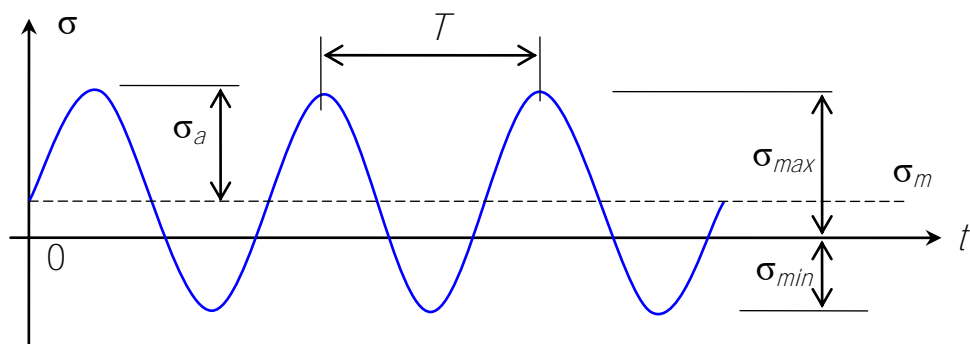


Рис. 141. Синусоидальный закон изменения напряжений

**Симметричный цикл** – это такой цикл, при котором максимальное и минимальное напряжения равны по абсолютной величине, но имеют разные знаки.

**Ассимметричный цикл** – это такой цикл, при котором максимальное и минимальное напряжения не равны по абсолютной величине.

**Знакопеременный цикл** – это закон колебательного процесса, при котором максимальное и минимальное напряжения имеют разные знаки.

Если максимальное и минимальное напряжения имеют одинаковые знаки, то такой цикл называется **знакопостоянный**.

Пример знакопостоянного и ассиметричного цикла приведен на рисунке (рис.142).

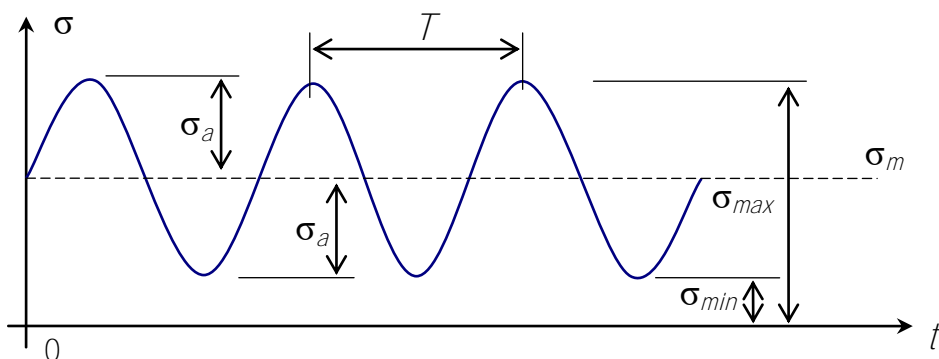


Рис. 142. Пример знакопостоянного ассиметричного цикла

**Коэффициент асимметрии** цикла определяется отношением

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad (482)$$

для симметричного цикла  $R = -1$ ; для постоянного растяжения  $R = +1$ ; для постоянного сжатия  $R = +1$ ; для пульсирующего цикла  $R = 0$ .



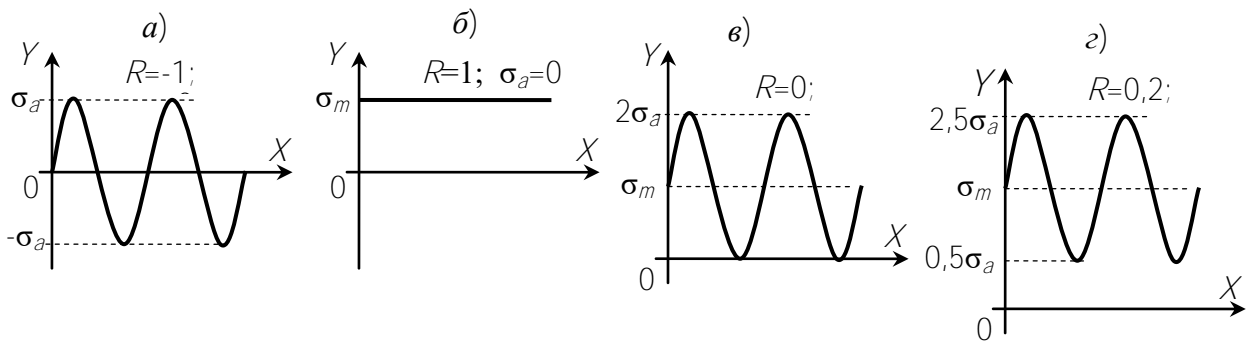


Рис. 143. Примеры циклов переменных напряжений: а) симметричный цикл; б) постоянная нагрузка; в) пульсирующий цикл; г) знакопостоянный цикл

### 1.17.3. Понятие о пределе выносливости

*Пределом выносливости называется наибольшее максимальное (минимальное) напряжение, которое не вызывает усталостного разрушения элемента при неограниченном числе циклов  $\sigma_R$ .*

#### Испытания.

Испытания на выносливость выполняются на специальных испытательных установках. Отметим, что такие испытания дорогостоящие и требующие больших затрат времени. Схема установки для испытания на усталость материалов приведена на рисунке 144.

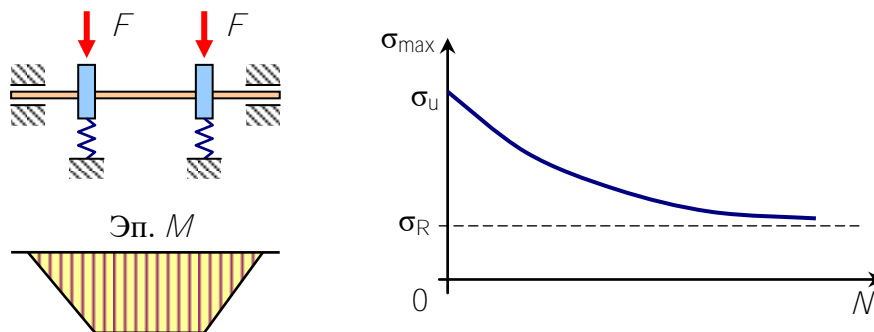


Рис. 144. Схема установки для испытания на усталость и кривая

Для получения каждой точки кривой усталости (кривая Вебера) требуется десять образцов. Это необходимо в связи с большим разбросом результатов. На горизонтальной оси  $N$  откладывается количество циклов испытания, а на вертикальной  $\sigma_{\max}$ , максимальное напряжение, которое еще выдерживает образец.

Для черных металлов (сталь, чугун) испытания проводят на  $10^7$  циклов. Опыт показывает, что если металл выдерживает  $10^7$  циклов, то он выдерживает и неограниченное число циклов.

Для цветных металлов испытания проводят на  $10^8$  циклов. Цветные металлы не имеют абсолютного предела выносливости. Поэтому для них используется *предел ограниченной выносливости*.

#### 1.17.4. Диаграмма предельных амплитуд

**Предельным циклом** называется такой цикл, у которого максимальное напряжение равно пределу выносливости.

$$\sigma_{max} = \sigma_R \quad (483)$$

По результатам испытаний строят диаграмму предельных амплитуд (рис.145).

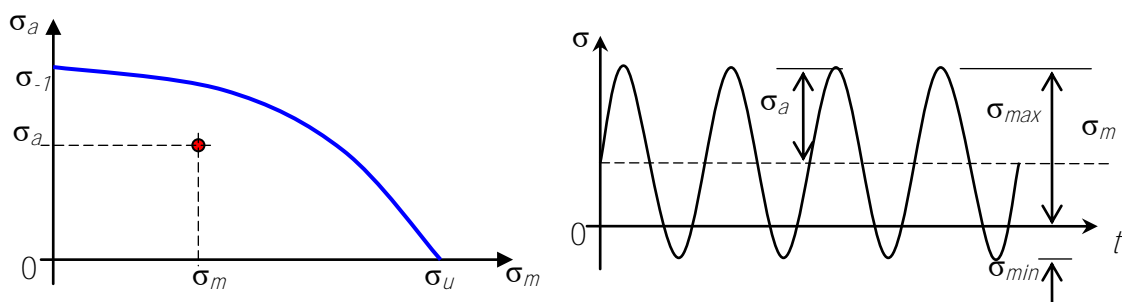


Рис. 145. Диаграмма предельных амплитуд

Если характеру цикла соответствует точка, расположенная внутри диаграммы, то усталостное разрушение не происходит.

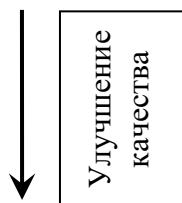
#### 1.17.5. Факторы, влияющие на величину предела выносливости

На величину предела выносливости влияют многие факторы.

**Концентрация напряжений.** Усталостные трещины обычно появляются в местах концентрации напряжений. Величина концентрации напряжений оценивается коэффициентом концентрации. Оценка влияния концентрации на усталостную прочность дается по эффективному коэффициенту концентрации, который устанавливается экспериментально.

**Качество поверхности** детали зависит от способа обработки

прокатка  
насечка  
резание  
шлифовка  
полировка



Опыт показывает, что предел выносливости снижается для деталей с грубой обработкой поверхности.

**Абсолютные размеры** существенно влияют на величину предела выносливости. С увеличением размеров детали предел выносливости уменьшается.

**Внешняя среда** существенно влияет на усталостную прочность. Наличие воды, растворов солей, кислот, пара значительно снижают усталостную прочность. Высокая температура снижает, а низкая повышает усталостную прочность.

## 1.18. Учет пластических деформаций при расчете элементов

### 1.18.1. Расчетные модели

Из диаграммы растяжения малоуглеродистой стали, очевидно, что закон Гука выполняется только до некоторого предела – предела пропорциональности  $\sigma_{pr}$ . При дальнейшем нагружении происходят пластические деформации материала образца. Однако достижение предела текучести в какой-либо точке конструкции еще не означает ее разрушение. Вследствие пластических деформаций включаются в работу менее нагруженные части конструкции.

Все диаграммы  $\sigma \sim \varepsilon$  делятся на три типа (три модели).

1) *диаграммы хрупких материалов* (чугун).

Считается, что хрупкие материалы разрушаются без пластических деформаций и подчиняются закону Гука до момента разрушения (рис. 146).

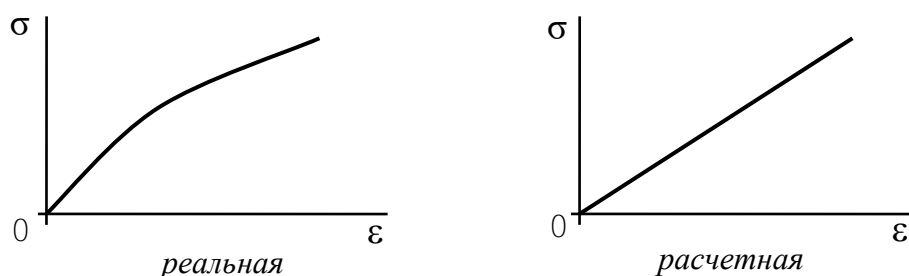


Рис. 146. Закон деформирования реальный и расчетный хрупких материалов

2) *диаграмма материалов с четко выраженной площадкой текучести* (сталь малоуглеродистая). При расчете конструкций из весьма пластичных материалов упрочнение не учитывается и диаграмму упрощают, заменяя ее *диаграммой Прандтля* (рис. 147).

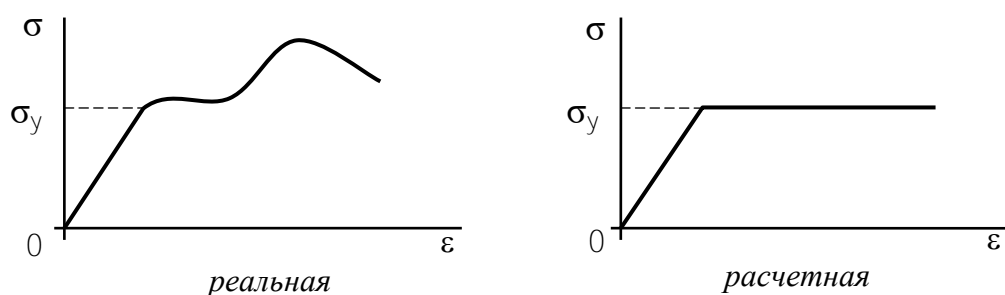
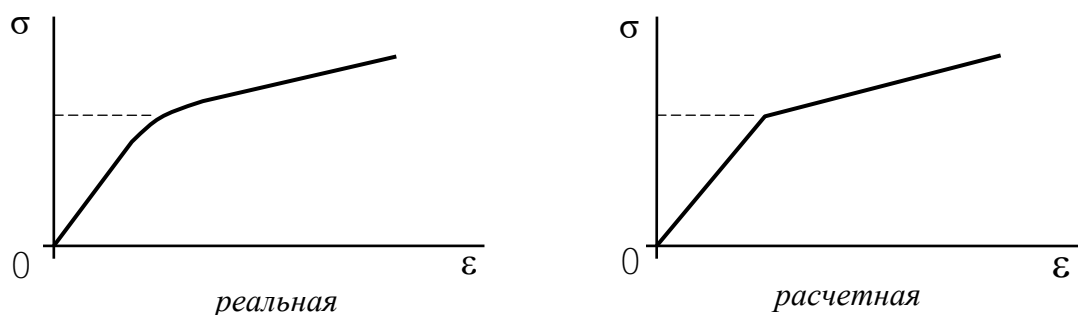


Рис. 147. Закон деформирования реальный и расчетный упруго-пластических материалов

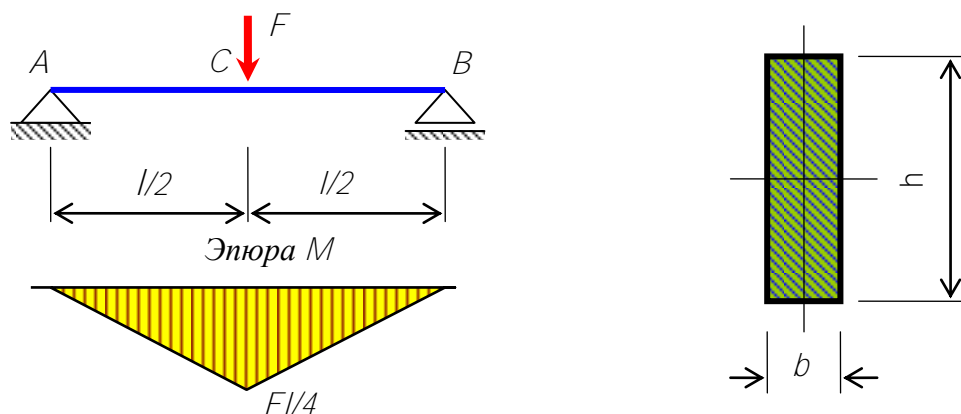
3) *диаграмма с нечетко выраженной площадкой текучести* (стали средней пластичности, цветные металлы). Для материалов средней пластичности реальную диаграмму заменяют на более простую – *билинейную* (рис. 148).



**Рис. 148. Закон деформирования реальный и расчетный с нечетко выраженной площадкой текучести**

### 1.18.2. Пластический изгиб статически определимой балки

Ограничимся рассмотрением малых упругопластических деформаций, когда деформации малы по сравнению с размерами элемента конструкции (теория Ильюшина). Рассмотрим статически определимую шарнирно опертую балку прямоугольного сечения.

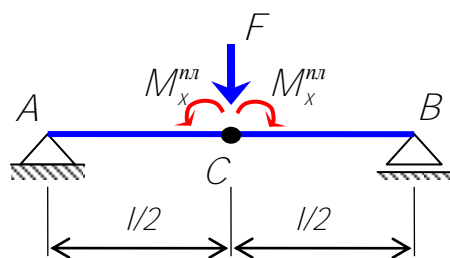
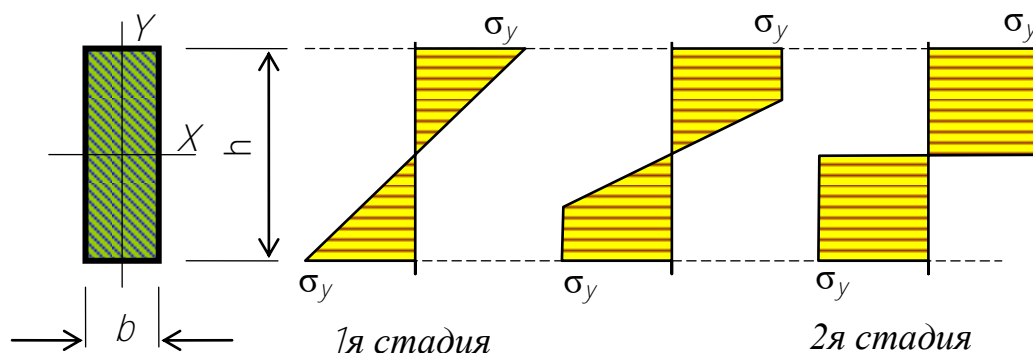


**Рис. 149. Шарнирно опертая статически определимая балка прямоугольного сечения, нагруженная сосредоточенной силой**

При увеличении силы  $F$  напряжения в крайних волокнах балки вначале достигают предела текучести  $\sigma_y$  (1я стадия). Однако несущая способность балки еще не исчерпана. Дальнейшее увеличение нагрузки вызывает распространение пластических деформаций в сторону нейтральной оси. При этом нейтральная ось все время остается центральной осью сечения (рис. 150).

Если пластические деформации распространяются на все сечение (2я стадия), то образуется пластический шарнир и несущая способность балки будет полностью исчерпана.

**Пластический шарнир** отличается от обычного шарнира тем, что он передает изгибающий момент равный пластическому моменту, а обычный шарнир вообще не передает момента. На первой стадии работы балки внешний и внутренний (изгибающий) моменты в поперечном сечении балки должны быть равны (561)



**Рис. 150.** Изменение закона распределения напряжений по высоте сечения балки при возрастании нагрузки

**1 я стадия.**

$$\frac{Fl}{4} = M_x = \sigma_y W_x = \sigma_y \frac{bh^2}{6}. \quad (484)$$

Определим соответствующую предельную силу для упругой балки

$$F = \sigma_y \frac{bh^2}{6} \cdot \frac{4}{l} = \sigma_y \frac{2}{3} \cdot \frac{bh^2}{l}. \quad (485)$$

На второй стадии работы балки внешний и внутренний (изгибающий) моменты в поперечном сечении балки также должны быть равны друг другу (486)

**2 я стадия.**

$$\begin{aligned} \frac{Fl}{4} = M_x^{nl} &= \int_A \sigma_y y dA = \sigma_y \int_A y dA = \sigma_y \int_{-h/2}^{h/2} y b dy = \sigma_y \frac{by^2}{2} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \\ &= \sigma_y \frac{bh^2}{8} + \sigma_y \frac{bh^2}{8} = \sigma_y \frac{bh^2}{4} = \sigma_y W_x^{nl}. \end{aligned} \quad (486)$$

Предельная сила для балки с пластическим шарниром выражается формулой (487)

$$F^{nl} = \sigma_y \frac{bh^2}{4} \cdot \frac{4}{l} = \sigma_y \frac{bh^2}{l}. \quad (487)$$

Отношение предельной силы для балки с пластическим шарниром к предельной силе для балки в упругой стадии равно

$$\frac{F^{nl}}{F} = \frac{\sigma_y \frac{bh^2}{l}}{\sigma_y \frac{2}{3} \cdot \frac{bh^2}{l}} = \frac{3}{2} = 1,5. \quad (488)$$

Упругий момент сопротивления прямоугольного сечения балки равен

$$W_x = \frac{bh^2}{6}. \quad (489)$$

Пластический момент сопротивления прямоугольного сечения балки, согласно выражению (486) равен

$$W_x^{nl} = \frac{bh^2}{4}. \quad (490)$$

Пластический момент сопротивления сечения произвольной формы, согласно выражению (486), равен

$$W_x^{nl} = 2S_x^0, \quad (491)$$

где  $S_x^0$  – статический момент относительно нейтральной (центральной) оси части сечения, расположенной выше или ниже нейтральной оси.

## 2 ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

### 2.1 Расчет стержня переменной жесткости на статические нагрузки

Д а н о. Стержень переменной жесткости, закрепленный верхним концом и нагруженный двумя центрально приложенными силами – сила  $F_1 = 72 \text{ кН}$ , направленная вверх, и  $F_2 = 48 \text{ кН}$ , направленная вниз. Стержень состоит из двух ступеней. Площадь поперечного сечения верхней ступени равна  $A_1 = 6 \text{ см}^2$ , а площадь поперечного сечения нижней ступени –  $A_2 = 8 \text{ см}^2$ . Модуль упругости материала стержня  $E = 200 \text{ ГПа}$ . Размеры и место приложения сил показаны на рисунке 151.

Р е ш е н и е.

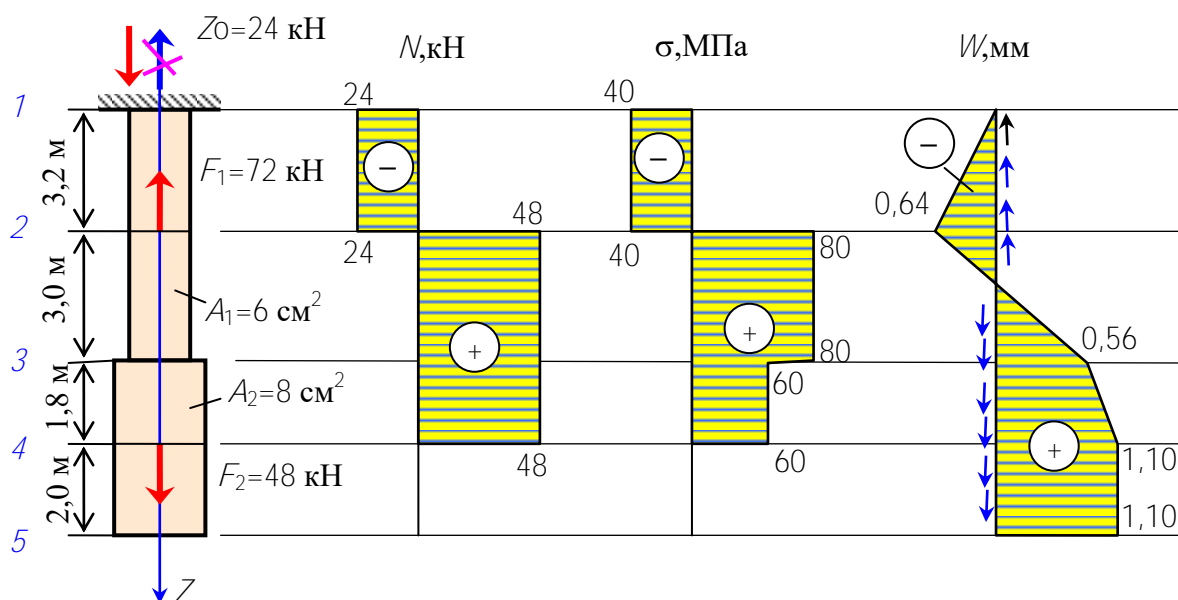


Рис. 151. Стержень переменной жесткости, нагруженный двумя сосредоточенными силами, и эпюры внутренних сил

Продольную ось стержня  $Z$  направим от опоры в сторону стержня – в данном случае это вниз. Пронумеруем особенные сечения, начиная от опоры. Направим неизвестную реакцию опоры  $Z_0$  в любую сторону, например, вверх.

Составим уравнение статического равновесия и решим его

$$\sum Z = -Z_0 - F_1 + F_2 = -Z_0 - 72 + 48 = 0; \quad Z_0 = -24 \text{ кН}$$

Знак “минус” означает, что направление реакции  $Z_0$  выбрано ошибочно. В действительности реакция  $Z_0$  направлена вниз. Внесем исправления на рисунке 151, и значение реакции будем считать положительным.

Используя метод сечений, определим продольную силу на участке 1-2. Для этого проведем сечение  $S_1$  в произвольном месте участка 1-2. Это сечение разделит стержень на две части 1- $S_1$  и  $S_1$ -5. Рассмотрим часть 1- $S_1$ . Будем полагать, что в сечении  $S_1$  действует растягивающая сила  $N_{12}$  (рис. 152, а). Составим уравнение статического равновесия выбранной части стержня и решим его

$$\sum Z = Z_0 + N_{12} = 24 + N_{12} = 0. \quad N_{12} = -24 \text{ кН}.$$

Знак “минус” означает, что мы ошиблись, предполагая продольную силу растягивающей. В действительности продольная сила на участке 1-2 вызывает сжатие материала. В отличие от внешних сил, для внутренней силы  $N_{12}$  знак “минус” сохраняется.

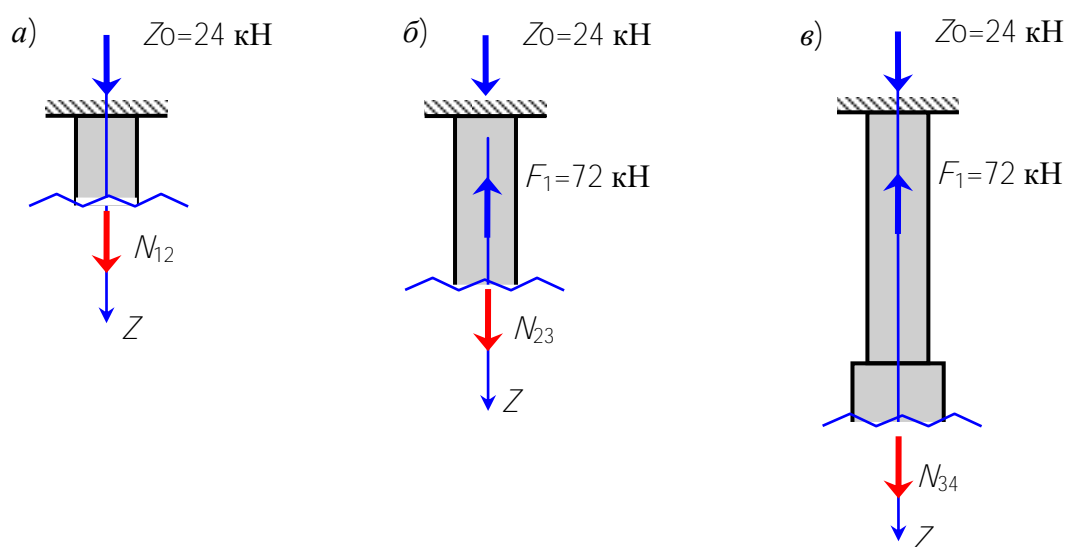


Рис. 152. Отсеченные части стержня сечениями, проведенными на разных его участках: а) на участке 1-2; б) на участке 2-3; в) на участке 3-4

Затем, в произвольном месте участка 2-3 проведем сечение и рассмотрим верхнюю от сечения часть стержня (рис. 152, б). Составим уравнение статического равновесия для рассматриваемой части стержня и решим его.

$$\sum Z = Z_0 - F_1 + N_{23} = 24 - 72 + N_{23} = 0. \quad N_{23} = 48 \text{ кН}.$$

Знак “плюс” означает, что продольная сила  $N_{23}$ , как и предполагалось, растягивает материал участка 2-3.

Проведем сечение в произвольном месте участка 3-4 (рис.152, в) и рассмотрим верхнюю часть стержня. Составим уравнение равновесия и решим его.

$$\sum Z = Z_0 - F_1 + N_{23} = 24 - 72 + N_{34} = 0. \quad N_{34} = 48 \text{ кН}.$$

Очевидно, что материал участка 3-4 также испытывает растяжения.



На участке 4-5 стержня нет приложенных сил, поэтому продольная сила на этом участке равна нулю и материал его и не растягивается и не сжимается.

По результатам расчета построим эпюру продольных сил (рис. 151).

Вычислим значения нормальных напряжений на участках стержня.

$$\sigma_{12} = \frac{N_{12}}{A_1} = \frac{-24 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = -40 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{23} = \frac{N_{23}}{A_1} = \frac{48 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = 80 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{34} = \frac{N_{34}}{A_1} = \frac{48 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-4}} = 60 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{45} = \frac{N_{45}}{A_2} = \frac{0,0}{8 \cdot 10^{-4}} = 0,0.$$

Построим эпюру нормальных напряжений (рис. 151).

Используя закон Гука, вычислим деформации (изменения длины) участков стержня.

$$\Delta l_{12} = \frac{N_{12} \cdot l_{12}}{E \cdot A_1} = \frac{-24 \cdot 10^3 \cdot 3,2}{200 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = -0,64 \text{ мм};$$

$$\Delta l_{23} = \frac{N_{23} \cdot l_{23}}{E \cdot A_1} = \frac{48 \cdot 10^3 \cdot 3,0}{200 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = 1,20 \text{ мм};$$

$$\Delta l_{34} = \frac{N_{34} \cdot l_{34}}{E \cdot A_2} = \frac{48 \cdot 10^3 \cdot 1,8}{200 \cdot 10^9 \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = 0,54 \text{ мм};$$

$$\Delta l_{45} = \frac{N_{45} \cdot l_{45}}{E \cdot A_2} = \frac{0,0 \cdot 10^3 \cdot 2,0}{200 \cdot 10^9 \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = 0,0.$$

Вычислим перемещения отмеченных сечений стержня, используя рекуррентную формулы  $W_{k+1} = W_k + \Delta l_{k,k+1}$ .

$$W_1 = 0 \text{ (по условию закрепления);}$$

$$W_2 = W_1 + \Delta l_{12} = 0 - 0,64 = -0,64 \text{ мм};$$

$$W_3 = W_2 + \Delta l_{23} = -0,64 + 1,20 = 0,56 \text{ мм};$$

$$W_4 = W_3 + \Delta l_{34} = 0,56 + 0,54 = 1,10 \text{ мм};$$

$$W_5 = W_4 + \Delta l_{45} = 1,10 + 0,0 = 1,10 \text{ мм}.$$

Построим эпюру перемещений (рис. 151). Отметим, перемещения со знаком плюс совпадают с направлением продольной оси  $Z$ . Направление перемещений можно указывать и стрелками.

## 2.2 Расчет плоской стержневой системы

Д а н о: Плоская стержневая система, состоящая из двух деформируемых стержней 1 и 2, а также двух абсолютно жестких элементов, соединенных друг с другом и с опорами шарнирами. Модуль упругости и расчетное сопротивление принято равными  $E = 200 \text{ ГПа}$ ,  $R = 210 \text{ МПа}$ . Исходные данные приведены на рисунке 153.

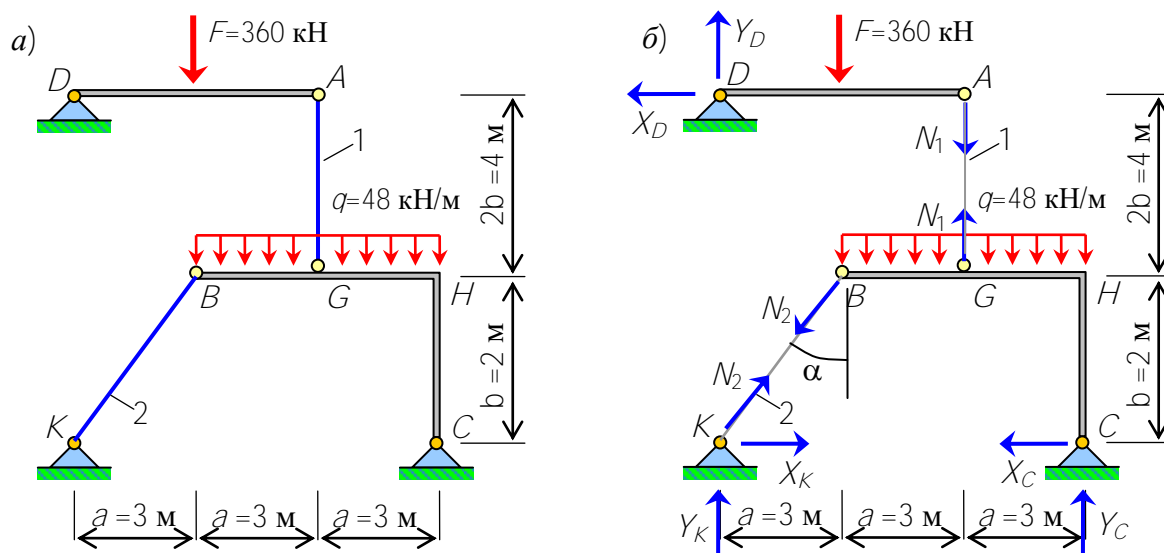


Рис. 153. Схема плоской стержневой системы (а) и обозначение неизвестных реакций и продольных сил (б)

Р е ш е н и е. Разрежим стержень 1 и стержень 2 одним сечением, разделив систему на две части – верхнюю и нижнюю. Будем полагать, что оба деформируемые стержни растянуты продольными силами  $N_1$  и  $N_2$ . То есть эти продольные силы считаем положительными. В результате имеем восемь неизвестных  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $X_C$ ,  $Y_C$ ,  $X_D$ ,  $Y_D$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ .

Вычислим угол наклона второго стержня.

$$\alpha = \arctg\left(\frac{a}{b}\right) = \arctg\left(\frac{3,0}{2,0}\right) = 56,3^\circ$$

Из уравнения статического равновесия верхней части стержневой системы определим реакции и продольную силу  $N_1$ .

$$\sum M_A = Y_D \cdot 2a - F \cdot a = Y_D \cdot 2 \cdot 3,0 - 360 \cdot 3,0 = 0, \quad \underline{Y_D = 180 \text{ кН}};$$

$$\sum M_D = F \cdot a + N_1 \cdot 2a = 360 \cdot 3,0 + N_1 \cdot 2 \cdot 3,0 = 0, \quad \underline{N_1 = -180 \text{ кН}};$$

$$\sum X = X_D = 0, \quad \underline{X_D = 0,0}.$$

Из уравнений равновесия нижней части стержневой системы вычислим реакции и продольную силу  $N_2$ .

$$\begin{aligned} \sum M_C &= -N_2 \cdot \cos(\alpha) \cdot 2a - N_2 \cdot \sin(\alpha) \cdot b - q \cdot 2a \cdot a + N_1 \cdot a = \\ &= -N_2 \cdot \cos(56,3^\circ) \cdot 2 \cdot 3,0 - N_2 \cdot \sin(56,3^\circ) \cdot 2,0 - 48 \cdot 2 \cdot 3,0 \cdot 3,0 - 180 \cdot 3,0 = 0, \\ N_2 &= -281,2 \text{ кН} \end{aligned}$$

$$\sum X = -N_2 \cdot \sin(\alpha) - X_C = -(-281,2) \cdot \sin(56,3^\circ) - X_C = 0, \quad X_C = 234,0 \text{ кН}$$

$$\begin{aligned} \sum Y = Y_C - N_2 \cdot \cos(\alpha) - q \cdot 2a + N_1 = Y_C - (-281,2) \cdot \cos(56,3^\circ) - \\ - 48 \cdot 2 \cdot 3,0 + (-180) = 0, \quad Y_C = 312,0 \text{ кН} \end{aligned}$$

Реакции на опоре  $K$  определим из уравнениями равновесия узла  $K$  на горизонтальную и на вертикальную оси.

$$\sum X = N_2 \cdot \sin(\alpha) + X_K = (-281,2) \cdot \sin(56,3^\circ) + X_K = 0, \quad X_K = 234,0 \text{ кН};$$

$$\sum Y = Y_K + N_2 \cdot \cos(\alpha) = Y_K + (-281,2) \cdot \cos(56,3^\circ) = 0, \quad Y_K = 156,0 \text{ кН}.$$

В результате расчета установлено, что оба деформированные стержни сжаты. Значения реакций положительные, значит их направление выбрано правильно. Если значения какой-либо реакции оказалась бы отрицательной, то следуе изменить ее направление на противоположное и считать ее положительной. В данном примере все реакции оказались положительными. Поэтому ничего менять не следует.

Проверим соблюдение условий равновесия всей стержневой системы.

$$\sum X = X_D + X_K - X_C = 0,0 + 234 - 234 = 0;$$

$$\sum Y = Y_D - F + Y_K + Y_C - q \cdot 2a = 180 - 360 + 156 + 312 - 48 \cdot 2 \cdot 3 = 0.$$

Условие равновесия выполняется.

Из условия прочности

$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{A} \leq R$$

определим требуемую площадь поперечного сечения для первого деформируемого стержня.

$$A_{\text{тp}} = \frac{N_1}{R} = \frac{180 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 8,57 \text{ см}^2.$$

Из таблицы прокатных равнополочных уголков подберем два уголка так, чтобы их суммарная площадь была бы не меньше требуемой. Принимаем два уголка 2L56×4. Тогда площадь поперечного сечения первого стержня равна  $A = 2 \cdot 4,38 = 8,76 \text{ см}^2$ .

Проверим по условию прочности первый стержень

$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{A} = \frac{180 \cdot 10^3}{8,76 \cdot 10^{-4}} = 205,5 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

Недогрузка первого стержня составляет

$$\frac{R - \sigma_{(1)}}{R} \cdot 100 = \frac{210 - 205,5}{210} \cdot 100 = 2,1\%.$$

Из условия прочности

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_2}{A_2} \leq R$$

определим требуемую площадь поперечного сечения для второго деформируемого стержня.

$$A_{2\text{тр}} = \frac{N_2}{R} = \frac{281,2 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 13,39 \text{ см}^2.$$

Из таблицы прокатных равнополочных уголков подберем два уголка так, чтобы их суммарная площадь была бы не меньше требуемой. Принимаем два уголка 2L60×6. Тогда площадь поперечного сечения второго стержня равна  $A_2 = 2 \cdot 6,92 = 13,84 \text{ см}^2$ .

Проверим по условию прочности второй стержень

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{281,2 \cdot 10^3}{13,84 \cdot 10^{-4}} = 203,2 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

Недогрузка второго стержня составляет

$$\frac{R - \sigma_{(2)}}{R} \cdot 100 = \frac{210 - 203,2}{210} \cdot 100 = 3,2\%.$$

Определим длину первого и второго деформируемых стержней

$$l_1 = 2 \cdot b = 2 \cdot 2 = 4 \text{ м}; \quad l_2 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3,0^2 + 2,0^2} = 3,61 \text{ м}.$$

Используя закон Гука, вычислим деформации первого и второго стержней.

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{-180,0 \cdot 10^3 \cdot 4,0}{200 \cdot 10^9 \cdot 8,57 \cdot 10^{-4}} = -4,11 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{-281,2 \cdot 10^3 \cdot 3,61}{200 \cdot 10^9 \cdot 13,84 \cdot 10^{-4}} = -3,66 \text{ мм}.$$

Вычислим радиусы окружностей, по которым движутся точки  $B$  и  $G$ , и их углы наклона  $\beta$  и  $\gamma$  (рис. 185).

$$r_B = \sqrt{(2a)^2 + b^2} = \sqrt{(2 \cdot 3,0)^2 + 2,0^2} = 6,32 \text{ м};$$

$$r_G = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3,0^2 + 2,0^2} = 3,61 \text{ м};$$

$$\beta = \arctg\left(\frac{b}{2a}\right) = \arctg\left(\frac{2,0}{2 \cdot 3,0}\right) = 18,43^\circ;$$

$$\gamma = \arctg\left(\frac{b}{a}\right) = \arctg\left(\frac{2,0}{3,0}\right) = 33,69^\circ.$$

Используя деформируемую схему с учетом упрощений, установим связь между перемещениями точек  $B$  и  $G$  и деформациями первого и второго стержней (рис. 154).

Вычислим перемещение точки  $B$

$$\delta_B = \frac{|\Delta_l|}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{4,11}{\cos(56,3^\circ - 18,5^\circ)} = 5,20 \text{ мм.}$$

Из соотношения перемещений точек  $B$  и  $G$

$$\frac{\delta_B}{r_B} = \frac{\delta_G}{r_G}$$

найдем перемещение точки  $G$

$$\delta_G = \frac{r_G}{r_B} \delta_B = \frac{3,61}{6,32} \cdot 5,20 = 2,97 \text{ мм.}$$

Вычислим перемещения точки  $A$ .

$$\delta_A = \delta_G \cdot \sin(\gamma) + |\Delta_l| = 2,97 \cdot \sin(33,69^\circ) + 4,11 = 5,76 \text{ мм}$$

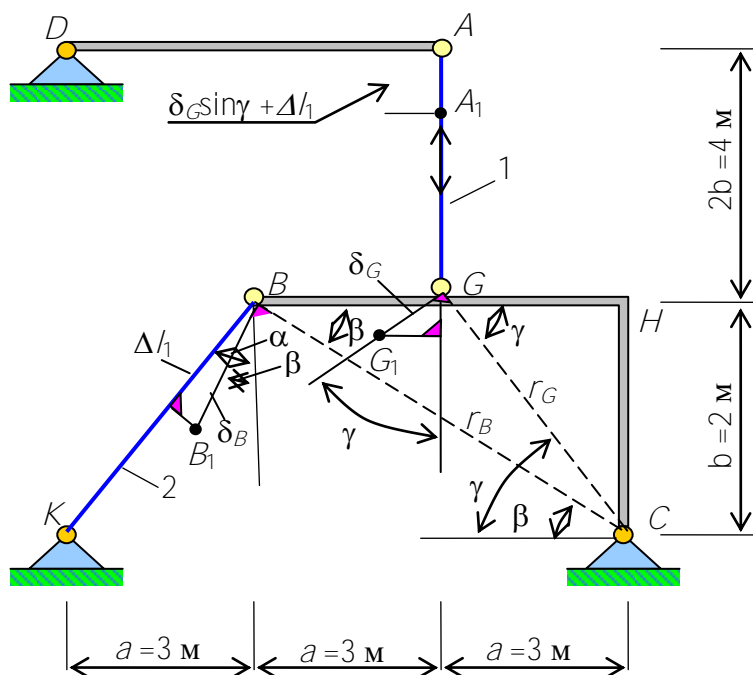


Рис. 154. Деформированная схема плоской стержневой

### 2.3. Определение геометрических характеристик сечения сложной геометрической формы

**Д а н о:** Сечение сложной геометрической формы (рис. 155). Требуется определить главные центральные моменты инерции.

**Р е ш е н и е.** Разделим сечение на части с простыми геометрическими формами – прямоугольники, треугольники и круги (рис. 155). Выберем вспомогательные оси координат и обозначим их буквами  $X, Y$ .

Вычислим площади, определим координаты центров тяжести частей сечения, их осевые и центробежные моменты инерции:

– первая часть сечения – треугольник

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 9 \cdot 5 = 45 \text{ см}^2;$$

$$x_1 = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot a = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 9 = 12 \text{ см}; \quad y_1 = \frac{2}{3} \cdot b = \frac{2}{3} \cdot 5 = 3,33 \text{ см};$$

$$J_{x_1} = \frac{2a \cdot b^3}{36} = \frac{2 \cdot 9 \cdot 5^3}{36} = 62,50 \text{ см}^4; \quad J_{y_1} = \frac{b \cdot (2a)^3}{36} = \frac{5 \cdot (2 \cdot 9)^3}{36} = 810,0 \text{ см}^4;$$

$$D_{x_1 y_1} = \frac{(2a)^2 b^2}{72} = -\frac{(2 \cdot 9)^2 5^2}{72} = -112,50 \text{ см}^4;$$

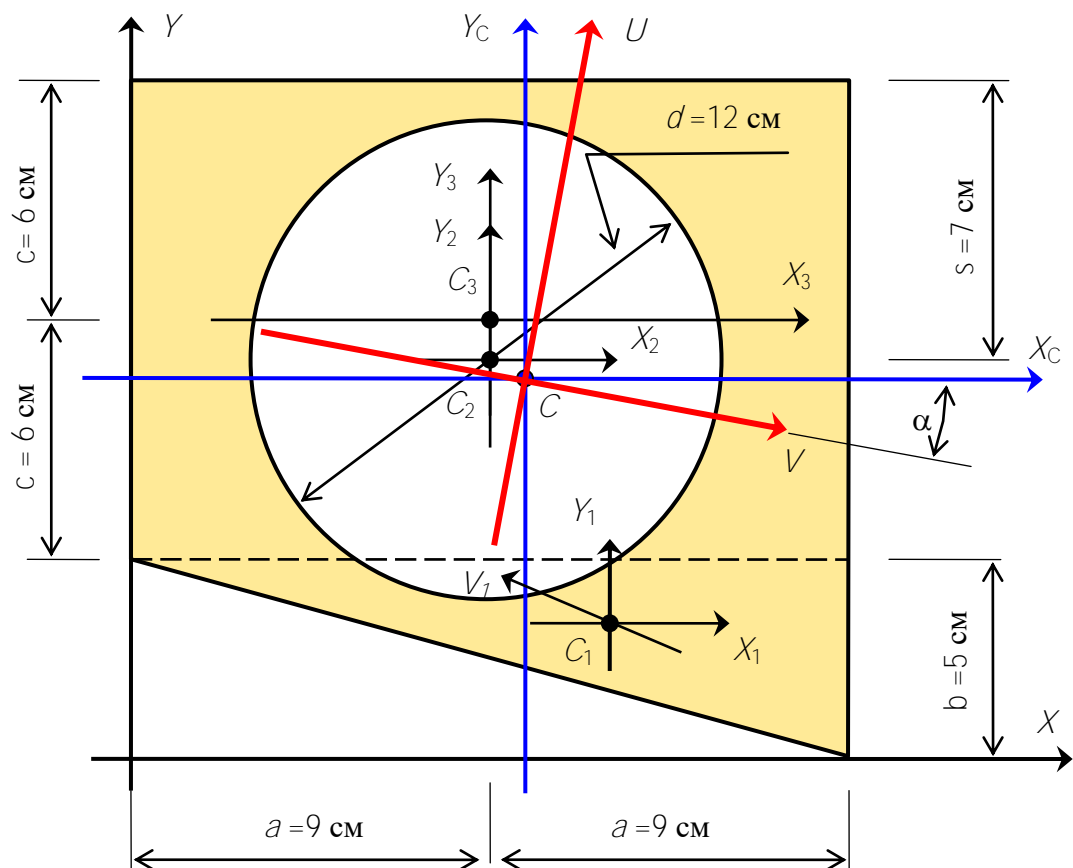


Рис. 155. Сечение сложной геометрической формы. Размеры в см.

– вторая часть сечения – круг

$$A_2 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 12^2}{4} = 113,10 \text{ см}^2;$$

$$x_2 = a = 9 \text{ см};$$

$$y_2 = b + 2c - s = 5 + 2 \cdot 6 - 7 = 10 \text{ см}$$

$$J_{x_2} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 12^4}{64} = 1017,88 \text{ см}^4; \quad J_{y_2} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 12^4}{64} = 1017,88 \text{ см}^4;$$

$$D_{x_2 y_2} = 0;$$

– третья часть сечения – прямоугольник

$$A_3 = 2a \cdot 2c = 2 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 6 = 216,0 \text{ см}^2;$$

$$x_3 = a = 9 \text{ см};$$

$$y_3 = b + c = 5 + 6 = 11 \text{ см};$$

$$J_{x_3} = \frac{2a \cdot (2c)^3}{12} = \frac{2 \cdot 9 \cdot (2 \cdot 6)^3}{12} = 2592,0 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_3} = \frac{2c \cdot (2a)^3}{12} = \frac{2 \cdot 6 \cdot (2 \cdot 9)^3}{12} = 5832,0 \text{ см}^4; \quad D_{x_3 y_3} = 0.$$

Вычислим площадь всего сечения

$$A_0 = A_1 - A_2 + A_3 = 45 - 113,10 + 216 = 147,90 \text{ см}^2.$$

Вычислим статические моменты всего сечения относительно вспомогательных осей  $X$  и  $Y$

$$S_x = A_1 \cdot y_1 - A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 = 45 \cdot 3,33 - 113,10 \cdot 10 + 216,0 \cdot 11 = 1395,03 \text{ см}^3;$$

$$S_y = A_1 \cdot x_1 - A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3 = 45 \cdot 12,0 - 113,10 \cdot 9,0 + 216,0 \cdot 9,0 = 1466,12 \text{ см}^3.$$

Вычислим координаты центра тяжести всего сечения

$$x_c = \frac{S_y}{A_0} = \frac{1466,12}{147,90} = 9,91 \text{ см}; \quad y_c = \frac{S_x}{A_0} = \frac{1395,03}{147,90} = 9,43 \text{ см}.$$

Покажем на рисунке центр тяжести и проведем центральные оси  $X_c$  и  $Y_c$  параллельно вспомогательным осям  $X$  и  $Y$ .

Вычислим координаты центров тяжести частей сечения в центральной системе координатных осей  $X_c$  и  $Y_c$

$$x_{c_1} = x_1 - x_c = 12,0 - 9,91 = 2,09 \text{ см}; \quad y_{c_1} = y_1 - y_c = 3,33 - 9,43 = -6,10 \text{ см};$$

$$x_{c_2} = x_2 - x_c = 9,0 - 9,91 = -0,91 \text{ см}; \quad y_{c_2} = y_2 - y_c = 10,0 - 9,43 = 0,57 \text{ см};$$

$$x_{c_3} = x_3 - x_c = 9,0 - 9,91 = -0,91 \text{ см}; \quad y_{c_3} = y_3 - y_c = 11,0 - 9,43 = 1,57 \text{ см}.$$

Проверим положение центра тяжести сечения. Для этого используем утверждение, что статический момент любого сечения относительно любой центральной оси равен нулю.

$$S_{x_c} = A_1 \cdot y_{c_1} - A_2 \cdot y_{c_2} + A_3 \cdot y_{c_3} = 45 \cdot (-6,10) - 113,10 \cdot 0,57 + 216,0 \cdot 1,57 = 0;$$

$$S_{y_c} = A_1 \cdot x_{c_1} - A_2 \cdot x_{c_2} + A_3 \cdot x_{c_3} = 45 \cdot 2,09 - 113,10 \cdot (-0,91) + 216,0 \cdot (-0,91) = 0.$$

Вычислим моменты инерции всего сечения относительно центральных осей  $X_c$  и  $Y_c$ , параллельных вспомогательным осям  $X$  и  $Y$ .

$$\begin{aligned} J_{x_c} &= (J_{x_1} + A_1 \cdot y_{c_1}^2) - (J_{x_2} + A_2 \cdot y_{c_2}^2) + (J_{x_3} + A_3 \cdot y_{c_3}^2) = \\ &= [62,50 + 45,0 \cdot (-6,10)^2] - (1017,88 + 113,10 \cdot 0,57^2) + (2592 + 216 \cdot 1,57^2) = \\ &= 3806,74 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{Y_c} &= (J_{Y_1} + A_1 \cdot x_{C_1}^2) - (J_{Y_2} + A_2 \cdot x_{C_2}^2) + (J_{Y_3} + A_3 \cdot x_{C_3}^2) = \\
&= (810,0 + 45,0 \cdot 2,09^2) - [1017,88 + 113,10 \cdot (-0,91)^2] + [5832 + 216 \cdot (-0,91)^2] = \\
&= 5905,90 \text{ см}^4;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{X_c Y_c} &= (D_{X_1 Y_1} + A_1 \cdot x_{C_1} \cdot y_{C_1}) - (D_{X_2 Y_2} + A_2 \cdot x_{C_2} \cdot y_{C_2}) + (D_{X_3 Y_3} + A_3 \cdot x_{C_3} \cdot y_{C_3}) = \\
&= [-112,50 + 45,0 \cdot 2,09 \cdot (-6,10)] - [0,0 + 113,10 \cdot (-0,91) \cdot 0,57] + \\
&+ [0,0 + 216 \cdot (-0,91) \cdot 1,57] = -936,14 \text{ см}^4.
\end{aligned}$$

Вычислим главные центральные моменты инерции  $J_U$  и  $J_V$  всего сечения

$$\begin{aligned}
J_U &= \frac{J_{X_c} + J_{Y_c}}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(J_{X_c} - J_{Y_c})^2 + 4 \cdot D_{X_c Y_c}^2} = \frac{3806,7 + 5905,9}{2} \pm \\
&\pm \frac{1}{2} \sqrt{(3806,7 - 5905,9)^2 + 4 \cdot 936,1^2} = 4856,3 \mp 1149,2. \\
J_U &= 4856,3 + 1149,2 = 6005,5 \text{ см}^4; \quad J_V = 4856,3 - 1149,2 = 3707,1 \text{ см}^4.
\end{aligned}$$

Вычислим угол поворота главных осей инерции относительно центральных осей  $X_c$  и  $Y_c$

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \arctg \left( \frac{2 \cdot D_{X_c Y_c}}{J_{X_c} - J_{Y_c}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \arctg \left( \frac{2 \cdot 936,1}{3806,7 - 5905,9} \right) = 20,9^\circ = 21^\circ.$$

Ось  $V$  откладываем от оси  $X_c$  на угол  $\alpha$ , так как  $J_{Y_c} > J_{X_c}$ , так, чтобы она проходила через отрицательные квадранты, так как  $D_{X_c Y_c} < 0$ .

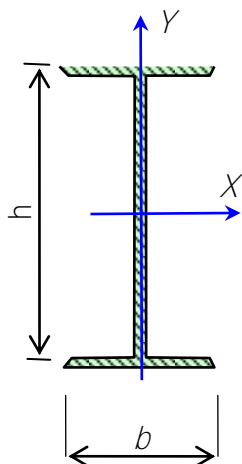
#### 2.4. Определение геометрических характеристик сечения, составленного из прокатных профилей

**Д а н о:** Сечение, составленное из двутавра №22, листа  $1,6 \times 22$  см и неравнополочного уголка  $L125 \times 80 \times 12$  (рис. 159).

Требуется определить геометрические характеристики сечения – положение центра тяжести, главные центральные моменты инерции и положение главных центральных осей инерции.

**Р е ш е н и е.** Вычертим сечение в масштабе и укажем положение центров тяжести частей сечения. Пронумеруем части сечения и выпишем их геометрические характеристики из таблиц прокатных профилей.

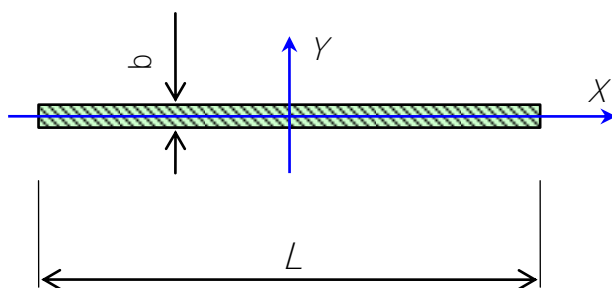




**Двутавр № 22.**

$h=22 \text{ см};$   $J_x=2550 \text{ см}^4;$   
 $b=11 \text{ см};$   $J_y=157 \text{ см}^4;$   
 $A=30,6 \text{ см}^2;$   $D_{xy}=0.$

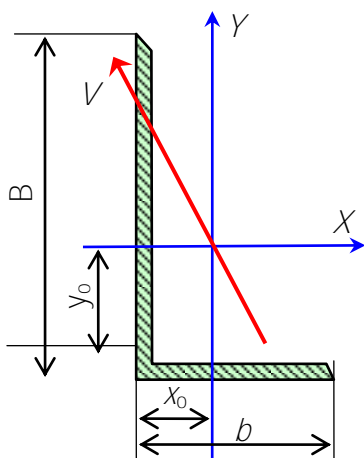
**Рис. 156. Эскиз сечения двутавра и его геометрические характеристики**



**Лист**

$L = 22 \text{ см};$   $b = 1,6 \text{ см};$   
 $A = L \cdot t = 22 \cdot 1,6 = 35,2 \text{ см}^2$   
 $J_x = \frac{L \cdot b^3}{12} = \frac{22 \cdot 1,6^3}{12} = 7,51 \text{ см}^4$   
 $J_y = \frac{L^3 \cdot t}{12} = \frac{22^3 \cdot 1,6}{12} = 1419,73 \text{ см}^4$   
 $D_{xy} = 0.$

**Рис. 157. Эскиз сечения листа и его геометрические характеристики**



**Уголок неравнополочный L 125×80×12**

$B = 12,5 \text{ см};$   $b = 8,0 \text{ см};$   
 $A = 23,36 \text{ см}^2;$   
 $J_x = 364,79 \text{ см}^4;$   $J_y = 116,84 \text{ см}^4;$   
 $D_{xy} = 118,0 \text{ см}^4$   
 $x_0 = 2,00 \text{ см};$   $y_0 = 4,22 \text{ см}.$

**Рис. 158. Эскиз сечения неравнополочного уголка и его геометрические характеристики**

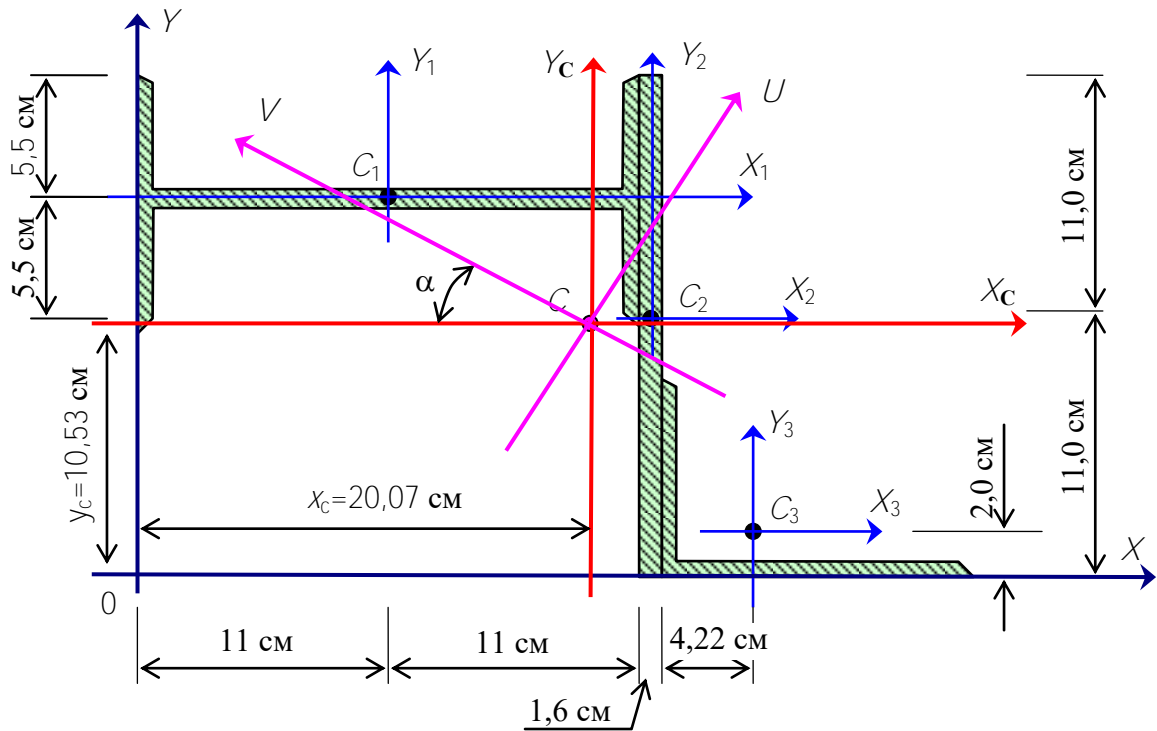


Рис. 159. Составное сечение

Выберем вспомогательные оси координат  $X$  и  $Y$ .

Используя проставленные на рисунке размеры (рис.159), определим координаты центров тяжести частей сечения во вспомогательной системе координатных осей  $X$  и  $Y$ .

$$x_1 = 11 \text{ см};$$

$$y_1 = 11,0 + 11,0 - 5,5 = 16,5 \text{ см};$$

$$x_2 = 11,0 + 11,0 + \frac{1,6}{2} = 22,8 \text{ см};$$

$$y_2 = 11,0 \text{ см}$$

$$x_3 = 11,0 + 11,0 + 1,6 + 4,22 = 27,82 \text{ см}; \quad y_3 = 2,0 \text{ см}.$$

В соответствии с проставленными номерами частей сечения, пронумеруем и обозначим их площади следующим образом.

$$A_1 = 30,6 \text{ см}^2; \quad A_2 = 35,2 \text{ см}^2; \quad A_3 = 23,36 \text{ см}^2.$$

Вычислим площадь всего сечения.

$$A_0 = A_1 + A_2 + A_3 = 30,6 + 35,2 + 23,36 = 89,16 \text{ см}^2.$$

Вычислим статические моменты сечения относительно вспомогательных осей координат  $X$  и  $Y$ .

$$S_x = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 = 30,6 \cdot 16,5 + 35,2 \cdot 11,0 + 23,36 \cdot 2,0 = 938,82 \text{ см}^3;$$

$$S_y = A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3 = 30,6 \cdot 11,0 + 35,2 \cdot 22,8 + 23,36 \cdot 27,82 = 1789,04 \text{ см}^3;$$

Найдем координаты центра тяжести всего сечения.

$$x_c = \frac{S_y}{A_0} = \frac{1789,04}{89,16} = 20,07 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{S_x}{A_0} = \frac{938,82}{89,16} = 10,53 \text{ см}.$$

Проведем центральные оси координат  $X_c$  и  $Y_c$ , параллельные вспомогательным осям (рис. 159).

Вычислим координаты центров тяжести частей сечения относительно центральных осей.

$$x_{C_1} = x_1 - x_c = 11,0 - 20,07 = -9,07 \text{ см}; \quad y_{C_1} = y_1 - y_c = 16,50 - 10,53 = 5,97 \text{ см};$$

$$x_{C_2} = x_2 - x_c = 22,8 - 20,07 = 2,73 \text{ см}; \quad y_{C_2} = y_2 - y_c = 11,0 - 10,53 = 0,47 \text{ см};$$

$$x_{C_3} = x_3 - x_c = 27,82 - 20,07 = 7,75 \text{ см}; \quad y_{C_3} = y_3 - y_c = 2,0 - 10,53 = -8,53 \text{ см}.$$

Проверим найденные координаты, используя доказанное утверждение, что статический момент относительно центральных осей сечения равен нулю.

$$S_{X_c} = A_1 \cdot y_{C_1} + A_2 \cdot y_{C_2} + A_3 \cdot y_{C_3} = 30,6 \cdot 5,97 + 35,2 \cdot 0,47 + 23,36 \cdot (-8,53) = 0,0;$$

$$S_{Y_c} = A_1 \cdot x_{C_1} + A_2 \cdot x_{C_2} + A_3 \cdot x_{C_3} = 30,6 \cdot (-9,07) + 35,2 \cdot 2,73 + 23,36 \cdot 7,75 = 0,0.$$

Условие равенства нулю подтверждается. Следовательно, координаты центра тяжести сечения найдены правильно.

Внесем коррективы в обозначения моментов инерции частей сечения в соответствии с их положением. В сечении (рис.159) ось  $X_1$  двутавра направлена вдоль его стенки, а на эскизе (рис. 156) эта ось обозначена как  $Y$ . Поэтому следует принимать  $J_{X_1}$  равным  $J_Y$ . Аналогично для оси  $Y_1$  — следует принимать  $J_{Y_1}$  равным  $J_X$ . Так же рассуждая, внесем следующие коррективы для первой, второй и третьей частей сечения. В итоге получим:

$$\text{для двутавра} \quad J_{X_1} = J_Y = 157 \text{ см}^4; \quad J_{Y_1} = J_X = 2550 \text{ см}^4;$$

$$\text{для листа} \quad J_{X_2} = J_Y = 1419,73 \text{ см}^4; \quad J_{Y_2} = J_X = 7,51 \text{ см}^4;$$

$$\text{для уголка} \quad J_{X_3} = J_Y = 116,84 \text{ см}^4 \quad J_{Y_3} = J_X = 364,79 \text{ см}^4$$

Вычислим моменты инерции сечения относительно центральных осей  $X_c$  и  $Y_c$ .

$$\begin{aligned} J_{X_c} &= (J_{X_1} + A_1 \cdot y_{C_1}^2) + (J_{X_2} + A_2 \cdot y_{C_2}^2) + (J_{X_3} + A_3 \cdot y_{C_3}^2) = \\ &= (157,0 + 30,6 \cdot 5,97^2) + (1419,73 + 35,2 \cdot 0,47^2) + [116,84 + 23,36 \cdot (-8,53)^2] = \\ &= 4491,66 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{Y_c} &= (J_{Y_1} + A_1 \cdot x_{C_1}^2) + (J_{Y_2} + A_2 \cdot x_{C_2}^2) + (J_{Y_3} + A_3 \cdot x_{C_3}^2) = \\ &= [2550,0 + 30,6 \cdot (-9,04)^2] + (7,51 + 35,2 \cdot 2,73^2) + [364,79 + 23,36 \cdot 7,75^2] = \\ &= 7105,06 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{x_c y_c} &= (D_{x_1 y_1} + A_1 \cdot x_{c_1} y_{c_1}) + (D_{x_2 y_2} + A_2 \cdot x_{c_2} y_{c_2}) + (D_{x_3 y_3} + A_3 \cdot x_{c_3} y_{c_3}) = \\
 &= [0 + 30,6 \cdot (-9,07) \cdot 5,97] + (0 + 35,2 \cdot 2,73 \cdot 0,47) + [-118,0 + 23,36 \cdot 7,75 \cdot (-8,53)] = \\
 &= -3038,03 \text{ см}^4.
 \end{aligned}$$

Определим главные центральные моменты инерции сечения  $J_U$  и  $J_V$ .

$$\begin{aligned}
 J_{UV} &= \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_c} - J_{y_c})^2 + 4 \cdot D_{x_c y_c}^2} = \\
 &= \frac{4491,66 + 7105,06}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(4491,66 - 7105,06)^2 + 4 \cdot 3038,03^2} = 5798,33 \pm 3307,12.
 \end{aligned}$$

$$J_U = 5798,33 + 3307,12 = 9105,45 \text{ см}^4;$$

$$J_V = 5798,33 - 3307,12 = 2491,21 \text{ см}^4.$$

Найдем угол наклона главных центральных осей инерции  $\alpha$  относительно центральных осей  $X_c$  и  $Y_c$ .

$$\alpha = \left| \frac{1}{2} \arctg \left[ \frac{2 \cdot D_{x_c y_c}}{J_{x_c} - J_{y_c}} \right] \right| = \left| \frac{1}{2} \arctg \left[ \frac{2 \cdot (-3038,03)}{4491,66 - 7105,01} \right] \right| = 33,43^\circ \approx 33^\circ.$$

Покажем на рисунке (рис.159) положение главных центральных осей инерции. Ось  $V$ , относительно которой главный момент инерции меньший, отложим от оси  $X_c$  на угол  $\alpha$ , так как  $J_{y_c} > J_{x_c}$ . При этом она должна проходить через отрицательные квадранты, потому что центробежный момент инерции сечения меньше нуля  $D_{x_{сус}} < 0$ . Ось  $U$  с большим главным центральным моментом инерции проведем через центр тяжести сечения перпендикулярно оси  $V$ .

## 2.5. Построение эпюр внутренних сил и расчет на прочность шарнирно опертой балок

Д а н о: Приняты следующие исходные данные. Деревянная шарнирно закрепленная балка прямоугольного сечения. Расчетные сопротивления на сжатие (растяжение) и сдвиг соответственно равны  $R=13$  МПа и  $R_s=2$  МПа. Модуль упругости материала балки  $E=10$  ГПа. Балка загружена сосредоточенными силой и моментом, а также равномерно распределенной нагрузкой (рис. 160).

Требуется построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, из условия прочности подобрать размеры сечения балки, приняв отношение высоты к ширине сечения равным трем.

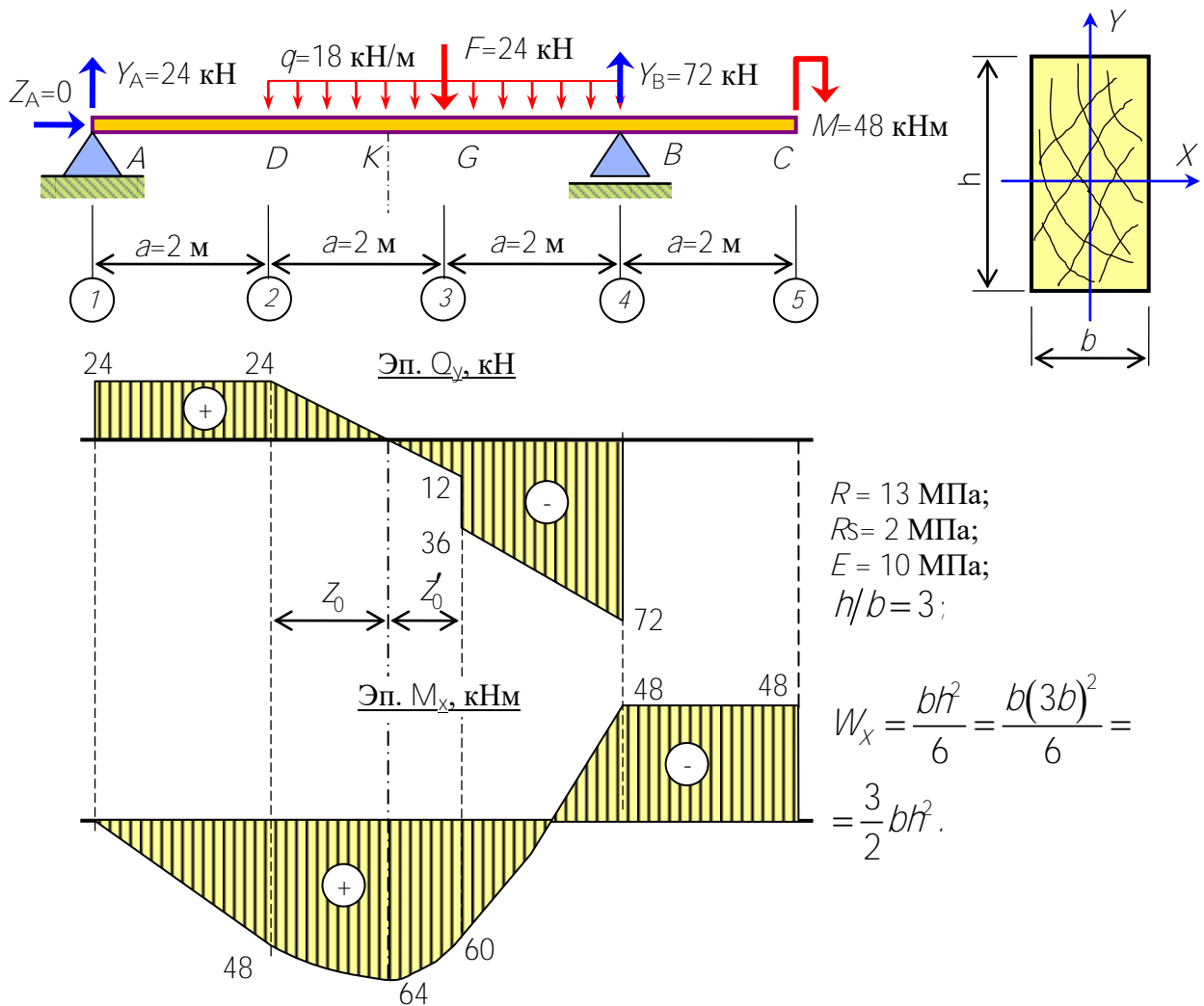


Рис. 160. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в шарнирно опертой балке

**Решение.** Вначале определим все внешние силы – реакции опор. Будем предполагать, что реакции опор  $Y_A$  и  $Y_B$  направлены вверх. Отметим, что горизонтальная реакция  $Z_A$  равна нулю, так как все нагрузки, приложенные к балке, вертикальные.

Составим уравнения статического равновесия и определим значения реакций опор  $Y_A$  и  $Y_B$ .

$$\sum M_A = q \cdot 2a \cdot 2a + F \cdot 2a - Y_B \cdot 3a + M = 18 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 24 \cdot 2 \cdot 2 - Y_B \cdot 3 \cdot 2 + 48 = 0, \quad Y_B = 72 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = Y_A \cdot 3a - q \cdot 2a \cdot a - F \cdot a + M = Y_A \cdot 3 \cdot 2 - 18 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 24 \cdot 2 + 48 = 0, \quad Y_A = 24 \text{ кН}.$$

Обе реакции получились положительными. Следовательно, предположение о том, что они направлены вверх правильное.

Определим поперечные силы и изгибающие моменты в отмеченных сечениях на балке. Для этого используем метод сечений.

На всех рисунка (рис.161) выбраны направления поперечных сил и изгибающих моментов такими, которые соответствуют их положительным значениям.

- сечение правее опоры  $A$  (рис.161,  $a$ )
 
$$\sum Y = Y_A - Q_Y = 24 - Q_Y = 0; \quad Q_Y = 24 \text{ кН};$$

$$\sum M_S = Y_A \cdot S - M_X = 24 \cdot 0 - M_X = 0; \quad M_X = 0;$$
- сечение левее точки  $D$  (рис. 192,  $б$ )
 
$$\sum Y = Y_A - Q_Y = 24 - Q_Y = 0; \quad Q_Y = 24 \text{ кН};$$

$$\sum M_S = Y_A \cdot a - M_X = 24 \cdot 2 - M_X = 0; \quad M_X = 48 \text{ кНм};$$
- сечение правее точки  $D$  (рис. 192,  $в$ )
 
$$\sum Y = Y_A - Q_Y = 24 - Q_Y = 0; \quad Q_Y = 24 \text{ кН};$$

$$\sum M_S = Y_A \cdot a - M_X = 24 \cdot 2 - M_X = 0; \quad M_X = 48 \text{ кНм};$$
- сечение левее точки  $G$  (рис. 192,  $г$ )
 
$$\sum Y = -F - q \cdot a + Y_B + Q_Y = -24 - 18 \cdot 2 + 72 + Q_Y = 0; \quad Q_Y = -12 \text{ кН};$$

$$\sum M_S = F \cdot s + q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - Y_B \cdot a + M + M_X = 24 \cdot 0 + 18 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} - 72 \cdot 2 + 48 + M_X = 0; \quad M_X = 60 \text{ кНм};$$
- сечение правее точки  $G$  (рис. 192,  $д$ )
 
$$\sum Y = Q_Y - q \cdot a + Y_B = Q_Y - 18 \cdot 2 + 72 = 0; \quad Q_Y = -36 \text{ кН};$$

$$\sum M_S = M_X + q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - Y_B \cdot a + M = M_X + 18 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} - 72 \cdot 2 + 48 = 0; \quad M_X = 60 \text{ кНм};$$
- сечение левее точки  $B$  (рис. 192,  $е$ )
 
$$\sum Y = Q_Y + Y_B = Q_Y + 72 = 0; \quad Q_Y = -72 \text{ кН};$$

$$\sum M_S = M_X - Y_B \cdot s + M = M_X + 72 \cdot 0 + 48 = 0; \quad M_X = -48 \text{ кНм};$$
- сечение правее точки  $B$  (рис. 192,  $ж$ )
 
$$\sum Y = Q_Y = 0; \quad Q_Y = 0;$$

$$\sum M_S = M_X + M = M_X + 48 = 0; \quad M_X = -48 \text{ кНм};$$
- сечение левее точки  $C$  (рис. 192,  $з$ )
 
$$\sum Y = Q_Y = 0; \quad Q_Y = 0;$$

$$\sum M_S = M_X + M = M_X + 48 = 0; \quad M_X = -48 \text{ кНм};$$

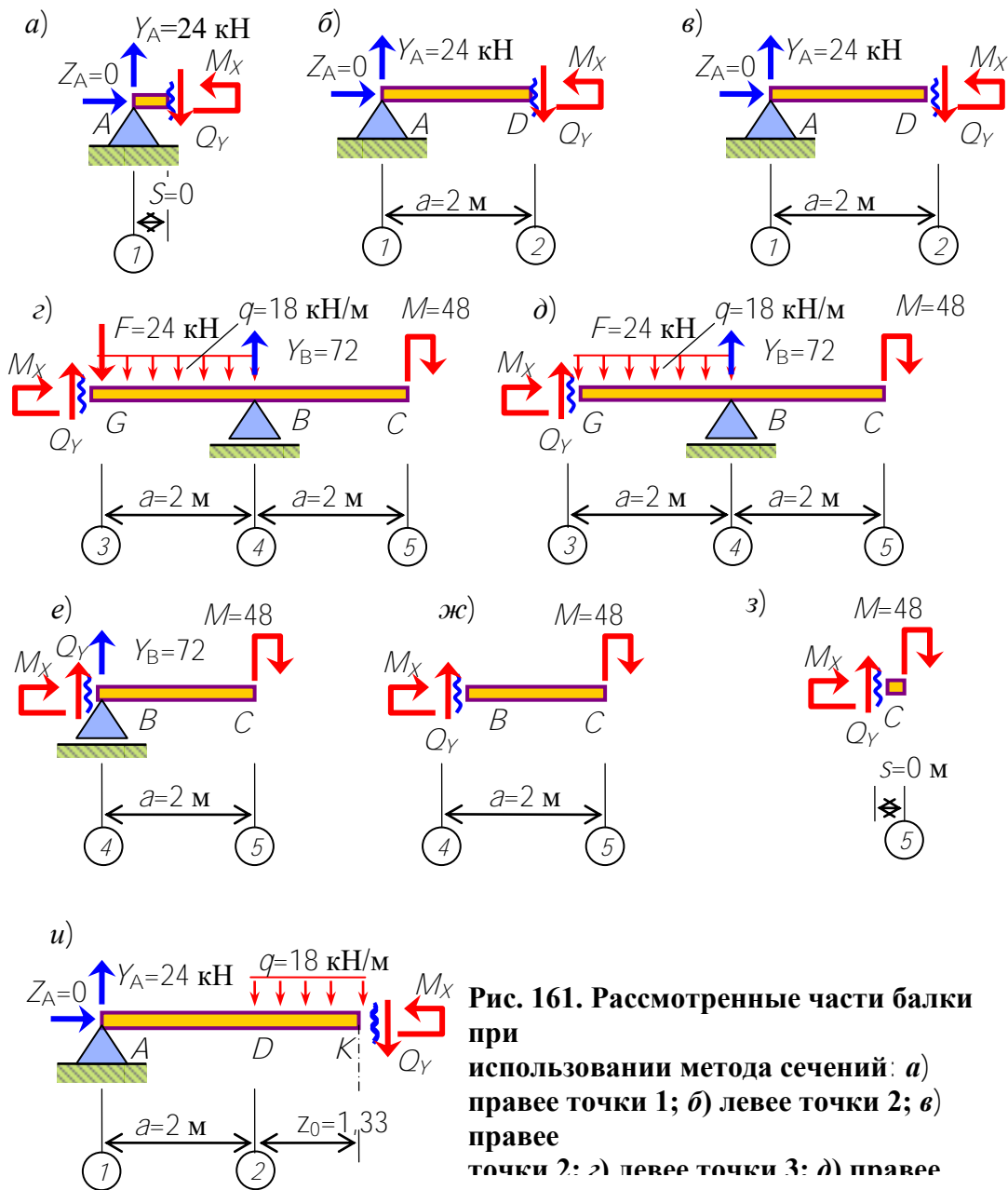


Рис. 161. Рассмотренные части балки при использовании метода сечений: а) правее точки 1; б) левее точки 2; в) правее точки 2; г) левее точки 3; д) правее

– сечение в точке  $K$ , расположенной в том месте балки, где поперечная сила равна нулю, а изгибающий момент принимает экстремальное значение (рис. 161,  $u$ ). Удаленность этой точки от левого края участка определяется отношением значения поперечной силы на этом конце участка к интенсивности распределенной нагрузки  $z_0 = \frac{24}{18} = 1,33\text{ м}$ . Найдем значение изгибающего момента в сечении, проведенном через точку  $K$ .

$$\sum M_S = Y_A \cdot (a + z_0) - q \cdot z_0 \cdot \frac{z_0}{2} - M_x = 24 \cdot (2 + 1,33) - 18 \cdot 1,33 \cdot \frac{1,33}{2} - M_x = 0;$$

$$M_x = 64 \text{ кНм}.$$

По найденным значениям поперечных сил и изгибающих моментов строим их эпюры (рис. 160).

Момент сопротивления прямоугольного сечения (рис. 160) с учетом отношения высоты к его ширине выражается формулой

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(3b)^2}{6} = \frac{3}{2}b^3.$$

Из условия прочности при изгибе

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} = \frac{M_x}{\frac{3}{2}b^3} = \frac{2M_x}{3b^3} \leq R$$

выразим требуемую ширину сечения, принимая расчетное значение изгибающего момента  $M_x = 64 \text{ кНм}$ ,

$$b = \sqrt[3]{\frac{2M_x}{3R}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 64 \cdot 10^3}{3 \cdot 13 \cdot 10^6}} = 0,149 \text{ м} = 15 \text{ см}.$$

В соответствии с заданным отношением высоте сечения к его ширине вычислим требуемую высоту сечения.

$$h = 3b = 3 \cdot 15 = 45 \text{ см}.$$

Вычислим момент инерции, момент сопротивления и статический момент отсеченной части сечения.

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{15 \cdot 45^3}{12} \approx 113900 \text{ см}^4;$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{15 \cdot 45^2}{6} = 5063 \text{ см}^3;$$

$$S_x^0 = \frac{bh^2}{8} = \frac{15 \cdot 45^2}{8} = 3797 \text{ см}^3.$$

Проверим выполнение условия прочности по нормальным и по касательным напряжениям, принимая в качестве расчетных значений поперечной силы  $Q_y = 72 \text{ кН}$  и значение изгибающего момента  $M_x = 64 \text{ кНм}$ .

По нормальным напряжениям

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} = \frac{64 \cdot 10^3}{5063 \cdot 10^{-6}} = 12,64 \text{ МПа} < R = 13 \text{ МПа}.$$

Недогрузка составляет

$$\frac{R - \sigma}{R} 100 = \frac{13 - 12,64}{13} 100 \approx 2,8 \%$$

По касательным напряжениям (по формуле Журавского)

$$\tau = \frac{Q_y S_x^0}{J_x b} = \frac{72 \cdot 10^3 \cdot 3797 \cdot 10^{-6}}{113900 \cdot 10^{-8} \cdot 15 \cdot 10^{-2}} = 1,60 \text{ МПа} < R_s = 2 \text{ МПа}.$$



Для изготовления использовать клееную деревянную балку.

## 2.6. Построение эпюр внутренних сил и расчет на прочность заземленной балки

Д а н о. Деревянная заземленная одним концом деревянная балка круглого сечения. Расчетные сопротивления на сжатие (растяжение) и сдвиг соответственно равны  $R=13$  МПа и  $R_s=2$  МПа. Балка загружена сосредоточенными силой и моментом, а также равномерно распределенной нагрузкой (рис. 162).

Требуется построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, из условия прочности подобрать диаметр сечения балки, соблюдая условие  $D \leq 32$  см. Если для одной балки это условие не соблюдается, то принять две или три или большее количество балок.

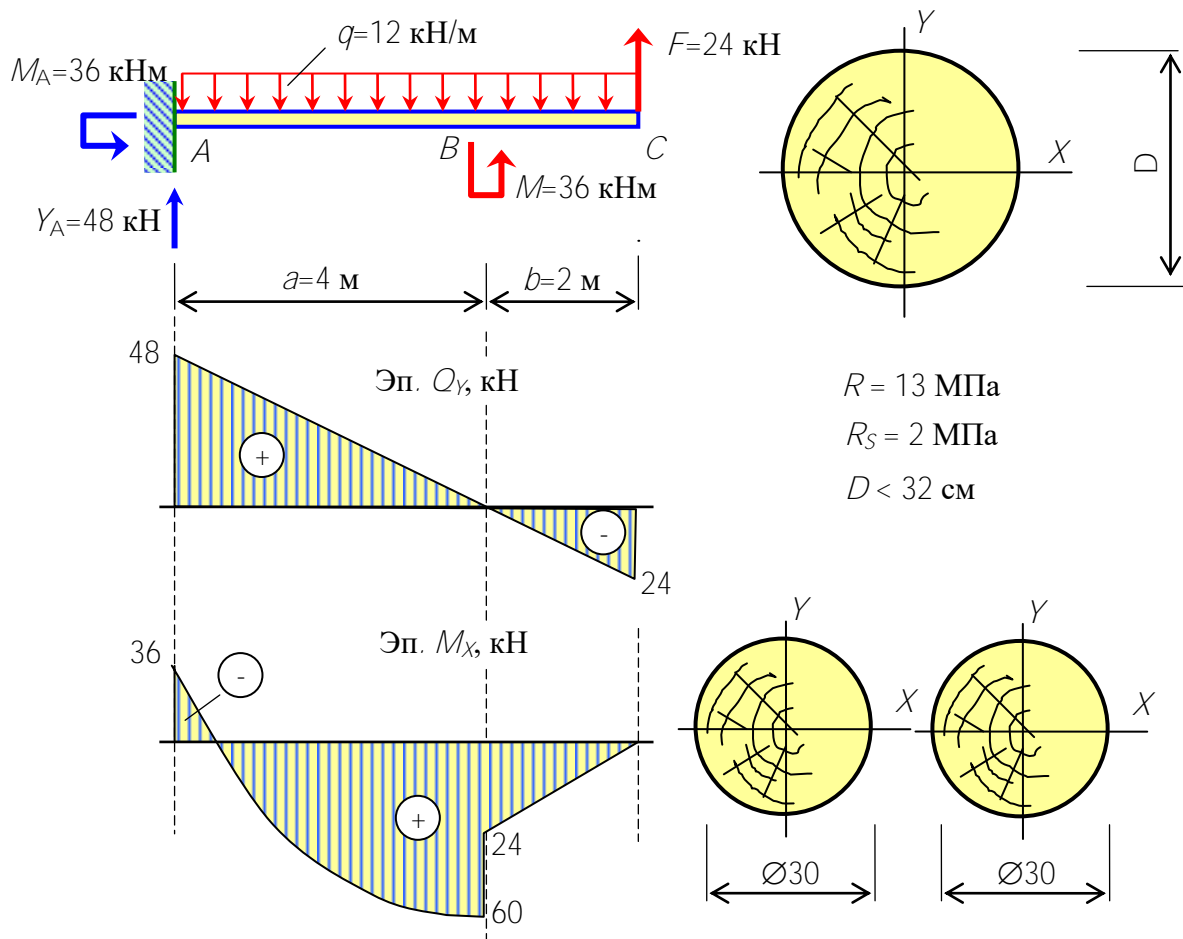


Рис. 162. Схема балки и эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Р е ш е н и е. Из условия равновесия определим реакции опор  $Y_A$  и  $M_A$ .

$$\sum Y = Y_A - q(a+b) + F = Y_A - 12 \cdot (4+2) + 24 = 0; \quad Y_A = 48 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = -M_A + q(a+b)\frac{a+b}{2} - M - F(a+b) = -M_A + 12 \cdot (4+2)\frac{4+2}{2} - 36 - 24(4+2) = 0; \quad M_A = 36 \text{ кНм.}$$

Используя метод сечений (см. предыдущий пример), вычислим поперечные силы и изгибающие моменты в помеченных буквами сечениях балки и построим их эпюры (рис. 162).

Расчетные поперечная сила и изгибающий момент, соответственно, равны  $Q_Y=48$  кН и  $M_X=60$  кНм.

Из условия прочности

$$\sigma = \frac{M_X}{nW_X} = \frac{M_X}{\frac{\pi D^3}{32}} = \frac{32M_X}{\pi D^3} \leq R$$

определим диаметр сечения балки, если использована она одна  $n=1$

$$D = \sqrt[3]{\frac{32M_X}{\pi R}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 60 \cdot 10^3}{1 \cdot 3,14 \cdot 13 \cdot 10^6}} = 0,36 \text{ м} = 36 \text{ см} > 32 \text{ см.}$$

Ограничение по размеру сечения не выполняется. Поэтому примем две балки  $n=2$ .

$$D = \sqrt[3]{\frac{32M_X}{n\pi R}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 60 \cdot 10^3}{2 \cdot 3,14 \cdot 13 \cdot 10^6}} = 0,29 \text{ м} \approx 30 \text{ см} < 32 \text{ см.}$$

Условие выполняется. Поэтому принимаем две балки диаметром  $D=30$  см. Вычислим момент сопротивления, статический момент отсеченной части и момент инерции сечения одной балки.

$$W_X = \frac{\pi D^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 30^3}{32} = 2649 \text{ см}^3; \quad J_X = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 30^4}{64} = 39741 \text{ см}^4;$$

$$S_X^0 = \frac{\pi D^2}{8} \frac{2}{5} \frac{D}{2} = \frac{\pi D^3}{40} = \frac{3,14 \cdot 30^3}{40} = 2120 \text{ см}^3.$$

Проверим выполнение условия прочности по нормальным напряжениям.

$$\sigma = \frac{M_X}{nW_X} = \frac{60 \cdot 10^3}{2 \cdot 2649 \cdot 10^{-6}} = 11,32 \text{ МПа} < R = 13 \text{ МПа.}$$

Недогрузка составляет

$$\frac{R - \sigma}{R} 100 = \frac{13 - 11,32}{13} 100 = 13 \%.$$

Проверим выполнение условия прочности по касательным напряжениям.

$$\tau = \frac{Q_y S_x^0}{n J_x D} = \frac{48 \cdot 10^3}{2} \frac{2120 \cdot 10^{-6}}{39741 \cdot 10^{-8} \cdot 30 \cdot 10^{-2}} = 0,43 \text{ МПа} < R_s = 2,0 \text{ МПа}.$$

## 2.7. Расчет двутавровой балки на прочность и жесткость

Подобрать прокатный двутавр для балки (рис. 163), вычислить прогибы и проверить по условию жесткости. Балка и исходные данные приведены на рисунке 163.

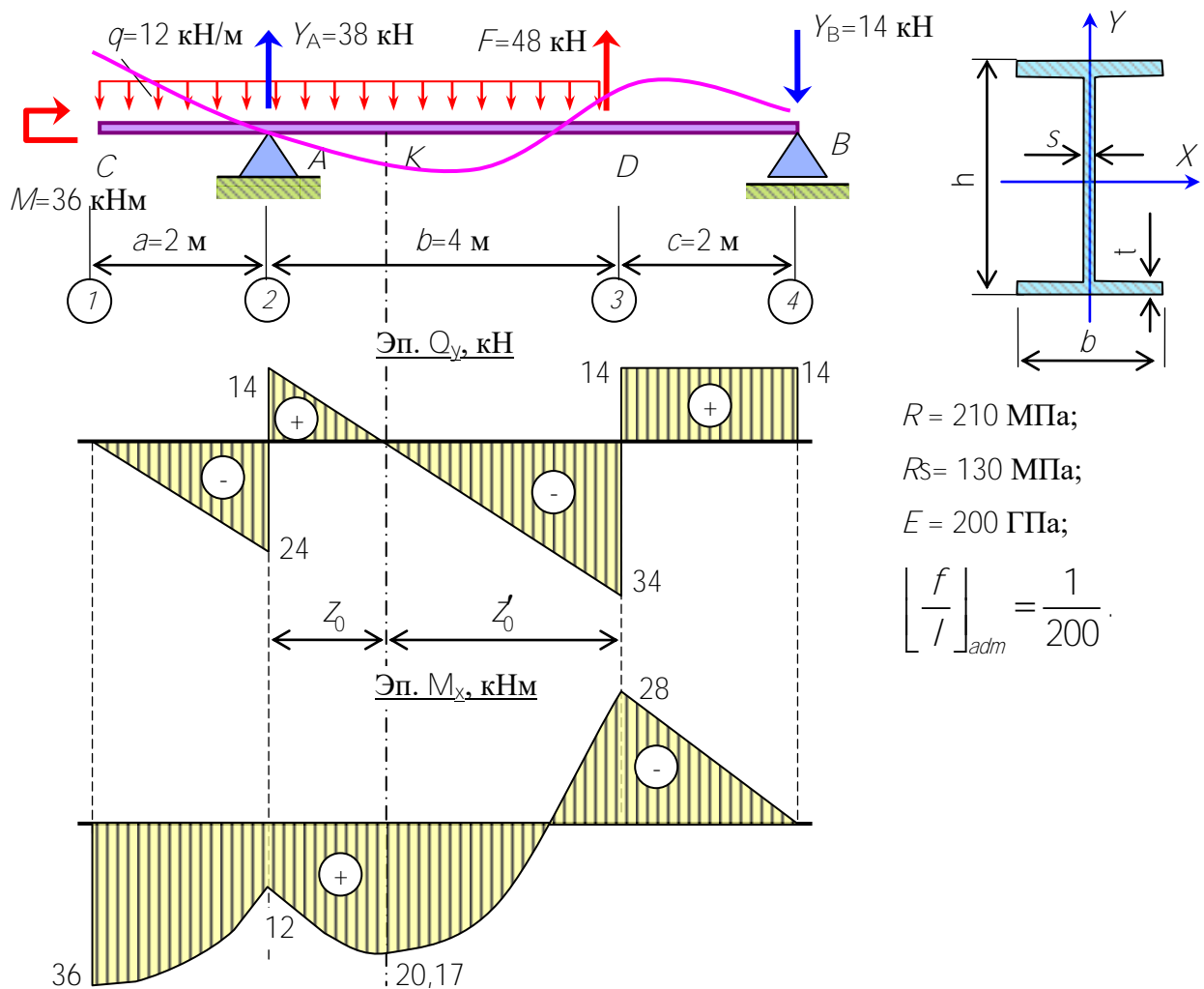
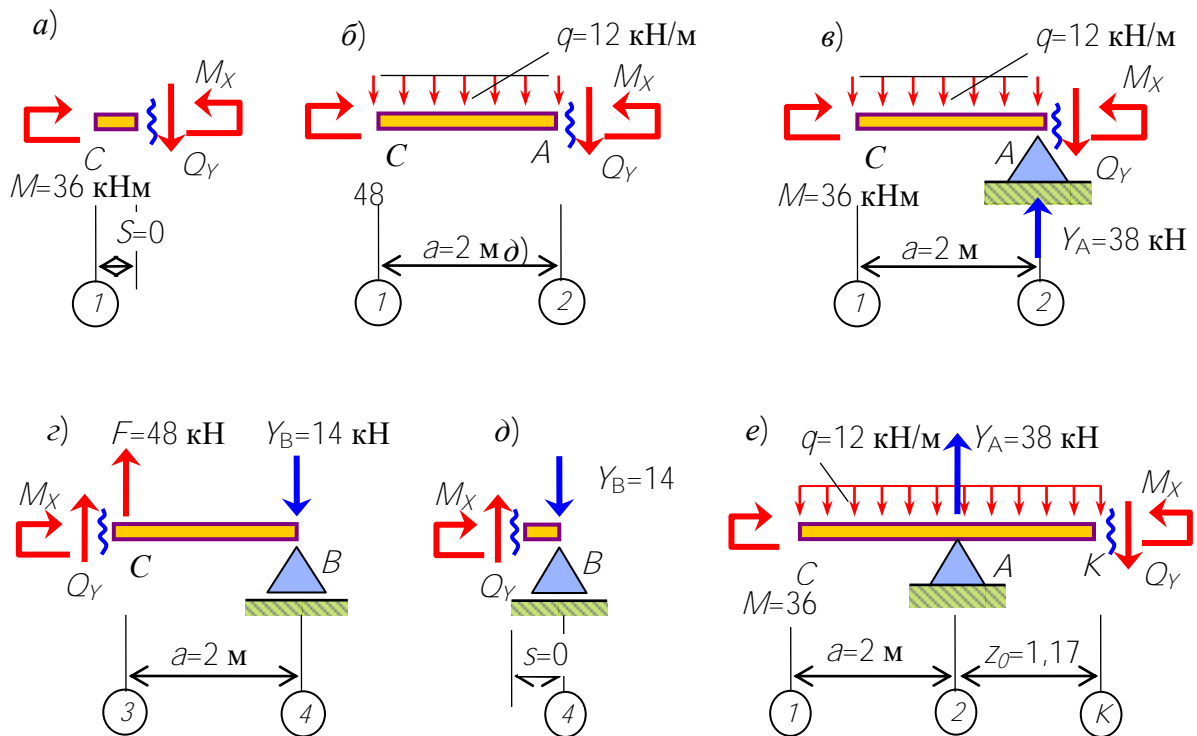


Рис. 163. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в шарнирно опертой двутавровой балке

Составим уравнения равновесия и вычислим реакции опор. Будем полагать, что реакция на левой опоре направлена вверх, а на правой – вниз.

$$\begin{aligned} \sum M_A &= M - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + q \cdot b \cdot \frac{b}{2} - F \cdot b + Y_B \cdot (b+c) = \\ &= 36 - 12 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} + 12 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} - 48 \cdot 4 + Y_B \cdot (4+2) = 0, & Y_B &= 14 \text{ кН}; \\ \sum M_B &= M - q \cdot (a+b) \frac{a+b}{2} + Y_A(b+c) + F \cdot c = \\ &= 36 - 12 \cdot (2+4) \frac{2+4}{2} + Y_A(4+2) + 48 \cdot 2 = 0, & Y_A &= 38 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Используя метод сечений, определим поперечные силы и изгибающие моменты в отмеченных сечениях балки (рис. 164).



**Рис. 164.** Рассмотренные части балки при использовании метода сечений: а) правее точки 1; б) левее точки 2; в) правее точки 2; г) левее точки 3; д) левее точки 4; е) в точке К

- сечение правее точки 1 (рис. 164, а)

$$\begin{aligned} \sum Y &= Q_y = 0, & Q_y &= 0; \\ \sum M_s &= M - M_x = 36 - M_x = 0, & M_x &= 36 \text{ кНм}; \end{aligned}$$

- сечение слева от точки 2 (рис. 195, б)

$$\sum Y = -q \cdot a - Q_y = -12 \cdot 2 - Q_y = 0, \quad Q_y = -24 \text{ кН};$$

$$\sum M_s = -q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + M - M_x = -12 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} + 36 - M_x = 0, \quad M_x = 12 \text{ кНм};$$

- сечение справа от точки 2 (рис. 164, в)

$$\sum Y = q \cdot a + Y_A - Q_Y = 12 \cdot 2 + 38 - Q_Y = 0, \quad Q_Y = 14 \text{ кН};$$

$$\sum M_S = M - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - M_X = 36 - 12 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} - M_X = 0, \quad M_X = 12 \text{ кНм};$$

– сечение слева от точки 3 (рис. 164, з)

$$\sum Y = Q_Y + F - Y_B = Q_Y + 48 - 14 = 0, \quad Q_Y = 34 \text{ кН};$$

$$\sum M_S = M_X + Y_B \cdot a = M_X + 14 \cdot 2 = 0, \quad M_X = -28 \text{ кНм};$$

– сечение справа от точки 3 - значение поперечной силы такое же, как и в сечении, расположенной в точке 4 слева (рис. 164, д), а изгибающего момента такое же, как и в сечении 3 слева (рис. 164, з)

$$Q_Y = 14 \text{ кН}; \quad M_X = -28 \text{ кНм};$$

– сечение слева от точки 4 (рис. 164, д)

$$\sum Y = Q_Y - Y_B = Q_Y - 14 = 0, \quad Q_Y = 14 \text{ кН};$$

$$\sum M_S = M_X - Y_B \cdot s = M_X - 14 \cdot 0 = 0, \quad M_X = 0;$$

– сечение в точке К (рис. 164, е) - расстояние от точки А до точки К равно отношению поперечной силы на рассматриваемом участке к интенсивности равномерно распределенной нагрузки  $z_0 = \frac{14}{12} = 1,17 \text{ кНм}$ ,

$$\sum Y = q \cdot (a + z_0) + Y_A - Q_Y = 12 \cdot (2 + 1,17) + 38 - Q_Y = 0, \quad Q_Y = 0;$$

$$\sum M_S = M - q \cdot (a + z_0) \cdot \frac{a + z_0}{2} + Y_A \cdot z_0 - M_X =$$

$$= 36 - 12 \cdot (2 + 1,17) \cdot \frac{2 + 1,17}{2} + 38 \cdot 1,17 - M_X = 0, \quad M_X = 20,17 \text{ кНм}.$$

Найденные значения поперечных сил и изгибающих моментов откладываем на графике и соединяем эти точки по правилам построения эпюр (рис. 163).

Расчетными значениями поперечных сил и изгибающих моментов, согласно построенным эпюрам, назначаем  $Q_Y = 34 \text{ кН}$  и  $M_X = 36 \text{ кНм}$ .

Из условия прочности

$$\sigma = \frac{M_X}{W_X} \leq R$$

найдем требуемый момент сопротивления

$$W_X = \frac{M_X}{R} = \frac{36 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 171,4 \text{ см}^3.$$

Из таблицы прокатных профилей выберем двутавр, у которого момент сопротивления равен или больше требуемого и выпишем необходимые для дальнейшего расчета геометрические характеристики его поперечного сечения.

**Двутавр №20:** осевой момент сопротивления  $W_x=184 \text{ см}^3$ ; осевой момент инерции  $J_x=1840 \text{ см}^4$ ; статический момент отсеченной части  $S_x^0=104 \text{ см}^3$ ; толщина стенки  $s=5,2 \text{ мм}$ .

Проверим выполнение условия прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} = \frac{36 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^{-6}} = 195,65 \text{ МПа} < R=210 \text{ МПа}.$$

Недогрузка составляет

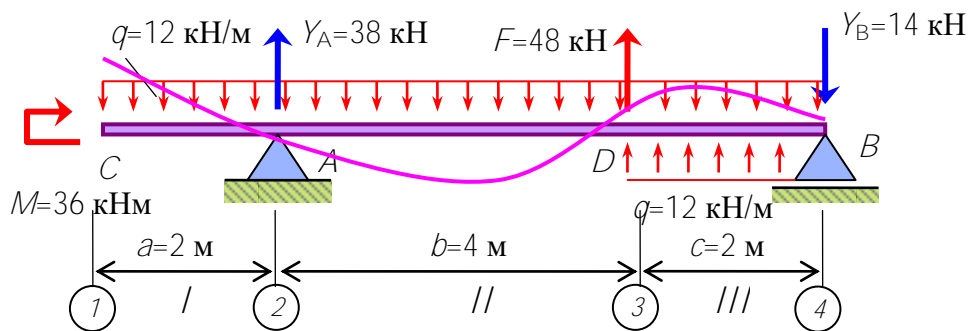
$$\frac{R-\sigma}{R} \cdot 100 = \frac{210-195,6}{210} \cdot 100 = 6,9\%.$$

Проверим выполнение условия прочности по касательным напряжениям

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x^0}{J_x \cdot s} = \frac{34 \cdot 10^3 \cdot 104 \cdot 10^{-6}}{1840 \cdot 10^{-8} \cdot 5,2 \cdot 10^{-3}} = 36,96 \text{ МПа} < R_s = 130 \text{ МПа}.$$

Подготовим балку для вычисления прогибов согласно требованиям метода начальных параметров:

- пронумеруем участки балки слева направо;
- дополним распределенную нагрузку до конца балки;
- приложим компенсирующую нагрузку.



**Рис. 165. Балка, подготовленная для определения прогибов методом начальных параметров**

Составим универсальное уравнение упругой оси балки

$$EJV = EJV_0 + EJ\theta_0 z + \frac{M \cdot (z-0)^2}{2} - \frac{q \cdot (z-0)^4}{24} \Big|_I + \frac{Y_A \cdot (z-a)^3}{6} \Big|_{II} + \frac{F \cdot (z-a-b)^3}{6} + \frac{q \cdot (z-a-b)^4}{24} \Big|_{III}$$

Начальные параметры определим по условию закрепления балки

1) при  $z = a = 2 \text{ м}$   $V = 0$ , участок I

$$EJV = EJV_0 + EJ\theta_0 \cdot 2 + \frac{36 \cdot (2-0)^2}{2} - \frac{12 \cdot (2-0)^4}{24} \Big|_I = 0$$

2) при  $z = a+b+c = 2+4+2=8$  м  $V = 0$ , участок III

$$EJV_C = EJV_0 + EJ\theta_0 8 + \frac{36 \cdot (8-0)^2}{2} - \frac{12 \cdot (8-0)^4}{24} \Big|_I + \frac{38 \cdot (8-2)^3}{6} \Big|_{II} + \frac{48 \cdot (8-2-4)^3}{6} + \frac{12 \cdot (8-2-4)^4}{24} \Big|_{III} = 0$$

Решим полученную систему уравнений и найдем начальные параметры

$$\begin{cases} EJV_0 + 2EJ\theta_0 + 64 = 0; \\ EJV_0 + 8EJ\theta_0 + 544 = 0. \end{cases}$$

$$EJ\theta_0 = -80 \text{ кНм}^2; \quad EJV_0 = 96 \text{ кНм}^3.$$

Вычислим прогиб балки в точке  $C$  ( $z = 0$ )

$$EJV_C = 96 - 80 \cdot 0 + \frac{36 \cdot (0-0)^2}{2} - \frac{12 \cdot (0-0)^4}{24} \Big|_I = 96 \text{ кНм}^3;$$

$$V_C = \frac{(EJV_C)}{EJ} = \frac{96 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 26,09 \text{ мм (вверх)}.$$

Вычислим прогиб балки в точке  $D$  ( $z = 6$  м)

$$EJV_D = 96 - 80 \cdot 6 + \frac{36 \cdot (6-0)^2}{2} - \frac{12 \cdot (6-0)^4}{24} \Big|_I + \frac{38 \cdot (6-2)^3}{6} \Big|_{II} = 21,33 \text{ кНм}^3$$

$$V_D = \frac{(EJV_D)}{EJ} = \frac{21,33 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 5,80 \text{ мм (вверх)}.$$

Проверим по условию жесткости

$$\frac{V_C}{b+c} = \frac{26,09 \cdot 10^{-3}}{4,0+2,0} = 0,00435 = \frac{435}{10^5} = \frac{1}{230} < \frac{1}{200}.$$

Условие жесткости выполняется.

Используя полученные значения прогибов в точках  $C$  и  $D$ , учитывая, что на опорах прогибы равны нулю и в соответствии с эпюрой изгибающих моментов построим упругую ось балки.

## 2.8. Построение эпюр внутренних сил в плоских рамах

Дана плоская рама, нагруженная сосредоточенным моментом, сосредоточенной силой и равномерно распределенной нагрузкой (рис. 166).

Требуется построить эпюры продольных и поперечных сил, а также эпюру изгибающих моментов.

Вначале определим все внешние силы, то есть реакции опор. Для этого составим уравнения статического равновесия и решим их.

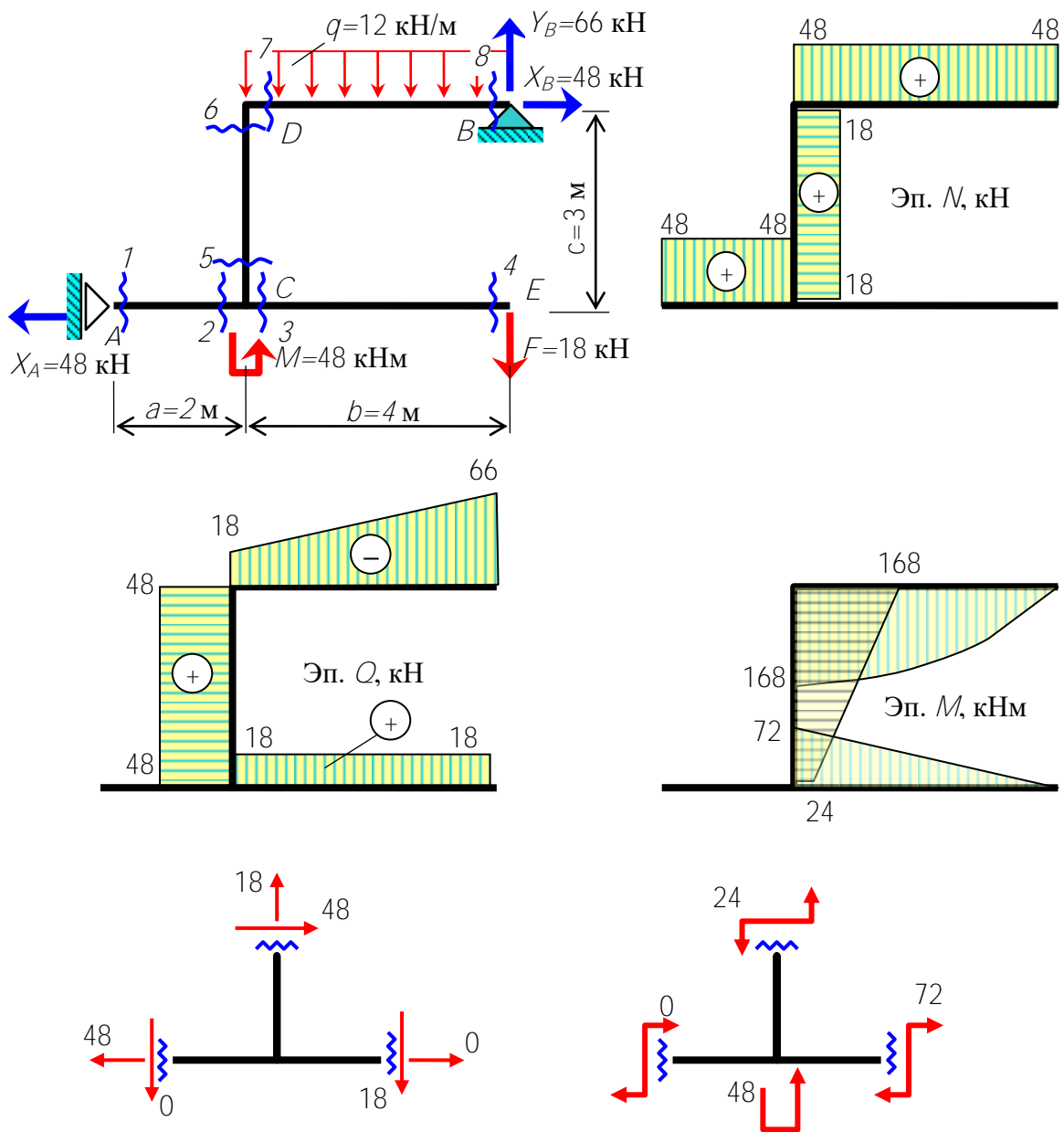


Рис. 166. Плоская рама и эпюра внутренних сил в ней

$$\sum M_B = +X_A \cdot c - M - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} = -X_A \cdot 3 - 48 - 12 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = 0, \quad X_A = 48 \text{ кН};$$

$$\sum X = -X_A + X_B = 0, \quad X_B = 48 \text{ кН}$$



$$\sum M_A = -M + q \cdot b \cdot \left( a + \frac{b}{2} \right) + F \cdot (a + b) + X_B \cdot c - Y_B \cdot (a + b) =$$

$$= -48 + 12 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} + 18 \cdot (2 + 4) + 48 \cdot 3 - Y_B \cdot (2 + 4) = 0, \quad Y_B = 66 \text{ кН.}$$

Для удобства пронумеруем сечения, в которых следует определить внутренние силы (рис. 166). Внутренние силы в раме определим, используя метод сечений (рис. 167):

– сечение 1 (рис. 167, а)

$$\sum X = -X_A + N_1 = -48 + N_1 = 0, \quad N_1 = 48 \text{ кН};$$

$$\sum Y = -Q = 0, \quad Q = 0;$$

$$\sum M_S = -M_1 = 0, \quad M_1 = 0;$$

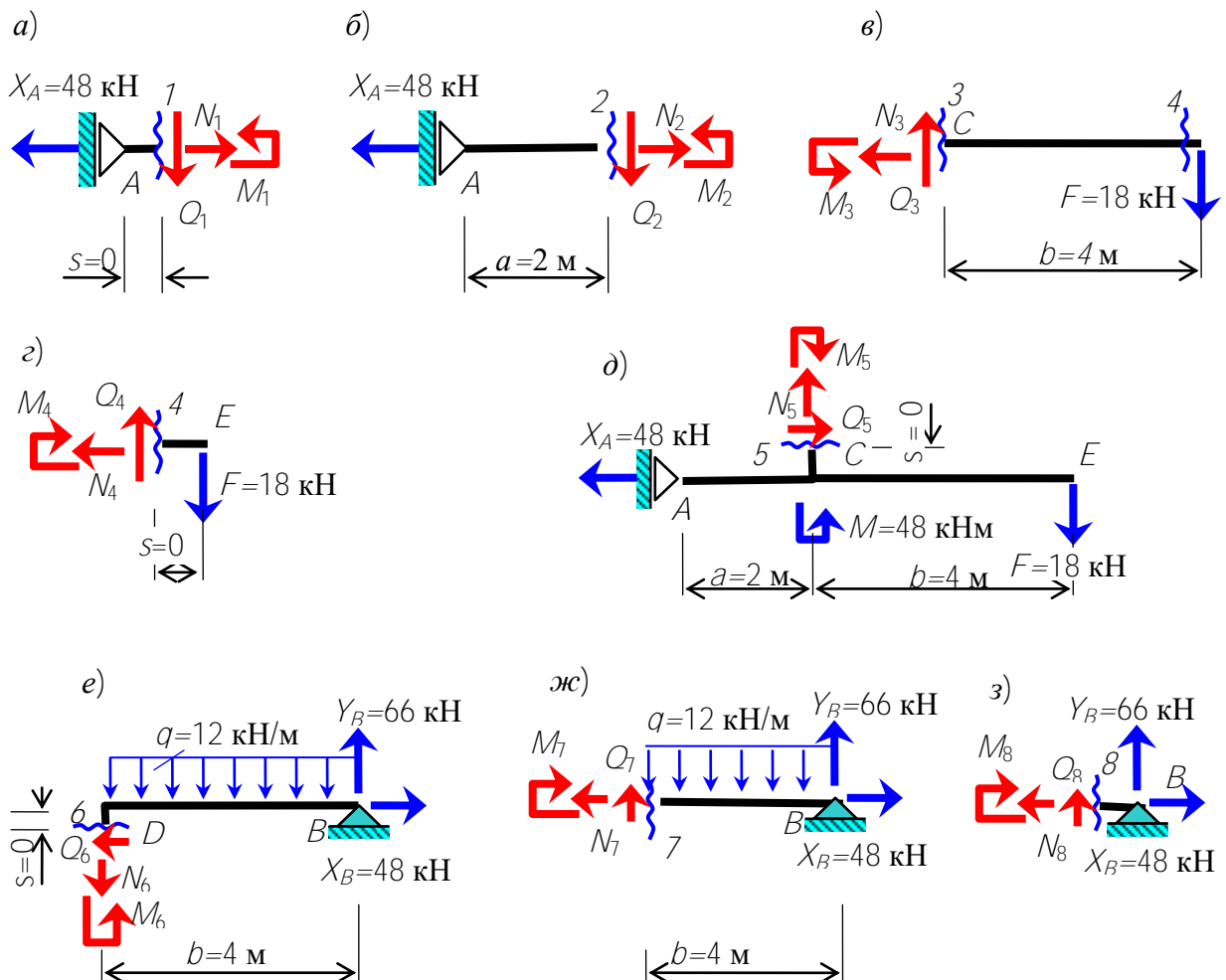


Рис. 167. Рассмотренные части рамы при использовании метода сечений

– сечение 2 (рис. 167, б)

$$\sum X = -X_A + N_2 = -48 + N_2 = 0, \quad N_2 = 48 \text{ кН};$$

$$\sum Y = -Q_2 = 0, \quad Q_2 = 0;$$

$$\sum M_S = -M_2 = 0, \quad M_2 = 0;$$

– сечение 3 (рис. 198, в)

$$\sum X = -N_3 = 0, \quad N_3 = 0;$$

$$\sum Y = Q_3 - F = Q_3 - 18 = 0, \quad Q_3 = 18 \text{ кН};$$

$$\sum M_S = -M_3 + F \cdot b = M_3 + 18 \cdot 4 = 0, \quad M_3 = 72 \text{ кНм};$$

(растянуты верхние волокна)

– сечения 4 (рис. 198, г)

$$\sum X = -N_4 = 0, \quad N_4 = 0;$$

$$\sum Y = Q_4 - F = Q_4 - 18 = 0, \quad Q_4 = 18 \text{ кН};$$

$$\sum M_S = M_4 + F \cdot s = M_4 + 18 \cdot 0 = 0, \quad M_4 = 0;$$

– сечение 5 (рис. 198, д)

$$\sum X = Q_5 - X_A = Q_5 - 48 = 0, \quad Q_5 = 48 \text{ кН};$$

$$\sum Y = N_5 - F = N_5 - 18 = 0, \quad N_5 = 18 \text{ кН};$$

$$\sum M_S = X_A \cdot s - M + M_5 + F \cdot b = 48 \cdot 0 - 48 + M_5 + 18 \cdot 4 = 0,$$

$$M_5 = -24 \text{ кНм}; \quad (\text{растянуты правые волокна})$$

– сечение 6 (рис. 198, е)

$$\sum X = -Q_6 + X_B = -Q_6 + 48 = 0, \quad Q_6 = 48 \text{ кН};$$

$$\sum Y = -N_6 - q \cdot b + Y_B = -N_6 - 12 \cdot 4 + 66 = 0, \quad N_6 = 18 \text{ кН};$$

$$\sum M_S = -M_6 + q \cdot b \cdot \frac{b}{2} - Y_B \cdot b = -M_6 + 12 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} - 66 \cdot 4 = 0,$$

$$M_6 = -168 \text{ кН} \quad (\text{растянуты правые волокна});$$

– сечение 7 (рис. 198, ж)

$$\sum X = -N_7 + X_B = -N_7 + 48 = 0, \quad N_7 = 48 \text{ кН};$$

$$\sum Y = Q_7 - q \cdot b + Y_B = Q_7 - 12 \cdot 4 + 66 = 0, \quad Q_7 = -18 \text{ кН};$$

$$\sum M_S = M_7 + q \cdot b \cdot \frac{b}{2} - Y_B \cdot b = M_7 + 12 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} - 66 \cdot 4 = 0, \quad M_7 = 168 \text{ кН};$$

(растянуты нижние волокна);

– сечение 8 (рис. 198, з)

$$\sum X = -N_8 + X_B = -N_8 + 48 = 0, \quad N_8 = 48 \text{ кН};$$

$$\sum Y = Q_8 + Y_B = Q_8 + 66 = 0, \quad Q_8 = -66 \text{ кН};$$

$$\sum M_S = M_8 = 0, \quad M_8 = 0.$$

Найденные значения внутренних сил в отмеченных номерами сечениях откладываем на графике и строим эпюры продольных сил,

поперечных сил и изгибающих моментов согласно правилам. На рисунке 166 показан узел С и все силы, приложенные к нему. Очевидно, что равновесие узла выполняется.

## 2.9 Исследование напряженного состояния в точке

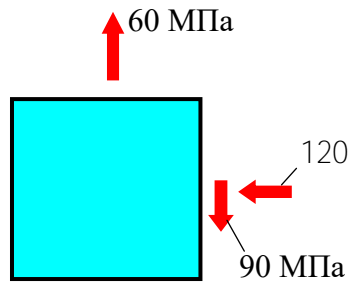


Рис. 168. Условие задачи

1) Обозначим напряжения, укажем их знаки и дополним недостающие напряжения.

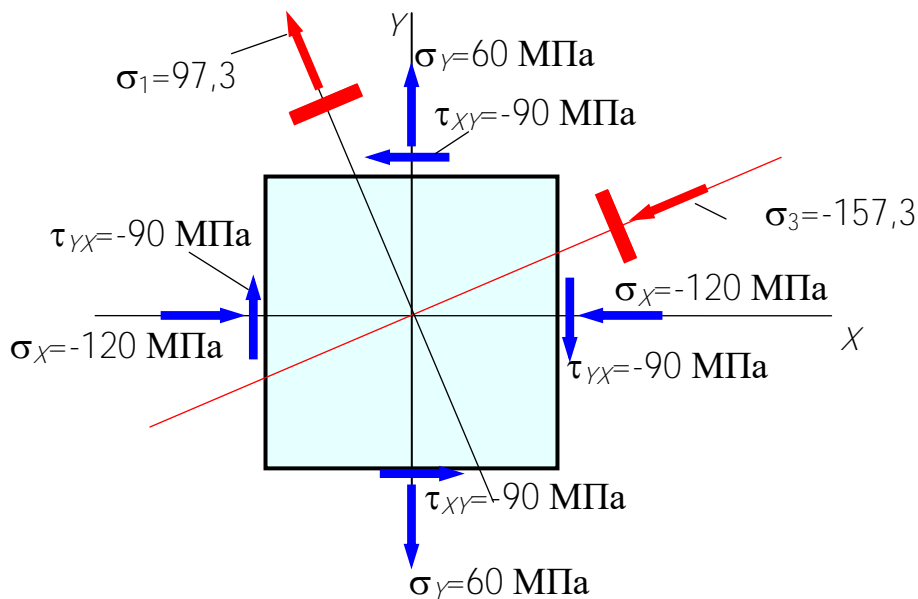
2) Вычислим главные напряжения.

$$\begin{aligned}\sigma_{1,3} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{-120 + 60}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-120 - 60)^2 + 4 \cdot 90^2} = -30 \pm 127,3. \\ \sigma_1 &= 97,3 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = -157,3 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

3) Вычислим угол поворота главных площадок.

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 2\alpha &= \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right| = \left| \frac{2 \cdot 90}{-120 - 60} \right| = 1. \\ 2\alpha &= \operatorname{arctg}(1) = 45^\circ. \quad \alpha = 22^\circ 30'.\end{aligned}$$

4) Покажем положение главных площадок и главные напряжения.



**Рис. 169.** Действие главных напряжений и положение главных площадок

Направление напряжения  $\sigma_1$  откладываем от направления большего напряжения  $\sigma_y$  в сторону, куда показывает напряжение  $\tau$  на площадке с нормалью  $Y$ .

## 2.10 Пример расчета заклепочного соединения

Д а н о:

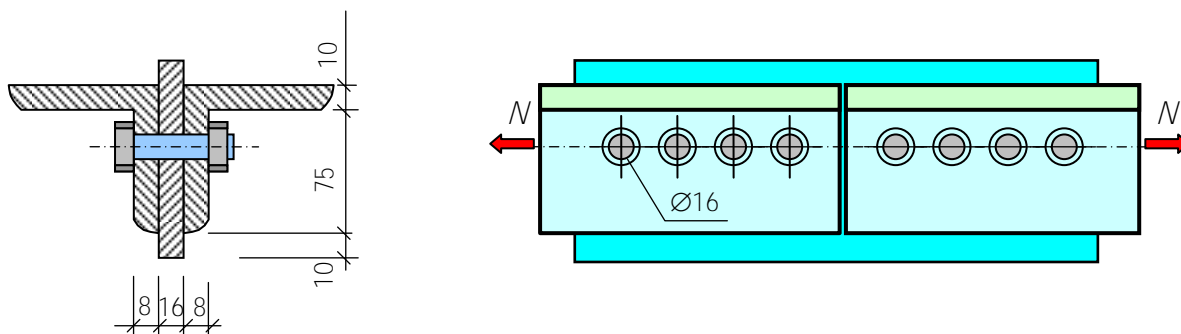
$n=4$ ;  $d=16$  мм;  $R_s=160$  МПа;  $R=210$  МПа;  $R_{pb}=420$  МПа;

$N=250$  кН;

Уголок №75×8;  $A_{\text{уголок}}=11,50$  см<sup>2</sup>;  $b_{\text{уг}}=75$  мм.

Размеры листа 95×20 мм;  $b=95$  мм;  $t=20$  мм.

Схема узла приведена на рисунке 170.



**Рис. 170.** Заклепочное соединение уголков и листа

Проверим на срез

Количество площадок среза в одной заклепке  $n_s = 2$

$$\tau = \frac{N}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot n_s \cdot n} = \frac{250 \cdot 10^3}{\frac{3,14 \cdot (16 \cdot 10^{-3})^2}{4} \cdot 2 \cdot 4} = 155 \text{ МПа} < R_s = 160 \text{ МПа}.$$

Проверим на смятие

$$\sigma_p = \frac{N}{d \cdot \sum t \cdot n} = \frac{250 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^{-3} \cdot (2 \cdot 8 \cdot 10^{-3}) \cdot 4} = 244 \text{ МПа} < R_{pb} = 420 \text{ МПа}.$$

Проверим лист на растяжение

$$\sigma = \frac{N}{A_{nt}} = \frac{N}{(b-d) \cdot t} = \frac{250 \cdot 10^3}{(95 \cdot 10^{-3} - 16 \cdot 10^{-3}) \cdot 20 \cdot 10^{-3}} = 158 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

Проверим уголок на растяжение

$$\sigma = \frac{N}{A_{nt}} = \frac{N}{A_{\text{уголка}} - t_{\text{уголка}} \cdot d} = \frac{250 \cdot 10^3}{2 \cdot (11,50 \cdot 10^{-4} - 8 \cdot 10^{-3} \cdot 16 \cdot 10^{-3})} = 122,3 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

## 2.11 Пример расчета сварного соединения

Д а н о. Пусть неравнополочный уголок №63×40×5,  $z_0=20,8$  мм (рис. 171) соединен с листом по своей широкой полке электросваркой (угловым фланговым швом);  $R_{wf}=90$  МПа (электрод с тонкой обмазкой). К соединению приложена сила  $N=35$  кН. Принять коэффициент  $\beta_t = 0,7$ .

Рассчитать длину швов.

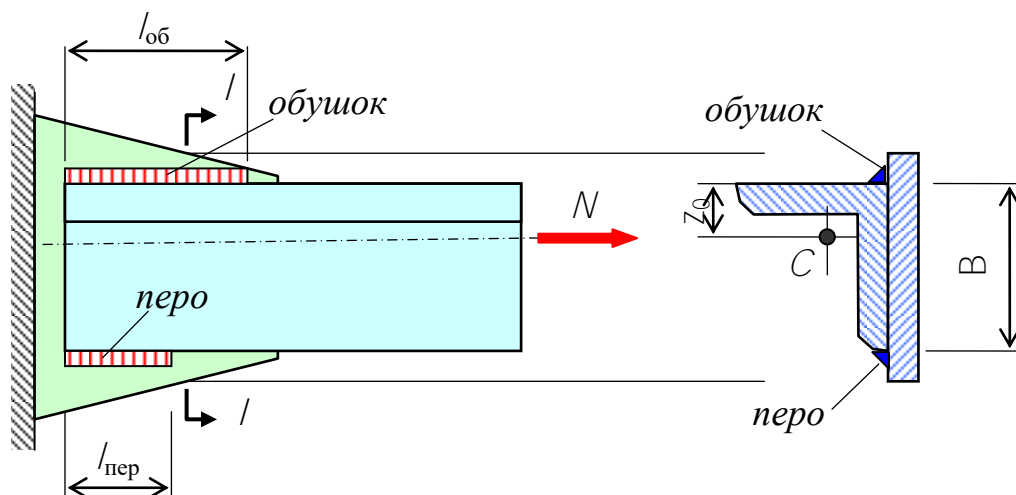


Рис. 171. Соединение угловыми фланговыми швами уголка и листа

Р е ш е н и е. Из условия прочности для углового флангового сварного шва на срез

$$\tau = \frac{N}{0,7 \cdot h \cdot l_{\omega}} \leq R_{\omega f}$$

определим расчетную длину шва

$$l_{\omega} = \frac{N}{0,7 \cdot h \cdot R_{\omega f}} = \frac{35 \cdot 10^3}{0,7 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 90 \cdot 10^6} = 0,11 \text{ м} = 110 \text{ мм}.$$

Распределим шов на обушок и на перо

$$l_{\text{об}} = \frac{l_{\omega} (B - z_0)}{B} = \frac{110 \cdot (63 - 20,8)}{63} = 73,7 \text{ мм} = 80 \text{ мм}.$$

$$l_{\text{пер}} = \frac{l_{\omega} z_0}{B} = \frac{110 \cdot 20,8}{63} = 37,0 \text{ мм} = 40 \text{ мм}.$$

Принимаем проектные длины швов

$$l_{\text{об}} = 80 + 10 = 90 \text{ мм}; \quad l_{\text{пер}} = 40 + 10 = 50 \text{ мм}.$$

## 2.12 Пример расчета стержня круглого сечения на кручение

**И с х о д н ы е д а н н ы е.** Стержень кольцевого сечения подвергнут кручению двумя моментами  $T_1 = 18$  кНм,  $T_2 = 12$  кНм. Наружный и внутренний диаметры кольцевого сечения соответственно равны  $D_n = 120$  мм, и  $D_b = 100$  мм. Модуль сдвига и расчетное сопротивление материала стержня, соответственно, равны  $G = 78$  ГПа и  $R_s = 130$  МПа.

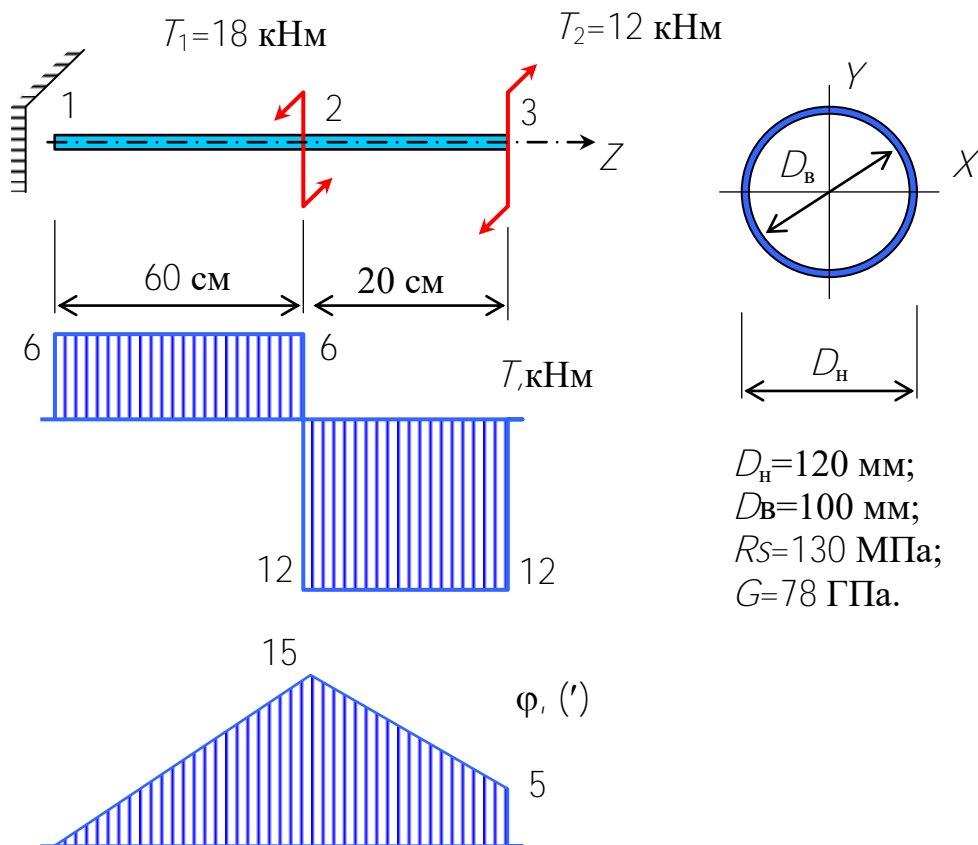


Рис. 172. Эпюры крутящих моментов и углов закручивания

Полярный момент инерции сечения стержня

$$J_p = \frac{\pi(d_H^4 - d_B^4)}{32} = \frac{3,14 \cdot (12^4 - 10^4)}{32} = 1054 \text{ см}^4.$$

Угол закручивания участка 1-2

$$\Delta\varphi_{12} = \frac{T_{12} l_{12}}{G J_p} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 0,60}{78 \cdot 10^9 \cdot 1054 \cdot 10^{-8}} = 4,38 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 15'.$$

Угол закручивания участка 2-3

$$\Delta\varphi_{23} = \frac{T_{23} l_{23}}{G J_p} = \frac{-12 \cdot 10^3 \cdot 0,20}{78 \cdot 10^9 \cdot 1054 \cdot 10^{-8}} = 2,92 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = -10'.$$

Углы поворота сечений стержня

$$\varphi_1 = 0 \text{ (по условию закрепления);}$$

$$\varphi_2 = \Delta\varphi_{12} = 15';$$

$$\varphi_3 = \Delta\varphi_{12} + \Delta\varphi_{23} = 15' - 10' = 5'.$$

Полярный момент сопротивления кольцевого сечения

$$W_p = \frac{J_p}{D_H/2} = \frac{1054}{12/2} = 176 \text{ см}^3.$$

Проверим по прочности

$$\tau = \frac{T}{W_p} = \frac{12 \cdot 10^3}{176 \cdot 10^6} = 68 \text{ МПа} < R_s = 130 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется

### 2.13 Пример расчета статически неопределимого ступенчатого стержня

Д а н о. Стержень переменного сечения, нагруженный осевыми сосредоточенными силами (рис.204). Расстояние между опорами больше чем общая длина стержня на 1 мм. Числовые данные приведены на рисунке 173. Стержень изготовлен из стали. Модуль упругости материала стержня равен  $E = 200 \text{ ГПа}$

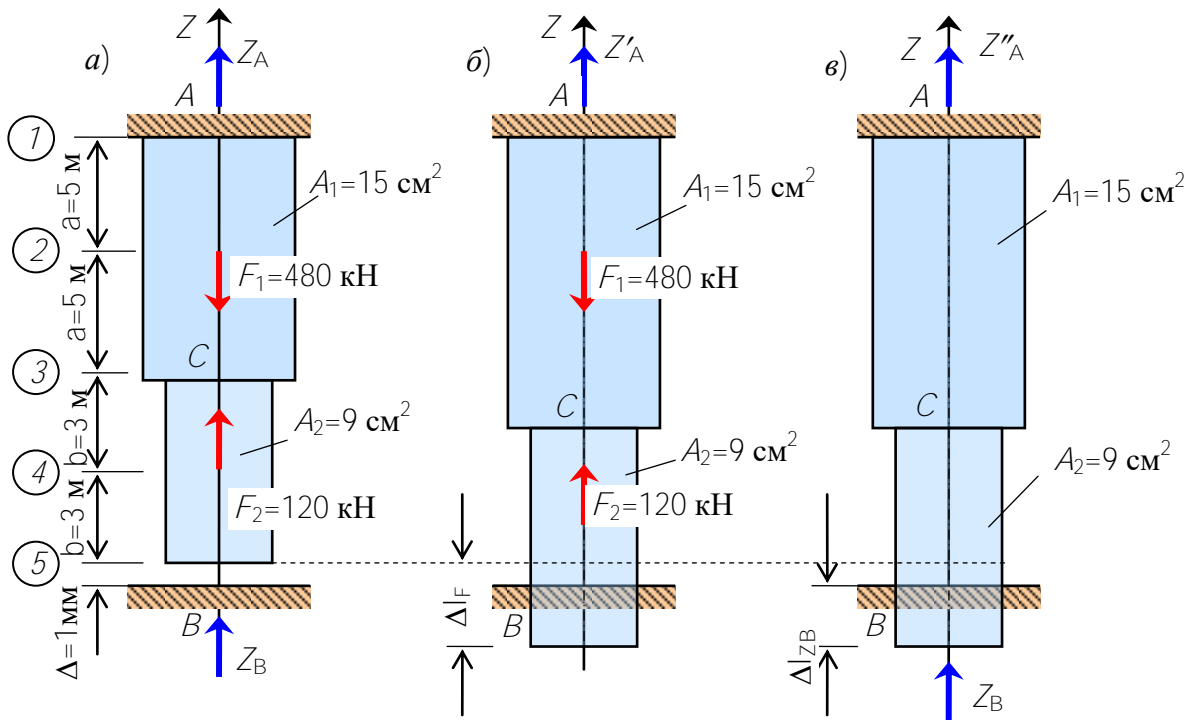


Рис. 173. Схема стержня (а), деформация стержня от нагрузки (б), деформация стержня от реакции нижней опоры (в)

Определим степень статической неопределимости системы:

- если предположить, что деформация стержня будет больше расстояния между опорами  $A$  и  $B$ , а это означает, что нижний конец стержня достигнет нижней опоры и появится реакция  $Z_B$ , то количество неизвестных равно 2-м (реакции опор  $Z_A$  и  $Z_B$ );
- количество уравнений статического равновесия равно 1-му ( $\sum Z = 0$ );



– степень статической неопределимости  $n=2-1=1$ .

То есть система один раз (однажды) статически неопределимая.

Обозначим особенные сечения стержня цифрами, начиная со стороны заземления  $A$ .

Составим уравнение статического равновесия

$$\sum Z = Z_A - F_1 + F_2 + Z_B = 0.$$

Составим уравнение совместности деформаций

$$\Delta/F + \Delta/Z_B = \Delta.$$

Используя закон Гука, вычислим деформацию стержня от нагрузки, отбросив нижнюю опору и считая неподвижной верхнюю опору.

$$\begin{aligned} \Delta/F &= \frac{(F_1 - F_2) \cdot a}{E \cdot A_1} + \frac{-F_2 \cdot a}{E \cdot A_1} + \frac{-F_2 \cdot b}{E \cdot A_2} = \frac{(480 \cdot 10^3 - 120 \cdot 10^3) \cdot 5}{200 \cdot 10^9 \cdot 15 \cdot 10^{-4}} + \\ &+ \frac{-120 \cdot 10^3 \cdot 5}{200 \cdot 10^9 \cdot 15 \cdot 10^{-4}} + \frac{-120 \cdot 10^3 \cdot 3}{200 \cdot 10^9 \cdot 9 \cdot 10^{-4}} = 2 \text{ мм} > 1 \text{ мм} \end{aligned}$$

Следовательно, в результате деформации стержня от нагрузки зазор закрывается и на нижней опоре появляется дополнительная реакция.

Используя закон Гука, выразим деформацию стержня от неизвестной реакции  $Z_B$ . Выразим потому, что еще не знаем величину самой реакции  $Z_B$ .

$$\Delta/Z_B = \frac{-Z_B \cdot 2a}{E \cdot A_1} + \frac{-Z_B \cdot 2b}{E \cdot A_2} = \frac{-Z_B \cdot 2 \cdot 5}{200 \cdot 10^9 \cdot 15 \cdot 10^{-4}} + \frac{-Z_B \cdot 2 \cdot 3}{200 \cdot 10^9 \cdot 9 \cdot 10^{-4}} = -6,67 \cdot 10^{-8} \cdot Z_B$$

Подставим полученные выражения в уравнение совместности деформаций и получим дополнительное уравнение

$$\Delta = \Delta/F + \Delta/Z_B = 2 \cdot 10^{-3} - 6,67 \cdot 10^{-8} \cdot Z_B = 1 \cdot 10^{-3}.$$

Объединим уравнение статического равновесия и дополнительное уравнение в систему

$$\begin{cases} \sum Z = Z_A - 480 \cdot 10^3 + 120 \cdot 10^3 + Z_B = 0; \\ 2 \cdot 10^{-3} - 6,67 \cdot 10^{-8} Z_B = 1 \cdot 10^{-3}. \end{cases}$$

Решим полученную систему уравнений. Учитывая, что система содержит неполное уравнение, из второго уравнения найдем значение реакции  $Z_B$

$$Z_B = \frac{2 \cdot 10^{-3} - 1 \cdot 10^{-3}}{6,67 \cdot 10^{-8}} = 15 \text{ кН}.$$

Из первого уравнения определим реакцию  $Z_A$

$$Z_A = F_1 - F_2 = 480 - 120 - 15 = 345 \text{ кН}.$$

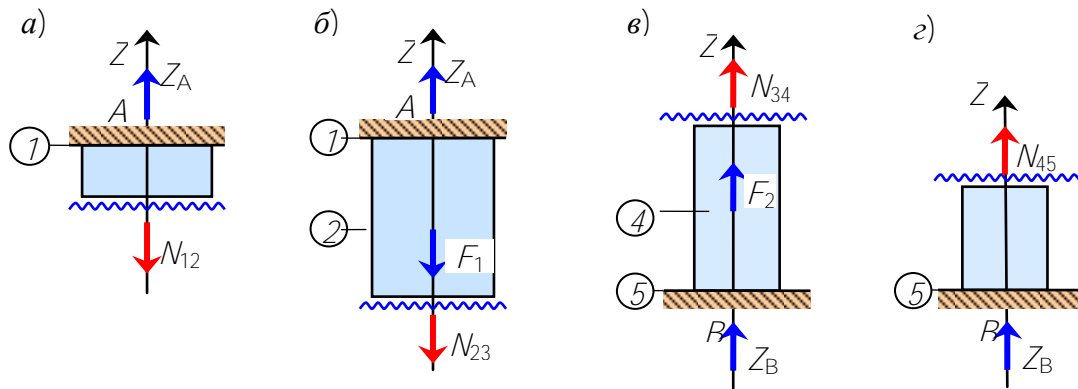
Используя метод сечений, вычислим значения продольных сил на участках стержня (рис. 174).

На участке 1-2

$$\sum Z = -N_{12} + Z_A = -N_{12} + 345 = 0; \quad N_{12} = 345 \text{ кН}.$$

На участке 2-3

$$\sum Z = Z_A - F_1 - N_{23} = 345 - 480 - N_{23} = 0; \quad N_{23} = -135 \text{ кН.}$$



**Рис.174. Рассмотренные части стержня при использовании метода сечений:**  
**а) на участке 1-2; б) на участке 2-3; в) на участке 3-4; г) на участке 4-5**

На участке 3-4

$$\sum Z = N_{34} + F_2 + Z_B = N_{34} + 120 + 15 = 0; \quad N_{34} = -135 \text{ кН.}$$

На участке 4-5

$$\sum Z = N_{45} + Z_B = N_{45} + 15 = 0; \quad N_{45} = -15 \text{ кН.}$$

Построим эпюру продольных сил (рис.175).

Вычислим значения напряжений в поперечных сечениях стержня

$$\sigma_{12} = \frac{N_{12}}{A_1} = \frac{345 \cdot 10^3}{15 \cdot 10^{-4}} = 230 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{23} = \frac{N_{23}}{A_1} = \frac{-135 \cdot 10^3}{15 \cdot 10^{-4}} = -90 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{34} = \frac{N_{34}}{A_2} = \frac{-135 \cdot 10^3}{9 \cdot 10^{-4}} = -150 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{45} = \frac{N_{45}}{A_2} = \frac{-15 \cdot 10^3}{9 \cdot 10^{-4}} = -16,7 \text{ МПа};$$

Построим эпюру нормальных напряжений (рис.175).

Пусть материал стержня деформируется по закону Гука. Вычислим относительные линейные деформации на участках стержня

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{E} = \frac{230 \cdot 10^6}{200 \cdot 10^9} = 1,15 \cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{E} = \frac{-90 \cdot 10^6}{200 \cdot 10^9} = -0,45 \cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_{34} = \frac{\sigma_{34}}{E} = \frac{-150 \cdot 10^6}{200 \cdot 10^9} = -0,75 \cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_{45} = \frac{\sigma_{45}}{E} = \frac{-16,7 \cdot 10^6}{200 \cdot 10^9} = -0,084 \cdot 10^{-3}.$$

Вычислим абсолютные линейные деформации участков стержня

$$\Delta l_{12} = \varepsilon_{12} \cdot l_{12} = \varepsilon_{12} \cdot a = 1,15 \cdot 10^{-3} \cdot 5000 = 5,75 \text{ мм};$$

$$\Delta l_{23} = \varepsilon_{23} \cdot l_{23} = \varepsilon_{23} \cdot a = -0,45 \cdot 10^{-3} \cdot 5000 = -2,25 \text{ мм};$$

$$\Delta l_{34} = \varepsilon_{34} \cdot l_{34} = \varepsilon_{34} \cdot b = -0,75 \cdot 10^{-3} \cdot 3000 = -2,25 \text{ мм};$$

$$\Delta l_{45} = \varepsilon_{45} \cdot l_{45} = \varepsilon_{45} \cdot b = -0,084 \cdot 10^{-3} \cdot 3000 = -0,25 \text{ мм}.$$

Вычислим перемещения отмеченных сечений стержня и построим эпюру перемещения (рис.175)

$$W_1 = 0, \quad (\text{по условию закрепления верхнего конца стержня})$$

$$W_2 = \Delta l_{12} = 5,75 \text{ мм};$$

$$W_3 = \Delta l_{12} + \Delta l_{23} = 5,75 - 2,25 = 3,50 \text{ мм};$$

$$W_4 = \Delta l_{12} + \Delta l_{23} + \Delta l_{34} = 5,75 - 2,25 - 2,25 = 1,25 \text{ мм};$$

$$W_5 = \Delta l_{12} + \Delta l_{23} + \Delta l_{34} + \Delta l_{45} = 5,75 - 2,25 - 2,25 - 0,25 = 1,0 \text{ мм};$$

Построим эпюру перемещений сечений стержня (рис.175).

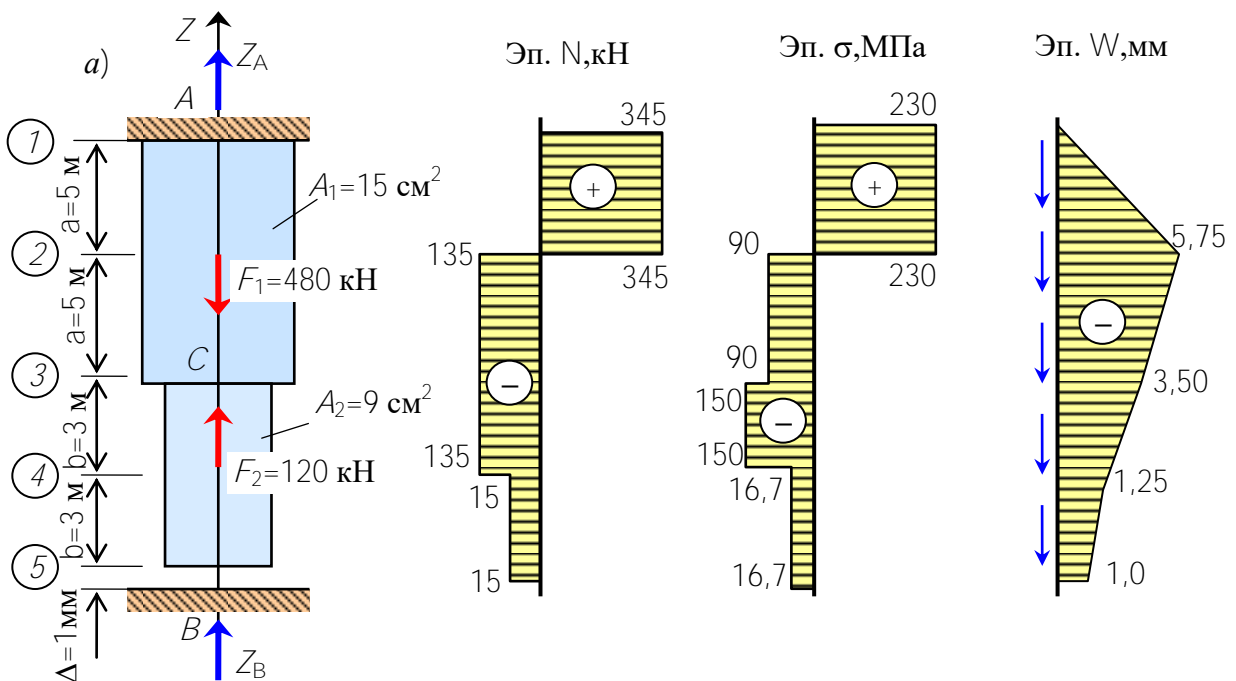


Рис. 175. Эпюры продольных сил (а), нормальных напряжений (б), перемещений (в)

## 2.14 Пример расчета статически неопределимого стержня на температурные воздействия

Д а н о. Стальной стержень кольцевого сечения состоит из двух участков с разной площадью поперечных сечений, подвергнут температурному воздействию. Расстояние между опорами больше на 3 мм длины стержня. Температура стержня увеличилась на  $90^\circ$ . Требуется определить продольные силы, температурные напряжения и перемещения сечений стержня. Исходные данные приведены на рисунке (рис.176).

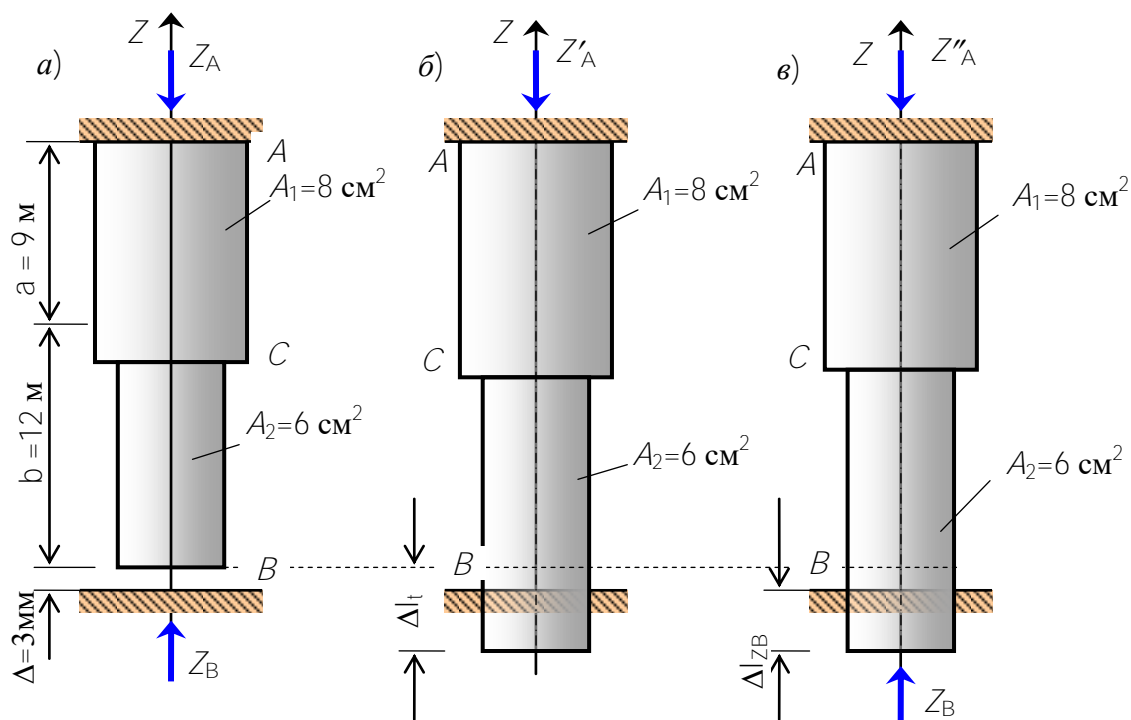


Рис. 176. Схема стержня (а), деформация стержня от нагрузки (б), деформация стержня от реакции нижней опоры (в)

Предположим, что в результате температурных деформаций стержень удлинился на величину большую, чем зазор между нижним концом стержня и нижней опорой. Тогда кроме реакции на верхней опоре появится реакция и на нижней опоре.

Определим степень статической неопределимости:

- количество неизвестных равно двум (реакции  $Z_A$  и  $Z_B$ );
- линейно независимых уравнений статического равновесия всего одно;
- степень статической неопределимости равно  $n = 2 - 1 = 1$ .

Отсюда следует, что стержень один раз (однажды) статически неопределимый.

Составим уравнение статического равновесия

$$\sum Z = -Z_A + Z_B = 0.$$

Отсюда следует, что реакции опор равны по величине, но направлены в разные стороны.

Составим уравнение совместности деформаций

$$\Delta_l + \Delta_{ZB} = \Delta.$$

По закону температурных деформаций вычислим деформацию стержня от повышения температуры при условии отсутствия нижней опоры. Коэффициент линейного температурного расширения принимаем равным  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$  град<sup>-1</sup>.

$$\Delta_l = \alpha \cdot (a + b) \cdot \Delta t = 12 \cdot 10^{-6} (9 + 12) \cdot 90 = 22,68 \text{ мм} > \Delta = 3 \text{ мм}.$$

Отсюда следует, что в результате деформации стержня от температуры зазор закрывается и на нижней опоре действительно появляется реакция.

Используя закон Гука, выразим (выразим, потому что еще не знаем значение самой реакции  $Z_B$ ) деформацию стержня от неизвестной реакции  $Z_B$ .

$$\Delta_{ZB} = \frac{-Z_B \cdot a}{E \cdot A_1} + \frac{-Z_B \cdot b}{E \cdot A_2} = \frac{-Z_B \cdot 9}{200 \cdot 10^9 \cdot 8 \cdot 10^{-4}} + \frac{-Z_B \cdot 12}{200 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = -0,156 \cdot 10^{-6} Z_B.$$

Подставим выражения для  $\Delta_l$  и  $\Delta_{ZB}$  в уравнение совместности деформаций и получим дополнительное уравнение.

$$22,68 \cdot 10^{-3} - 0,156 \cdot 10^{-6} \cdot Z_B = 3 \cdot 10^{-3}.$$

Уравнение статического равновесия и дополнительное уравнение имеют одинаковые неизвестные, поэтому они образуют систему двух уравнений с двумя неизвестными.

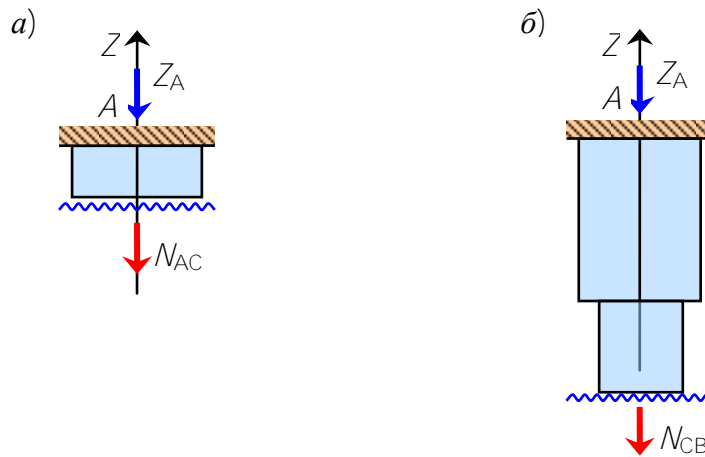
$$\begin{cases} Z_A + Z_B = 0; \\ 22,68 \cdot 10^{-3} - 0,156 \cdot 10^{-6} \cdot Z_B = 3 \cdot 10^{-3}. \end{cases}$$

Из второго уравнения определим значение реакции  $Z_B$ .

$$Z_B = \frac{22,68 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 10^{-3}}{0,156 \cdot 10^{-6}} = 126 \text{ кН}.$$

Из первого уравнения (уравнения равновесия) определим реакцию верхней опоры

$$Z_A = Z_B = 126 \text{ кН}.$$



**Рис.177. Рассмотренные части стержня при использовании метода сечений:  
а) на участке A-C; б) на участке C-B**

Определим продольные силы на участках стержня:

– на участке A-C (рис.208, а)

$$\sum Z = -Z_A - N_{AC} = -126 - N_{AC} = 0, \quad N_{AC} = -126 \text{ кН};$$

– на участке C-B (рис.208, б)

$$\sum Z = -Z_A - N_{CB} = -126 - N_{CB} = 0, \quad N_{CB} = -126 \text{ кН}.$$

Вычислим температурные напряжения на участках стержня

$$\sigma_{AC} = \frac{N_{AC}}{A_1} = \frac{-126 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-4}} = -157,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{CB} = \frac{N_{CB}}{A_2} = \frac{-126 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = -210,0 \text{ МПа}.$$

Вычислим деформации участков стержня. При этом следует учитывать деформацию от реакции  $Z_B$  и деформацию от изменения температуры:

$$\Delta l_{AC} = \frac{N_{AC} \cdot a}{E \cdot A_1} + \alpha \cdot a \cdot \Delta t = \frac{-126 \cdot 10^3 \cdot 9}{200 \cdot 10^9 \cdot 8 \cdot 10^{-4}} + 12 \cdot 10^{-6} \cdot 9 \cdot 90 = 2,63 \text{ мм};$$

$$\Delta l_{CB} = \frac{N_{CB} \cdot b}{E \cdot A_2} + \alpha \cdot b \cdot \Delta t = \frac{-126 \cdot 10^3 \cdot 12}{200 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^{-4}} + 12 \cdot 10^{-6} \cdot 12 \cdot 90 = 0,36 \text{ мм}.$$

Определим перемещения помеченных сечений стержня:

$$W_A = 0; \quad (\text{по условию закрепления})$$

$$W_C = \Delta l_{AC} = 2,63 \text{ мм};$$

$$W_B = \Delta l_{AC} + \Delta l_{CB} = 2,63 + 0,36 = 2,99 \text{ мм} \approx 3,0 \text{ мм}.$$

Построим эпюры продольных сил, напряжений и перемещений (рис.178).

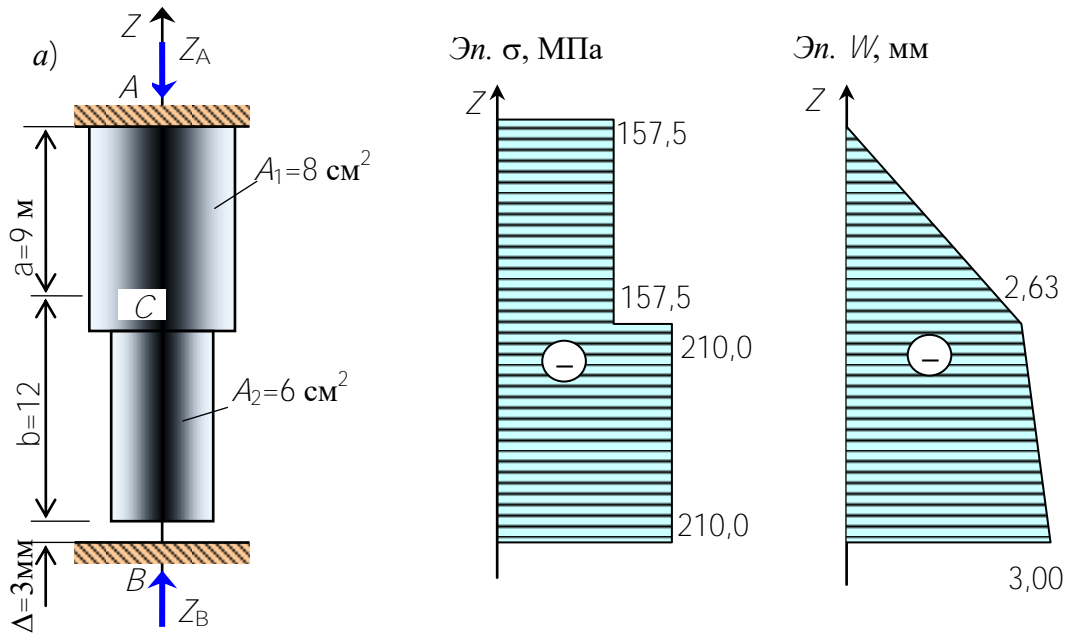


Рис. 178. Эпюры нормальных напряжений и перемещений в стержне при температурном воздействии на него

### 2.15 Расчет статически неопределимого стержня круглого (кольцевого) сечения на кручение

Д а н о. Стальной стержень переменной жесткости круглого поперечного сечения, защемленный обоими концами. Схема стержня приведена на рисунке (рис. 179).

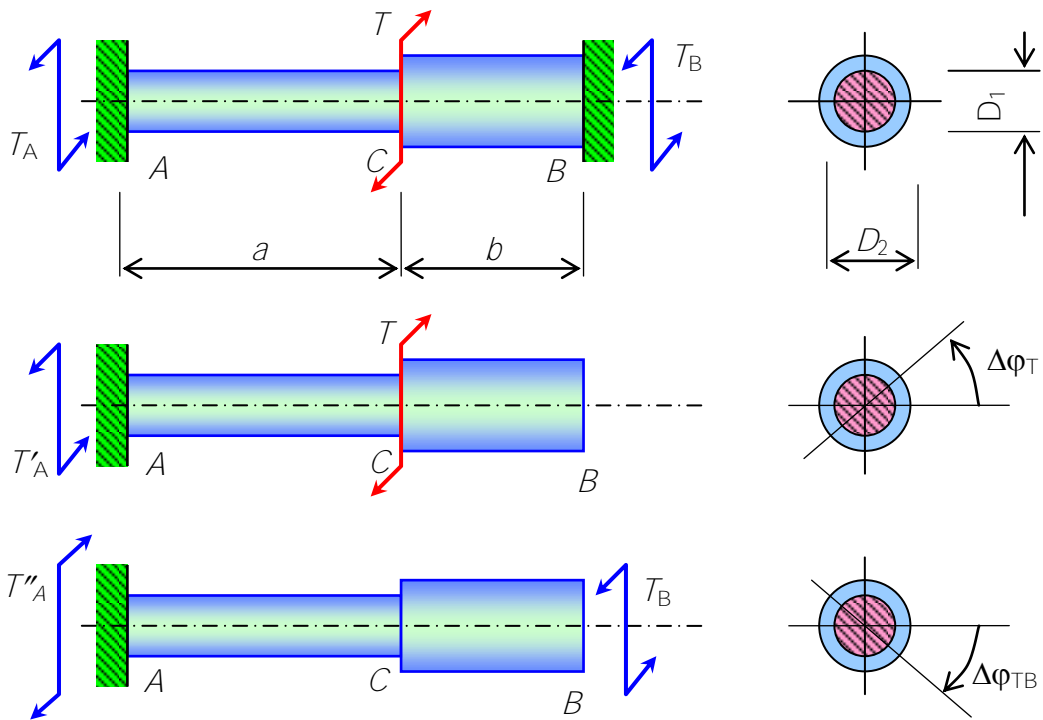


Рис. 179. Схема стержня (а), деформация стержня при кручении от заданного момента (б), деформация стержня от реактивного момента (в)

Приняты следующие исходные данные:

$$E = 200 \text{ ГПа}; \quad \nu = 0,3; \quad D_1 = 120 \text{ мм}; \quad D_2 = 180 \text{ мм}; \quad T = 36 \text{ кНм}; \quad a = 3 \text{ м}; \\ b = 2 \text{ м}.$$

**Р е ш е н и е.** Определим степень статической неопределимости:

- количество неизвестных равно двум ( $T_A$  и  $T_B$ );
- уравнений статического равновесия только одно ( $\sum Z=0$ );
- степень статической неопределимости  $n=2-1=1$ .

Следовательно, стержень один раз статически неопределимый.

Составим уравнение статического равновесия

$$\sum Z = T_A - T + T_B = T_A - 36 + T_B = 0.$$

Вычислим модуль сдвига материала стержня

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = \frac{200}{2 \cdot (1 + 0,3)} = 76,29 \text{ ГПа} \approx 76,3 \text{ ГПа}.$$

Вычислим полярные моменты инерции поперечных сечений стержня на участках  $A-C$  и  $C-B$

$$J_{\rho AC} = \frac{\pi D_1^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 12^4}{32} = 2035,8 \text{ см}^4; \quad J_{\rho CB} = \frac{\pi D_2^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 18^4}{32} = 10306,0 \text{ см}^4.$$

Освободим правый конец балки от опоры и определим угол поворота правого сечения  $B$ , вызванного заданным крутящим моментом  $T$ .

$$\Delta\varphi_T = \Delta\varphi_{AC} = \frac{T \cdot a}{G \cdot J_{\rho AC}} = \frac{36 \cdot 10^3 \cdot 3}{76,3 \cdot 10^9 \cdot 2036 \cdot 10^{-8}} = 0,0695.$$

Выразим угол закручивания правого торца стержня, вызванного неизвестным реактивным моментом  $T_B$

$$\Delta\varphi_{TB} = \frac{-T_B \cdot a}{G \cdot J_{\rho AC}} + \frac{-T_B \cdot b}{G \cdot J_{\rho CB}} = \frac{-T_B \cdot 3}{76,3 \cdot 10^9 \cdot 2036 \cdot 10^{-8}} + \frac{-T_B \cdot 2}{76,3 \cdot 10^9 \cdot 10306 \cdot 10^{-8}} = \\ = -2,185 \cdot 10^{-6} T_B.$$

Составим уравнение совместности деформаций – дополнительное уравнение

$$\Delta\varphi_{TB} + \Delta\varphi_T = -2,185 \cdot 10^{-6} \cdot T_B + 0,0695 = 0.$$

Уравнение статического равновесия и дополнительное уравнение образуют систему уравнений

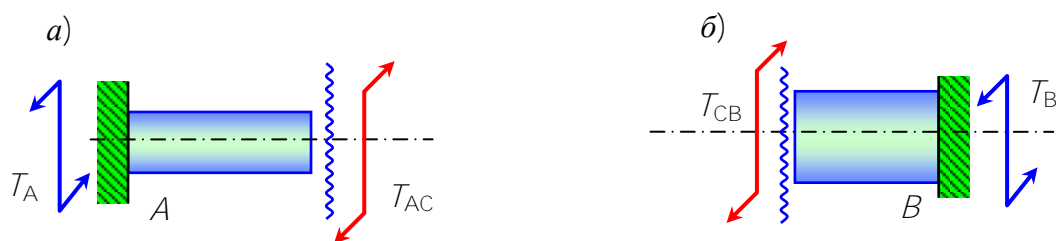
$$\begin{cases} T_A - 36 \cdot 10^3 + T_B = 0; \\ -2,185 \cdot 10^{-6} T_B + 0,0695 = 0. \end{cases}$$

Решим систему уравнений и найдем значения неизвестных реактивных моментов  $T_A$  и  $T_B$ .

$$T_B = \frac{0,0695}{2,185 \cdot 10^{-6}} = 31,81 \text{ кНм}; \quad T_A = 36 - T_B = 36 - 31,81 = 4,19 \text{ кНм}.$$

Определим крутящие моменты на участках стержня





**Рис. 180.** Равновесие части стержня, расположенной слева от сечения на участке  $A-C$  (а), равновесие части стержня, расположенной справа от сечения,

Участок  $AC$

$$\sum M_Z = -T_A + T_{AC} = -4,19 + T_{AC} = 0, \quad T_{AC} = 4,19 \text{ кНм};$$

Участок  $CB$

$$\sum M_Z = -T_{CB} + T_B = -T_{CB} + 31,81 = 0, \quad T_{CB} = 31,81 \text{ кНм}.$$

Вычислим полярные моменты сопротивления сечений стержня на его участках  $AC$  и  $CB$

$$W_{AC} = \frac{\pi D_1^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 12^3}{16} = 339,3 \approx 339 \text{ см}^3;$$

$$W_{CB} = \frac{\pi D_2^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 18^3}{16} = 1145,1 \approx 1145 \text{ см}^3.$$

Определим максимальные касательные напряжения в сечениях стержня

$$\tau_{AC} = \frac{T_{AC}}{W_{AC}} = \frac{4,19 \cdot 10^3}{339 \cdot 10^{-6}} = 12,36 \text{ МПа};$$

$$\tau_{CB} = \frac{T_{CB}}{W_{CB}} = \frac{31,81 \cdot 10^3}{1145 \cdot 10^{-6}} = 27,78 \text{ МПа}.$$

Вычислим деформации (углы закручивания) участков стержня

$$\Delta\varphi_{AC} = \frac{T_{AC} \cdot a}{G \cdot J_{\rho AC}} = \frac{-4,19 \cdot 10^3 \cdot 3}{76,3 \cdot 10^9 \cdot 2036 \cdot 10^{-8}} = -0,00809 \text{ рад} = -0,464^\circ = -27,82';$$

$$\Delta\varphi_{CB} = \frac{T_{CB} \cdot b}{G \cdot J_{\rho CB}} = \frac{31,81 \cdot 10^3 \cdot 2}{76,3 \cdot 10^9 \cdot 10306 \cdot 10^{-8}} = 0,00809 \text{ рад} = 0,464^\circ = 27,82'.$$

Определим углы поворота сечений стержня

$$\Delta\varphi_A = 0 \text{ (по условию закрепления стержня)}$$

$$\varphi_C = \Delta\varphi_{AC} = -27,82';$$

$$\varphi_B = \Delta\varphi_{AC} + \Delta\varphi_{CB} = -27,82' + 27,82' = 0.$$

Очевидно, что кинематические условия задачи выполняются. Построим эпюры крутящих моментов и углов закручивания сечений стержня (рис.181).

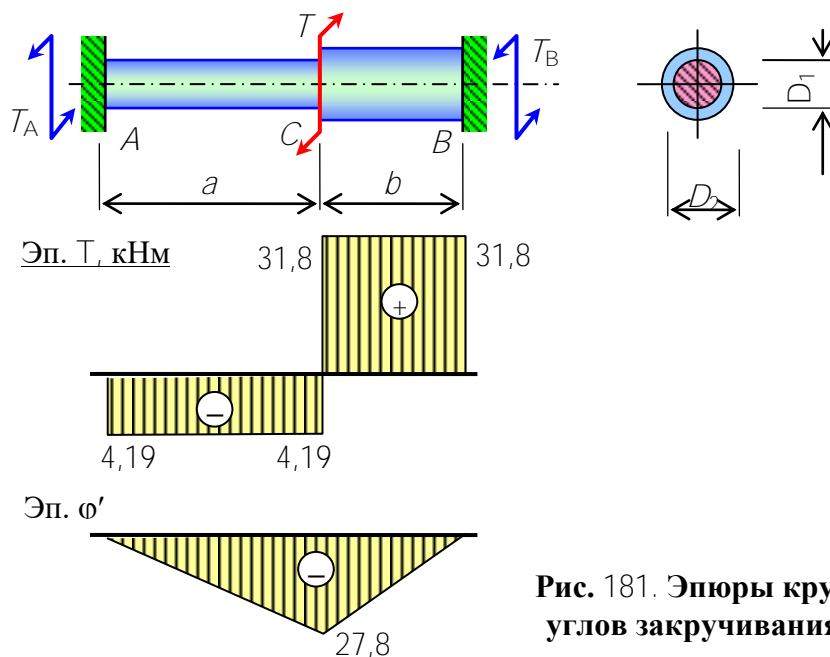


Рис. 181. Эпюры крутящих моментов и углов закручивания сечений стержня

## 2.16 Расчет статически неопределимой плоской стержневой системы

Д а н о. Плоская стержневая система, состоящая из двух деформируемых стальных стержней и одного абсолютно жесткого элемента (диска), прикрепленного к опоре неподвижным шарниром. Модуль упругости материала деформируемых стержней принят равным  $E=200$  ГПа. Стержневая система нагружена равномерно распределенной нагрузкой  $q = 120$  кН/м и сосредоточенной силой  $F = 240$  кН. Площади поперечных сечений первого и второго стержней приняты соответственно равными  $A_1=6$  см<sup>2</sup> и  $A_2=12$  см<sup>2</sup>. Размеры и положение элементов системы приведены на рисунке (рис.182).

Требуется найти продольные силы в деформируемых стержнях, вычислить их деформации и определить перемещения точек  $A$  и  $B$ .

Р е ш е н и е. Вычислим длины деформируемых стержней

$$l_1 = \sqrt{a^2 + d^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 6,708 \text{ м}; \quad l_2 = d = 6 \text{ м}.$$

Вычислим радиусы окружностей, по которым движутся точки  $A$  и  $B$

$$r_A = \sqrt{(a+b)^2 + d^2} = \sqrt{(3+3)^2 + 6^2} = 8,485 \text{ м};$$

$$r_B = \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = 7,211 \text{ м}.$$

Вычислим угол наклона первого стержня к горизонтальному направлению

$$\alpha = \arctg\left(\frac{d}{a}\right) = \arctg\left(\frac{6}{3}\right) = 63,435^\circ.$$

Составим уравнение статического равновесия  $\sum M_C = 0$

$$\sum M_C = N_1 \cdot \sin(\alpha) \cdot (a+b) - N_1 \cdot \cos(\alpha) \cdot d - q \cdot \frac{(a+b)^2}{2} + q \cdot \frac{c^2}{2} - N_2 \cdot c - F \cdot d = 0.$$

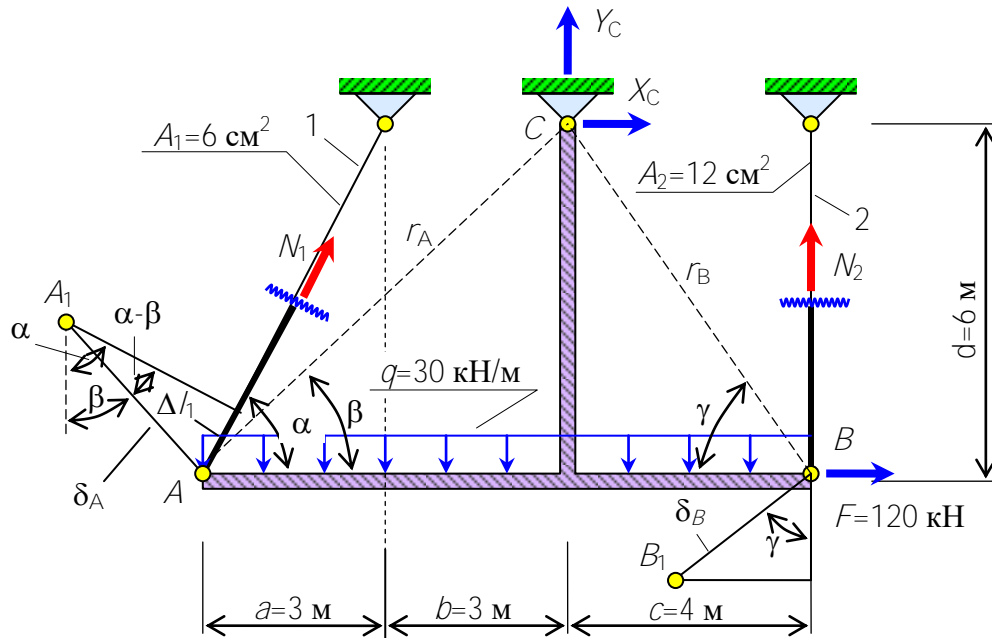


Рис. 182. Схема плоской стержневой системы, ее размеры и деформации

Вычислим углы наклона радиусов окружностей, по которым движутся точки  $A$  и  $B$ , к горизонтальному направлению

$$\beta = \arctg\left(\frac{d}{a+b}\right) = \arctg\left(\frac{6}{3+3}\right) = 45^\circ;$$

$$\gamma = \arctg\left(\frac{d}{c}\right) = \arctg\left(\frac{6}{3}\right) = 56,31^\circ.$$

Установим связь между перемещениями шарниров  $A$  и  $B$

$$\frac{\delta_A}{r_A} = \frac{\delta_B}{r_B}.$$

Установим связь между перемещениями точек  $A$ ,  $B$  и деформациями первого и второго деформируемых стержней системы.

$$\delta_A = \frac{-\Delta l_1}{\sin(\alpha - \beta)}; \quad \delta_B = \frac{\Delta l_2}{\cos(\gamma)}.$$

Принимаем, что материал первого и второго стержней деформируется по закону Гука.

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2}.$$

Объединим уравнения и получим дополнительное уравнение

$$-\frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1 \cdot r_A \cdot \sin(\alpha - \beta)} = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2 \cdot r_B \cdot \cos(\gamma)}$$

Уравнение статического равновесия  $\sum M_C = 0$  и полученное нами дополнительное уравнение образуют систему, решением которой являются продольные силы в первом и во втором стержнях

$$\begin{cases} \sum M_C = N_1 \cdot \sin(\alpha) \cdot (a+b) - N_1 \cdot \cos(\alpha) \cdot d - q \cdot \frac{(a+b)^2}{2} + q \cdot \frac{c^2}{2} - N_2 \cdot c - \\ - F \cdot d = 0; \\ -\frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1 \cdot r_A \cdot \sin(\alpha - \beta)} = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2 \cdot r_B \cdot \cos(\gamma)}. \end{cases}$$

В результате решения получим значения продольных сил

$$N_1 = 63,83 \text{ кН}; \quad N_2 = -212,28 \text{ кН}$$

Очевидно, что первый стержень растянут, а второй сжат.

Определим реакции на опоре С. Для этого составим уравнения статического равновесия  $\sum X = 0$  и  $\sum Y = 0$ . Из первого уравнения

$$\sum X = N_1 \cdot \cos(\alpha) + X_C + F = 63,83 \cdot \cos(63,44^\circ) + X_C + 120 = 0$$

найдем реакцию  $X_C$

$$X_C = -148,48 \text{ кН}.$$

Из второго уравнения

$$\begin{aligned} \sum Y = N_1 \cdot \sin(\alpha) - q \cdot (a+b+c) + Y_C + N_2 = 63,83 \cdot \sin(63,64^\circ) - \\ - 30 \cdot (3+3+4) + Y_C - 212,28 = 0. \end{aligned}$$

найдем реакцию  $Y_C$

$$Y_C = 455,32 \text{ кН}.$$

Вычислим напряжения в первом и во втором стержнях.

$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{63,68 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = 106,14 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-212,28 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^{-4}} = -176,90 \text{ МПа}.$$

Вычислим деформации первого и второго стержней системы

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = \frac{63,68 \cdot 10^3 \cdot 6,708}{200 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = 3,560 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} = \frac{-212,28 \cdot 10^3 \cdot 6,0}{200 \cdot 10^9 \cdot 12 \cdot 10^{-4}} = -5,307 \text{ мм}.$$

Определим перемещения точек А и В

$$\delta_A = \left| \frac{-\Delta l_1}{\sin(\alpha - \beta)} \right| = \left| \frac{-3,56}{\sin(63,44^\circ - 45^\circ)} \right| = 11,258 \text{ мм};$$

$$\delta_B = \left| \frac{\Delta l_2}{\cos(\gamma)} \right| = \left| \frac{5,307}{\cos(56,31^\circ)} \right| = 9,567 \text{ мм}.$$

## 2.17 Расчет статически неопределимой балки методом начальных параметров

Д а н о. Статически неопределимая консольная балка (рис. 183), защемленная левым концом и шарнирно опирающаяся правым. Пролет балки равен 6 м, длина консоли 2 м. Балка загружена равномерно распределенной нагрузкой  $q = 18 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$  и сосредоточенным моментом  $M = 48 \text{ кНм}$ . Приняты расчетное сопротивление материала балки на растяжение (сжатие)  $R = 210 \text{ МПа}$ , расчетное сопротивление на срез  $R_s = 130 \text{ МПа}$ , допускаемый относительный прогиб  $\left[ \frac{f}{l} \right]_{adm} = \frac{1}{300}$ .

Требуется раскрыть статическую неопределимость, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, подобрать прокатный двутавр и определить прогибы балки в точках  $C$  и  $D$ , а также проверить условие жесткости.

Р е ш е н и е. Количество неизвестных равно четырем –  $Z_A$ ,  $X_A$ ,  $Y_A$  и  $M_A$ . Количество линейно независимых уравнений равновесия равно трем. Степень статической неопределимости равна  $n = 4 - 3 = 1$ . То есть балка один раз (однажды) статически неопределимая.

Составим универсальное уравнение упругой оси балки.

$$EJV = EJV_0 + EJ\theta_0 \cdot z - \frac{M_A(z-0)^2}{2} + \frac{Y_A(z-0)^3}{6} - \frac{q(z-0)^4}{24} \Big|_I - \frac{M_1(z-a)^2}{2} \Big|_{II} + \frac{Y_B(z-a-b)^3}{6} \Big|_{III}$$

Отметим, что левый конец балки защемлен. Поэтому прогиб и угол поворота сечения расположенного на опоре  $A$  равны нулю по условию защемления, а значит, равны нулю. Равны нулю и начальные параметры  $V_0$  и  $\theta_0$ .

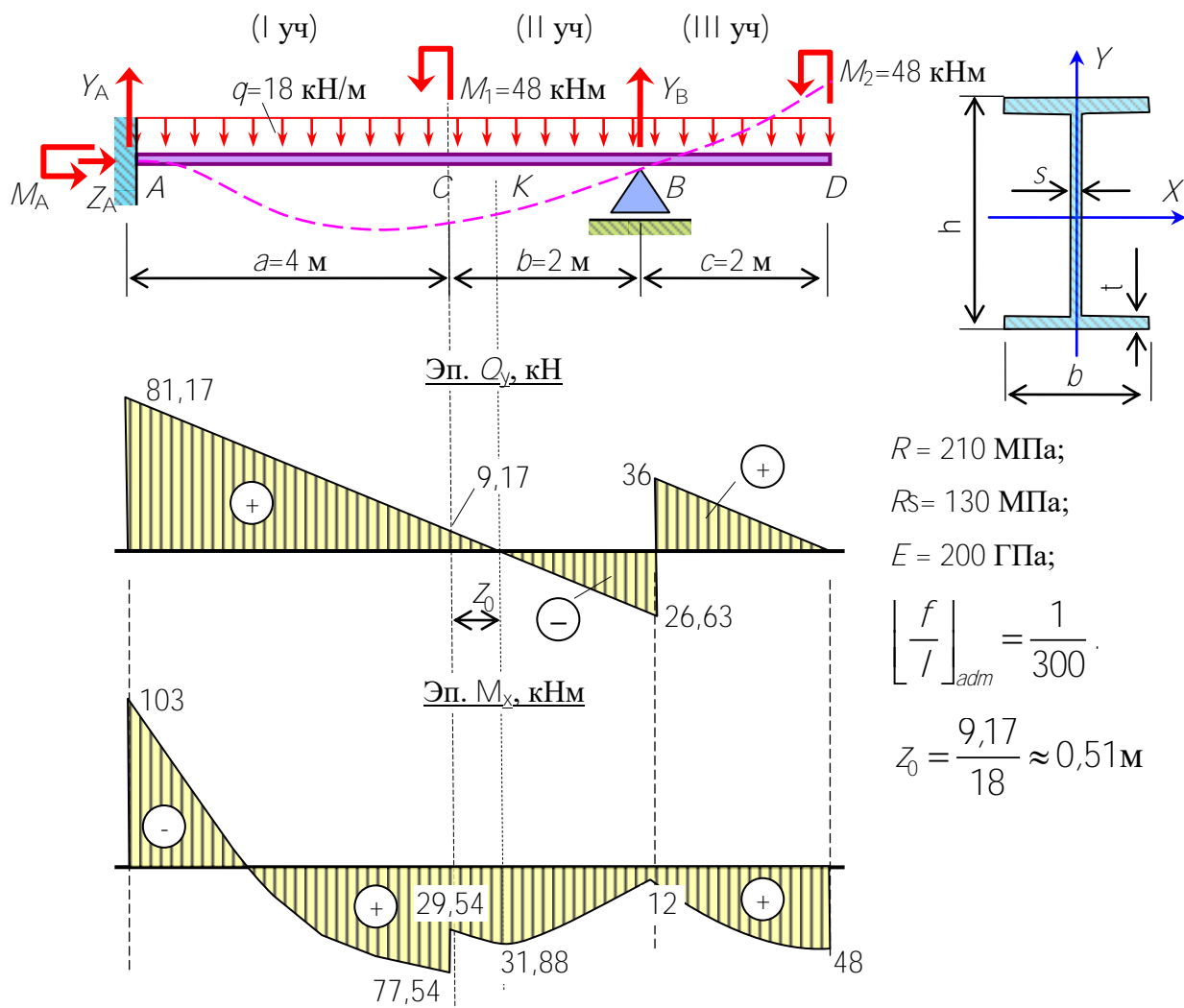


Рис.183. Статически неопределимая балка, эпюры поперечных сил, изгибающих моментов и упругая ось балки

По условию закрепления балки прогиб балки в точке  $B$  равен нулю, так как эта точка располагается на шарнирно подвижной опоре. Используем это условие для составления дополнительного уравнения.

$$EJv_A = -\frac{M_A(6-0)^2}{2} + \frac{Y_A(6-0)^3}{6} - \frac{q(6-0)^4}{24} \Big|_I - \frac{M_1(6-4)^2}{2} \Big|_{II} = 0.$$

Составим уравнение статического равновесия балки

$$\sum M_B = -M_A + Y_A(a+b) - \frac{q(a+b)^2}{2} - M_1 + \frac{qc^2}{2} - M_2 = 0.$$

Оба полученные уравнения содержат одни и те же неизвестны –  $M_A$  и  $Y_A$ . Поэтому они образуют систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} -18 \cdot M_A + 36 \cdot Y_A - 1068 = 0; \\ -M_A + 6 \cdot Y_A - 384 = 0. \end{cases}$$

Решим эту систему и получим значения реакций

$$M_A = 103,0 \text{ кНм}; \quad Y_A = 81,17 \text{ кН}.$$

Чтобы получить значение реакции  $Y_B$ , используем еще одно уравнение статического равновесия  $\Sigma Y=0$ .

$$\Sigma Y = Y_A - q \cdot (a + b + c) + Y_B = 81,17 - 18 \cdot (4 + 2 + 2) + Y_B = 0$$

Решим его и получим значение реакции опоры  $B$ ,  $Y_B = 62,83$  кН.

Используя метод сечений и правила построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис.183).

Из условия прочности

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} \leq R$$

определим требуемый момент сопротивления

$$W_x^{тр} = \frac{M_x}{R} = \frac{103 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 490,5 \text{ см}^3.$$

По таблице прокатных профилей подберем двутавр с уклоном полок №30а. Выпишем его геометрические характеристики:

$$W_x = 518 \text{ см}^3; \quad J_x = 7780 \text{ см}^4; \quad S_x^0 = 292 \text{ см}^3; \quad s = 6,5 \text{ мм}.$$

Проверим на прочность по нормальным напряжениям

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} = \frac{103 \cdot 10^3}{518 \cdot 10^{-6}} = 199 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

Недогрузка составляет

$$\frac{R - \sigma}{R} \cdot 100 = \frac{210 - 199}{210} \cdot 100 = 5\%.$$

Проверим на прочность по касательным напряжениям

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x^0}{J_x \cdot s} = \frac{81,17 \cdot 10^3 \cdot 292 \cdot 10^{-6}}{7780 \cdot 10^{-8} \cdot 6,5 \cdot 10^{-3}} = 47 \text{ МПа} < R_s = 130 \text{ МПа}.$$

Найдем прогиб балки в точке  $C$  при  $z = a = 4$  м (участок I)

$$EJV_C = 0 + 0 \cdot 4 - \frac{103 \cdot 10^3 (4-0)^2}{2} + \frac{81,17 \cdot 10^3 (4-0)^3}{6} - \frac{18 \cdot 10^3 (4-0)^4}{24} \Bigg|_I =$$

$$= -150,2 \cdot 10^3 \text{ кНм}^3;$$

$$V_C = \frac{(EJV_C)}{E \cdot J_x} = \frac{-150,2 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 7780 \cdot 10^{-8}} = -9,65 \text{ мм}.$$

Найдем прогиб балки в точке  $D$  при  $z = a + b + c = 4 + 2 + 2 = 8$  м (участок III)

$$EJV_D = 0 + 0 \cdot 8 - \frac{103 \cdot 10^3 (8-0)^2}{2} + \frac{81,17 \cdot 10^3 (8-0)^3}{6} - \frac{18 \cdot 10^3 (8-0)^4}{24} \Bigg|_I -$$

$$- \frac{48 \cdot 10^3 (8-4)^2}{2} \Bigg|_{II} + \frac{62,83 \cdot 10^3 (8-4-2)^3}{6} \Bigg|_{III} = 258,3 \cdot 10^3 \text{ кНм}^3$$

$$V_D = \frac{(EJV_D)}{E \cdot J_x} = \frac{258,3 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 7780 \cdot 10^{-8}} = 16,58 \text{ мм}.$$

Проверим по жесткости

$$\frac{f}{l} = \frac{V_D}{a+b} = \frac{16,58}{4000+2000} = \frac{1}{362} < \left[ \frac{f}{l} \right]_{adm} = \frac{1}{300}.$$

Условие жесткости выполняется.

Используя полученные значения прогибов балки в точках  $C$  и  $D$ , а также учитывая, что угол поворота сечения в точке  $A$  и прогибы балки на опорах  $A$  и  $B$  равны нулю, построим упругую ось балки (рис. 183). Отметим, что упругая ось балки должна быть согласована с эпюрой изгибающих моментов. Растянутые волокна балки на ее упругой оси должны быть с той стороны, в которую отложены ординаты на эпюре изгибающих моментов.

### 2.18 Определение деформаций статически определимой балки методом Максвелла-Мора (способ Верещагина)

**Д а н о.** Статически определимая шарнирно опертая балка, нагруженная сосредоточенным моментом  $M = 24 \text{ кНм}$ , сосредоточенной силой  $F = 18 \text{ кН}$  и равномерно распределенной нагрузкой  $q = 12 \text{ кН/м}$ . Требуется построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, подобрать прокатный двутавр, определить прогибы в точках  $C$ ,  $D$  и  $H$ , проверить по условию жесткост, приняв, расчетные сопротивления на растяжение (сжатие)  $R = 210 \text{ МПа}$ , на сдвиг  $R_s = 130 \text{ МПа}$  и модуль упругости стали  $E = 200 \text{ ГПа}$ . Размеры балки приведены на рисунке (рис.184).

**Р е ш е н и е.** Составим уравнения статического равновесия и вычислим реакции опор  $Y_A$  и  $Y_B$ , Учтываем, что горизонтальная реакция на шарнирно неподвижной опоре  $A$  равна нулю  $Z_A = 0$ .

$$\sum M_A = -q \cdot \frac{a^2}{2} + q \cdot \frac{b^2}{2} - M - Y_B \cdot (b+c) + F \cdot (b+c+d) = 0,$$

$$\sum M_A = -12 \cdot \frac{2^2}{2} + 12 \cdot \frac{4^2}{2} - 24 - Y_B \cdot (4+2) + 18 \cdot (4+2+1) = 0,$$

$$Y_B = 29 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = Y_A \cdot (b+c) - q \cdot (a+b) \left( \frac{a+b}{2} + c \right) - M + F \cdot d = 0,$$

$$\sum M_B = Y_A \cdot (4+2) - 12 \cdot (2+4) \left( \frac{2+4}{2} + 2 \right) - 24 + 18 \cdot 1 = 0,$$

$$Y_A = 61 \text{ кН};$$



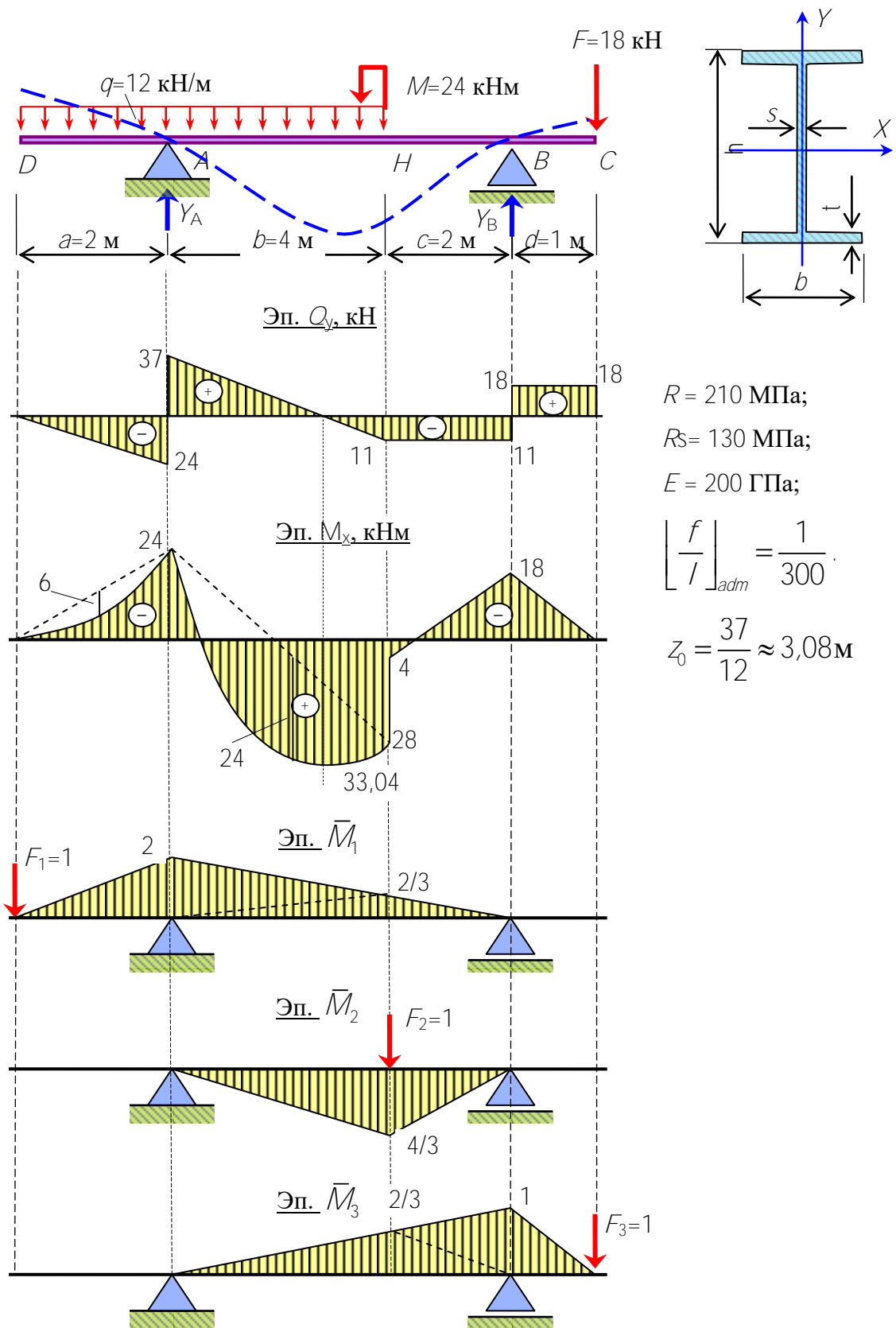


Рис.184. Схема статически определимая балка, эпюры поперечных сил, изгибающих моментов от нагрузки, единичные эпюры и упругая ось

Используя метод сечений, вычислим значения поперечных сил и изгибающих моментов и по правилам построим их эпюры (рис.184).

Из условия прочности

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} \leq R$$

определим требуемый момент сопротивления

$$W_x^{\text{тр}} = \frac{M_x}{R} = \frac{33,04 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 157,3 \text{ см}^3.$$

и подберем прокатный двутавр № 18а. Выпишем его геометрические характеристики  $W_x = 159 \text{ см}^3$ ;  $J_x = 1430 \text{ см}^4$ ;  $S_x^0 = 89,8 \text{ см}^3$ ;  $s = 5,1 \text{ мм}$ .

Проверим балку на прочность по нормальным напряжениям

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} = \frac{33,04 \cdot 10^3}{159 \cdot 10^{-6}} = 207,8 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

Недогрузка составляет

$$\frac{R - \sigma}{R} \cdot 100 = \frac{210 - 207,8}{210} \cdot 100 = 1,05 \%$$

Проверим на прочность по касательным напряжениям

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x^0}{J_x \cdot s} = \frac{37 \cdot 10^3 \cdot 89,8 \cdot 10^{-6}}{1430 \cdot 10^{-8} \cdot 5,1 \cdot 10^{-3}} = 45,5 \text{ МПа} < R_s = 130 \text{ МПа}.$$

Построим эпюры изгибающих моментов от единичных сил, приложенных в точках  $C$ ,  $D$  и  $G$ , где следует найти прогибы балки (рис.184).

Перемножим эпюру  $M_x$  и  $\bar{M}_1$  и найдем прогиб балки в точке  $D$ . Для этого разложим эпюры на части треугольной и параболической форм (рис.185).

$$V_D = \frac{M_x \cdot \bar{M}_1}{E \cdot J_x} = \frac{10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 1430 \cdot 10^{-8}} \left\{ \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 4 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) - \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 4 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) - \frac{2}{3} \cdot 24 \cdot 4 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \right\} = -16,32 \text{ мм}$$

Знак минус означает, что прогиб балки в точке  $D$  направлен против направления силы  $F_1$ , то есть вверх.

Аналогично найдем прогиб балки в точках  $G$  и  $C$

$$V_G = \frac{M_x \times \bar{M}_2}{E \cdot J_x} = \frac{10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 1430 \cdot 10^{-8}} \left\{ -\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \cdot 24 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \right\} = 23,31 \text{ мм}.$$

Знак плюс означает, что направление прогиба балки в точке  $G$  совпадает с направлением единичной силы  $F_2$ , то есть вниз.

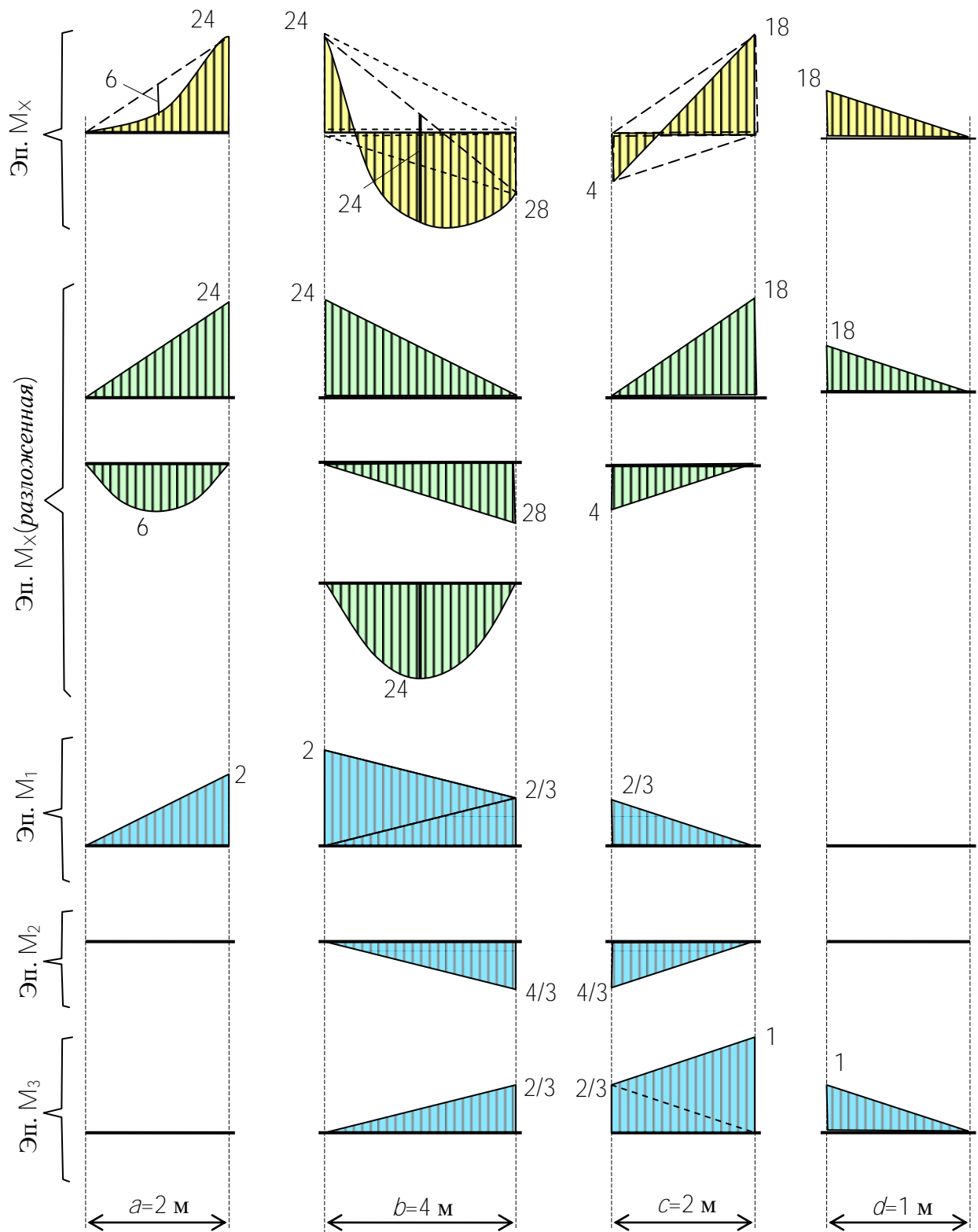


Рис. 185. Эпюры изгибающих моментов, представленные в виде треугольников и квадратных парабол, эпюры от единичных сил

$$V_C = \frac{M_x \times \bar{M}_3}{E \cdot J_x} = \frac{10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 1430 \cdot 10^{-8}} \left\{ \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot 24 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 2 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right\} = -5,83 \text{ мм.}$$

Знак минус означает, что направление прогиба балки в точке  $C$  противоположно направлению единичной силы  $F_3$ , то есть вверх.

По найденным значениям прогибов балки в точках  $D$ ,  $G$  и  $C$ , а также учитывая эпюру изгибающих моментов, построим упругую ось балки (рис.184).

### 2.19 Расчет статически неопределимой балки методом сил (Максвелла-Мора)

**Д а н о.** Двух пролетная статически неопределимая балка (рис. 186), опирающаяся на шарнирные опоры и нагруженная равномерно распределенной нагрузкой  $q = 12$  кН/м и сосредоточенной силой  $F = 48$  кН. Размеры балки и схема нагружения показаны на рисунке (рис.186). Требуется раскрыть статическую неопределимость, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, подобрать прокатный двутавр, вычислить прогибы в точках  $K$  и  $D$ , а также построить упругую ось, принимая модуль упругости  $E = 200$  МПа, расчетные сопротивления на растяжение (сжатие)  $R = 210$  МПа, расчетное сопротивление на сдвиг  $R_S = 130$  МПа.

**Р е ш е н и е.** Определим степень статической неопределимости:

- количество неизвестных равно четырем  $\{Z_A, Y_A, Y_B, Y_C\}$ ;
- количество линейно независимых уравнений статического равновесия равно трем  $\{\sum Z = 0, \sum Y = 0, \sum M_A = 0\}$ ;
- степень статической неопределимости равна  $n = 4 - 3 = 1$ .

Составим каноническое уравнение

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

Вычислим коэффициент канонического уравнения

$$\delta_{11} = \frac{\bar{M}_1 \times \bar{M}_1}{EJ_x} = \frac{1}{EJ_x} \left\{ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right\} = \frac{10}{3EJ_x};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{\bar{M}_1 \times M_F}{EJ_x} = \frac{10^3}{EJ_x} \left\{ \frac{2}{3} \cdot 54 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 2 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right\} = \frac{468 \cdot 10^3}{3EJ_x}.$$

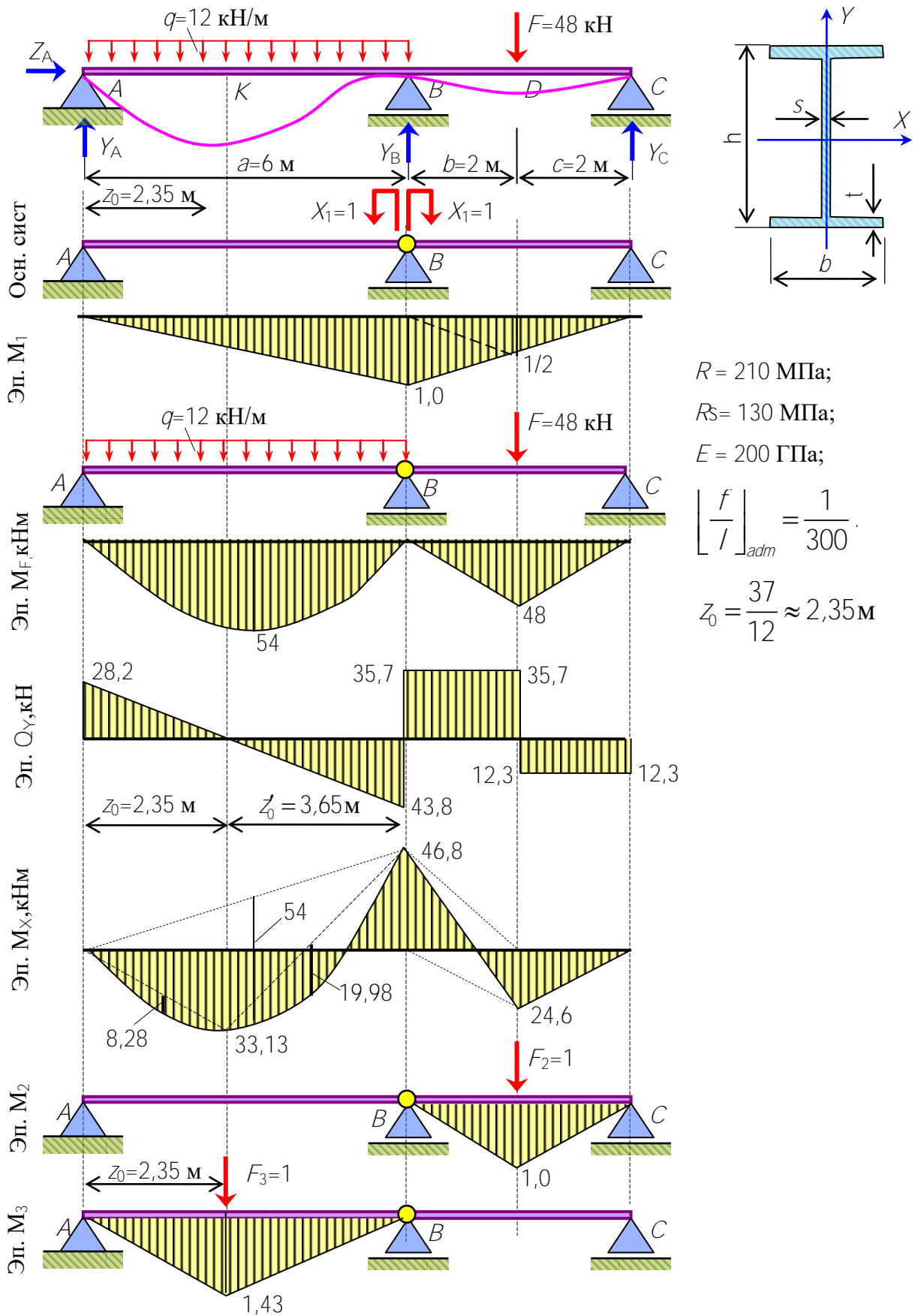


Рис.186. Схема статически неопределимая балка, эпюры поперечных сил, изгибающих моментов от нагрузки, единичные эпюры и упругая ось

Подставим значения коэффициента и свободного члена в каноническое уравнение

$$\frac{10}{3EJ_x} X_1 + \frac{468 \cdot 10^3}{3EJ_x} = 0.$$

Решим его и получим значение неизвестного

$$X_1 = \frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{468 \cdot 10^3 / 3EJ_x}{10/3EJ_x} = 46,8 \text{ кНм}.$$

Приложим к основной системе нагрузку и найденный опорный момент  $X_1=46,8$  кНм. Построим эпюры поперечных сил  $Q_y$  и изгибающих моментов  $M_x$  (рис.186).

Из условия прочности

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} \leq R$$

определим требуемый момент сопротивления

$$W_x^{\text{тр}} = \frac{M_x}{R} = \frac{46,8 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 222,86 \text{ см}^3.$$

По таблицам прокатных профилей подберем двутавр с уклонами полок №22  $W_x=232$  см<sup>3</sup>,  $J_x=2550$  см<sup>4</sup>,  $S_x^0=131$  см<sup>3</sup>,  $s = 5,4$  мм.

Проверим по условию прочности

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} = \frac{46,8 \cdot 10^3}{232 \cdot 10^{-6}} = 201,72 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

Недогрузка составляет

$$\frac{R - \sigma}{R} \cdot 100 = \frac{210 - 201,72}{210} \cdot 100 = 3,9\%.$$

Проверим на прочность по касательным напряжениям

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x^0}{J_x \cdot s} = \frac{43,8 \cdot 10^3 \cdot 131 \cdot 10^{-6}}{2550 \cdot 10^{-8} \cdot 5,4 \cdot 10^{-3}} = 41,67 \text{ МПа} < R_s = 130 \text{ МПа}.$$

Вычислим прогиб балки в точке  $D$ . Для этого перемножим единичную эпюру  $\bar{M}_2$  на окончательную эпюру изгибающих моментов  $M_F$  и разделить на жесткость  $EJ_x$  (рис.217).

$$V_D = \frac{\bar{M}_2 \times M_x}{E \cdot J_x} = \frac{10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 2550 \cdot 10^{-8}} \cdot \left\{ -\frac{1}{2} \cdot 46,8 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 24,6 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 24,6 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right\} = 3,37 \text{ мм (вниз)}$$

Вычислим прогиб балки в точке  $K$ . Для этого перемножим единичную эпюру  $\bar{M}_3$  на окончательную эпюру изгибающих моментов  $M_x$  и разделим на жесткость  $EJ_x$  (рис.186).

$$V_K = \frac{\bar{M}_3 \times M_x}{E \cdot J_x} = \frac{10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 2550 \cdot 10^{-8}} \cdot \left\{ -\frac{1}{2} \cdot 33,13 \cdot 2,35 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,43 + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \cdot 8,28 \cdot 2,35 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,43 - \frac{1}{2} \cdot 46,8 \cdot 3,65 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,43 + \frac{1}{2} \cdot 33,13 \cdot 3,65 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,43 + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \cdot 19,98 \cdot 3,65 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,43 \right\} = 19,24 \text{ мм (вниз)}.$$

Проверим балку по жесткости

$$\frac{V_K}{a} = \frac{19,24}{6000} = \frac{1}{312} < \left[ \frac{f}{l} \right]_{adm} = \frac{1}{300}.$$

Условие жесткости балки выполняется.

По найденным значениям прогибов и учитывая, что на опорах прогибы равны нулю, построим упругую ось балки (рис.186). Отметим, что упругая ось балки должна соответствовать эпюре изгибающих моментов.

## 2.20 Расчет балки на прочность и жесткость при плоском косом изгибе

**Д а н о.** Двутавровая балка №24, зашеченная одним концом и нагруженная на свободном конце сосредоточенной силой  $F=3,6$  кН, направленной под углом  $\alpha=12^\circ$  к вертикальному направлению (рис.187). Длина балки  $l=2$  м. Требуется построить эпюры изгибающих моментов в двух главных плоскостях, установить опасное сечение, найти положение нейтральной оси, проверить по условию прочности, найти прогиб и его направление на свободном конце балки.

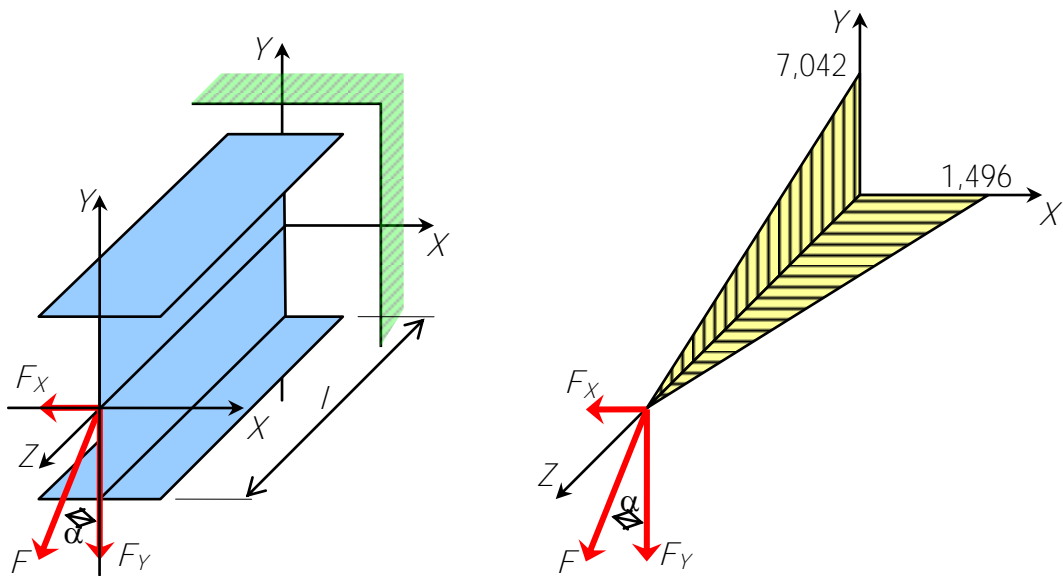
**Р е ш е н и е.** Выпишем геометрические характеристики сечения двутавра №24:

- высота сечения  $h = 240$  мм;
- ширина полки сечения  $b = 115$  мм;
- момент инерции сечения относительно оси перпендикулярной стенке двутавра  $J_x = 3460 \text{ см}^4$ ;
- момент инерции сечения относительно оси параллельной стенке двутавра  $J_y = 198 \text{ см}^4$ .

Определим проекции силы  $F$  на главные оси инерции сечения двутавра

$$F_x = F \cdot \sin(\alpha) = 3,6 \cdot \sin(12^\circ) = 0,748 \text{ кН};$$

$$F_y = F \cdot \cos(\alpha) = 3,6 \cdot \cos(12^\circ) = 3,521 \text{ кН}.$$



**Рис.187. Схема двутавровой консоли и совмещенная эпюра изгибающих моментов в двух главных плоскостях**

Вычислим изгибающие моменты от составляющих силы  $F_x$  и  $F_y$  в сечении, расположенном у заземления балки

$$M_x = F_y \cdot l = 3,521 \cdot 2 = 7,042 \text{ кНм}; \quad M_y = F_x \cdot l = 0,748 \cdot 2 = 1,496 \text{ кНм}.$$

Построим эпюры изгибающих моментов, выберем опасное сечение у заземления и направим главные центральные оси в сторону растянутых волокон балки.

Так как отношение изгибающих моментов во всех поперечных сечениях балки одинаковое, то это значит, что плоскость суммарного изгибающего момента так же занимает одинаковое положение во всех сечениях. То есть, имеет место плоский кривой изгиб.

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{M_x}{M_y} = \frac{1,496}{7,042} = 0,212; \quad \alpha \approx 12^\circ.$$

Определим положение нейтральной оси. Для этого найдем угол наклона нейтральной оси к главной центральной оси инерции  $X$ .

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{J_x}{J_y} \cdot \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{3460}{198} \cdot \operatorname{tg}(12^\circ) = 3,71; \quad \beta = \operatorname{arctg}(3,71) = 74,9^\circ.$$

Угол  $\beta$  откладываем от оси  $X$  так, чтобы нейтральная ось проходила через отрицательные квадранты координатной плоскости (рис.188).

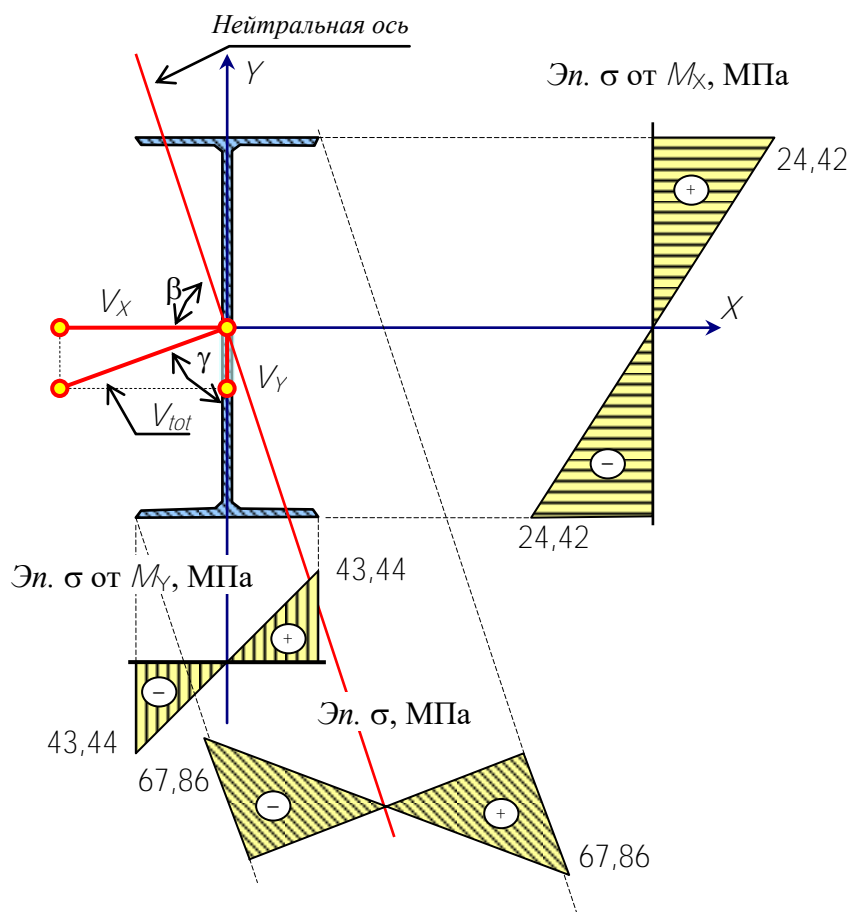
Определим координаты опасной точки  $t$  в растянутой части сечения

$$x_t = +\frac{b}{2} = +\frac{11,5}{2} = +5,75 \text{ см}; \quad y_t = +\frac{h}{2} = +\frac{24}{2} = +12,0 \text{ см}.$$

Определим координаты опасной точки  $s$  в сжатой части сечения

$$x_s = -\frac{b}{2} = -\frac{11,5}{2} = -5,75 \text{ см}; \quad y_s = -\frac{h}{2} = -\frac{24}{2} = -12,0 \text{ см}.$$





**Рис.188. Эпюры нормальных напряжений в сечении балки, испытывающей плоский косой изгиб**

Определим напряжения в опасных точках поперечного сечения балки при косом изгибе.

$$\sigma_s = \frac{M_x}{J_x} \cdot y_s + \frac{M_y}{J_y} \cdot x_s = \frac{7,042 \cdot 10^3}{3460 \cdot 10^{-8}} \cdot (-12 \cdot 10^{-2}) + \frac{1,496 \cdot 10^3}{198 \cdot 10^{-8}} \cdot (-5,75 \cdot 10^{-2}) =$$

$$= -24,42 - 43,44 = -67,86 \text{ МПа};$$

$$\sigma_t = \frac{M_x}{J_x} \cdot y_t + \frac{M_y}{J_y} \cdot x_t = \frac{7,042 \cdot 10^3}{3460 \cdot 10^{-8}} \cdot (+12 \cdot 10^{-2}) + \frac{1,496 \cdot 10^3}{198 \cdot 10^{-8}} \cdot (+5,75 \cdot 10^{-2}) =$$

$$= 24,42 + 43,44 = 67,86 \text{ МПа}.$$

Вычислим прогиб балки в горизонтальном и вертикальном направлениях, используя ранее полученную формулу  $V = \frac{F \cdot \beta}{3EJ_x}$ .

$$V_{cx} = \frac{F_x \cdot \beta}{E \cdot J_y} = \frac{0,748 \cdot 10^3 \cdot 2^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 198 \cdot 10^{-8}} = 15,11 \text{ мм};$$

$$V_{cy} = \frac{F_y \cdot \beta}{E \cdot J_x} = \frac{3,521 \cdot 10^3 \cdot 2^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 4,07 \text{ мм}.$$

Определим полный прогиб на свободном конце балки

$$V_{tot} = \sqrt{V_{CX}^2 + V_{CY}^2} + \sqrt{15,11^2 + 4,07^2} = 15,65 \text{ мм.}$$

Найдем направление полного прогиба

$$\gamma = \arctg\left(\frac{V_{CX}}{V_{CY}}\right) = \arctg\left(\frac{5,04}{1,36}\right) = 74,9^\circ \approx 75^\circ.$$

Положение нейтральной оси показано на рисунке 188.

## 2.21 Расчет балки на прочность и жесткость при пространственном косом изгибе

**Д а н о.** Деревянная балка прямоугольного сечения, опирающаяся своими концами на шарнирные опоры (рис.189). Балка загружена вертикальной равномерно распределенной нагрузкой  $q = 24$  кН/м и горизонтальной сосредоточенной силой  $F = 6$  кН, приложенной в ее середине. Размеры сечения балки  $b \times h = 18 \times 56$  см, ее длина (пролет)  $l = 6$  м. Модуль упругости материала балки  $E = 10$  ГПа.

Требуется построить эпюры изгибающих моментов, построить нейтральную ось, найти максимальные нормальные напряжения, найти прогиб и его направление в середине пролета балки.

**Р е ш е н и е.** Определим главные центральные моменты поперечного сечения балки. При этом учитываем, что сечение имеет оси симметрии, поэтому положение главных осей инерции заранее известно – это оси симметрии.

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{18 \cdot 56^3}{12} \approx 263400 \text{ см}^4; \quad J_y = \frac{b^3 \cdot h}{12} = \frac{18^3 \cdot 56}{12} \approx 27200 \text{ см}^4.$$

Рассмотрим балку только в вертикальной плоскости  $ZY$  (рис.189). Вычислим вертикальные реакции опор балки.

$$Y_A = \frac{ql}{2} = \frac{24 \cdot 6}{2} = 72 \text{ кН}; \quad Y_B = \frac{ql}{2} = \frac{24 \cdot 6}{2} = 72 \text{ кН}.$$

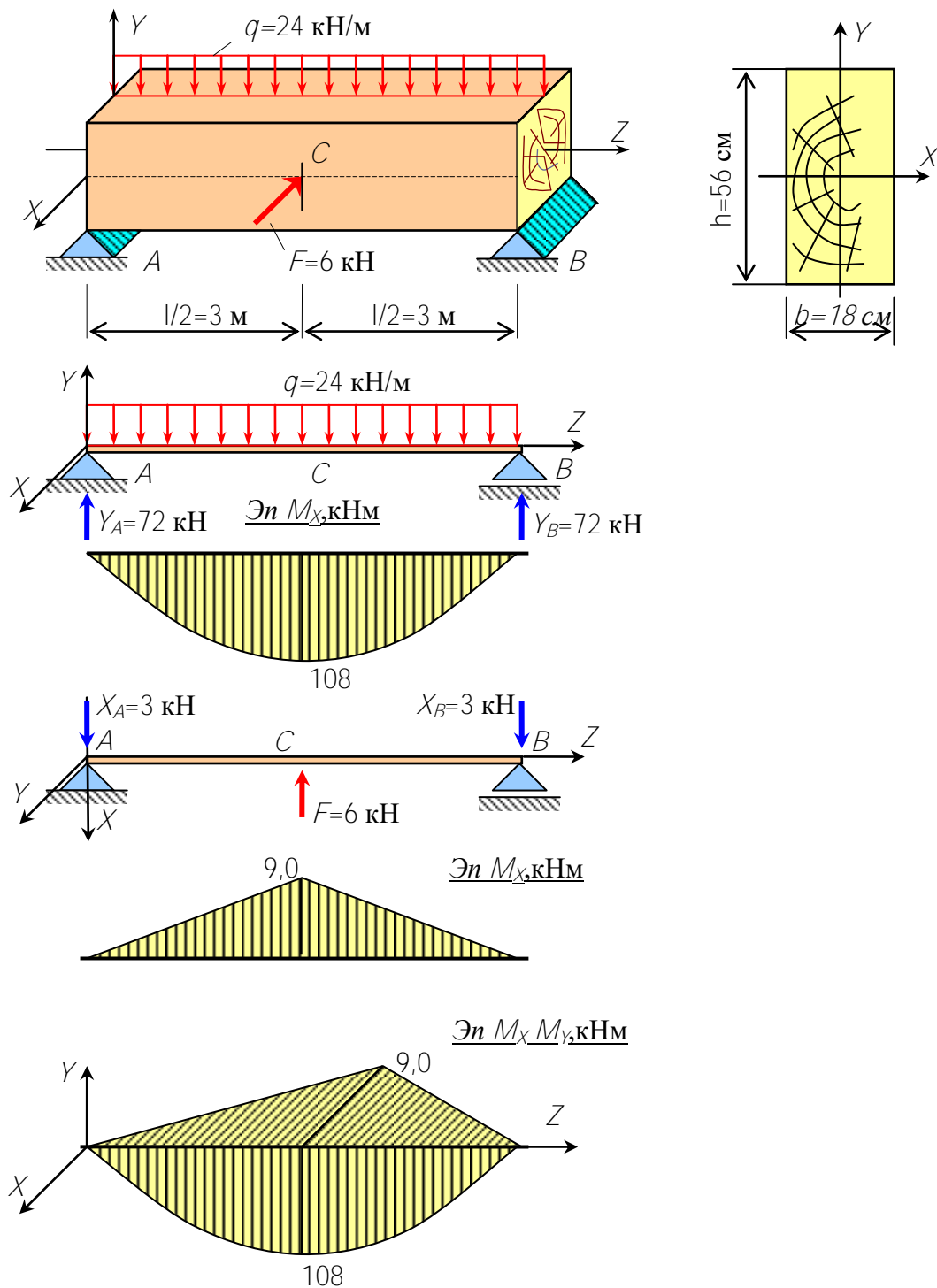
Рассмотрим балку только в горизонтальной плоскости  $ZX$  (рис.189). Вычислим вертикальные реакции опор балки.

$$X_A = \frac{F}{2} = \frac{6}{2} = 3,0 \text{ кН}; \quad Y_B = \frac{F}{2} = \frac{6,0}{2} = 3,0 \text{ кН}.$$

Пользуясь методом сечений и правилами, построим эпюр изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$  построим эпюру изгибающих моментов в плоскости  $ZX$  и  $ZY$  (рис.189). В точке  $C$  расчетные моменты равны  $M_x = 108$  кНм и  $M_y = 9,0$  кНм.

Определим угол наклона нейтральной оси к координатной оси  $X$ .

$$\beta = \arctg\left(\frac{J_x}{J_y} \cdot \frac{M_y}{M_x}\right) = \arctg\left(\frac{263400}{27200} \cdot \frac{9,0}{108,0}\right) = 38,9^\circ.$$



**Рис.189. Схема балки, испытывающей пространственный кривой изгиб и эпюры изгибающих моментов в плоскости  $Z_Y$  и  $Z_X$**

Определим опасные точки в растянутой и в сжатой частях сечения  $C$ . Их координаты

$$x_t = \frac{b}{2} = \frac{18,0}{2} = 9,0 \text{ см};$$

$$y_t = \frac{h}{2} = \frac{56,0}{2} = 28,0 \text{ см};$$

$$x_s = -\frac{b}{2} = -\frac{18,0}{2} = -9,0 \text{ см};$$

$$y_s = -\frac{h}{2} = -\frac{56,0}{2} = -28,0 \text{ см}.$$

Вычислим нормальные напряжения в опасных точках сечения  $C$ .

$$\sigma_t = \frac{M_x}{J_x} y_t + \frac{M_y}{J_y} x_t = \frac{108,0 \cdot 10^3}{263400 \cdot 10^{-8}} \cdot 28 \cdot 10^{-3} + \frac{9,0 \cdot 10^3}{27200 \cdot 10^{-8}} \cdot 9,0 \cdot 10^{-3} = ;$$

$$= 1,15 + 0,30 \text{ МПа} = 1,45 \text{ МПа};$$

$$\sigma_s = \frac{M_x}{J_x} y_s + \frac{M_y}{J_y} x_s = \frac{108,0 \cdot 10^3}{263400 \cdot 10^{-8}} \cdot (-28 \cdot 10^{-3}) + \frac{9,0 \cdot 10^3}{27200 \cdot 10^{-8}} \cdot (-9,0 \cdot 10^{-3}) =$$

$$= -1,15 - 0,30 = -1,45 \text{ МПа}$$

Прогиб балки в точке  $C$  по горизонтальному направлению вычислим по формуле

$$V_{xc} = \frac{F \cdot \beta}{48 \cdot EJ_y} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 6^3}{48 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 27200 \cdot 10^{-8}} = 9,93 \text{ мм}.$$

Прогиб балки в точке  $C$  по вертикальному направлению вычислим по формуле

$$V_{yc} = \frac{5ql^4}{768EJ_x} = \frac{5 \cdot 24 \cdot 10^3 \cdot 6^4}{768 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 263400 \cdot 10^{-8}} = 7,69 \text{ мм}.$$

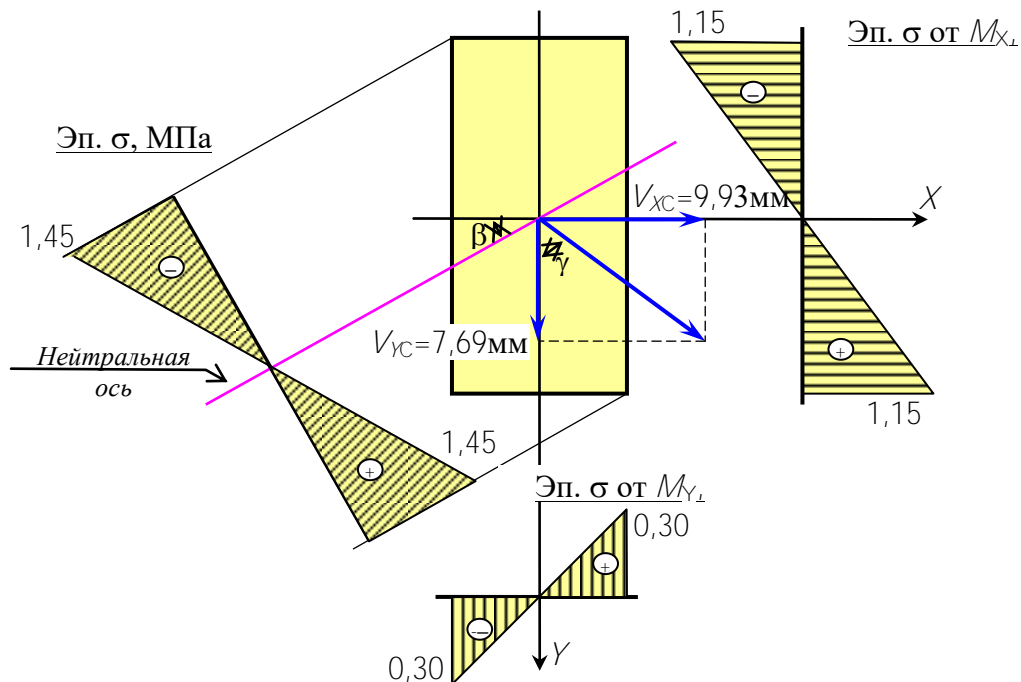


Рис. 190. Поперечное сечение балки в точке  $C$ , эпюры нормальных напряжений и направления прогибов (вид справа)

Определим направление полного прогиба балки в точке  $C$

$$\gamma = \arctg\left(\frac{V_{xc}}{V_{yc}}\right) = \arctg\left(\frac{9,93}{7,69}\right) = 52^\circ.$$

Полный прогиб балки с точки  $C$ .

$$V_{tot} = \sqrt{V_{xc}^2 + V_{yc}^2} = \sqrt{9,93^2 + 7,69^2} = 12,56 \text{ мм}.$$

Построим эпюры напряжений и покажем прогибы (рис. 190).

## 2.22 Расчет стержня на внецентренное растяжение (сжатие)

Дано сечение внецентренно сжатого стержня (рис.191). Равнодействующая сжимающей силы равна  $F=108$  кН. Требуется найти положение центра тяжести сечения, положение нулевой линии, определить опасные точки и напряжения в них, построить эпюру нормальных напряжений и ядро сечения.

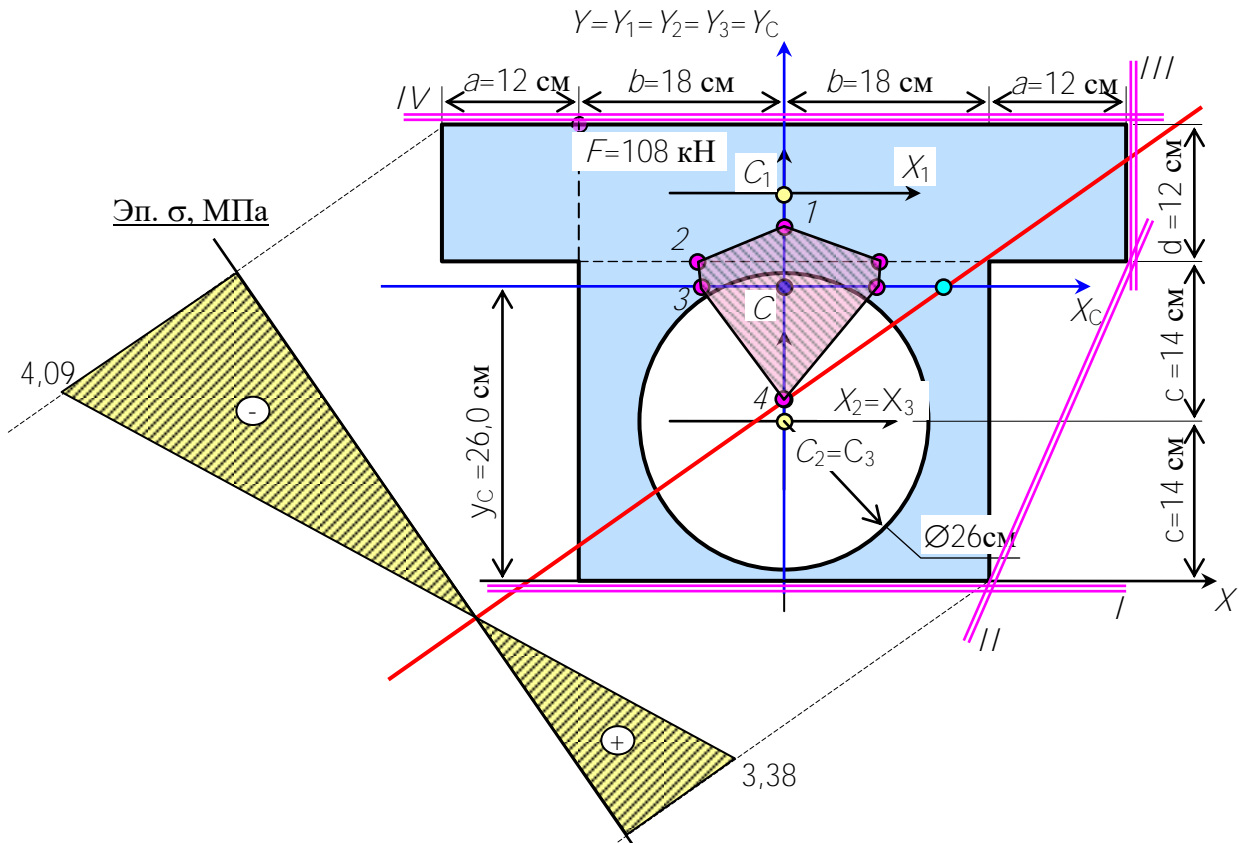


Рис. 191. Сечение внецентренно сжатого стержня, эпюра напряжений и ядро сечения

**Решение.**

Разделим сечение на части, имеющие простые геометрические формы – прямоугольник верхний, прямоугольник нижний и круг. Выберем вспомогательные оси координат – ось  $X$  по нижнему краю сечения, а ось  $Y$  – по оси симметрии. Отметим положения центров тяжести отдельных частей сечения и определим их координаты, вычислим площади и осевые моменты инерции относительно их собственных центральных осей, параллельных выбранным вспомогательным осям (рис.191).

Для первой части сечения – верхний прямоугольник

$$x_1 = 0; \quad y_1 = 2 \cdot c + \frac{d}{2} = 2 \cdot 14 + \frac{12}{2} = 34 \text{ см};$$

$$A = (2 \cdot a + 2 \cdot b) \cdot d = (2 \cdot 12 + 2 \cdot 18) \cdot 12 = 720 \text{ см}^2;$$

$$J_{x_1} = \frac{(2a + 2b) \cdot d^3}{12} = \frac{(2 \cdot 12 + 2 \cdot 18) \cdot 12^3}{12} = 8640 \text{ см}^4;$$

$$J_{y1} = \frac{(2a+2b)^3 \cdot d}{12} = \frac{(2 \cdot 12 + 2 \cdot 18)^3 \cdot 12}{12} = 216000 \text{ см}^4.$$

Для второй части сечения – нижний прямоугольник

$$x_2 = 0; \quad y_2 = c = 14 \text{ см};$$

$$A_2 = (2 \cdot b)(2 \cdot c) = (2 \cdot 18) \cdot (2 \cdot 14) = 1008 \text{ см}^2;$$

$$J_{x2} = \frac{(2b)(2c)^3}{12} = \frac{(2 \cdot 18)(2 \cdot 14)^3}{12} = 65856 \text{ см}^4;$$

$$J_{y2} = \frac{(2b)^3(2c)}{12} = \frac{(2 \cdot 18)^3(2 \cdot 14)}{12} = 108864 \text{ см}^4.$$

Для третьей части сечения

$$x_3 = 0; \quad y_3 = c = 14 \text{ см};$$

$$A_3 = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 26^2}{4} = 530,9 \text{ см}^2;$$

$$J_{x3} = J_{y3} = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 26^4}{64} = 22431,8 \text{ см}^4;$$

Координаты точки приложения равнодействующей силы в базовых осях

$$x_F = -b = -18 \text{ см}; \quad y_F = 2c + d = 2 \cdot 14 + 12 = 40 \text{ см}.$$

Площадь всего сечения

$$A_0 = A_1 + A_2 - A_3 = 720 + 1008 - 530,9 = 1197,1 \text{ см}^2.$$

Статический момент всего сечения относительно вспомогательной оси X

$$S_x = A_1 y_1 + A_2 y_2 - A_3 y_3 = 720 \cdot 34 + 1008 \cdot 14 - 530,9 \cdot 14 = 31159 \text{ см}^3.$$

Вычислим координату центра тяжести всего сечения

$$x_C = 0; \quad y_C = \frac{S_x}{A_0} = \frac{31159,0}{1197,1} = 26,0 \text{ см}.$$

Покажем центр тяжести всего сечения и проведем центральные оси, параллельно соответствующим базовым осям (рис.191).

Вычислим координаты центров тяжести частей сечения относительно центральных осей  $X_C$  и  $Y_C$ .

$$x_{c1} = x_1 - x_C = 0; \quad y_{c1} = y_1 - y_C = 34 - 26 = 8 \text{ см};$$

$$x_{c2} = x_2 - x_C = 0; \quad y_{c2} = y_2 - y_C = 14 - 26 = -12 \text{ см};$$

$$x_{c3} = x_3 - x_C = 0; \quad y_{c3} = y_3 - y_C = 14 - 26 = -12 \text{ см}.$$

Найдем координаты точки приложения силы в центральных осях  $X_C$  и  $Y_C$

$$x_{CF} = x_F - x_C = -18,0 - 0,0 = -18,0 \text{ см};$$

$$y_{CF} = y_F - y_C = 40,0 - 26,0 = 14,0 \text{ см}.$$

Проверим координаты центра тяжести всего сечения, используя утверждение, что статический момент относительно любой центральной

оси должен быть равным нулю. Вычислим статические моменты всего сечения относительно центральных осей  $X_C$  и  $Y_C$ .

$$S_{X_C} = A_1 y_{C1} + A_2 y_{C2} - A_3 y_{C3} = 720 \cdot 8,0 + 1008 \cdot (-12,0) - 530,9 \cdot (-12,0) = 34,80 \approx 0$$

Погрешность координаты центра тяжести не превышает

$$\delta_{y_C} = \frac{S_{X_C}}{A_0} = \frac{34,80}{1197,1} = 0,03 \text{ см} = 0,3 \text{ мм}.$$

$S_{Y_C} = 0$ , так как ось  $Y_C$  является осью симметрии сечения.

Вычислим главные центральные моменты инерции всего сечения.

$$J_{X_C} = (J_{X1} + A_1 y_{C1}^2) + (J_{X2} + A_2 y_{C2}^2) - (J_{X3} + A_3 y_{C3}^2) = (8640 + 720 \cdot 8^2) + (65856 + 1008 \cdot 12^2) - (22432 + 530,9 \cdot 12^2) \approx 166840 \text{ см}^4;$$

$$J_{Y_C} = (J_{Y1} + A_1 x_{C1}^2) + (J_{Y2} + A_2 x_{C2}^2) - (J_{Y3} + A_3 x_{C3}^2) = (216000 + 720 \cdot 0^2) + (108864 + 1008 \cdot 0^2) - (22432 + 530,9 \cdot 0^2) \approx 302400 \text{ см}^4.$$

Вычислим квадраты радиусов инерции сечения

$$r_{X_C}^2 = \frac{J_{X_C}}{A_0} = \frac{166800}{1197} = 139,3 \text{ см}^2; \quad r_{Y_C}^2 = \frac{J_{Y_C}}{A_0} = \frac{302400}{1197} = 252,6 \text{ см}^2.$$

Найдем отсеченные отрезки нулевой линии

$$a_x = -\frac{r_{Y_C}^2}{x_{CF}} = -\frac{252,6}{-18,0} \approx 14,0 \text{ см}^2; \quad a_y = -\frac{r_{X_C}^2}{x_{CF}} = -\frac{252,6}{14,0} \approx -10,0 \text{ см}^2.$$

Построим нулевую линию на сечении стержня и определим координаты опасных точек в растянутой и в сжатой частях сечения в базовых осях координат. Обозначим опасную точку в сжатой части сечения буквой  $s$ , а в сжатой –  $t$ .

$$x_s = -(a+b) = -(12+18) = -30 \text{ см}; \quad y_s = 2c+d = 2 \cdot 14 + 12 = 40 \text{ см}; \\ x_t = a+b = 12+18 = 30 \text{ см}; \quad y_t = 0.$$

Определим координаты опасных точек в растянутой и в сжатой частях сечения в центральных осях координат  $X_C$  и  $Y_C$ .

$$x_{Cs} = x_s - x_C = -30 - 0 = -30 \text{ см}; \quad y_{Cs} = y_s - y_C = 40 - 26 = 14 \text{ см}; \\ x_{Ct} = x_t - x_C = 30 - 0 = 30 \text{ см}; \quad y_{Ct} = y_t - y_C = 0 - 26 = -26 \text{ см}.$$

Найдем напряжения в опасных точках сечения колонны

$$\sigma_t = \frac{N}{A_0} \left[ 1 + \frac{x_{CF} x_{Ct}}{r_{Y_C}^2} + \frac{y_{CF} y_{Ct}}{r_{X_C}^2} \right] = \frac{-108 \cdot 10^3}{1197 \cdot 10^{-4}} \left[ 1 + \frac{-18 \cdot 30}{252,6} + \frac{14 \cdot (-26)}{139,3} \right] = 3,38 \text{ МПа};$$

$$\sigma_s = \frac{N}{A_0} \left[ 1 + \frac{x_{CF} x_{Cs}}{r_{Y_C}^2} + \frac{y_{CF} y_{Cs}}{r_{X_C}^2} \right] = \frac{-108 \cdot 10^3}{1197 \cdot 10^{-4}} \left[ 1 + \frac{-18 \cdot (-30)}{252,6} + \frac{14 \cdot 14}{139,3} \right] = -4,09 \text{ МПа}$$

Построим эпюру нормальных напряжений (рис.191).

Построим ядро сечения. Для этого найдем отсеченные отрезки касательных к сечению колонны и соответствующие им точки приложения силы.

1-я касательная (нулевая линия)

$$a_{x1} = \infty; \quad a_{y1} = -26 \text{ см.}$$

$$x_{F1} = -\frac{I_{yC}}{a_{x1}} = -\frac{252,6}{\infty} = 0; \quad y_{F1} = -\frac{I_{xC}}{a_{y1}} = -\frac{139,3}{-26,0} = 5,36 \text{ см.}$$

2-я касательная (нулевая линия).

Из рисунка видно, что вторая касательная проходит через две точки сечения с координатами

$$\begin{aligned} x_{z1} &= b = 18 \text{ см}; & y_{z1} &= -y_C = -26 \text{ см}; \\ x_{z2} &= b + a = 18 + 12 = 30 \text{ см}; & y_{z2} &= 2c - y_C = 2 \cdot 14 - 26 = 2 \text{ см.} \end{aligned}$$

Отсеченные отрезки этой (второй) касательной определим из выражений

$$\begin{aligned} a_{x2} &= \frac{x_{z1} - x_{z2}}{y_{z1} - y_{z2}} y_C + x_{z1} = \frac{18 - 30}{-26 - 2} \cdot 26 + 18 = 29,2 \text{ см}; \\ a_{y2} &= \frac{y_{z1} - y_{z2}}{x_{z1} - x_{z2}} (-x_{z1}) - y_C = \frac{-26 - 2}{18 - 30} \cdot (-18) - 26 = 68,0 \text{ см.} \end{aligned}$$

3-я касательная (нулевая линия)

$$a_{x3} = b + a = 18 + 12 = 30 \text{ см}; \quad a_{y3} = \infty;$$

$$x_{F3} = -\frac{I_{yC}}{a_{x3}} = -\frac{252,6}{30} = -8,42 \text{ см}; \quad y_{F3} = -\frac{I_{xC}}{a_{y3}} = -\frac{139,4}{\infty} = 0.$$

4-я касательная (нулевая линия)

$$a_{y4} = 2c + d - y_C = 2 \cdot 14 + 12 - 26 = 14,0 \text{ см}; \quad a_{x4} = \infty;$$

$$x_{F4} = -\frac{I_{yC}}{a_{x4}} = -\frac{252,6}{\infty} = 0; \quad y_{F4} = -\frac{I_{xC}}{a_{y4}} = -\frac{139,4}{14,0} \approx -10,0 \text{ см.}$$

Отметим точки, координаты которых найдены, и соединим их согласно свойствам ядра сечения и нулевой линии (рис.191).

## 2.23 Расчет стержня круглого сечения, испытывающего кручение с изгибом

**Д а н о.** Вал круглого поперенного сечения (рис.192) закреплен на опорах с подшипниками и загружен двумя вертикальными силами  $F_1=120$  кН, одной горизонтальной силой  $F_2=40$  кН передает крутящий момент  $T_1=30$  кНм. Материал вала – сталь с расчетным сопротивлением  $R=180$  МПа. Размеры вала приведены на рисунке (рис.193). Требуется проверить прочность вала по третьей и по четвертой теориям прочности.

**Р е ш е н и е.**

Построим эпюры изгибающих и крутящих моментов (рис.193).

Вычислим осевой момент сопротивления поперечного сечения стержня



$$W_x = \frac{\pi D^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 24^3}{32} = 1357,0 \text{ см}^3.$$

Из эпюр (рис.192) назначим расчетные моменты  $T_C = 30 \text{ кНм}$ ;  
 $M_{XC} = 120 \text{ кНм}$ ;  $M_{YC} = 180 \text{ кНм}$ .

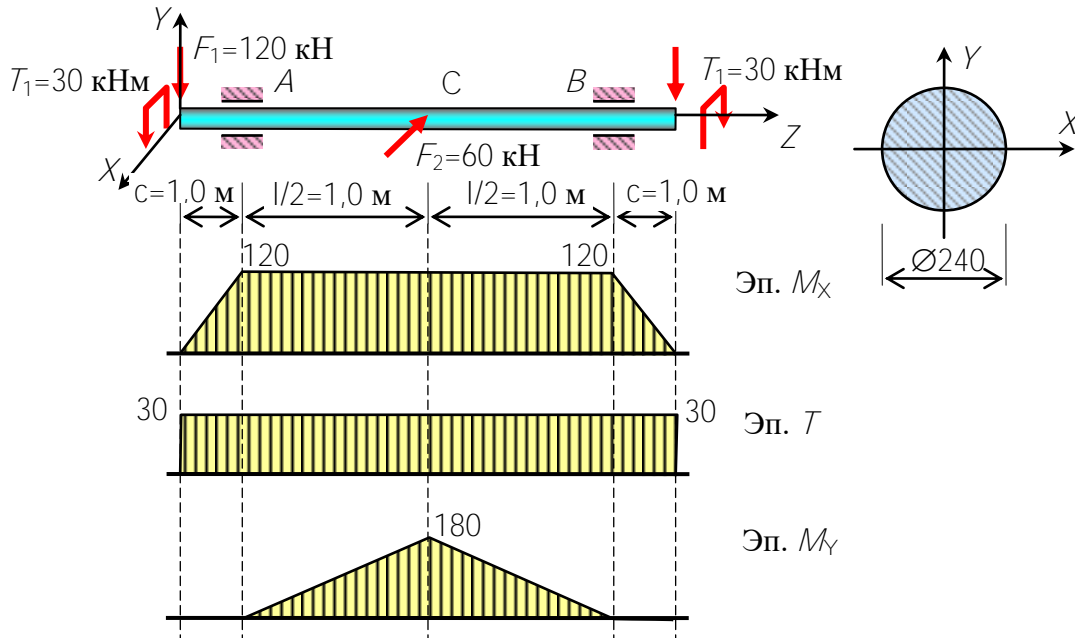


Рис. 192. Схема вала, эпюры изгибающих и крутящих моментов при изгибе с кручением

Вычислим суммарный изгибающий момент

$$M_u = \sqrt{M_{XC}^2 + M_{YC}^2} = \sqrt{120^2 + 180^2} = 216,33 \text{ кНм}.$$

Определим приведенный момент по третьей теории прочности

$$M_x^{\text{пр}} = \sqrt{M_u^2 + T_c^2} = \sqrt{216,33^2 + 30^2} = 218,4 \text{ кНм}.$$

Проверим на прочность по третьей теории прочности

$$\sigma^{\text{III}} = \frac{M_x^{\text{пр}}}{W_x} = \frac{218,4 \cdot 10^3}{1357 \cdot 10^{-6}} = 160,9 \text{ МПа} < R = 180 \text{ МПа}.$$

Определим приведенный момент по четвертой теории прочности

$$M_x^{\text{пр}} = \sqrt{M_u^2 + 0,75 \cdot T_c^2} = \sqrt{216,33^2 + 0,75 \cdot 30^2} = 217,89 \text{ кНм}.$$

Проверим на прочность по четвертой теории прочности

$$\sigma^{\text{IV}} = \frac{M_x^{\text{пр}}}{W_x} = \frac{217,89 \cdot 10^3}{1357 \cdot 10^{-6}} = 160,55 \text{ МПа} < R = 180 \text{ МПа}.$$

Прочность выполняется по обеим теориям.

## 2.24 Построение эпюр внутренних сил в пространственном стержне

**Д а н о.** Элемент, входящий в пространственную конструкцию. Поперечные сечения на всех трех участках стержня имеет форму круга диаметров  $D$ . Участки элемента ортогональны. Длина всех участков одинаковая и равная  $a = 2$  м. Форма элемента показаны на рисунке (рис.193). Требуется построить эпюры внутренних сил на участках пространственного элемента, установить виды сопротивления и привести расчетные формулы для напряжений.

**Р е ш е н и е.**

Будем отмечать расположение растянутых волокон словами – верхние или нижние, левые или правые, дальние или ближние. Знаки на эпюре изгибающих моментов не ставятся, а направление действия изгибающих моментов определяем положением волокон, которые они растягивают.

Знак продольной силы определяется тем, какое действие она совершает – растягивает или сжимает. Если продольная сила растягивает материал, то она принимается положительной, если сжатие, то она принимается отрицательной.

Знак поперечной силы принимается по правилу буравчика – если направление сдвига соответствует буравчику, вкручивающемуся в соответствующую поперечную ось, то поперечная сила, вызывающая этот сдвиг, принимается положительной. Если буравчик выкручивается из соответствующей оси координат, то поперечная сила считается отрицательной.

Знак на эпюре крутящих моментов не выставляется.

Определение внутренних сил выполняется по методу сечения. При этом продольную силу и поперечные силы предварительно направляем так, чтобы они были положительными.

Используя уравнения статического равновесия найдем внутренние силы в отмеченных сечениях стержня.

На участке 1-2 в сечении 1 (рис.224,  $a, б$ )

$$\sum Z = -N - F = -N - 6 = 0; \quad N = -6 \text{ кН};$$

$$\sum X = Q_x - q \cdot a = Q_x - 2 \cdot 2 = 0; \quad Q_x = 4 \text{ кН};$$

$$\sum Y = Q_y = 0;$$

$$\sum M_z = T - M + q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = T - 12 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = 0; \quad T = 8 \text{ кНм};$$

$$\sum M_x = M_x + F \cdot a = M_x + 6 \cdot 2 = 0; \quad M_x = -12 \text{ кНм};$$

$$\sum M_y = M_y - F \cdot a + q \cdot a \cdot a = M_y - 6 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 0; \quad M_y = 4 \text{ кНм}.$$

На участке 1-2 в сечении 2 (рис.224,  $в, з$ )

$$\sum Z = -N - F = -N - 6 = 0; \quad N = -6 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} \sum X &= Q_x - q \cdot a = Q_x - 2 \cdot 2 = 0; & Q_x &= 4 \text{ кН}; \\ \sum Y &= Q_y = 0; \\ \sum M_z &= T - M + q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = T - 12 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = 0; & T &= 8 \text{ кНм}; \\ \sum M_x &= M_x + F \cdot a = M_x + 6 \cdot 2 = 0; & M_x &= -12 \text{ кНм}; \\ \sum M_y &= M_y - F \cdot a = M_y - 6 \cdot 2 = 0; & M_y &= 12 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

На участке 2-3 в сечении 2 (рис.224, д, е)

$$\begin{aligned} \sum Z &= -N - qa = -N - 2 \cdot 2 = 0; & N &= -4 \text{ кН}; \\ \sum X &= Q_x = 0; & Q_x &= 0; \\ \sum Y &= Q_y - F = Q_y - 6 = 0; & Q_y &= 6 \text{ кН}; \\ \sum M_z &= T + Fa = T + 6 \cdot 2 = 0; & T &= 12 \text{ кНм}; \\ \sum M_x &= -M_x + F \cdot a = -M_x + 6 \cdot 2 = 0; & M_x &= 12 \text{ кНм}; \\ \sum M_y &= M_y = 0; & M_y &= 0. \end{aligned}$$

На участке 2-3 в сечении 3 (рис.225 ж, з)

$$\begin{aligned} \sum Z &= -N - qa = -N - 2 \cdot 2 = 0; & N &= -4 \text{ кН}; \\ \sum X &= Q_x = 0; & Q_x &= 0; \\ \sum Y &= Q_y - F = Q_y - 6 = 0; & Q_y &= 6 \text{ кН}; \\ \sum M_z &= T + Fa = T + 6 \cdot 2 = 0; & T &= -12 \text{ кНм}; \\ \sum M_x &= M_x = 0; & M_x &= 0; \\ \sum M_y &= M_y + qa \frac{a}{2} = M_y + 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = 0; & M_y &= 4. \end{aligned}$$

На участке 3-4 в сечении 3 (рис.194 и, к)

$$\begin{aligned} \sum Z &= -N = -N = 0; & N &= 0; \\ \sum X &= -Q_x - qa = -Q_x - 2 \cdot 2 = 0; & Q_x &= 4 \text{ кН}; \\ \sum Y &= Q_y - F = Q_y - 6 = 0; & Q_y &= 6 \text{ кН}; \\ \sum M_z &= T = 0; & T &= 0; \\ \sum M_x &= M_x + Fa = M_x + 6 \cdot 2 = 0; & M_x &= -12 \text{ кНм}; \end{aligned}$$

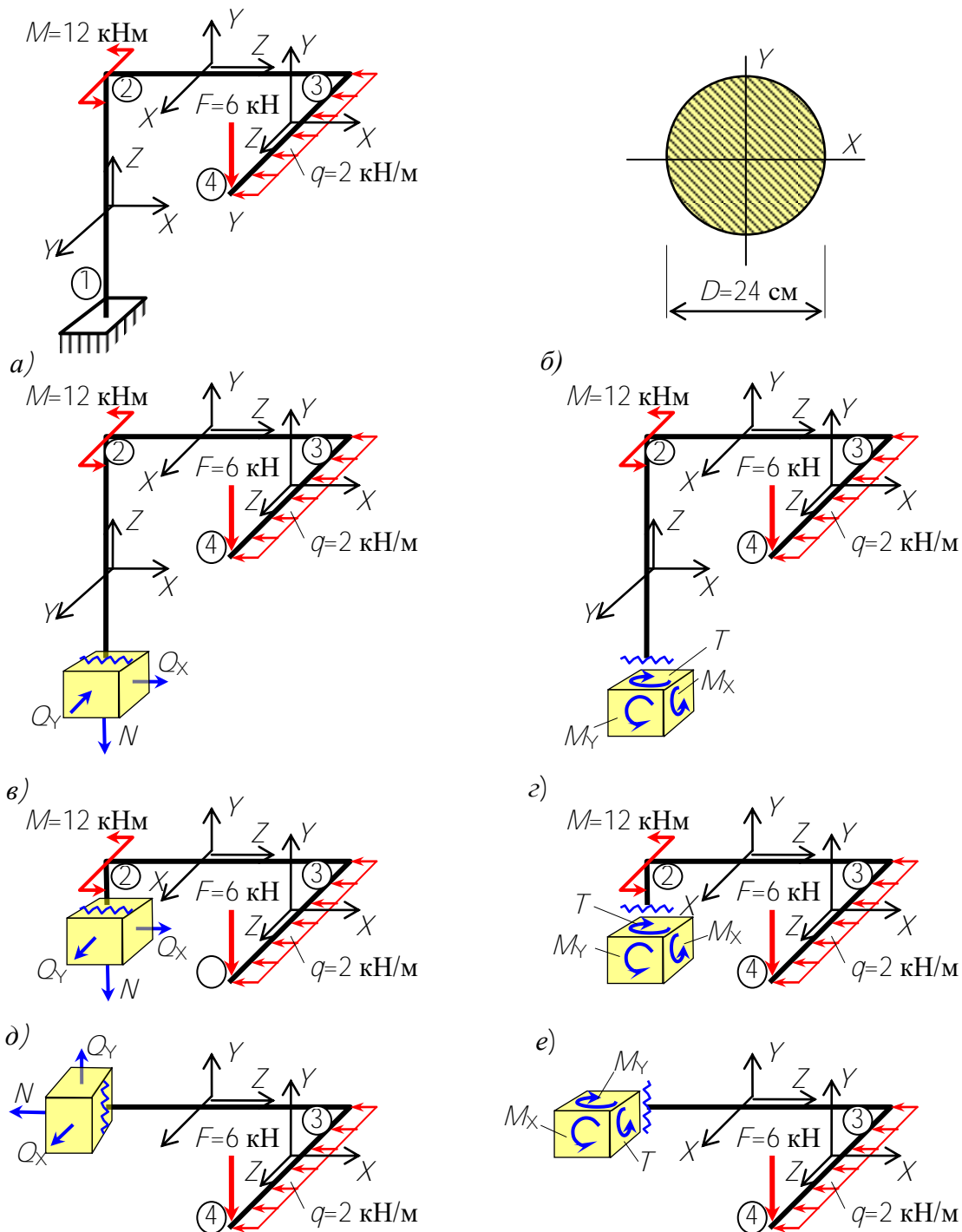
На участке 3-4 в сечении 4 (рис.194 л, м)

$$\begin{aligned} \sum Z &= -N = 0; & N &= 0; \\ \sum X &= -Q_x = 0; & Q_x &= 0; \\ \sum Y &= Q_y - F = Q_y - 6 = 0; & Q_y &= 6 \text{ кН}; \\ \sum M_z &= T = 0; & T &= 0; \\ \sum M_x &= M_x = 0; & M_x &= 0; \end{aligned}$$

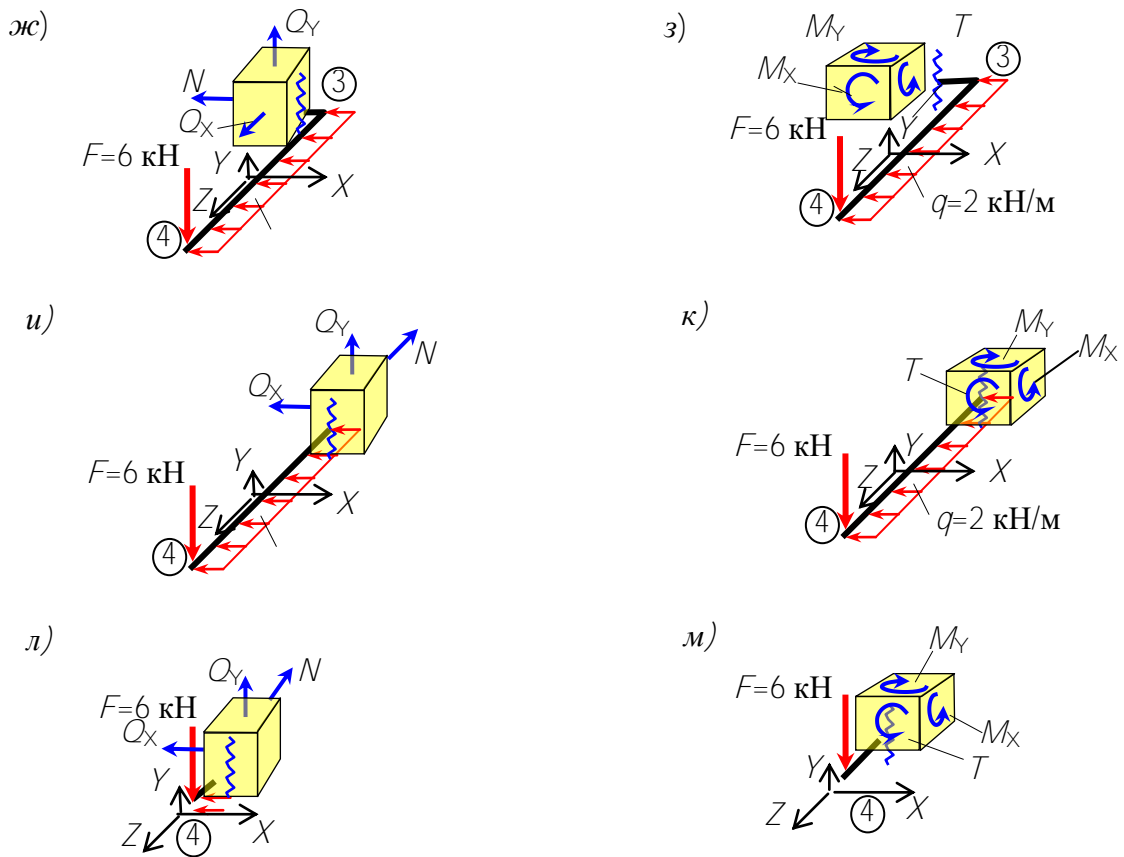
$$\sum M_y = M_y = 0;$$

$$M_y = -4 \text{ кНм}.$$

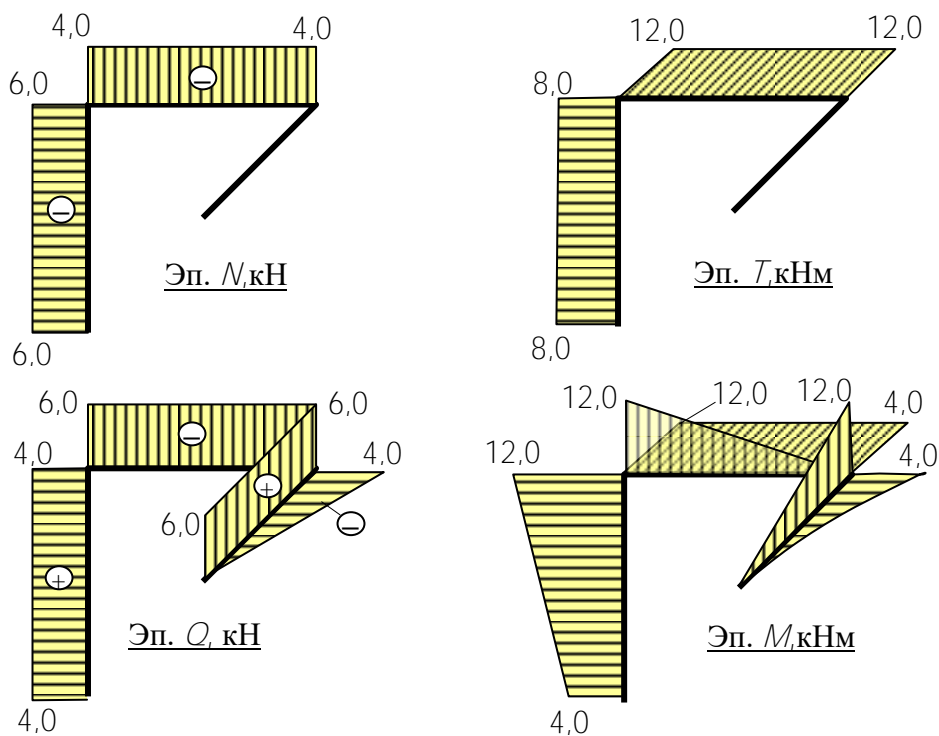
$$M_y = 0.$$



**Рис.193. Определение внутренних сил в сечениях пространственного стержня:**  
**а) и б) в точке 1 на участке 1-2; в) и г) в точке 2 на участке 1-2; д) и е) в точке 2 на участке 2-3**



**Рис. 194. Определение внутренних сил в сечениях пространственного стержня: ж) и з) в точке 3 на участке 2-3; и) и к) в точке 3 на участке 3-4; л) и м) в точке 4 на участке 3-4**



**Рис. 195. Эпюры внутренних сил в пространственном элементе**

По найденным значениям и используя правила, построим эпюры внутренних сил в пространственном элементе (рис. 195).

## 2.25 Подбор сечения сжатого стержня с учетом продольного изгиба

Д а н о. Стержень длиной  $l = 4$  м зажат обоими концами  $\mu = 0,5$  сжат силой  $F = 240$  кН. Подберем двутавровое сечение. Расчетное сопротивление и модуль упругости материала двутавра приняты равными  $R = 210$  МПа и  $E = 200$  ГПа.

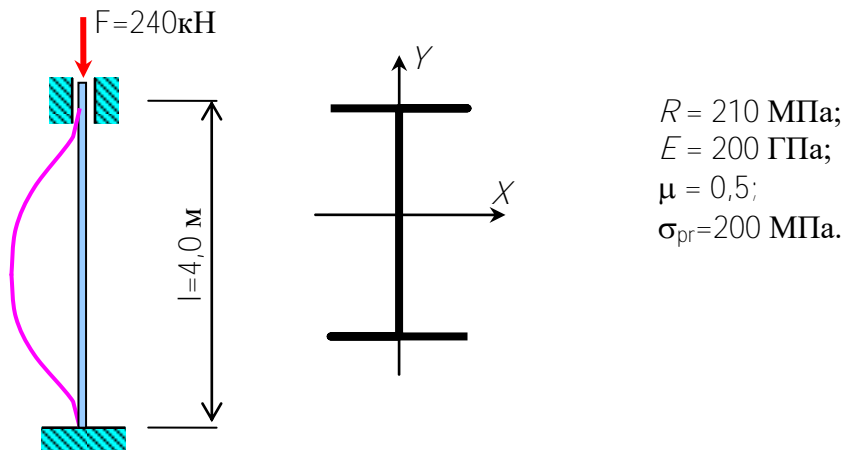


Рис.196. Схема сжатого двутаврового стержня

Р е ш е н и е. В первом приближении принимаем коэффициент продольного изгиба равным  $\varphi = 0,5$ . Из условия прочности при продольном изгибе

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi R$$

определим требуемую площадь сечения стержня

$$A_{\text{тр}} = \frac{F}{\varphi R} = \frac{240 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 210 \cdot 10^6} = 22,86 \text{ см}^2.$$

По требуемой площади поперечного сечения стержня подберем из таблицы прокатов двутавр №18 и выпишем его площадь и радиус инерции  $A = 23,4 \text{ см}^2$ ,  $i_y = 1,88 \text{ см}$ .

Определим гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{0,5 \cdot 400}{1,88} = 106.$$

Найдем коэффициент продольного изгиба, используя линейную интерполяцию

$$\varphi_{106} = \varphi_{100} + \frac{\varphi_{110} - \varphi_{100}}{10} \cdot 6 = 0,60 + \frac{0,52 - 0,60}{10} \cdot 6 = 0,552.$$

Проверим сжатый стержень по условию прочности при продольном изгибе

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{240 \cdot 10^3}{23,4 \cdot 10^{-4}} = 102,5 \text{ МПа} < \varphi R = 0,552 \cdot 210 \cdot 10^6 = 115,9 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

Определим критическое напряжение по формуле Эйлера, так как  $\lambda = 106 > \lambda_U = 100$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^9}{106^2} = 175 \text{ МПа}.$$

Вычислим критическую силу

$$F_{cr} = \sigma_{cr} A = 175 \cdot 10^6 \cdot 23,4 \cdot 10^{-4} = 409,5 \text{ кН}.$$

Найдем коэффициент запаса устойчивости

$$n_{\gamma} = \frac{F_{cr}}{F_{adm}} = \frac{409,5}{240} = 1,71.$$

## 2.26 Определение несущей способности сжатого стержня кольцевого поперечного сечения с учетом продольного изгиба

Д а н о. Стержень кольцевого сечения, шарнирно закрепленный верхним концом и защемленный нижним концом, сжат силой  $F = 240$  кН. Все числовые данные приведены на рисунке (рис. 197).

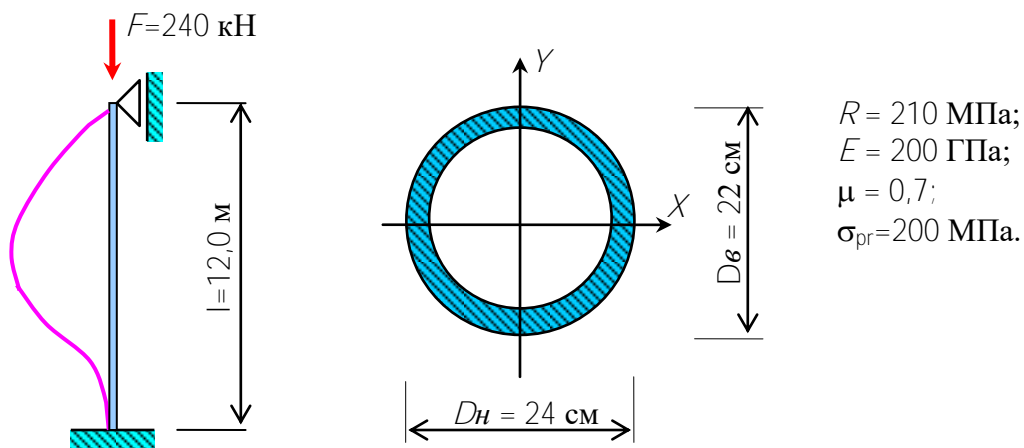


Рис. 197. Схема сжатого стержня кольцевого сечения

Р е ш е н и е.

Вычислим площадь сечения

$$A = \frac{\pi D_{н}^2}{4} - \frac{\pi D_{в}^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 24^2}{4} - \frac{3,14 \cdot 22^2}{4} = 72,22 \text{ см}^2.$$

Вычислим момент инерции сечения стержня

$$J_X = J_Y = \frac{\pi D_n^4}{64} - \frac{\pi D_g^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 24^4}{64} - \frac{3,14 \cdot 22^4}{64} = 4785 \text{ см}^4.$$

Определим радиус инерции сечения

$$i_X = i_Y = \sqrt{\frac{J_X}{A}} = \sqrt{\frac{4785}{72,22}} = 8,1 \text{ см}.$$

Найдем гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_X} = \frac{0,7 \cdot 1200}{8,1} = 104.$$

Вычислим предельную гибкость для материала стержня (стали)

$$\lambda_U = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пр}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^9}{200 \cdot 10^6}} = 99,3 \approx 100.$$

Определим критическую силу. Так как  $\lambda = 104 > \lambda_U = 100$ , воспользуемся формулой Эйлера.

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 4785 \cdot 10^{-8}}{(0,7 \cdot 12)^2} = 1337 \text{ кН}.$$

Найдем коэффициент продольного изгиба, используя таблицу  $\varphi$  и линейную интерполяцию

при  $\lambda=100$        $\varphi=0,60$ ;      при  $\lambda=110$        $\varphi=0,52$ .

По интерполяции получим

$$\varphi_{148} = \varphi_{100} + \frac{\varphi_{110} - \varphi_{100}}{10} \cdot 4 = 0,60 + \frac{0,52 - 0,60}{10} \cdot 4 = 0,568.$$

Проверим по условию прочности

$$\sigma = \frac{F}{A_{br}} = \frac{240 \cdot 10^3}{72,22 \cdot 10^{-4}} = 33,2 \text{ МПа} < \varphi R = 0,568 \cdot 210 = 119 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

Найдем несущую способность сжатой стойки – допускаемую сжимающую силу из условия прочности.

$$F_{adm} = \varphi R A_{br} = 0,568 \cdot 210 \cdot 10^6 \cdot 72,22 \cdot 10^{-4} = 861 \text{ кН}.$$

Определим коэффициент запаса устойчивости.

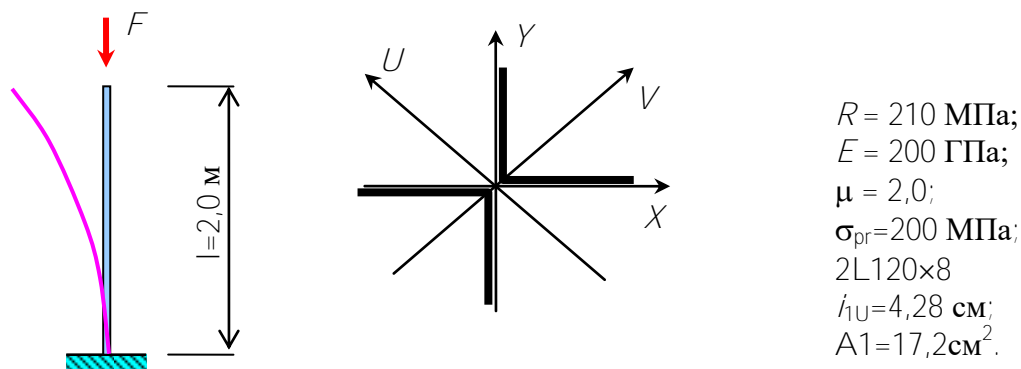
$$n_\gamma = \frac{F_{cr}}{F_{adm}} = \frac{1337}{861} = 1,55.$$

## 2.27 Определение несущей способности сжатого стержня, составленного из двух уголков, с учетом продольного изгиба

Д а н о. Сжатый стержень зашпелен нижним концом и свободен на верхнем конце. Стержень состоит из двух равнополочных прокатных



уголков L№120×8, образующих крестообразное сечение. Из таблицы прокатных профилей выпишем площадь сечения одного уголка  $A_1=17,2$  см<sup>2</sup>, радиус инерции  $i_{1U} = 4,28$  см. Расчетное сопротивление и модуль упругости равны  $R = 210$  МПа и  $E=200$  ГПа. По условию закрепления коэффициент приведения длины равен  $\mu = 2,0$ .



**Рис. 198. Схема сжатого стержня, состоящего из двух равнополочных уголков**

**Решение.** Вычислим гибкость стержня из плоскости, содержащей ось  $V$  (рис.198).

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_U} = \frac{2 \cdot 200}{4,28} = 93.$$

Используя таблицу коэффициентов продольного изгиба и линейную интерполяцию, вычислим коэффициент продольного изгиба при гибкости  $\lambda=93$ .

$$\varphi_{93} = \varphi_{90} + \frac{\varphi_{100} - \varphi_{90}}{10} \cdot 3 = 0,69 + \frac{0,60 - 0,69}{10} \cdot 3 = 0,663.$$

Из условия прочности найдем допускаемую сжимающую силу

$$F_{adm} = \varphi R \cdot 2A = 0,663 \cdot 210 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 17,2 \cdot 10^{-4} = 479 \text{ кН}.$$

Вычислим критическое напряжение, используя формулу Ясинского, так как  $\lambda=93 < \lambda_U=100$

$$\sigma_{cr} = a - b \cdot \lambda = 310 - 1,14 \cdot 93 = 204 \text{ МПа}.$$

Определим критическую сжимающую силу

$$F_{cr} = \sigma_{cr} \cdot 2A = 204 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 17,2 \cdot 10^{-4} = 702 \text{ кН}.$$

Найдем коэффициент запаса устойчивости

$$n_V = \frac{F_{cr}}{F_{adm}} = \frac{702}{479} = 1,47.$$

## 2.28 Расчет балки на поперечный удар

**Дано.** Балка пролетом 3 м, опирающаяся своими концами на шарнирные опоры (рис.199). На балку падает тело массой  $m=2000$  кг с высоты 11 см. Балка изготовлена из двутавра №20а с моментом инерции

$J_x=2030 \text{ см}^4$  и моментом сопротивления  $W_x=203 \text{ см}^3$ . Модуль упругости материала двутавра принят равным  $E = 200 \text{ ГПа}$ . Требуется найти динамический коэффициент, динамическое напряжение и динамический прогиб балки. Собственная масса не учитывается.

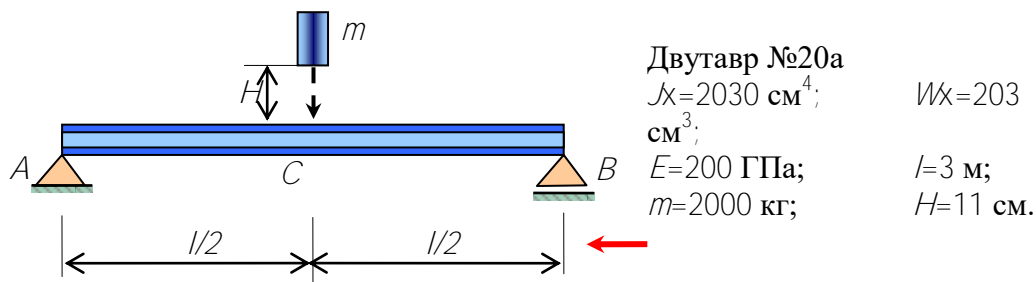


Рис.199. Схема поперечного удара по двутавровой балке

Вес падающего тела на поверхности Земли равен

$$F = mg = 2000 \cdot 10 = 20 \text{ кН}.$$

Определим прогиб балки от статически приложенной нагрузки, то есть веса падающего тела.

$$V_{\text{ст}} = \frac{F l^3}{48 E J_x} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 3^3}{48 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 2030 \cdot 10^{-8}} = 2,77 \text{ мм} \approx 2,8 \text{ мм}.$$

Вычислим динамический коэффициент

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{V_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 110}{2,8}} = 9,9 \approx 10.$$

Найдем максимальный изгибающий момент от статически приложенной нагрузки.

$$M_x = \frac{F l}{4} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 3}{4} = 15 \text{ кНм}.$$

Определим максимальное нормальное напряжение от статически приложенной нагрузки, то есть от веса падающего тела.

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{15 \cdot 10^3}{203 \cdot 10^{-6}} = 73,89 \text{ МПа} \approx 74 \text{ МПа}.$$

Вычислим максимальное нормальное напряжение при ударе падающего тела.

$$\sigma_d = k_d \sigma_{\text{ст}} = 10 \cdot 74 = 740 \text{ МПа}.$$

Определим прогиб балки от динамического приложения нагрузки (ударе)

$$V_d = k_d V_{\text{ст}} = 10 \cdot 2,8 = 28 \text{ мм}.$$

## 3. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

### 3.1. Введение

Вопросы прочности, упругости, пластичности и жесткости материалов имеют большое значение (занимают важное место) в строительстве, машиностроении, приборостроении, радиотехнике и прочих отраслях промышленности. Ошибки при определении механических свойств материалов, неудачный выбор материалов для изготовления деталей или конструкций, неправильный расчет деталей машин и механизмов, элементов строительных конструкций может привести к их непригодности или к разрушению. Следует отметить, что характеристики прочности, упругости и пластичности материалов можно определить только опытным путем.

Все лабораторные работы делятся на две группы. К первой группе относятся лабораторные работы по определению и изучению механических свойств материалов: прочности, пластичности, жесткости, расчетных характеристик. Другая группа лабораторных работ посвящена проверке расчетных формул сопротивления материалов и оценке погрешности результатов, появляющихся за счет принятых гипотез и допущений (плоские сечения, отсутствие давлений волокон) и применению упрощенного закона деформирования материала – закона Гука.

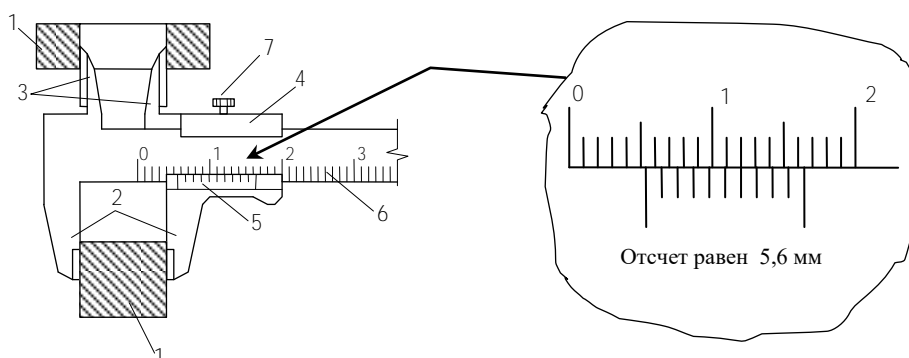
Навыки, полученные при выполнении лабораторных работ, необходимы специалистам в различных областях строительства, так как результаты испытания материалов используются при проектировании сооружений, их изготовлении и эксплуатации.

### 3.2. Краткие сведения об измерительных инструментах и приборах

#### 3.2.1. Инструменты для измерения размеров образцов

3.2.1.1 **Измерительные линейки и ленты.** Для измерения размеров больших деталей и образцов используются линейки и измерительные ленты (рулетки). Цена деления линейки 1 мм. Предпочтительнее выполнять измерения стальными линейками или лентами (рулетками), так как они обладают большой жесткостью и не растягиваются, что обеспечивает большую точность измерения.

3.2.1.2. **Штангенциркуль.** Штангенциркуль применяется для измерения наружных и внутренних размеров небольших деталей и образцов. Кроме того, штангенциркулем можно измерить глубину выемок. При выполнении лабораторных работ используются штангенциркули с пределами измерений от 125 до 500 мм и ценой деления 0,1 мм (рис. 200).



**Рис. 200. Схема измерения внешнего и внутреннего размеров с помощью штангенциркуля**

(1.–измеряемые детали; 2,3.– губки штангенциркуля; 4.– рамка; 5.– нониус с 10-ю делениями; 6.– штанга с делениями; 7.– зажимной винт)

Измерение наружного размера детали или образца выполняется в таком порядке. Вначале следует отпустить зажимной винт 7 штангенциркуля, поместить образец между губками 2 и поджать их, двигая рамку 4. Затем зажать винт 7 и снять отсчет. Число целых миллиметров отсчитать на шкале штанги 6 по нулевому штриху нониуса 5, а число десятых единиц миллиметра определить по тому штриху нониуса 5, который точно совмещен с каким-либо штрихом шкалы 6. Затем отпустить зажимной винт 7 и снять штангенциркуль с детали или образца.

Для измерения внутреннего размера детали или образца (например, диаметра отверстия) поместить губки 3 внутри отверстия (полости) и повторить выше описанные операции.

### 3.2.2. Приборы механического принципа действия для измерения деформаций

**3.2.2.1. Общие понятия.** Деформации твердых тел разделяют на два вида – линейные и угловые деформации.

Линейные деформации тела характеризуются изменением взаимного расположения его точек, то есть перемещением точек тела относительно друг друга. Эти перемещения измеряют тензометрами, которые определяют изменение расстояния между точками на поверхности тела.

Угловые деформации характеризуют изменение угловых размеров тел и измеряются угломерами, в результате чего определяют угол поворота одного сечения относительно другого.

Расстояние между точками тела, изменение которого измеряют тензометром, называется базой прибора.

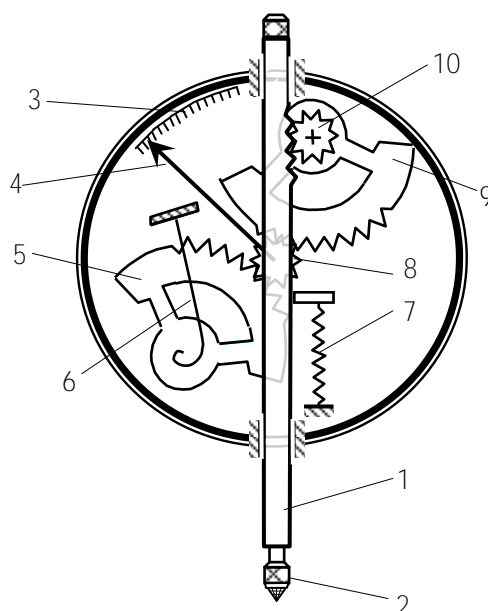
Для увеличения точности измерения при неоднородной деформации (когда линейные деформации в различных точках тела неодинаковые, например, при изгибе балки) следует выбирать приборы с малой базой – до 20 мм. При однородной деформации тела, например при растяжении или

сжатии стержня центрально приложенной нагрузкой, лучше применять приборы с большой базой.

Все тензометры по принципу своего действия разделяются на три вида:

- механические с рычажной системой (рычажный тензометр, стрелочный индикатор, прогибомеры и др.);
- оптико-механические (зеркальный тензометр Мартенса);
- электрические.

**3.2.2.2. Стрелочный индикатор.** Стрелочный индикатор является измерительным прибором механического принципа действия. Внешний вид и схема прибора приведены на рисунке 201. Измерительный стержень индикатора связан со стрелкой зубчатой передачи, которая называется зубчато-реечным механизмом. Цена деления индикатора зависит от передаточного числа зубчато-реечного механизма. Наиболее часто применяют индикаторы с ценой деления 0,01 мм.



**Рис. 201.** Схема стрелочного индикатора с указанием его деталей: 1. – измерительный стержень; 2. – съемный наконечник; 3. – шкала прибора; 4. – стрелка на шкале прибора; 5. – поджимная шестеренка; 6. – поджимная пружина шестеренок; 7. – поджимная пружина измерительного стержня; 8. – шестеренка на выходе; 9. – подающая шестеренка; 10. – принимающая шестеренка.

Для более точного измерения применяются индикаторы с ценой деления 0,002 и 0,001 мм. Максимальное перемещение измерительного стержня в различных конструкциях индикаторов, то есть их база измерения, может быть от 1 мм до 100 мм.

Для определения смещений точек конструкции, например, прогибов балок, индикатор крепится к неподвижной опоре таким образом, чтобы его измерительный стержень упирался в перемещающуюся поверхность. Для

определения линейных деформаций при растяжении или сжатии стрелочный индикатор крепят в специальные кольца.

Деформации (удлинение либо укорочение базы измерения) вызывают перемещение измерительного стержня 1. С помощью зубчато-реечного механизма линейное перемещение измерительного стержня приводит к повороту малую шестеренку 10. Так как малая шестеренка 10 и большая шестеренки 9 посажены на одну ось, то и большая шестеренка 9 будет поворачиваться на тот же угол. Малая шестеренка 8 сцеплена с большой шестеренкой 9, поэтому ее поворот и поворот стрелки 4 будут значительно больше. За счет большого передаточного числа, которое зависит от отношения диаметров большой и малой шестеренок, малые линейные перемещения измерительного стержня 1 вызывают повороты на большие углы стрелки 4. Этим отношением определяется и цена деления прибора.

**Цена деления прибора** по своему значению равна изменению измеряемой величины при изменении показания прибора на одну единицу. Например, если цена деления индикатора равна 0,01 мм, то это значит, что поворот большой стрелки прибора на одно деление будет соответствовать линейному смещению измерительного стержня на 0,01 мм. Цена деления должна быть всегда указана на шкале прибора или в его паспорте.

### 3.2.3. Приборы для измерения деформаций электрического принципа действия

**3.2.3.1. Общие понятия.** В настоящее время для измерения деформаций широкое распространение получили электротензометрические методы. Измерение деформаций этими методами возможно благодаря тому, что деформация датчика вызывает изменение его некоторых параметров – сопротивления участка электрической цепи, емкости конденсатора или индуктивности электромагнитной катушки.

В измерительных приборах всегда присутствуют три части – датчик, усилитель и регистрирующее устройство (преобразователь). Элемент, прикрепленный к образцу, к конструкции, к детали машины или механизма и воспринимающий деформацию, называется **датчиком**. Сам датчик только вырабатывает сигнал, который поступает на усиливающее устройство. Так как носителем сигнала может быть сила тока, изменение емкости или индуктивности, что не может быть непосредственно воспринято и зарегистрировано человеком, то после усиления сигнала он подается на преобразующее устройство. Преобразованный сигнал размещается на доступном для восприятия человеком носителе – индикация чисел, график, звуковой или световой сигнал и др. В зависимости от того, какой электрический параметр датчика изменяется, различают датчики сопротивления, емкостные и индуктивные датчики.

Благодаря возможности дистанционного измерения, особенно широкое распространение получили проволочные датчики. Их удобно

применять для измерения деформаций не только при статических нагрузках и на неподвижных деталях, но и при динамических нагрузках, на быстро перемещающихся деталях, в трудно доступных местах, а также на конструкциях, испытывающих предельное состояние и даже при разрушении сооружений.

Небольшие размеры проволочных датчиков позволяют размещать их на небольшой площади конструкции, что дает возможность для более детального изучения напряженно-деформированного состояния исследуемой конструкции.

Кроме того, проволочные датчики дешевые. Поэтому экономические затраты от их потери при испытаниях с доведением конструкций, машин или механизмов до разрушения малы. По величине измеренных деформаций, используя закон Гука, вычисляют напряжения в соответствующих точках конструкции. *Определение напряжения по измеренной деформации называют тензометрированием.*

Главным недостатком электротензометрического метода является малая точность измерения, что во многом зависит от материала, из которого изготовлена испытываемая конструкция, качества поверхности, качества наклейки датчика и др. Поэтому этот метод может применяться только в тех случаях, когда высокая точность измерений не требуется.

Проволочный датчик сопротивления представляет собой тонкую проволоку, изогнутую в виде плоских петель, наклеенную на полоску специальной бумаги или пленки. Специальным клеем (раствор целлулоида в ацетоне или БФ-4) датчик наклеивается на поверхность испытываемого объекта, что обеспечивает его совместную деформацию с деформацией поверхности детали или элемента конструкции. Проволока изготовлена из константанового сплава или из другого сплава (например, нихрома), имеющего большое омическое сопротивление. Диаметр проволоки составляет 0,02-0,03 мм.

При деформации датчика длина проволоки изменяется. Поэтому изменяется и омическое сопротивление датчика. По величине изменения сопротивления датчика определяется величина деформации. Чем длиннее проволока, тем больше изменяется ее сопротивление при одной и той же деформации. Поэтому для более точных измерений следует применять датчики из длинной проволоки. Однако, при увеличении длины проволоки будет увеличиваться и база измерения. Это не всегда приемлемо, особенно если деформации распределены неравномерно. Для уменьшения базы измерения и сохранения большой длины проволоки ее укладывают в виде петель. Все петли проволоки в электрической цепи будут являться последовательно соединенными проводниками. Поэтому их сопротивления в электрической цепи складываются.

Вследствие зигзагообразной укладки проволоки датчик будет реагировать на деформацию только по направлению длинных ветвей проволоки. Это направление называется **рабочим направлением датчика**.

Длина петли  $l_0$  является базой датчика. Для измерений деформаций обычно применяют датчики с базой 5, 10 и 20 мм. Для удобства припайки датчика к электропроводам выводные концы проволоки утолщены. Опытным путем установлено, что закон изменения сопротивления  $\Delta R$  прямо пропорционален относительной линейной деформации  $\varepsilon$

$$\Delta R = \varepsilon R \gamma,$$

где  $R$  – начальное сопротивление датчика, которое может быть от 100 до 250 Ом;

$\gamma$  – коэффициент чувствительности, зависящий от материала и базы датчика, может принимать значения от 1,8 до 2,1.

Из выше приведенной формулы выражается линейная деформация  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{\Delta R}{R \gamma}.$$

Величины  $\gamma$  и  $R$  для датчика постоянные, а величина  $\Delta R$  измеряется прибором. Изменения  $\Delta R$  очень мало и для его измерения должны применяться очень чувствительные регистрирующие устройства.

Для измерения деформаций, возникающих при действии статических нагрузок, применяют регистрирующие устройства с использованием электрических мостовых схем – с отсчетом по гальванометру (рис. 202) и с отсчетом по шкале балансировочного устройства (метод установки нуля) (рис. 203).

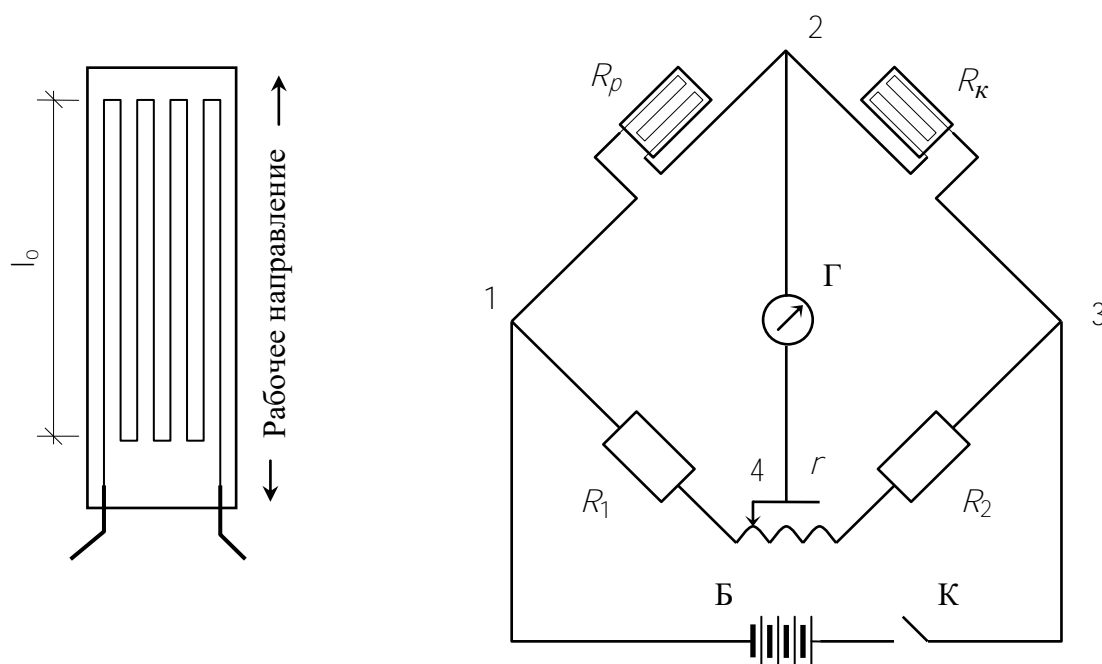
**3.2.3.2. Мостовая схема с отсчетом по гальванометру.** В процессе деформации конструкции, детали машины или образца изменяется сопротивление рабочего датчика  $R_p$ . Для определения этого изменения применяют равноплечный электрический мост (рис. 235). Рабочий датчик с сопротивлением  $R_p$ , наклеенный на поверхность конструкции, включается в одно плечо моста. Три другие плеча образуются сопротивлениями  $R_1$ ,  $R_2$  и компенсирующим датчиком  $R_k$ , которые должны иметь сопротивление равное сопротивлению рабочего датчика  $R_p$ . Все четыре сопротивления образуют уравновешенный мост, если разность потенциалов между узлами 1 и 3 будет равна нулю.

Известно, что на электрическое сопротивление проводника оказывает влияние температура. Чем выше температура, тем больше “раскачиваются” атомы проводника (металлов) около своих штатных положений в кристаллической решетке и тем самым затрудняют направленное движение электронов. Вместе с тем, дальнейшее повышение температуры приводит к уменьшению электрического сопротивления проводника. Это происходит потому, что тепловые колебания атомов становятся настолько большими, что их внешние электроны покидают свои орбиты. Это насыщает проводник электронным газом, являющимся хорошим



носителем заряда. Поэтому для переноса одного и того же заряда через сечение проводника электронам потребуется переместиться на гораздо меньшее расстояние по длине проводника. Сопротивление такому малому перемещению электронам кристаллическая решетка проводника оказывает гораздо меньшее.

Для компенсации влияния температуры на результаты измерения используется компенсирующий датчик. Рабочий и компенсирующий датчики должны быть в одинаковых температурных условиях. Поэтому компенсирующий датчик следует располагать вблизи рабочего датчика, но не наклеивать на поверхность конструкции, так как изменение его сопротивления должно вызываться только изменением температуры, а не деформацией конструкции. В этом случае изменение температуры одинаково сказывается на сопротивлении обоих датчиков, которые принадлежат разным ветвям электрического моста. Поэтому изменение температуры не нарушает его равновесия, то есть компенсируется датчиком  $R_k$ .



**Рис. 202 – Проволочный датчик сопротивления и мостовая схема с отсчетом по гальванометру: К–ключ, Б – питание, Г – гальванометр,  $R_p$  – рабочий датчик,  $R_k$  – компенсирующий датчик,  $R_1$  и  $R_2$  – сопротивления,  $r$  – переменное сопротивление**

К узлам моста 1 и 3 подключается источник постоянного тока Б (батарея), а к ветви между узлами 2 и 4 – чувствительный электроизмерительный прибор Г (гальванометр), предназначенный для измерения силы тока, и переменное сопротивление  $r$  (потенциометр). Напряжение источника тока не должно превышать 8 В, чтобы исключить значительный нагрев датчиков.

Перед нагружением конструкции или детали следует произвести балансировку моста за счет изменения сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$ , а также переменным сопротивлением  $r$ . Иногда сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$  служат датчики, наклеенные на поверхность с двух сторон консольной балки. Такая балка называется балансировочной. В этом случае регулировку их сопротивлений производят деформацией балки.

Если балка искривляется выпуклостью вверх, то ее верхние волокна удлиняются, а нижние укорачиваются. Поэтому датчик  $R_1$ , наклеенный к верхней поверхности балки, также удлиняется и его сопротивление увеличивается. Датчик  $R_2$  наклеен на нижнюю поверхность балки. Поэтому он вместе с нижними волокнами балки укорачивается и его сопротивление уменьшается. и, напротив, если балка искривляется выпуклостью вниз, то сопротивление верхнего датчика  $R_1$  уменьшается, а нижнего  $R_2$  увеличивается.

Если за счет деформации элемента конструкции или детали машины рабочий датчик изменит свое сопротивление, то баланс электрического моста нарушится из-за того, что сопротивления его ветвей не будут равными. Тогда между узлами 2 и 4 возникнет разность потенциалов и в ветви 2-4 появится электрический ток, о чем будет свидетельствовать отклонение стрелки гальванометра от нулевого отсчета. Сила тока пропорциональна изменению сопротивления датчика  $R_p$ , а значит и величине произошедшей деформации. По отсчету на гальванометре и с учетом цены деления можно установить значение этой деформации.

Для выполнения измерений предварительно требуется установить цену деления гальванометра, выраженную через деформацию. Цену деления прибора определяют тарировкой. Основное уравнение проволочного тензоэффекта имеет вид

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{K}{2} \frac{\Delta l}{l} = \frac{K}{2} \varepsilon ,$$

где  $R$  – электрическое сопротивление недеформированной проволоки;

$\Delta R$  – приращение сопротивления деформированной проволоки;

$K$  – чувствительность проволоки к деформации (коэффициент тензочувствительности);

$\varepsilon$  – относительная линейная деформация проволоки.

Изменение сопротивления датчика равно

$$\Delta R = \alpha_0 \Delta \eta ,$$

где  $\Delta R$  – изменение электрического сопротивления датчика;

$\alpha_0$  – цена деления гальванометра;

$\Delta \eta$  – изменение показания гальванометра.

Тогда зависимость деформации датчика от изменения показания гальванометра имеет вид

$$\frac{\alpha_0 \Delta \eta}{R} = \frac{K}{2} \varepsilon$$

или

$$\varepsilon = \frac{2\alpha_0}{RK} \Delta \eta.$$

Отсюда следует, что датчики сопротивления характеризуются следующими параметрами: базой  $l_0$  ( $l_0 = 5 - 100$  мм); номинальным сопротивлением ( $R = 10 - 800$  Ом); наибольшим значением относительной линейной деформации, которую можно измерить датчиком ( $\varepsilon_{\max} = 0,3$  %); коэффициентом тензочувствительности ( $K = 1,9 - 2,1$ ).

Цена деления прибора также может быть найдена опытным способом при помощи тарировочной балки (рис. 203), которая за счет своей формы имеет ту особенность, что при нагружении в любой точке ее поверхности появляются одинаковые деформации.

На верхнюю и на нижнюю поверхность тарировочной балки наклеивают несколько датчиков и нагружают ее. Зная величину силы  $F$  и размеры балки, вычисляют относительные линейные деформации верхних и нижних волокон балки и снимают отсчеты по прибору. Цену деления прибора определяют делением приращения деформаций волокон балки  $\Delta \varepsilon$  на приращение показаний гальванометра  $\Delta \eta$

$$\alpha = \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta \eta}.$$

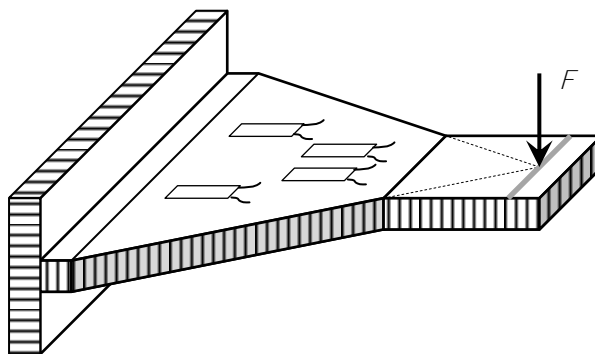


Рис. 203 – Схема тарировочной балки

При тарировке обычно используется несколько датчиков из партии, чтобы исключить случайные погрешности и учесть статистический разброс.

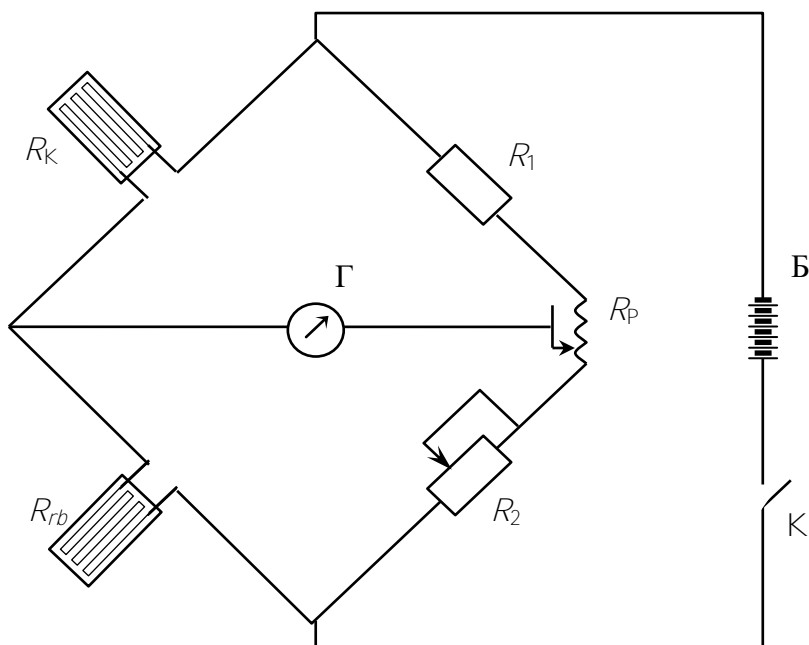
**3.2.3.3. Мостовая схема с отсчетом по нулевому методу (метод установки нуля).** Принципиальная электрическая схема измерения

деформаций с установкой нуля (рис. 204) существенно не отличается от схемы измерения деформаций с отсчетом по гальванометру (рис. 202).

Отличие заключается лишь в способе балансировки моста. После нагружения испытываемой конструкции за счет изменения сопротивления датчика произойдет разбалансировка электрического моста, и стрелка гальванометра отклонится от нулевой отметки.

Возврат к равновесному состоянию моста может быть достигнут поворотом рукоятки реохорда и тем самым изменением сопротивления  $R_p$ . О величине деформации датчика судят по числу делений, на которое потребовалось повернуть ручку реохорда. То есть в этом случае отсчет снимают не с показаний гальванометра, а со шкалы реохорда.

Нулевой метод измерения точнее, чем метод отсчета по гальванометру, так как в момент снятия отсчета мост сбалансирован и через гальванометр ток не проходит. Поэтому показания не будут зависеть от колебания напряжений источника тока и сопротивления гальванометра.



**Рис. 204 – Мостовая схема с отсчетом по нулевому методу:**  
 $R_{rb}$  – рабочий датчик;  $R_K$  – компенсирующий датчик;  $R_p$  – реохорда;  $R_1$  – сопротивление;  $R_2$  – переменное сопротивление;  $\Gamma$  – гальванометр;  $K$  – переключатель;  $B$  – источник питания

### 3.2.4. Вопросы по разделу 3.2

1. Какие инструменты используются для измерения линейных размеров твердых тел?
2. Измерение каких размеров деталей могут быть выполнены штангенциркулем?

3. Какие действия и в какой последовательности их следует выполнять при измерении штангенциркулем наружных и внутренних размеров детали?
4. На какие два вида делятся деформации тел?
5. Какие деформации тела называются линейными?
6. Какие деформации тела называются угловыми?
7. Что называется базой измерения прибора и из каких соображений она выбирается?
8. Изменение каких параметров проводника электрического тока используется в электротензометрических методах?
9. На какие три вида делятся тензометры по принципу своего действия?
10. К какому виду по своему принципу действия относится стрелочный индикатор?
11. Какую цену деления и базу измерения могут иметь стрелочные индикаторы?
12. Опишите принцип работы механизма стрелочного индикатора.
13. Что обозначает по своему смыслу цена деления прибора?
14. Какой элемент измерительного прибора называется датчиком и какую функцию он выполняет при измерении деформаций?
15. Для чего предназначено преобразующее устройство в измерительном приборе?
16. Какие преимущества и недостатки имеет измерение деформаций электротензометрический методом по сравнению с измерениями механическими тензометрами?
17. Что следует понимать под тензометрированием?
18. Как устроен проволочный датчик сопротивления и как он прикрепляется к детали (конструкции)?
19. На каком принципе основана работа проволочного датчика?
20. Какое направление датчика является рабочим и почему?
21. Какие электрические мостовые схемы используются для измерения деформаций?
22. Как устроен электрический мост при измерении с отсчетом по гальванометру?
23. Как влияет изменение температуры на электрическое сопротивление проводника?
24. Для чего предназначен и где должен располагаться компенсирующий датчик при измерении деформаций?
25. Как компенсируется влияние температуры на электрическое сопротивление рабочего датчика?
26. Почему напряжение источника питания ограничено и не должно превышать 8 В?
27. Как выполняется балансировка электрического моста с помощью балансировочной балки?

28. На каком принципе основано измерение деформации методом отсчета по гальванометру?
29. Как определяется цена деления прибора?
30. Какие основные параметры характеризуют проволоочный датчик?
31. Как определяется цена деления прибора с помощью тарировочной балки?
32. Какую особенность имеет тарировочная балка?
33. Какую форму имеет тарировочная балка?
34. Чем отличается измерение деформаций методом установки нуля от метода отсчета по гальванометру?
35. В чем преимущество измерения деформаций методом установки нуля?
36. Как устроена мостовая схема для измерения деформаций методом установки нуля?
37. Принцип работы мостовой схемы для измерения деформаций методом установки нуля?

### 3.3. Краткие сведения об основных строительных материалах

#### 3.3.1. Чугун

**Чугуном** называется сплав железа с углеродом, который содержит более 2% углерода. Чугун может быть передельным и литейным. Передельным чугун используется для производства стали, а литейный для литья фасонных изделий. Исходными материалами для доменного производства чугуна являются руда, флюсы, топливо и воздух.

**Железная руда** – это горная порода, содержащая железо в таких количествах, при которых ее технически и экономически целесообразно перерабатывать. Руда состоит из смеси железосодержащих минералов с пустой породой. Для производства чугуна используются руды – магнитный железняк, красный железняк, бурый железняк, шпатовый железняк.

**Обогащение руды.** Перед производством чугуна руду обогащают, удаляя пустую породу и повышая содержание железа. Для этого используются два способа – промывку и магнитную сепарацию.

**Топливо.** Основным видом топлива в доменных печах является *кокс*. Кокс получается сухой перегонкой некоторых сортов каменного угля при 1000-1200°C без доступа воздуха. Такие сорта угля называются *коксующимися*. В специальных коксовых печах происходит спекание угля в течение 15-20 ч. При этом удаляются летучие вещества. Предварительно уголь измельчается в щековых дробилках до размера зерен 2-3 мм. Отсутствие летучих веществ и большая пористость кокса обеспечивают высокую температуру его горения.

**Доменная печь** представляет собой вертикальное сооружение шахтного типа. Современные доменные печи имеют общую высоту до 80 м с полезным объемом до 5000 м<sup>3</sup>.

**Плавка чугуна.** Агломерат, руда, флюс и кокс, поступающие в печь в определенном соотношении, называют шихтой. Через загрузочное устройство шихта попадает в доменную печь. Доменные печи, как и все шахтные печи, работают по принципу противотока. Сверху сходят шихтовые материалы, а снизу им на встречу движутся газы, образующиеся в процессе горения топлива. В шахте происходят процессы восстановления окислов железа и его науглероживание.

В нижней части домы накапливается жидкий чугун, а выше жидкая пустая порода. Их периодически сливают в ковши. Чугун используют для дальнейшей переработки.

### 3.3.2. Металлургия стали

**Сталь** – это сплав железа с углеродом, который содержит менее 2% углерода (обычно не более 1,3%). Постоянными примесями в стали являются марганец, кремний, фосфор и сера.

Кроме углеродистых, в машиностроении и строительстве широко применяют легированные стали, в состав которых для улучшения тех или иных свойств дополнительно вводят хром, никель, молибден и другие элементы.

Исходными материалами для получения стали служат передельный чугун, стальной лом и ферросплавы. Основная задача передела чугуна в сталь состоит в удалении избытка углерода и примесей с помощью окислительных процессов, протекающих в сталеплавильных агрегатах. Основными способами производства стали являются кислородно-конверторный, мартеновский и электродуговой.

#### 3.3.2.1. Кислородно-конверторное производство стали.

В основе конвертерных процессов лежит обработка жидкого чугуна газообразными окислителями. Кислород под давлением 0,8–1,0 МПа (8–10 атм.) подается сверху через водоохлаждаемую фурму. После окончания продувки и получения заданного содержания углерода берут пробу и сливают металл в ковш. В ковше сталь раскисляется за счет окисления марганца, кремния и алюминия. В зависимости от степени раскисленности различают *кипящие, полуспокойные и спокойные стали*.

**Кипящие стали** раскисляются только ферромарганцем. В таких сталях частично остаются растворенные окислы железа. При кристаллизации продолжает идти процесс “кипения” из-за реакции восстановления железа. Газовые пузыри остаются в теле затвердевшего слитка и завариваются при последующей прокатке. Кипящая сталь дает наиболее высокий выход годного металла, наименьшие отходы, благодаря чему она обладает самой низкой стоимостью, но и самым низким качеством.

**Спокойная сталь** раскисляется комплексно ферромарганцем, ферросилицием и алюминием. В металле нет растворенного окисла железа. Процесс кипения прекращается, сталь “успокаивается”. Значительная часть стального слитка идет в отход. Поэтому такая сталь, обладая высоким качеством, является наиболее дорогой

**Полуспокойная сталь** раскисляется ферромарганцем и уменьшенным количеством ферросилиция. По качеству и стоимости она занимает промежуточное положение между кипящей и спокойной сталью.

3.3.2.2. **Мартеновское производство стали.** Мартеновская печь является пламенной регенеративной печью. В рабочем пространстве печи сжигается газообразное или жидкое топливо. Через завалочные окна в печь загружают шихту и дополнительные материалы по ходу плавки. Через отверстие в задней стене производят выпуск готового металла и шлака.

Если выплавляется легированная сталь, то добавляют легирующие элементы – никель, медь, молибден, хром, марганец, кремний, титан, ванадий, алюминий, бор.

3.3.2.3. **Производство стали в электропечах.** Электроплавка – наиболее совершенный способ получения стали, имеющей ряд преимуществ по сравнению с производством стали в конверторах и мартеновских печах.

Шихта, загружаемая в электропечь, состоит из стального лома, легированных отходов, чугуна флюсов, железной руды, легирующих добавок и раскислителей.

Нагрев в индукционных печах осуществляется за счет джоулева тепла, выделяемого в твердом или жидком металле вихревыми токами, индуцируемыми переменным электромагнитным полем.

Через индуктор, представляющий собой катушку из медной трубки, охлаждаемой внутри водой, пропускают ток, возбуждающий вокруг переменное магнитное поле. В металле, находящемся в тигле, индуцируются мощные вихревые токи, обеспечивающие его нагрев и плавление.

### 3.3.3. Бетон

**Бетон** – это искусственный каменный материал, получаемый из рационально подобранной смеси вяжущего вещества (с водой, реже без неё), заполнителей (каменной щебенки) и специальных добавок. Он является одним из основных строительных материалов.

3.3.3.1. **Физико-технические свойства бетона.** Основные свойства бетона – плотность, содержание связанной воды, прочность при сжатии и растяжении, морозостойкость, теплопроводность и техническая вязкость (жесткость смеси).

**Прочность бетона** характеризуется его классом (временным сопротивлением на сжатие, осевым растяжением или растяжением при изгибе). Класс бетона по прочности на сжатие тяжёлых цементных, особо



тяжёлых, лёгких и крупнопористых бетонов определяется испытанием на сжатие бетонных кубов со стороной, равной 200 мм, изготовленных из рабочего состава и испытанных после определённого срока выдержки.

Для образцов монолитного бетона промышленных и гражданских зданий и сооружений срок выдержки при нормальном твердении (при температуре 20°C и относительной влажности не ниже 90% ) равен 28 суток. Срок выдержки и условия твердения образцов бетона сборных изделий указываются в соответствующих ГОСТах. Прочность бетона на осевое растяжение ниже прочности бетона на сжатие примерно в 10 раз. Требования по прочности на растяжение при изгибе могут предъявляться, например, к бетону дорожных и аэродромных покрытий.

#### 3.3.4. Цемент

**Цемент** – это искусственный неорганический порошкообразный вяжущий материал, обладающий способностью при взаимодействии с водой, с водными растворами солей или др. жидкостями образовывать пластичную массу, которая со временем затвердевает и превращается в прочное камневидное тело.

Цементы являются наиболее распространенными строительными материалами, предназначенными для изготовления бетонов и строительных растворов, скрепления отдельных элементов (деталей) сооружений, гидроизоляции и др.

**3.3.4.1. Производство цемента.** Современный процесс производства цемента включает следующие этапы:

– добычу цементного природного сырья (мергели, известняки, мел, реже мраморы, травертин и др.) или использование в качестве такового некоторых промышленных отходов (металлургических шлаков, зол ТЭС, вскрышных пород и т. п.);

– дробление и тонкое его измельчение;

– приготовление однородной сырьевой смеси заданного состава;

– обжиг её до спекания при температуре 1450-1550 °С;

– измельчение полученного клинкера в тонкий порошок вместе с небольшим количеством гипса и активных минеральных добавок.

**3.3.4.2. Прочность цемента.** Прочность цемента определяется пределом прочности при изгибе образцов-призм размером 40×40×160 мм и при сжатии их половинок, изготовленных из цементного раствора состава 1 : 3 (по массе) при сроке твердения образцов 28 суток с момента изготовления.

#### 3.3.5. Алюминий

Алюминий *Al* является химическим элементом серебристо-белого цвета и относится к лёгким металлам.

**3.3.5.1. Физические, химические и механические свойства.** Алюминий сочетает весьма ценный комплекс свойств: малую плотность,

высокую теплопроводность и электрическую проводимость, пластичность, хорошую коррозионную стойкость и достаточную прочность. Он легко поддаётся ковке, штамповке, прокатке, волочению. Алюминий хорошо сваривается газовой, контактной и др. видами сварки.

Алюминий обладает относительно невысокой прочностью (предел прочности 50-60 МН/м<sup>2</sup>), твёрдостью (170 МН/м<sup>2</sup> по Бринеллю) и высокой пластичностью (до 50%). При холодной прокатке предел прочности алюминия возрастает до 115 МН/м<sup>2</sup>, твёрдость – до 270 МН/м<sup>2</sup>, относительное удлинение снижается до 5% (при  $\sigma = 1$  МН/м<sup>2</sup>). Алюминий стоек к действию атмосферной коррозии, морской и пресной воды, практически не взаимодействует с концентрированной или сильно разбавленной азотной кислотой, с органическими кислотами, пищевыми продуктами.

**3.3.5.2. Алюминиевые руды.** В природе имеется большое количество минералов и горных пород, содержащих алюминий, однако лишь немногие из них могут быть использованы для получения металлического алюминия. Наиболее широкое распространение в качестве алюминиевого сырья получили бокситы. Для получения алюминия применяются также нефелин-сиенитовые, нефелин-апатитовые и др. породы.

**3.3.5.3. Получение алюминия.** В промышленности алюминий получают электролизом глинозёма, растворённого в расплавленном криолите при температуре около 950°C. (*Криолит* — минерал из группы природных фторидов, имеющий химический состав  $Na_3AlF_6$ ). Электролитная ванна представляет собой железный кожух, футерованный внутри тепло- и электро-изолирующим материалом – огнеупорным кирпичом, и выложенный угольными плитами и блоками. Рабочий объём заполняется расплавленным электролитом, состоящим из 6-8% глинозёма и 94-92% криолита. Катодом служит подина ванны, анодом – погружённые в электролит угольные обожжённые блоки или же набивные самообжигающиеся электроды. При прохождении тока на катоде выделяется расплавленный алюминий, который накапливается на подине, а на аноде – кислород, образующий с угольным анодом окислы углерода. Из ванн алюминий извлекают обычно с помощью вакуум-ковша. Расплавленный алюминий чистотой 99,7% разливают в формы.

**3.3.5.4. Алюминиевые сплавы.** В строительстве используется не сам алюминий, а его сплавы. Поворотным моментом в развитии алюминиевых сплавов явились результаты исследований А. Вильма (Германия, 1903-11 гг), который обнаружил процесс старения алюминиевых сплавов, приводящее к резкому улучшению их свойств (главным образом прочностных). Этот улучшенный алюминиевый сплав был назван дуралюмином.

К самым прочным относятся сплавы алюминево-марганцево-кремневый, алюминево-цинко-магневый; к наиболее жаропрочным –

алюминиево-медно-марганцевый; к лёгким и высокомодульным  
алюминиево-берилливо-магневый.

### 3.3.6. Основные механические характеристики некоторых материалов

Таблица 3. Некоторые механические характеристики материалов

Материал	Предел прочности, МПа	Предел текучести, МПа	Остаточное удлинение, %	Модуль упругости, ГПа	Коэффициент Пуассона
<b>С т а л ь</b>					
Ст2	320-400	190-220	28	196-206	0,3
Ст3	380-470	210-240	21-23	196-206	0,3
<b>Ч у г у н с е р ы й</b>					
СЧ21-40	210	158	–	85	0,23-0,27
СЧ35-56	350	298	–	145	0,23-0,27
Продолжение таблицы 3					
<b>Ч у г у н к о в к и й</b>					
КЧ30-8	300	190	6	155	0,23
КЧ37-12	370	230	12	198	0,36
<b>А л ю м и н и е в ы е с п л а в ы</b>					
АМцМ	130	50	23	71	0,30
АМг6М	300	150	18	71	0,31
<b>Д р у г и е м а т е р и а л ы</b>					
Каучук	16-38	–	600-700	$0,6 \cdot 10^{-7}$	0,47
Стекло	30-90	–	–	48-75	0,18-0,32
Бетон	5-48	–	–	14,6-23,2	0,16-0,18
Сосна	9,31-11,5	61	–	10,2-14,5	0,49
Дуб	128,8	74	–	7,8-15,1	0,43

### 3.3.7 Контрольные вопросы по разделу 3.3

1. Какой сплав называется чугуном?
2. Для чего предназначен пердедельный и литейный чугун?
3. Какие руды используются для производства чугуна?
4. Как происходит обогащение железной руды?
5. Что служит топливом для выплавки чугуна?
6. Как происходит выплавка чугуна в домне?
7. Какой сплав называется сталью?
8. Чем отличаются легированные стали от углеродистых?
9. Какие способы применяют для выплавки стали из чугуна?
10. Как выплавляется сталь конверторно-кислородным методом?
11. Какие недостатки и преимущества имеют кипящая, спокойная и полуспокойная стали?
12. Как выплавляется сталь мартеновским методом?
13. Как производится сталь в электропечах?
14. Какой материал называют бетоном?
15. Какими физико-техническими свойствами характеризуется бетон?
16. В какие сроки бетон приобретает проектную прочность?

17. Какое примерное отношение прочности бетона на сжатие и на растяжение?
18. Какой материал называется цементом?
19. Для каких целей используется цемент в строительстве?
20. Какие породы и материалы используются для производства цемента?
21. Как определяется прочность цемента?
22. Особенность физико-механических свойств алюминия?
23. Какими механическими характеристиками обладает алюминий?
24. Как получают алюминий?
25. Чем отличаются алюминиевые сплавы по своим механическим свойствам?

### 3.4. Виды испытания материалов и их назначение

Для изучения свойств материалов и определения их механических характеристик выполняется испытание образцов. Испытания производят при нагрузках следующих видов: статической, ударной и циклической (испытание на усталость или выносливость).

По виду деформаций (сопротивлений) различают испытания на растяжение, сжатие, срез (сдвиг) и кручение.

Так как результаты испытания зависят от формы и размеров образца, скорости нагружения, температуры и пр., то эксперимент обычно проводят при условиях, предусмотренных стандартами.

При статических нагрузках требуется выполнить не менее двух испытаний на идентичных образцах, при динамических нагрузках – не менее 3-х испытаний, при переменных нагрузках – не менее 10-ти испытаний.

### 3.5. Механические характеристики материалов

Механические характеристики материалов делятся на две группы – прочности и пластичности.

#### 3.5.1. Механические характеристики прочности

**3.5.1.1. Закон Гука.** Экспериментально установлено, что для некоторых материалов до некоторого предела деформация является упругой и прямо пропорциональной напряжению. Закон Гука выполняется для малоуглеродистой (строительной) стали и “железного уса” (кристаллов железа, полученных из растворов его солей). Для других материалов закон Гука строго не выполняется, но зависимость между деформацией и напряжением близка к линейной. Поэтому для упрощения расчета полагают, что закон Гука выполняется.

**3.5.1.2. Предел пропорциональности** – это механическая характеристика прочности равная максимальному напряжению, до которого еще справедлив закон Гука

$$\sigma_{pr} = \frac{N_{pr}}{A_0}, \text{ МПа},$$

где  $N_{pr}$  – продольная сила, соответствующая пределу пропорциональности, которая определяется по машинной диаграмме испытания;

$A_0$  – площадь поперечного сечения образца до испытания.

**3.5.1.3. Предел текучести** – это механическая характеристика прочности, равная напряжению, при котором происходят большие деформации без заметного изменения нагрузки.

$$\sigma_y = \frac{N_y}{A_0}, \text{ МПа},$$

где  $N_y$  – нагрузка, соответствующая пределу текучести, которая определяется по машинной диаграмме испытания.

**3.5.1.4. Предел прочности** – это механическая характеристика прочности, равная отношению максимальной нагрузки, которую способен выдержать образец, к первоначальной площади его поперечного сечения.

$$\sigma_u = \frac{N_u}{A_0}, \text{ МПа},$$

где  $N_u$  – максимальная нагрузка, которую выдерживает образец, определяемая по машинной диаграмме испытания образца.

## 3.5.2. Механические характеристики пластичности

**3.5.2.1. Относительное остаточное удлинение** – это механическая характеристика пластичности, численно равная отношению остаточного удлинения образца к его первоначальной длине, взятому в процентах

$$\varepsilon_r = \frac{l_r - l_0}{l_0} \cdot 100, \%,$$

где  $l_r$  – длина рабочей части образца после испытания, которая определяется измерением;

$l_0$  – длина рабочей части образца до испытания, которая определяется измерением.

**3.5.2.2. Относительное остаточное сужение** – это механическая характеристика пластичности, численно равная отношению изменения площади поперечного сечения до и после разрыва к площади поперечного сечения образца до испытания, взятому в процентах

$$\chi = \frac{A_0 - A_r}{A_0} \cdot 100, \%,$$

где  $A_r$ ,  $A_0$  – площади поперечного сечения образца после разрыва и до испытания, которые определяются по диаметрам образца, измеренным в месте образования “шейки”

$$A_0 = \frac{\pi d_0^2}{4}, \quad A_r = \frac{\pi d_r^2}{4}.$$

**3.5.2.3. Удельная работа** – это механическая характеристика пластичности, численно равная работе, затраченной испытательной машиной на разрыв образца, отнесенной к его объему

$$a = \eta \frac{N_U \Delta / l_0}{V_0}, \quad \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3},$$

где  $\eta$  – коэффициент полноты диаграммы (отношение площади, описанной машинной диаграммой, к площади описывающего ее прямоугольника), принимаемый для малоуглеродистой стали равным 0,8;

$V_0$  – объем рабочей части образца, равный

$$V_0 = \frac{\pi d_0^2}{4} \cdot l_0.$$

### 3.5.3 Контрольные вопросы по разделам 3.4 и 3.5

1. На какие виды нагрузок выполняются испытания материалов?
2. На какие виды деформаций (сопротивлений) выполняются испытания материалов?
3. Какое количество образцов требуется испытать на статические, динамические и переменные нагрузки?
4. На какие две группы делятся механические характеристики материалов?
5. Как формулируется закон Гука?
6. Для каких материалов закон Гука строго выполняется?
7. Почему в расчетах закон Гука учитывается и для других материалов?
8. Какая механическая характеристика называется пределом пропорциональности?
9. Как обозначается и как вычисляется предел пропорциональности?
10. Какая механическая характеристика называется пределом текучести?
11. Как обозначается и как вычисляется предел текучести?
12. Какая механическая характеристика называется пределом прочности?
13. Как обозначается и как вычисляется предел прочности?
14. Какая механическая характеристика называется относительным остаточным удлинением?
15. Как обозначается и как вычисляется относительное остаточное удлинение?

16. Какая механическая характеристика называется относительным остаточным сужением?
17. Как обозначается и как вычисляется относительное остаточное сужение?
18. Какая механическая характеристика называется удельной работой?
19. Как обозначается и как вычисляется удельная работа разрушения материала?
20. Как определяется коэффициент полноты диаграммы, и какое значение он принимает для малоуглеродистой стали?

### 3.6. Испытание на растяжение

В строительстве широко используется сталь в качестве арматуры, элементов металлических ферм, балок, стоек и колонн. Учитывая значительные концентрации напряжений в узлах соединения конструкций, вызванных наличием отверстий, выточек и сварки, чаще всего используется малоуглеродистая (строительная) сталь. Благодаря способности к пластическим деформациям в такой стали снижается концентрация напряжений, снижается риск образования усталостных трещин при переменных напряжениях. Кроме того, такая сталь хорошо сваривается, что упрощает изготовление арматурных каркасов и устройства узлов соединения элементов стальных конструкций. Высокопрочные стали хотя и обладают высокой прочностью, но являются хрупкими материалами, поэтому в строительстве применяются в основном для изготовления канатов и преднапряженной арматуры.

Стали делятся на группы, категории и марки. Нормирующими показателями для сталей являются механические характеристики прочности и пластичности, которые определяют по результатам испытания образцов на растяжение (разрыв).

#### 3.6.1. Цель испытания

Целью испытания на растяжение образца из малоуглеродистой стали является изучение зависимости между деформацией образца и растягивающей силой, определение механических характеристик.

#### 3.6.2. Исходные данные

**3.6.2.1. Требования к испытанию.** Испытание следует проводить в соответствии с действующими стандартами, устанавливающими требования для испытаний на статические нагрузки. Температура образца должна быть  $+10 \div 25^{\circ}\text{C}$ , скорость подачи деформации 1 мм/мин, разрыв в пределах рабочей части образца.

Поверхность образца должна быть отшлифована и отполирована до зеркального блеска.

**3.6.2.2. Испытательная машина.** Для испытания используется разрывная машина Р-5 электромеханического привода с рычажно-маятниковым силоизмерителем. Машина снабжена устройством для записи на бумагу диаграммы (машинной диаграммы) испытания – графика зависимости деформации образца от нагрузки. Наибольшая нагрузка, которую способна создать испытательная машина, равна 50 кН. Скорость деформации образца равна 1 мм/мин. Машина Р-5 предназначена для испытания на сжатие. Для испытания на растяжение используется специальное устройство, называемое *реверсом*.

**3.6.2.3. Измерительные приборы и инструменты.** Для выполнения измерений размеров образца используются стальная линейка и штангенциркуль с ценой деления 0,1 мм.

**3.6.2.4. Форма и размеры испытываемого образца.** При испытании на растяжение форма и размеры образца могут быть совершенно разными – прямоугольного и круглого поперечного сечения, с утолщениями и без утолщения по концам. Форма и размеры образца зависят от того из чего он изготовлен. Это может быть арматурный стержень, фасонка металлической фермы, элементы из прокатного профиля – уголка, швеллера или двутавра. Образец может быть изготовлен из отливки и др.

Образцы диаметром 20 мм называют *нормальными*, а образцы с меньшим диаметром (иногда большим) или образцы некруглого поперечного сечения – *пропорциональными*. Рабочая (расчетная) часть образца располагается в его средней части и отмечается заплатами или кернами (вмятинами). Образцы с отношением длины рабочей части к диаметру равным десяти называют *длинными* или *десятикратными*, а при отношении равном пяти – *короткими* или *пятикратными*.

В соответствии со стандартом основным (базовым) образцом для испытания металлов на растяжение является *нормальный десятикратный образец* диаметром 20 мм и длиной рабочей части равной 200 мм (рис. 238). Для обеспечения надежного захвата при испытании на концах образца должны быть утолщения с плавным переходом от меньшего диаметра к большему. Если изготовить образец с утолщениями по концам невозможно, то при установке его в испытательную машину используют клинообразные вкладыши с зубцами с внутренней стороны, которые при испытании вдавливаются в образец и также обеспечивают надежный захват. Однако при таком захвате появляется концентрация напряжений и повышается риск разрыва образца за пределами его рабочей части.

### 3.6.3. Машинные диаграммы испытания образца из малоуглеродистой стали

Испытание на растяжение и сжатие проводится на специальных разрывных машинах – механических и гидравлических прессах. В данной лабораторной работе использована разрывная машина Р-5. В результате испытания получается машинная диаграмма растяжения или сжатия. Для



малоуглеродистой стали эта диаграмма при испытании на растяжение имеет вид, показанный на рисунке 206.

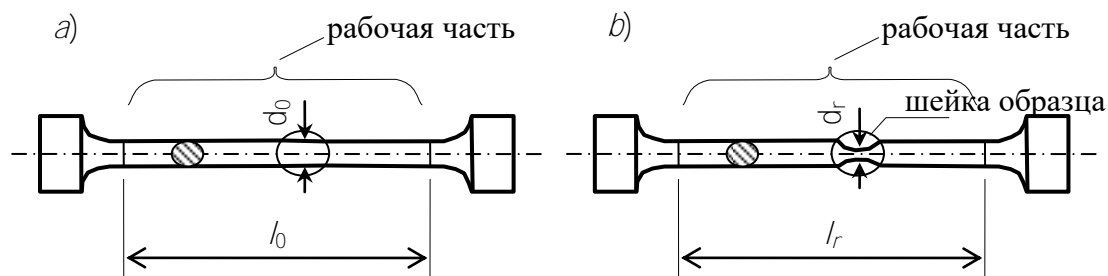


Рис. 205 – Вид образца до испытания (а) и после испытания (б)

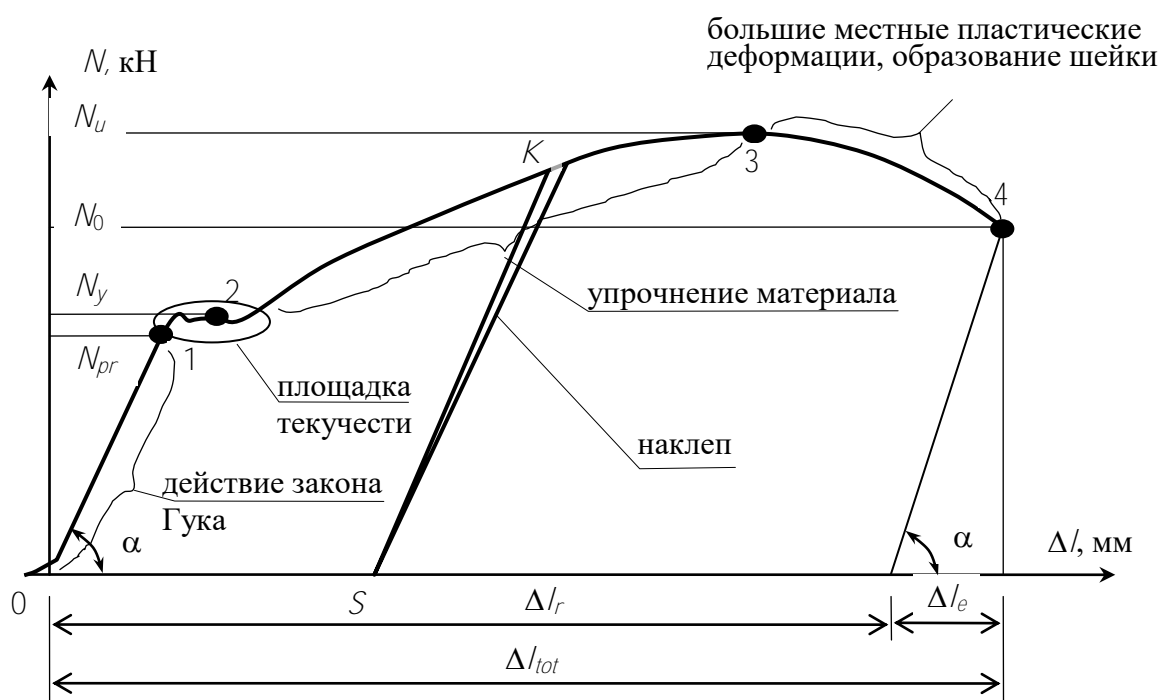
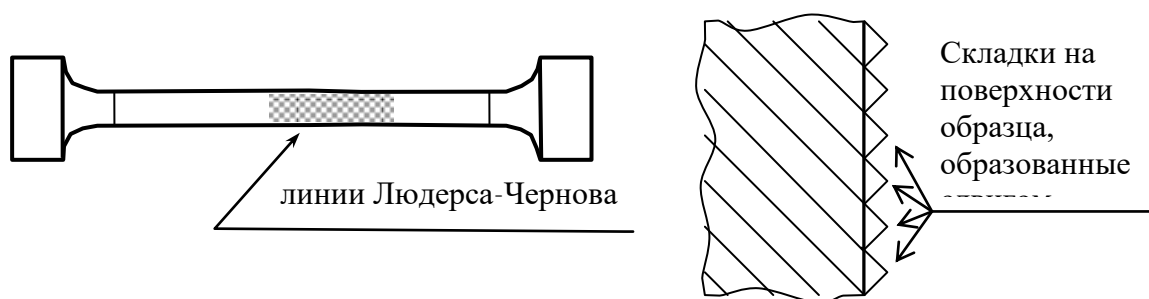


Рис. 206. Машинная диаграмма испытания образца из малоуглеродистой стали на растяжение

**3.6.3.1. Участок диаграммы, соответствующий действию закона Гука.** На участке машинной диаграммы, отмеченной точками 0 и 1, деформации образца растут прямо пропорционально растягивающей силе. Следовательно, при таких нагрузках образец деформируется по закону Гука.

Если на этой стадии испытания образец разгрузить, то самописец испытательной машины вычертит уже имеющуюся часть диаграммы, но в обратном порядке. То есть полная разгрузка образца приведет к полному восстановлению его первоначальных размеров и формы. Это указывает на то, что деформации образца на этой стадии испытания являются упругими.

**3.6.3.2. Площадка текучести и линии Людерса–Чернова.** Если нагрузка вышла за пределы участка диаграммы, ограниченного точками 0 и 1, и продолжает увеличиваться, то наступает такой момент, соответствующий точке 2, когда деформации начинают расти практически без увеличения нагрузки. Горизонтальный участок диаграммы в окрестности точки 2 называют площадкой текучести. Как показывают многочисленные исследования образцов из стали, текучесть сопровождается значительными взаимными сдвигами кристаллов по площадкам, наклоненным к оси образца под углом  $45^{\circ}$ , в результате чего на поверхности образуются складки. Это становится заметным невооруженным глазом, если поверхность образца отполирована до “зеркального блеска”. После образования таких складок зеркальная поверхность становится матовой. В честь ученых, обнаруживших это явление, эти складки названы линиями Людерса–Чернова.



**Рис.207 – Образование линий Людерса–Чернова**

**3.6.3.3. Упрочнение стали и наклеп.** Удлинившись на некоторую величину при постоянной нагрузке, то есть, претерпев состояние текучести, сталь снова приобретает способность к увеличению сопротивления, дальнейшему растяжению, и диаграмма за площадкой текучести поднимается вверх, но по более пологой кривой. Участок диаграммы, ограниченный концом площадки текучести и точкой 3, соответствующей наибольшей нагрузке на образец, называется участком упрочнения стали.

Если в момент испытания, соответствующий точке  $K$ , остановить нагружение образца, а затем медленно его разгрузить, то самописец испытательной машины не будет вычерчивать диаграмму в обратном порядке, а вычертит прямую линию разгрузки, ограниченную точками  $K$  и  $S$ , параллельную прямой участка между точками 0 и 1. Если после разгрузки начать образец снова нагружать, то самописец вычертит прямую  $SK$ , а затем продолжит дорисовывать недостающую часть диаграммы  $K4$  (рис.206). Такое явление называется наклепом.

**Наклеп** – это явление увеличения предела пропорциональности материала при повторных нагружениях.

**3.6.3.4. Участок больших местных деформаций и образования шейки.** Участок диаграммы, ограниченный точками 3 и 4, соответствует появлению больших местных пластических деформаций образца, приводящих к образованию “шейки”. Площадь поперечного сечения образца в “шейке” быстро уменьшается, что уменьшает сопротивление образца растяжению. Так как испытательная машина поддерживает скорость деформации образца постоянной, наблюдается быстрое снижение нагрузки. В какой-то момент испытания происходит разрыв образца с разделением его на две части, что соответствует на диаграмме точке 4.

**3.6.3.5. Полная, остаточная и упругая деформации образца.** Деформация образца в момент разрыва называется полной  $\Delta/l_{tot}$  и складывается из двух составляющих – упругой деформации  $\Delta/l_e$  и остаточной (пластической) деформации  $\Delta/l_r$ . Полная деформация непосредственно измерена быть не может, а устанавливается по машинной диаграмме с учетом ее масштаба. После разрыва образца упругая деформация  $\Delta/l_e$  исчезает, а пластическая  $\Delta/l_r$  остается. Для определения остаточной (пластической) деформации необходимо измерить длину рабочей части образца после разрыва и вычесть его длину до испытания образца

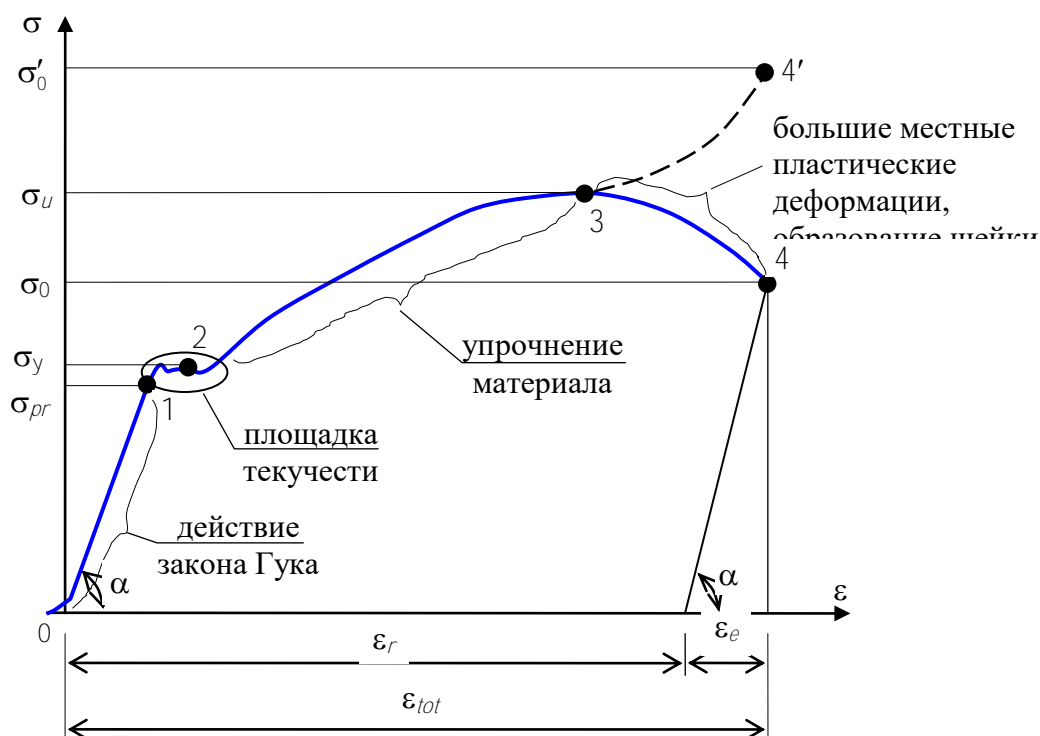
$$\Delta/l_r = l_r - l_0.$$

Упругая деформация может быть найдена как разность полной деформации и остаточной

$$\Delta/l_e = \Delta/l_{tot} - \Delta/l_r.$$

#### **3.6.4. Диаграммы истинных и условных напряжений при испытании образца на растяжение**

Для того чтобы исключить влияние размеров образца (площади поперечного сечения и его длины) на результаты испытания строят диаграмму условных и истинных напряжений. Предварительно определяют механические характеристики стали – пределы пропорциональности, текучести и прочности, а также условные и истинные напряжения в момент разрыва образца. Затем по масштабу определяют абсолютные деформации образца, соответствующие отмеченным на машинной диаграмме четырем точкам, и делят их на первоначальную длину рабочей части образца. Используя полученные величины в осях координат  $\sigma$  и  $\varepsilon$ , наносят четыре точки, соблюдая масштаб, и соединяют их кривой, подобной машинной диаграмме растяжения.



**Рис. 208 – Диаграмма истинных и условных напряжений образца из малоуглеродистой стали при испытании на растяжение**

В процессе испытания площадь поперечного сечения образца будет уменьшаться незначительно до точки 3 и поэтому ее изменение не учитывается в расчетах. На участке, ограниченной точками 3 и 4, за счет больших местных деформаций площадь сечения шейки будет значительно уменьшаться, что приведет к росту истинных напряжений (рис. 208). Поэтому при построении истинной диаграммы напряжений ордината четвертой точки (точки со штрихом) значительно больше ординаты четвертой точки диаграммы условных напряжений.

### 3.6.5. Нормирование стали

**3.6.5.1. Марка стали.** По результатам испытания на растяжение можно установить марку стали. Марка и технические требования для углеродистой стали общего назначения предусмотрены ГОСТ-ами. Для сталей группы А категории 3 при определении марки стали нормирующими показателями являются: предел прочности  $\sigma_u$ , предел текучести  $\sigma_y$  и относительное остаточное удлинение после разрушения образца  $\varepsilon_r$ . Механические характеристики горячекатаной прокатной и листовой стали по ГОСТ 380-88 при толщине до 20 мм при растяжении приведены в табл. 2.

**3.6.5.2. Нормативное сопротивление.** За нормативное сопротивление для данной марки стали принимается минимальное значение предела текучести, приведенное в ГОСТе, то есть  $R_n = \sigma_{yn}$ .

**3.6.5.3. Расчетное сопротивление.** Величина расчетного сопротивления стали равна нормативному сопротивлению, деленному на коэффициент надежности по материалу  $\gamma_m$  согласно ГОСТ 380-88.

$$R_y = R_n / \gamma_m.$$

Таблица 4. Механические характеристики углеродистой стали по ГОСТ 380-88

Марка стали	Предел прочности $\sigma_u$ , МПа	Предел текучести нормированный $\sigma_{yT}$ , МПа	Относительное остаточное удлинение $\epsilon_{r,S}$ , %
		не менее	
Ст. 0	не менее 300	не нормируется	23
Ст. 1 кп	300-390	--	35
Ст. 1 пс, сп	310-410	--	34
Ст. 2 кп	320-410	215	33
Ст. 2 пс, сп	330-430	225	32
Ст. 3 кп	360-460	235	27
Ст. 3 пс, сп	370-480	245	26

Продолжение таблицы 4

Ст. 4 кп	400-510	255	25
Ст. 4 пс, сп	410-530	265	24
Ст. 5 пс, сп	490-630	285	20
Ст. 6 пс, сп	не менее 590	315	15

**П р и м е ч а н и е.** Последние буквы в наименовании марки стали означают номер категории. Дополнение в наименовании марки стали указывает способ ее получения: кп – кипящая, пс – полуспокойная, сп – спокойная.

### 3.6.6. Порядок выполнения испытания и обработка результатов

**3.6.6.1. Порядок проведения испытания.** Для выполнения лабораторной работы следует:

1. Ознакомиться с устройством испытательной машины и ее принципиальной схемой действия. Записать тип машины, цену деления шкалы силоизмерительного устройства, масштаб построения диаграммы по нагрузке и по деформации.
2. Измерить диаметр и длину рабочей части образца, отмеченной кернами, до испытания.
3. Закрепить образец в реверсоре и установить его в захваты прессы. *Реверсор – это устройство, обеспечивающее растяжение и разрыв*

установленного в нем образца на испытательных машинах, предназначенных для испытаний на сжатие.

4. Проверить работу устройства для записи диаграммы. Для этого повернуть барабан вхолостую и получить нулевую линию.
5. Включить испытательную машину (пресс) и наблюдать за процессом растяжения образца – получение прямолинейного участка диаграммы, площадки текучести, области упрочнения, уменьшение нагрузки, образование шейки на образце и его разрушение.
6. После разрушения образца выключить испытательную машину (пресс), вынуть из захватов реверсор и достать из него обе части разрушенного образца.
7. Записать значение наибольшей нагрузки, отмеченной инертной стрелкой на шкале силоизмерительного устройства.
8. Снять с барабана бумагу с диаграммой растяжения.
9. Приступить к обработке результатов и оформлению отчета по лабораторной работе.

#### 3.6.6.2. Обработка результатов испытания и оформление отчета.

Полученные результаты испытания образца обработать в следующем порядке.

1. Сложить обе части разрушенного образца так, чтобы керны (вмятины) располагались на одной прямой и измерить расстояние между ними  $l_r$ .
2. Измерить диаметр шейки (самого узкого места) образца по двум взаимно перпендикулярным направлениям  $d_{r1}$  и  $d_{r2}$  и определить среднее значение

$$d_r = \frac{d_{r1} + d_{r2}}{2}.$$

3. Вычислить площадь сечения образца в месте образования шейки

$$A_r = \frac{\pi d_r^2}{4}.$$

4. Следует учесть, что при малых нагрузках диаграмма обычно является криволинейной, что связано с деформациями смятия в местах захвата пресса. На машинной диаграмме растяжения провести горизонтальную ось  $\Delta/$  так, чтобы она была касательной к диаграмме снизу. Затем продлить прямолинейную часть диаграммы вниз так, чтобы она пересекла горизонтальную ось  $\Delta/$ . Выбрать эту точку пересечения как начало координат и провести через нее вертикальную ось  $\backslash$  вверх.
5. Отметить конец прямолинейного участка диаграммы точкой 1, середину площадки текучести точкой 2, самую верхнюю точку диаграммы точкой 3 и конец диаграммы, соответствующий разрушению образца, точкой 4.
6. Учитывая масштаб построения диаграммы определить координаты отмеченных четырех точек, которые будут соответствовать по

вертикальному направлению силам  $N_{pr}$ ,  $N_y$ ,  $N_u$  и  $N_0$ , а по горизонтальному направлению деформациям  $\Delta/l_{pr}$ ,  $\Delta/l_y$ ,  $\Delta/l_u$  и  $\Delta/l_0$ .

7. По полученным данным определить механические характеристики стали:

— предел пропорциональности

$$\sigma_{pr} = N_{pr} / A_0;$$

— предел текучести

$$\sigma_y = N_y / A_0;$$

— предел прочности

$$\sigma_u = N_u / A_0;$$

— условное напряжение разрыва образца

$$\sigma_0 = N_0 / A_0;$$

— истинное напряжение разрыва образца

$$\sigma'_0 = N_0 / A_r;$$

— относительное остаточное удлинение образца

$$\varepsilon_r = \frac{l_r - l_0}{l_0} \cdot 100, \%;$$

— относительное остаточное сужение образца

$$\chi = \frac{A_0 - A_r}{A_0} \cdot 100, \%.$$

8. Определить относительные линейные деформации, соответствующие пределам пропорциональности, текучести, прочности и моменту разрыва образца

$$\varepsilon_{pr} = \Delta/l_{pr}/l_0; \quad \varepsilon_y = \Delta/l_y/l_0; \quad \varepsilon_u = \Delta/l_u/l_0; \quad \varepsilon_0 = \Delta/l_0/l_0.$$

9. Построить диаграмму напряжений. Для этого изобразить ось относительных линейных деформаций  $\varepsilon$  и ось напряжений  $\sigma$ . Далее, используя значения механических характеристик стали и соответствующие им относительные деформации, нанести на график четыре точки и соединить их линией, поподобной линии, изображающей машинную диаграмму испытания на растяжение стального образца.

10. Используя полученные механические характеристики и нормативные данные, определить марку стали и расчетное сопротивление.

11. Проанализировать полученные результаты испытания и сделать вывод.

12. Оформить отчет по лабораторной работе.

### 3.6.7 Контрольные вопросы по разделу 3.6

1. Почему малоуглеродистая сталь широко используется для изготовления строительных конструкций?
2. Для чего используются высокопрочные стали в строительстве?
3. Какие показатели для стали являются нормируемыми?

4. Какая цель лабораторной работы по испытанию малоуглеродистой стали на растяжение?
5. Какие требования должны быть выполнены при испытании на растяжение?
6. Какая машина использована для испытания образца на растяжение и какие ее характеристики?
7. Какие измерительные приборы и инструменты используются при выполнении лабораторной работы?
8. Какие формы и размеры могут иметь стальные образцы для испытания на растяжение?
9. Какая часть образца называется рабочей?
10. Какой образец называется длинным (десятикратным), а какой коротким (пятикратным)?
11. Каким образом обеспечивается надежный захват образца?
12. Какая диаграмма называется машинной диаграммой испытания?
13. Особенности участка закона Гука
14. Как выглядит площадка текучести и чем объясняется появление линий Людерса-Чернова?
15. Какая часть диаграммы соответствует упрочнению стали?
16. Что называется наклепом и как выглядит диаграмма испытания образца при промежуточной разгрузке и последующим нагружении?
17. Какая часть диаграммы соответствует большим местным пластическим деформациям и образованию шейки?
18. Какая деформация называется полной и из каких деформаций она состоит?
19. Как определяется полная деформация образца?
20. Как определяется остаточная деформация образца?
21. Как определяется упругая деформация образца?
22. Как строится диаграмма условных и истинных напряжений?
23. Какие показатели являются нормируемыми при определении марки стали?
24. Какая величина принимается за нормативное сопротивление стали?
25. Как определяется расчетное сопротивление стали?
26. Какой порядок проведения испытания?
27. Для чего предназначен реверсор?
28. Почему на начальном участке машинная диаграмма имеет вид кривой линии?
29. Как наносятся на диаграмму напряжений четыре ее особенные точки?
30. Как вычисляются пределы пропорциональности, текучести и прочности?
31. Как вычисляются относительное остаточное удлинение и относительное остаточное сужение образца?
32. Какой вывод можно сделать по результатам лабораторной работы?



### 3.7. Испытание на сжатие

Элементы машин (механизмов) и строительных конструкций могут испытывать сжатие. Прочность материалов оценивается по результатам испытания их на сжатие. Испытание на сжатие являются основным при определении механических характеристик хрупких материалов.

При испытании на сжатие пластических материалов из-за большой деформации (их “сплющивания”) удается определить лишь предел текучести. Пластические материалы при испытании на сжатие практически не могут быть разрушены. Поэтому для них невозможно определить предел прочности при простом сжатии. Хрупкие материалы (чугун, камень, бетон и др.) разрушаются при сжатии, выдерживая при этом значительно большее напряжение, чем при растяжении. Для хрупких материалов предел прочности на сжатие имеет большое практическое значение. Тем более, что хрупкие материалы в конструкциях обычно работают на сжатие.

#### 3.7.1. Цель испытания

Целью испытания на сжатие является изучение опытных зависимостей между сжимающей силой и деформацией образцов из стали, чугуна и древесины. По полученным результатам испытания требуется определить механические характеристики прочности и пластичности материалов. Для хрупких материалов установить расчетное сопротивление.

#### 3.7.2. Исходные данные

**3.7.2.1. Требования к испытанию.** Нагружение образцов выполняется статической нагрузкой при скорости деформирования не более 1 мм/мин. Опорные поверхности образцов должны быть гладкими, а форма и размеры образца соответствовать стандарту. Наличие трения между торцами образца и плитами пресса приводит к увеличению разброса результатов испытания. В некоторых случаях для устранения влияния трения опорные поверхности (торцы) образцов шлифуют и смазываются графитовой пастой.

**3.7.2.2. Испытательная машина.** Испытание проводится на гидравлическом прессе, который способен создать сжимающую силу до 500 кН (Р-50). Испытательная машина имеет силоизмеритель и записывающее устройство для построения диаграммы деформирования.

**3.7.2.3. Измерительные приборы и инструменты.** Для определения размеров образца до испытания и после испытания используется штангенциркуль с ценой деления 0,1 мм.

**3.7.2.4. Форма и размеры испытываемых образцов на сжатие.** Стальной образец имеет форму цилиндра диаметром 20 мм и высотой 20 мм. При изготовлении образцов для испытания на сжатие для исключения

потери устойчивости должно выполняться требование, чтобы высота образца не превышала трех диаметров.

Цилиндрический образец из чугуна может иметь такие же размеры, что и стальной или иметь форму кубика с размером ребра 20 мм (или 10 мм).

Древесина испытывается на сжатие вдоль и поперек волокон. Образец для испытания древесины вдоль волокон должен иметь форму параллелепипеда с отношением высоты к ширине равным полтора.

### 3.7.3. Машинные диаграммы испытания образцов из пластических и хрупких материалов

**3.7.3.1. Диаграмма сжатия и форма разрушения стального образца.** На начальном этапе испытания машинная диаграмма имеет прямолинейный вид, что подтверждает соблюдение закона Гука (рис.209). Затем следует площадка текучести. Нарастание пластических деформаций при постоянной сжимающей нагрузке заканчивается, и диаграмма становится криволинейной. Для дальнейшей деформации образца опять требуется увеличение нагрузки. При этом образец становится заметно короче и при отсутствии смазки приобретает бочкообразную форму. Но добиться разрушения стального образца при испытании на сжатие невозможно, так как по мере роста нагрузки увеличивается площадь его поперечного сечения, а значит и сопротивление. Поэтому установить на диаграмме точку, соответствующую пределу прочности невозможно.

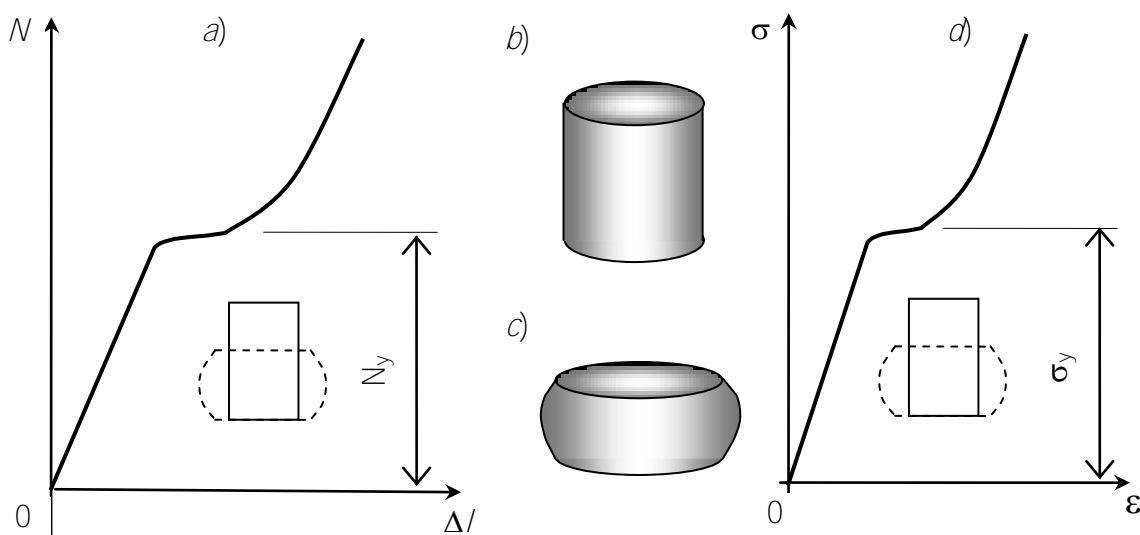
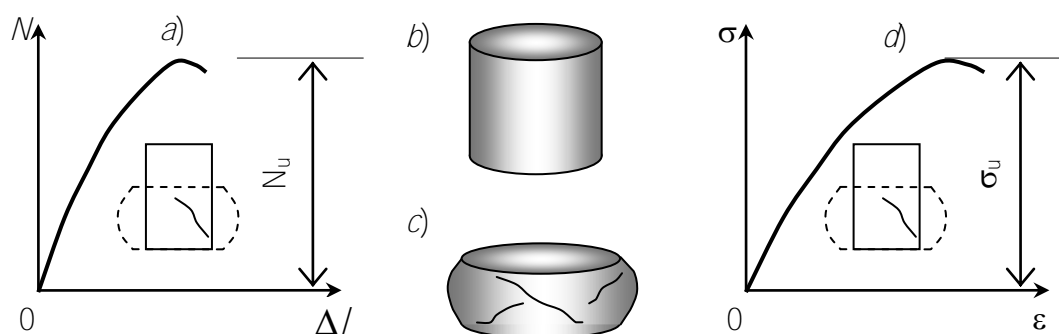


Рис. 209. Машинная диаграмма (а), вид стального образца до испытания (b) и после испытания (с) и диаграмма напряжений (d)

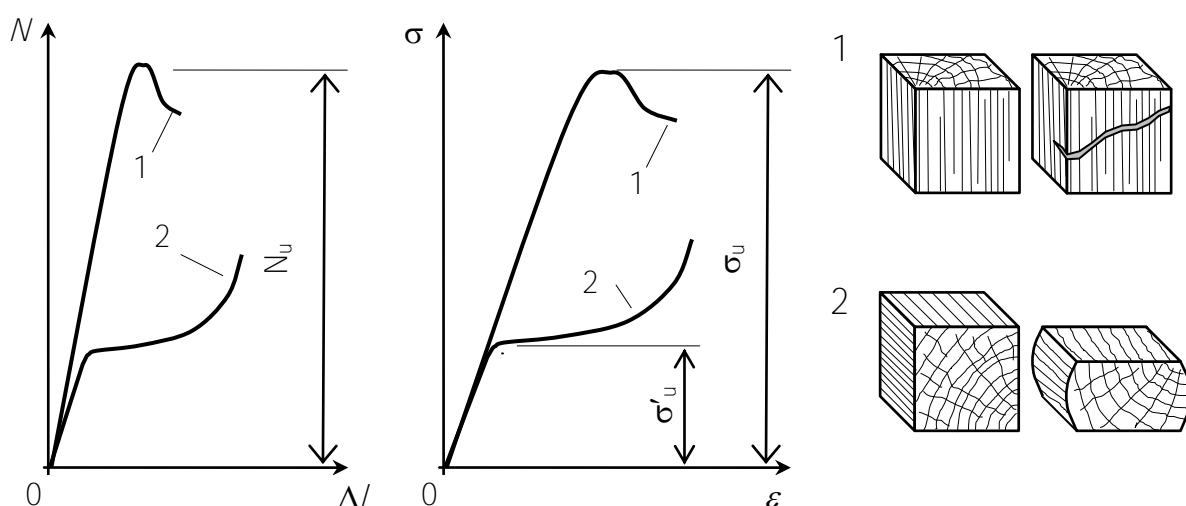
**3.7.3.2. Диаграмма сжатия и форма разрушения чугунного образца.** Диаграмма сжатия чугунного образца имеет выраженный криволинейный характер (рис. 210). Поэтому для чугуна закон Гука может быть применен только приближенно. Значение модуля упругости является усредненной величиной. Площадка текучести на диаграмме отсутствует.

При разрушении чугунного образца на его боковой поверхности образуются трещины, расположенные под углом  $45^\circ$  к оси. Разрушение чугунного образца происходит в момент образования первой трещины на его поверхности, что соответствует максимальной сжимающей нагрузке и резкому обрыву диаграммы. Этот момент установить сложно, поэтому в результате испытания образец всегда оказывается “пережатым”. Максимальная сжимающая сила на диаграмме соответствует усилию предела прочности  $N_u$ . Дальнейшее деформирование образца приводит к появлению на его поверхности новых трещин и выкрашиванию частиц чугуна.



**Рис. 210. Машинная диаграмма (а), вид чугунного образца до испытания (b), после испытания (с) и диаграмма напряжений**

**3.7.3.3. Диаграмма сжатия и форма разрушения деревянного образца.** В связи с волокнистым строением древесины ее прочность и модуль упругости вдоль и поперек волокон неодинаковые. Поэтому древесина имеет анизотропию по прочности и по жесткости.



**Рис. 211. Машинная диаграмма (а), диаграмма напряжений (b) и вид деревянного образца (с) при испытании на сжатие вдоль волокна (1) и поперек волокна (2)**

Диаграммы деформирования деревянного образца на сжатие вдоль волокна (1) и на сжатие поперек волокна (2) существенно отличаются друг от друга (рис. 211). Диаграмма, полученная при испытании образца на сжатие вдоль волокна (1), представляет собой зависимость, близкую к прямолинейной. Лишь в конце испытания наблюдается уменьшение нагрузки. Максимальная сжимающая сила на диаграмме соответствует усилию предела прочности. В момент разрушения в образце за счет сдвигов образуются трещины, расположенные под углом  $45^\circ$  к линии действия силы.

Диаграмма, полученная при испытании деревянного образца на сжатие поперек волокон (2), также вначале является прямой. Отметим, что в древесине чередуются более прочные и менее прочные волокна (годовичные кольца). При достижении некоторого значения сжимающей силы начинают разрушаться менее прочные волокна, что вызывает большие деформации образца. Поэтому диаграмма становится пологой (почти горизонтальной). Когда все мало прочные волокна будут разрушены и уплотнятся, сопротивление образца сжатию будет возрастать неограниченно.

#### **3.7.4 Порядок проведения испытания и обработка результатов**

Порядок проведения испытания образцов из стали, чугуна и древесины практически одинаковые.

##### **3.7.4.1. Порядок проведения испытания.**

1. Ознакомиться с устройством испытательной машины и ее принципиальной схемой действия. Записать тип машины, цену деления шкалы силоизмерительного устройства, масштаб построения диаграммы по нагрузке и по деформации.
2. Измерить высоту и диаметр для стального и чугунного образца, высоту и размеры квадратного сечения для деревянного образца до испытания.
3. Установить образец между плитами испытательной машины. Для исключения изгиба образца один из захватов должен иметь шаровую опору. При испытании древесины на сжатие вдоль волокна линия действия силы должна быть параллельной волокнам в образце. Если испытание древесины проводится поперек волокна, то образец следует установить так, чтобы линия действия силы была перпендикулярна волокнам.
4. Включить испытательную машину (пресс) и наблюдать за процессом сжатия образца – получение прямолинейного участка диаграммы, площадки текучести, области упрочнения, образование трещин и разрушения образца.
5. После разрушения образца выключить испытательную машину (пресс), вынуть из захватов образец, изучить форму образца и образованные трещины. Измерить размеры образца после испытания.
6. Записать значение наибольшей нагрузки, отмеченной на шкале силоизмерительного устройства дополнительной “инертной” стрелкой.

7. Снять с барабана бумагу с диаграммой сжатия.
8. Приступить к обработке результатов и оформлению отчета по лабораторной работе.

#### 3.7.4.2. Обработка результатов испытания и оформление отчета.

1. После испытания чугунного и деревянного образцов снять на шкале силоизмерителя пресса значение усилий соответствующее пределу прочности. Для образца из стали установить силу, соответствующую пределу текучести и максимальное усилие, достигнутое при испытании.
2. Осмотреть образцы до испытания и после испытания, нарисовать их и имеющиеся на них трещины, измерить высоту, диаметр для чугунного и стального образцов и стороны сечения деревянного образца.
3. По опытным данным перечертить машинные диаграммы сжатия для стали, чугуна и древесины в журнал лабораторных работ.
4. Для хрупких материалов (чугуна и древесины) определить пределы прочности и относительные остаточные укорочения.

$$\sigma_u = \frac{N_u}{A_0}, \quad \varepsilon_r = \frac{h_0 - h_r}{h_r} \cdot 100,$$

где  $N_u$  – силы, соответствующие пределу прочности чугуна и древесины;  
 $h_r$  – высота чугунного и деревянного образцов после испытания;  
 $h_0$  – высота чугунного и деревянного образцов до испытания;  
 $A_0$  – площадь поперечного сечения чугунного и деревянного образцов до испытания.

5. Для упруго-пластического материала (стали) определить предел текучести, максимальное условное напряжение и относительное остаточное укорочение при максимальной нагрузке испытания

$$\sigma_y = \frac{N_y}{A_0}, \quad \sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A_0}, \quad \varepsilon_r = \frac{h_0 - h_r}{h_0} \cdot 100,$$

где  $N_y$  – сила, соответствующая пределу текучести стали;  
 $N_{\max}$  – максимальная сила испытания стали;  
 $h_r$  – высота стального образцов после испытания;  
 $h_0$  – высота стального образца до испытания;  
 $A_0$  – площадь поперечного сечения стального образца до испытания.

6. Для чугуна и древесины определить расчетные сопротивления, приняв коэффициент безопасности по материалу  $\gamma_m = 2,5$

$$R_c = \frac{\sigma_u}{\gamma_m}.$$

7. Проанализировать полученные результаты испытания и сделать вывод.
8. Оформить отчет по лабораторной работе.

#### 3.7.5 Контрольные вопросы по разделу 3.7

1. Почему для пластичных материалов невозможно определить предел прочности на сжатие?

2. В чем особенность прочности хрупких материалов?
3. Какая цель ставится при выполнении лабораторной работы?
4. Какие требования ставятся при испытании образцов на сжатие?
5. На какой испытательной машине проводились испытания образцов на сжатие?
6. Какие измерительные инструменты использовались в лабораторной работе?
7. Какую форму и размеры имели образцы из стали, чугуна и древесины?
8. Какую форму имеет машинная диаграмма испытания и диаграмма напряжений стального образца?
9. Почему нельзя добиться разрушения стального образца при испытании на сжатие?
10. Какую форму имеет машинная диаграмма испытания и диаграмма напряжений чугунного образца на сжатие?
11. Какому усилию соответствует в лабораторной работе высшая точка диаграммы сжатия для образца из чугуна?
12. Почему для чугуна закон Гука может быть применен только приближенно?
13. Почему диаграммы сжатия образцов из чугуна и древесины не имеют площадки текучести?
14. Что появляется на поверхности чугунного образца в момент его разрушения?
15. С какого места на диаграмме начинается образование трещин на образце из чугуна?
16. Чем отличаются машинные диаграммы древесины при испытании ее на сжатие вдоль волокон и поперек волокон?
17. Какому усилию соответствует высшая точка диаграммы сжатия вдоль волокон для образца из древесины?
18. Чем отличается характер разрушения образцов из древесины при сжатии вдоль волокна и при сжатии поперек волокна?
19. С какого места диаграммы появляются площадки сдвига в образце из древесины при сжатии вдоль волокон?
20. Почему на машинной диаграмме испытания образца из древесины поперек волокон появляется горизонтальный участок?
21. Как (по каким формулам) вычисляются пределы прочности для чугуна и для древесины?
22. Как (по каким формулам) вычисляются предел текучести, максимальное напряжение испытания и относительное остаточное укорочение для стали?
23. Какие механические характеристики определялись в лабораторной работе для образца из чугуна и древесины?
24. Какие механические характеристики определялись в лабораторной работе для образца из стали?

25. Как определяются расчетные сопротивления для чугуна и древесины?
26. Какая величина обозначена буквой  $\gamma_m$ ? Единицы измерения?
27. Какие материалы, испытанные в лабораторной работе, являются хрупкими?
28. Какие материалы, испытанные в лабораторной работе являются пластичными?
29. Какие выводы сделаны по результатам испытания стали, чугуна и древесины?

### 3.8. Определение модуля продольной упругости и коэффициента поперечной деформации

Физическая постоянная  $E$  называется модулем упругости (модулем Юнга) и является коэффициентом зависимости, выражающей закон Гука  $\sigma = E\varepsilon$ . Модуль упругости характеризует жесткость материала – его способность сопротивляться упругому деформированию. Величина модуля упругости зависит от свойств материала и может быть определена только опытным способом.

Под действием осевой силы стержень изменяет свою длину – удлиняется или укорачивается, и изменяет свои поперечные размеры. Способность материала деформироваться в поперечном направлении (направлении перпендикулярном к линии действия силы) характеризуется коэффициентом поперечной деформации (коэффициентом Пуассона)  $\nu$ . *Отношение относительной поперечной деформации к относительной продольной деформации, взятое по абсолютной величине, называется коэффициентом поперечной деформации (коэффициентом Пуассона)*. Коэффициент Пуассона для изотропных материалов может принимать значения в пределах от 0 до 0,5. Этот физический коэффициент зависит от свойств материала и также как и модуль упругости может быть найден только опытным путем.

Важными допущениями в сопротивлении материалов являются предположения о прямо пропорциональности деформаций и напряжений (закон Гука) и *гипотеза Бернулли – плоские поперечные сечения до деформации остаются плоскими и после деформации*. Прямо пропорциональная зависимость деформаций и напряжений достаточно точно выполняется только для малоуглеродистых сталей и “железного уса” – кристаллов железа, выращенных из растворов солей железа. Причиной этому является малое содержание дефектов кристаллической решетки этих материалов. Большое количество дефектов кристаллической решетки и присутствие примесей других материалов объясняет криволинейность диаграмм испытания. Гипотеза Бернулли справедлива только в отдельных случаях сопротивления стержня – центральное растяжение-сжатие длинных стержней, чистый изгиб тонких балок и др.

### 3.8.1. Цель испытания

По результатам испытания подтвердить справедливость закона Гука для малоуглеродистой стали и гипотезу Бернулли; определить опытным путем значение модуля упругости и коэффициента Пуассона.

### 3.8.2. Исходные данные

**3.8.2.1. Требования к испытанию.** Растяжение образца должно выполняться статической нагрузкой со скоростью деформирования не более 1 мм/мин, равными ступенями при отсутствии перекосов положения образца – линия действия растягивающей силы должна точно совпадать с осью стержня (образца). Напряжения, вызванные максимальной нагрузкой на образец не должны превышать предел пропорциональности  $\sigma_{\max} \leq \sigma_{pr}$ .

**3.8.2.2. Испытательная машина.** Для проведения опыта использована испытательная машина Р-50 гидравлического привода, способная развить нагрузку 500 кН.

**3.8.2.3. Измерительные приборы и инструменты.** Для определения размеров поперечного сечения используются штангенциркуль с ценой деления 0,1 мм и стальная линейка. Деформации продольных и поперечных волокон измерялись с помощью датчиков сопротивления с базой  $l_0 = 20$  мм и измерителем деформации цифровым ИДЦ-1. Цена деления прибора указана на шкале и равна  $\alpha = 10^{-5}$ , значение коэффициента чувствительности  $K = 2,05$  указана в паспорте прибора.

**3.8.2.4. Датчики и используемый образец.** Испытание проводится на стальном образце прямоугольного сечения (рис.212). На широкой грани образца наклеены семь датчиков, пять из которых с рабочим направлением вдоль действия растягивающей силы. Эти датчики используются для измерения деформаций продольных волокон. Два датчика из семи наклеены так, что их рабочее направление перпендикулярно направлению силы. Они используются для измерения деформаций поперечных волокон.

Датчик, компенсирующий влияние температуры, наклеен на недеформированную деталь установки – на пластинку электроразъема. Все датчики должны быть наклеены на тщательно зачищенную, обезжиренную поверхность и качественно припаяны к проводам прибора.

### 3.8.3. Порядок проведения испытания и обработка результатов

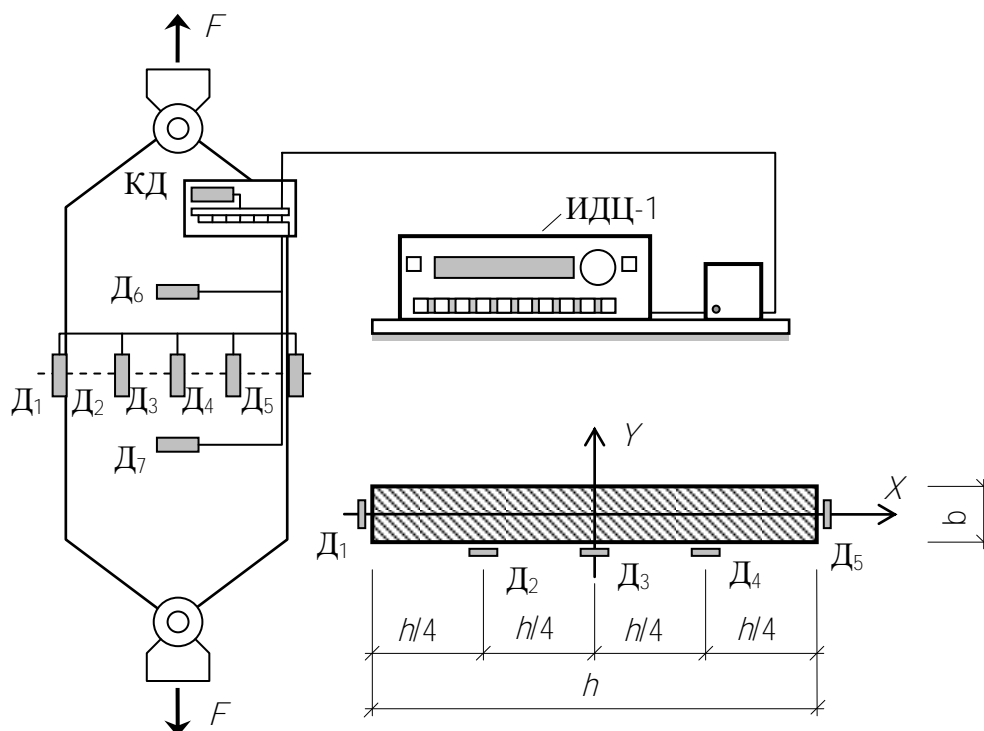
#### 3.8.3.1. Порядок проведения испытания.

1. Ознакомиться с основными узлами и принципом работы испытательной машины.
2. Ознакомиться с образцом, узлами его крепления и наклеенными на нем датчиками.
3. Установить какие датчики являются рабочими и какие из них предназначены для измерения деформаций в продольном направлении, а какие для измерения поперечных деформаций.
4. Установить какой датчик является компенсирующим, где он расположен?



5. Ознакомиться с работой измерителя деформации.
6. Произвести предварительное нагружение для обжатия головок образца в захватах испытательной машины, зафиксировать величину нагрузки и произвести первый отсчет по всем семи датчикам.
7. Нагружать образец ступенями, последовательно снимать отсчеты по каждому из семи датчиков и записать их в журнал.
8. После завершения испытания разгрузить образец и выключить пресс.

**3.8.3.2. Заполнение таблицы результатов испытания.** По мере проведения испытаний в таблицу заносятся отсчеты по нагрузке  $N$  и показания прибора по каждому из семи датчиков  $n$ . Далее следует определить приращения нагрузки  $\Delta N$  и показаний прибора  $\Delta n$  на каждой ступени нагружения для каждого датчика. Для этого из последующего отсчета следует вычесть предыдущий отсчет и записать результат в позицию, расположенную между строками, соответствующих нагрузок. Затем по приращениям нагрузки и показаниям прибора, соответствующих каждому датчику, вычисляются средние арифметические значения приращений, которые записываются в нижней позиции соответствующего столбца таблицы.



**Рис. 212.** Схема образца с датчиками и подключенным прибором ИДЦ-1

**3.8.3.3. Построение графиков деформации.** Для подтверждения закона Гука следует построить графики зависимостей продольных и поперечных деформаций от нагрузки. Для этого выберем один датчик (например, третий) из первых пяти и шестой или седьмой датчик. Так как

отсчеты  $n$  пропорциональны  $\varepsilon$ , поэтому график деформаций можно построить, используя значения отсчетов  $n$  и значения нагрузки  $N$ .

Поместить первую точку графика в начале системы координатных осей  $n$  и  $N$ . Отложить от нуля на горизонтальной оси приращение  $\Delta n$ , соответствующее первой ступени нагружения, а на вертикальной оси  $\Delta N$ , соответствующее приращению нагрузки, и отметить точку с полученными координатами. Затем от полученных координат второй точки отложить  $\Delta n$ , соответствующее второй ступени нагружения, и  $\Delta N$ , соответствующее приращению нагрузки. Получим координаты третьей точки и так далее. Соединяя полученные точки штриховыми прямыми, построим ломаную линию. Далее следует провести прямую через полученные точки так, чтобы отклонение этих точек от проведенной прямой было бы минимальным (рис. 213).

Следует обратить внимание на то, что график, полученный по данным датчика с направлением вдоль линии силы, отклонен вправо от вертикальной оси  $N$ , а по данным шестого или седьмого датчика – отклонен влево. Это объясняется тем, что продольные волокна образца удлиняются, а поперечные волокна укорачиваются. Поэтому продольные деформации будут положительными, а поперечные деформации отрицательными.

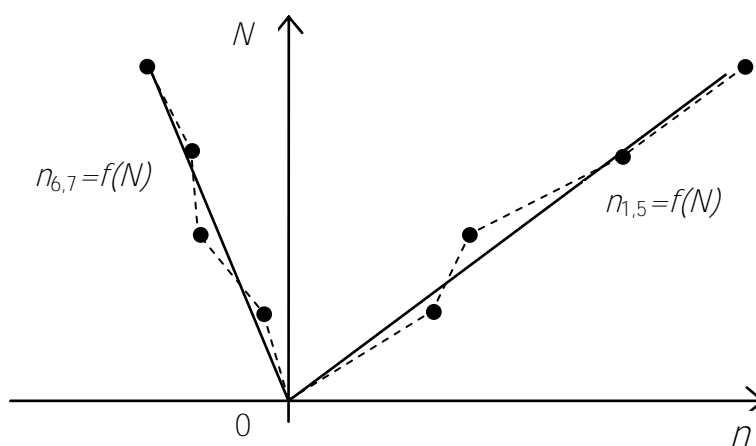
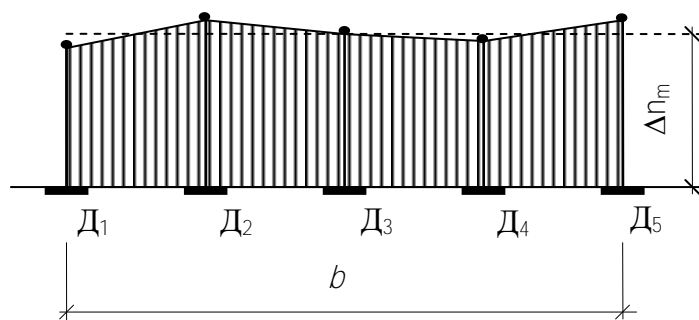


Рис. 213. – Графики зависимости отсчетов по прибору от значения растягивающей силы

По характеру графиков, которые имеют вид близкий к прямым, можно сделать вывод о том, что закон Гука выполняется. Незначительные отклонения опытных точек объясняются погрешностью измерительного прибора.

**3.8.3.4. Эпюра продольных деформаций.** По результатам, полученным для первых пяти датчиков, можно построить эпюру смещения точек поперечного сечения образца. В точках, где наклеены первые пять датчиков, следует отложить соответствующие значения средних

приращений показаний прибора  $\Delta n_{mi}$ . Затем соединить полученные точки прямыми отрезками. В результате получим ломаную линию, которая изображает эпюру продольных деформаций по ширине поперечного сечения образца (рис. 214).



**Рис. 214. Эпюра продольных деформаций по ширине поперечного сечения**

Затем вычислить среднеарифметическое значение средних приращений отсчетов по первым пяти датчикам.

$$\Delta n_m = \frac{\sum \Delta n_{mi}}{5}, \quad \Delta n'_m = \frac{\sum \Delta n'_{mi}}{5}.$$

Отложим полученную величину на графике от линии построения и проведем штриховую линию. Полученная линия изображает усредненную эпюру смещений точек поперечного сечения. Сравнивая усредненную эпюру смещений и ломанную, полученную по значениям в опытных точках, можно сделать вывод, что гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли) действительно подтверждается. Отклонение опытных точек от усредненной эпюры смещений объясняется неоднородностью материала, погрешностью измерений прибора и неабсолютной центровкой образца в захватах пресса.

### 3.8.5 Результаты испытания и оформление отчета

По полученным результатам испытания необходимо определить модуль упругости и коэффициент Пуассона материала. Расчет выполнять в следующем порядке:

1. Вычислить максимальное напряжение в образце и сравнить его с пределом пропорциональности

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A_0} \leq \sigma_{pr}.$$

Определить среднее приращение напряжения на ступени нагружения

$$\Delta \sigma_m = \frac{\Delta N_m}{A_0} = \frac{\Delta N_m}{hb}.$$

2. Определить относительную продольную деформацию, используя среднеарифметические значения средних приращений показаний прибора по первым пяти датчикам

$$\Delta\varepsilon_m = \frac{2\Delta\eta_m\alpha}{K}.$$

3. Определить относительную поперечную деформацию, используя арифметические значения средних приращений показаний прибора по шестому и по седьмому датчикам

$$\Delta\varepsilon'_m = \frac{2\Delta\eta'_m\alpha}{K}.$$

4. По полученным значениям относительной продольной и относительной поперечной деформаций определить коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона)

$$\nu = \left| \frac{\Delta\varepsilon'_m}{\Delta\varepsilon_m} \right|.$$

5. Используя закона Гука  $\sigma = E\varepsilon$ , определить модуль упругости (модуль Юнга) испытываемого материала

$$E = \frac{\Delta\sigma_m}{\Delta\varepsilon_m}.$$

6. Анализируя эпюру продольных деформаций по ширине сечения, сделать заключение о форме поперечного сечения после деформации образца и о справедливости гипотезы плоских сечений (гипотезы Бернулли).

7. Сравнить полученные при испытании значения модуля упругости  $E$  и коэффициента Пуассона  $\nu$  со значениями, приведенными в справочниках, и сделать вывод.

8. Оформить отчет по лабораторной работе.

### 3.8.6. Контрольные вопросы по разделу 3.8

1. Что характеризует модуль упругости?
2. От чего зависит значение модуля упругости?
3. Что характеризует коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона)?
4. Что называется коэффициентом поперечной деформации (коэффициентом Пуассона)?
5. От чего зависит значение коэффициента поперечной деформации?
6. Какие значения может принимать коэффициент Пуассона для изотропных материалов?
7. Как формулируется гипотеза Бернулли?
8. Для каких материалов выполняется закон Гука?
9. Чем объясняется нелинейность деформирования большинства материалов?
10. При каких условиях соблюдается гипотеза Бернулли?
11. Какая цель поставлена при выполнении лабораторной работы?

12. Какие требования поставлены при проведении испытания в лабораторной работе?
13. Какая испытательная машина использована для выполнения опыта?
14. Какие приборы и инструменты используются при выполнении лабораторной работы?
15. Какие датчики используются в лабораторной работе?
16. Как расположены рабочие датчики на образце, предназначенные для измерения продольных деформаций?
17. Как расположены датчики на образце, предназначенные для измерения поперечных деформаций?
18. Какое направление в опыте считается продольным, а какое поперечным?
19. Как закрепляются датчики на образце?
20. Какую форму имеет образец и из какого материала он изготовлен?
21. Для чего служит компенсирующий датчик и где он расположен?
22. В какой последовательности выполняется испытание?
23. Как заполняется таблица результатов и как обрабатываются данные?
24. Как строятся графики продольных и поперечных деформаций?
25. Что выражают графики продольных и поперечных деформаций?
26. Как вычисляется и для чего необходимо значение максимального напряжения в образце?
27. Как определяется приращение напряжения на ступени нагружения?
28. Как определяется относительная продольная деформация в лабораторной работе?
29. Как определяется относительная поперечная деформация в лабораторной работе?
30. Как вычисляется коэффициент поперечной деформации (коэффициента Пуассона)?
31. Как вычисляется значение модуля упругости (модуля Юнга)?
32. Какие выводы можно сделать по результатам испытания?

### 3.9. Определение модуля упругости второго рода (модуля сдвига)

Физическая постоянная  $G$  называется модулем упругости второго рода (модулем сдвига) и является коэффициентом зависимости, выражающей закон Гука при сдвиге  $\tau = G\gamma$ . Модуль сдвига характеризует жесткость материала при упругой деформации сдвига. Модуль сдвига  $G$  в отличие от модуля продольной упругости  $E$  и коэффициента поперечной деформации  $\nu$  является производной величиной и может быть найден как опытным способом, так и теоретическим. Для изотропных материалов существует зависимость между этими величинами

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Определить значение модуля  $G$  непосредственно из опыта на сдвиг (срез) не представляется возможным. Это связано с тем, что обеспечить деформацию чистого сдвига в опыте, т.е. свободного от побочных деформаций технически трудно. Но, так как кручение стержня круглого поперечного сечения можно представить как чистый сдвиг материала за счет взаимного поворота поперечных сечений, поэтому опытное определение модуля  $G$  удобнее производить при кручении стержня сплошного круглого, а лучше кольцевого сечения (образца в виде тонкостенной трубки).

Испытаниями установлено, что для материалов, деформирующихся по закону Гука при растяжении или сжатии, закон Гука справедлив и при деформациях сдвига, а значит и кручении. Закон Гука при кручении выражается зависимостью

$$\Delta\varphi = \frac{T \cdot l}{G \cdot J_p}$$

где  $T$  – крутящий момент на участке стержня;  
 $l$  – длина участка стержня;  
 $G$  – модуль сдвига;  
 $J_p$  – полярный момент инерции поперечного сечения;  
 $\Delta\varphi$  – абсолютная угловая деформация.

### 3.9.1. Цель испытания

Определить опытным путем значение модуля сдвига для образца из стали, а также подтвердить закон Гука при кручении (сдвиге) и теоретическую зависимость между тремя, упругими постоянными материала ( $E$ ,  $G$ ,  $\nu$ ).

### 3.9.2. Исходные данные

**3.9.2.1. Требования к испытанию.** Опытный образец следует нагружать крутящим моментом ступенями. При этом нагрузка должна быть статической без толчков и вибрации. Максимальная нагрузка на образец не должна вызвать в нем напряжений, превышающих предел пропорциональности.

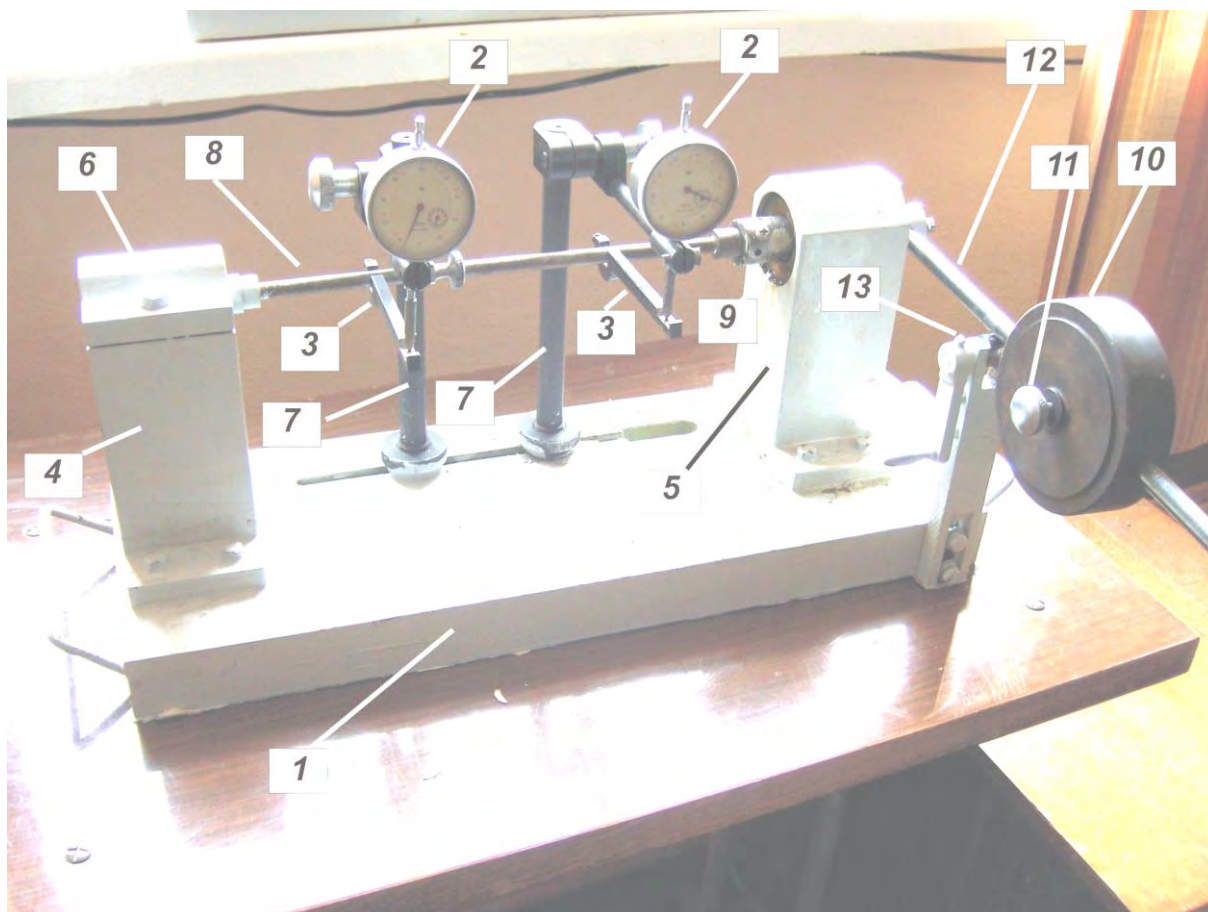
**3.9.2.2. Испытательная установка.** Для проведения опыта использована настольная установка (рис. 215). Нагружение опытного образца выполняется с помощью гири, перемещающейся по размеченному стальному стержню (рычагу). Максимальный создаваемый крутящий момент не должен превышать 20 Нм.

Все детали установки закреплены к станине 1. В качестве образца использован стальной стержень круглого поперечного сечения 8, диаметром  $d$ . Стержень одним концом закреплен на опоре 4 с помощью

зажимного винта 6 и пропущен через подшипник 9 на другой опоре 5. К правому концу стержня прикреплен стальной стержень 12 с насаженной на нем гирей 10 весом  $Q$ , положение которой может меняться. Положение гири фиксируется с помощью стопорного винта 11. На стальном стержне 12 нанесена разметка, выражающая момент, создаваемой гирей 10.

В монтажной щели установлены два штатива 7, которые удерживают два механических тензометра 2. С помощью трубочин 3 к образцу прикреплены стержни длиной  $L$ , расстояние между которыми является базой измерения и равно  $l$ . Измерительные стержни механических тензометров упираются на концы стержней 3. При нагружении образца крутящим моментом его сечения будут поворачиваться. Непосредственно измерить угол поворота с необходимой точностью не представляется возможным. Поэтому при помощи стрелочных индикаторов 2 измеряются линейные перемещения фиксированных точек трубочин 3, отстоящих на расстоянии  $L$  от оси стержня. Так как углы поворота сечений малы, то их определить можно по приближенной формуле.

**3.9.2.3. Измерительные приборы и инструменты.** Для измерения геометрических размеров опытного образца используется штангенциркуль с ценой деления 0,05 или 0,1 мм. Для измерения линейных перемещений в опыте используются стрелочные индикаторы с ценой деления  $\alpha = 0,01$  мм.



**Рис. 215. Настольная установка для определения модуля сдвига:**  
 1 – станина; 2 – механические тензометры (индикаторы часового типа); 3 – струбцины; 4, 5 – опоры; 6 – зажимкой винт; 7 – штативы; 8 – образец (стальной стержень круглого сечения); 9 – подшипник; 10 – гиря; 11 – стопорный винт; 12 – рычаг (стальной стержень с разметкой); 13 – опора с кривошипом.

### 3.9.3. Порядок проведения испытания и обработка результатов

#### 3.9.3.1. Порядок проведения испытания.

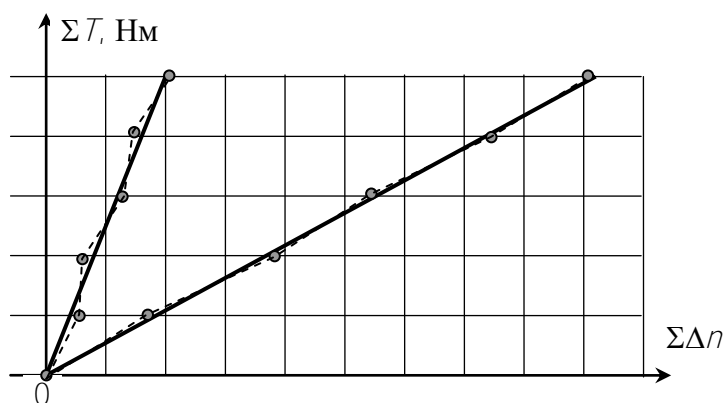
1. Ознакомиться с основными узлами и принципом работы испытательной установки.
2. Ослабить стопорный винт 11 и установить гирю 10 в положение, соответствующее делению с минимальным отсчетом на стержне 12.
3. Зажать стопорный винт 11.
4. Освободить стержень 12, повернув ручку кривошипа 13.
5. Поворотом шкал приборов 2 установить нулевые отсчеты.
6. Записать нулевые значения в таблицу.
7. Снять нагрузку с образца, вернув ручку кривошипа 13 в первоначальное положение.
8. Ослабить стопорный винт 11 и переместить гирю 10 в положение, соответствующее следующему делению на стержне 12.
9. Зажать стопорный винт 11.
10. Освободить стержень 12, повернув ручку кривошипа 13.



11. Снять отсчеты со шкал приборов 2 и записать их значения в журнал.
12. Повторять указанные действия до тех пор, пока положение гири будет соответствовать делению на стержне с максимальным отсчетом.

**3.9.3.2. Заполнение таблицы результатов испытания.** В таблицу заносить значения нагрузок (крутящих моментов)  $T$  и показания приборов  $n$  для каждой ступени нагружения. Далее следует определить приращения нагрузки  $\Delta T$  и показаний приборов  $\Delta n$  на каждой ступени нагружения. Для этого из последующего отсчета вычесть предыдущий отсчет и записать результат в позицию, расположенную между строками, соответствующих нагрузок. Затем вычисляются средние арифметические значения приращений нагрузки и показаний приборов, которые записываются в нижней позиции каждого столбца таблицы.

**3.9.3.3. Построение графиков деформации.** Для подтверждения закона Гука при кручении (сдвиге) следует построить графики зависимостей углов поворота расчетных сечений от нагрузки (крутящего момента) (рис. 216). Так как отсчеты по приборам  $n$  пропорциональны углам поворота, поэтому график деформаций можно построить, используя значения отсчетов  $n$  и значения нагрузки  $T$ . Поместить первую точку графика в начале системы координатных осей  $n$  и  $T$ . Отложить от нуля на горизонтальной оси приращение  $\Delta n$ , соответствующее первой ступени нагружения, а на вертикальной оси  $\Delta T$ , соответствующее приращению нагрузки, и отметить точку с полученными координатами. Затем от полученных координат второй точки отложить приращение отсчета  $\Delta n$ , соответствующее второй ступени нагружения, и  $\Delta T$ , соответствующее приращению нагрузки. В результате получим координаты третьей точки и так далее. Соединяя полученные точки штриховыми прямыми линиями, построим ломаную линию. Далее следует провести прямую линию через полученные точки так, чтобы отклонение этих точек от проведенной прямой было бы минимальным.



**Рис. 216 – Графики зависимости углов закручивания расчетных сечений стержня и крутящего момента**

По характеру графиков, которые имеют вид близкий к прямым линиям, можно сделать вывод о том, что закон Гука выполняется.

Незначительные отклонения опытных точек объясняется погрешностью измерительных приборов.

#### 3.9.4. Результаты испытания и оформление отчета

1. Используя стальную линейку, измерить расстояние между струбцинами (база измерений)  $l$  и с помощью штангенциркуля измерить диаметр образца  $d$ .

2. Вычислить геометрические характеристики поперечного сечения образца

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}; \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16}.$$

3. Вычислить максимальное касательное напряжение в образце, разделив максимальный крутящий момент на полярный момент сопротивления

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p}.$$

4. Сравнить полученное напряжение с пределом пропорциональности  $\sigma_{pr}$ . При этом следует учесть, что при кручении материал испытывает чистый сдвиг. Поэтому максимальное нормальное напряжение, появляющееся при кручении равно максимальному касательному напряжению. Убедиться, что предел пропорциональности не превышен и материал в опыте деформируется по закону Гука

$$\tau_{\max} \leq 0,55 \cdot \sigma_{pr}.$$

5. Определить среднее приращение углов поворота расчетных сечений образца

$$\Delta\theta_{1m} = \frac{\Delta V_{1m}}{L} = \frac{\Delta n_{1m} \alpha}{L}; \quad \Delta\theta_{2m} = \frac{\Delta V_{2m}}{L} = \frac{\Delta n_{2m} \alpha}{L},$$

где  $\Delta V_{1m}, \Delta V_{2m}$  – среднее приращение смещений точек опирания на струбцины измерительных стержней стрелочных тензометров;

$\Delta n_{1m}, \Delta n_{2m}$  – среднее приращение показаний стрелочных индикаторов;

$\alpha$  – цена деления стрелочного индикатора.

6. Вычислить средний угол закручивания участка образца  $l$ , расположенного между струбцинами

$$\Delta\theta_{12m} = \Delta\theta_{2m} - \Delta\theta_{1m}.$$

7. Используя закон Гука при кручении

$$\Delta\theta_{12m} = \frac{\Delta T_m \cdot l}{G \cdot J_p},$$

определить модуль сдвига по результатам опыта

$$G^{\text{оп}} = \frac{\Delta T_m \cdot l}{\Delta\theta_{12m} \cdot J_p}.$$

8. Вычислить модуль сдвига по теоретической зависимости, приняв значения модуля продольной упругости и коэффициента поперечной деформации для стали по справочнику

$$G^{\text{теор}} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

9. Сравнить полученные результаты и сделать выводы

$$\frac{G^{\text{теор}} - G^{\text{оп}}}{G^{\text{теор}}} \times 100, \%$$

10. Оформить отчет по лабораторной работе.

### 3.9.5 Контрольные вопросы по разделу 3.9

1. Что характеризует модуль второго рода (модуль сдвига)?
2. Как выражается закон Гука при сдвиге?
3. Какая зависимость существует между модулем сдвига, модулем продольной упругости и коэффициентом поперечной деформации?
4. Почему определить модуль упругости непосредственно из опыта на сдвиг не представляется возможным?
5. Почему модуль сдвига удобнее определять при кручении?
6. Как выражается закон Гука при кручении?
7. Какая цель ставится в лабораторной работе при испытании образца на кручение?
8. Какие требования следует выполнять при проведении испытаний образца на кручение?
9. Какой образец использован для испытаний?
10. Как закреплен образец?
11. Где располагались расчетные сечения на образце?
12. Как определяется база измерения?
13. Какие приборы и инструменты использованы в опыте?
14. Что непосредственно измерялось стрелочными тензометрами?
15. Как определялись углы поворота расчетных сечений?
16. Каким способом нагружался образец?
17. Для чего служит опора с кривошипом?
18. Для чего служит стопорный винт?
19. По каким формулам вычислялись полярный момент инерции и полярный момент сопротивления поперечного сечения образца?
20. Как вычислялось и для чего необходимо значение максимального касательного напряжения?
21. Какое поставлено условие при проведении опыта?
22. Как вычислялись среднее приращение крутящего момента и средние приращения углов поворота расчетных сечений?
23. Как вычисляется средний угол закручивания рабочей части образца?

24. По какой формуле вычисляется модуль сдвига по результатам опыта?  
25. Какие выводы можно сделать по результатам испытаний?

### 3.10. Исследование нормальных напряжений при плоском изгибе

Многие элементы строительных конструкций испытывают плоский поперечный изгиб. Это балки перекрытий, фундаментные балки, подкрановые балки, балочные плиты. При плоском поперечном изгибе в сечениях балки возникают нормальные  $\sigma$  и касательные  $\tau$  напряжения. Этот вид сопротивления более сложен, чем центральное растяжение (сжатие). Поэтому для упрощения расчетов в теории плоского изгиба используются некоторые гипотезы и допущения – гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли), предположение о том, что продольные волокна испытывают только линейные деформации и гипотеза об отсутствии давления продольных волокон друг на друга, предположение о том, что зависимость между деформациями и напряжениями линейная (закон Гука).

Теоретические исследования, учитывающие принятые гипотезы и допущения, показывают, что при плоском изгибе нормальные напряжения распределяются по высоте сечения балки по линейному закону и достигают наибольших значений в крайних волокнах. Нейтральный слой для прямых стержней, где нормальные напряжения равны нулю, проходит на уровне центра тяжести сечения балки.

Полученные формулы для плоского изгиба просты и удобны для расчета, но являются приближенными. Степень достоверности их может быть оценена результатами испытания балок.

#### 3.10.1. Цель испытания

Целью лабораторной работы является – установить закон распределения нормальных напряжений по высоте заданного сечения балки, определить значения этих напряжений и сравнить их с теоретическими. На основании данных, полученных в результате испытания балки, требуется подтвердить справедливость закона Гука при плоском изгибе, а также гипотезу плоских сечений.

#### 3.10.2. Исходные данные

3.10.2.1. **Требования к испытанию.** При выполнении работы требуется, чтобы нагружение опытной балки осуществлялось статической нагрузкой ступенями, желательно равными, а также, чтобы максимальная нагрузка на балку не вызывала напряжений, превышающих предела пропорциональности, т.е.  $\sigma_{\max} \leq \sigma_{pr}$ .

**3.10.2.2. Испытательная установка.** Для проведения опыта используется специально изготовленный балочный испытатель (рис.217). Объектом исследования является однопролетная стальная прокатная двутавровая балка 1, опирающаяся на шарнирно неподвижную опору (слева) и на шарнирно подвижную опору (справа) 2. Нагружение балки выполняется с помощью гидравлического домкрата 5 с максимальным усилием 100 кН, установленного на нижнюю траверсу 6 и упирающегося в опорную составленную из двух швеллеров балку 3.

Усилие на нижнюю траверсу 6 от гидравлического домкрата 5 через тяжи 8 передается на верхнюю траверсу 7 и прикладывается к балке 1. Величина усилия контролируется манометром домкрата 5.

В расчетном сечении наклеены пять датчиков. Один датчик расположен на уровне центра тяжести сечения балки, два – на расстоянии от центра тяжести равном одной четверти высоты сечения балки. По одному датчику наклеено на верхней и на нижней полках балки. Датчики предназначены для измерения деформаций продольных волокон балки. Поэтому их рабочее направление совпадает с направлением оси балки. Для компенсации влияния температуры установлен компенсирующий датчик 10, расположенный на конце консольной части балки.

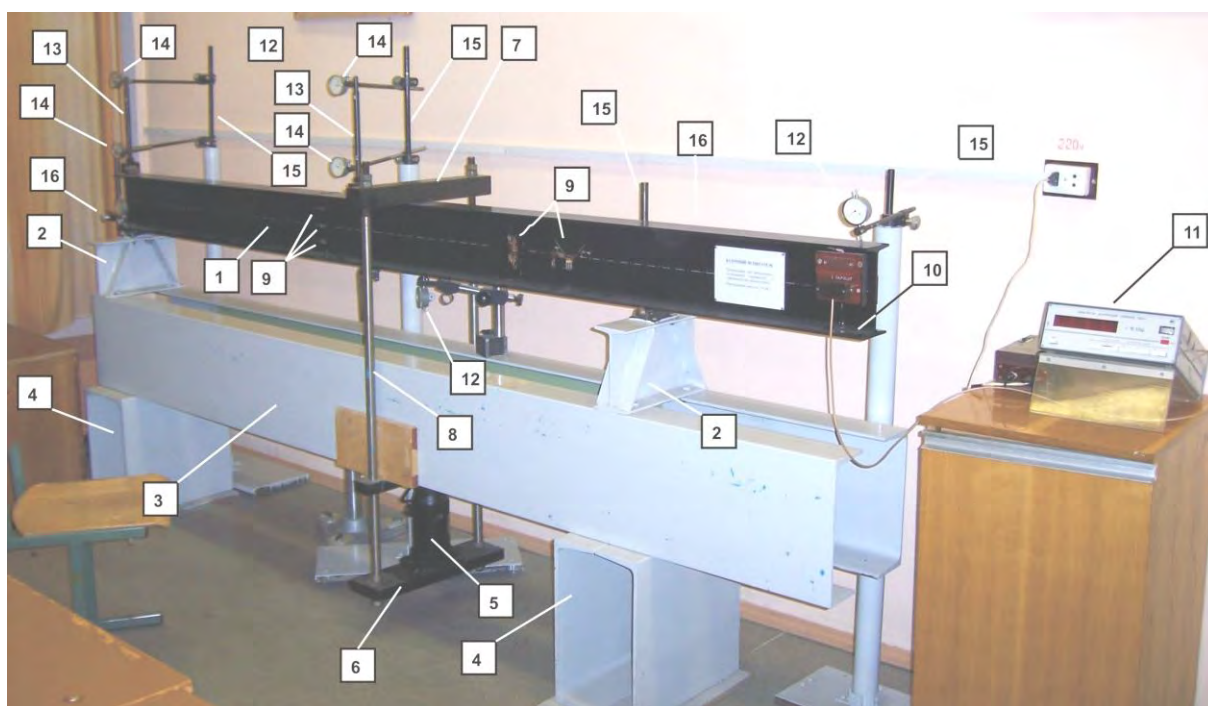
**3.10.2.3. Измерительные приборы и инструменты.** В лабораторной работе для измерения пролета и консоли балки, расстояния от левой опоры до расчетного сечения использовалась стальная лента, для измерения высоты сечения и средней толщины его полки использован штангенциркуль, а для измерения деформаций продольных волокон балки использовались проволочные датчики сопротивления и измеритель деформации ИДЦ-1 с ценой деления  $\alpha=1 \cdot 10^{-5}$ . Отметим, что измеритель деформаций ИДЦ-1 предназначен для измерения относительных линейных деформаций. Поэтому его цена деления  $\alpha$  безразмерная величина.

### **3.10.3. Порядок проведения испытания и обработка результатов**

#### **3.10.3.1. Порядок проведения испытания**

1. Включить питание измерителя деформации ИДЦ-1.
2. С помощью стальной измерительной ленты определить расстояние между опорами балки и длину ее консоли.
3. Измерить расстояние между левой опорой балки и расчетным сечением.
4. Измерить расстояние от левой опоры балки до середины верхней траверсы загрузочного узла.
5. С помощью штангенциркуля измерить высоту сечения двутавра и среднюю толщину его полки.
6. Используя таблицы прокатных профилей установить номер двутавра и выписать его геометрические характеристики.
7. Повернуть рычаг домкрата по ходу часовой стрелки, тем самым закрыв выпускной клапан гидравлического домкрата.

8. Совершая колебательные движения рычагом закачивать масло в цилиндр гидравлического домкрата до тех пор, пока нагрузка на балке не достигнет величины равной первой ступени нагружения.
9. С помощью кнопок на панели измерителя деформации последовательно подключать датчики к прибору, нажимать кнопку прибора «Пуск» и записывать отсчеты в таблицу.
10. Повторить действия при второй, третьей и других ступенях нагружения.
11. После завершения испытания снять нагрузку с балки, повернув рычаг гидравлического домкрата против хода часовой стрелки и тем самым выпустив масло из цилиндра.



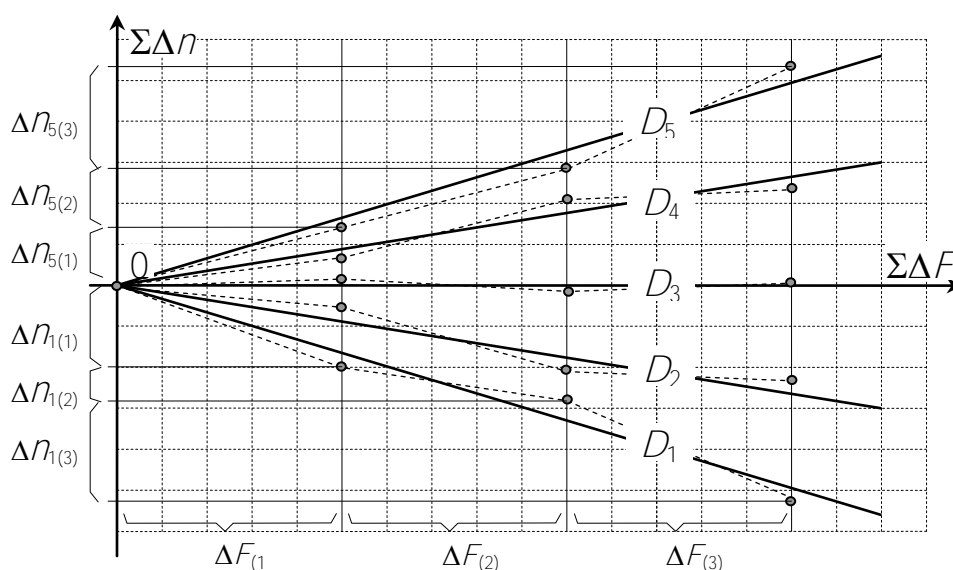
**Рис. 217. Балочный испытатель:**

1. – прокатный двутавр; 2. – опоры балки; 3. – опорная балка, составленная из двух швеллеров; 4. – опоры опытной установки; 5. – гидравлический домкрат; 6. – нижняя траверса; 7. – верхняя траверса; 8. – стальные тяжи; 9. – датчики сопротивления в расчетных сечениях; 10. – компенсирующий датчик; 11. – измеритель деформации цифровой; 12. – стрелочные тензометры для измерения прогибов балки; 13. – стержни, прикрепленные к балке; 14. – стрелочные тензометры, предназначенные для измерения углов поворота расчетных сечений; 15. – штативы, удерживающие стрелочные тензометры; 16. – стрелочные тензометры, предназначенные для измерения деформаций опор балки.

**3.10.3.2. Заполнение таблицы результатов испытания.** Записать в колонки  $F$ ,  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$ ,  $n_4$ ,  $n_5$  таблицы результатов испытания значения нагрузок и отсчеты по измерителю деформаций ИДЦ-1.

#### 3.10.4. Результаты испытания

1. Вычитая из последующего значения предыдущее в колонках  $F$ ,  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$ ,  $n_4$ ,  $n_5$  таблицы опытных данных, вычислить приращение нагрузки  $\Delta F$  и приращения показаний ИДЦ-1  $\Delta n_1$ ,  $\Delta n_2$ ,  $\Delta n_3$ ,  $\Delta n_4$ ,  $\Delta n_5$  и записать их в соответствующие позиции таблицы опытных данных.
2. Вычислить средние арифметические значения приращений нагрузки  $\Delta F_m$  и средние значения приращений показаний прибора ИДЦ-1 для каждого датчика  $\Delta n_{1m}$ ,  $\Delta n_{2m}$ ,  $\Delta n_{3m}$ ,  $\Delta n_{4m}$ ,  $\Delta n_{5m}$  и записать их в соответствующие позиции таблицы опытных данных.
3. Построить график зависимости деформации продольного волокна от нагрузки. Так как деформация продольного волокна прямо пропорциональна разности показаний ИДЦ-1 на ступени нагружения, на вертикальной оси откладывать вместо деформации сумму приращений  $\Sigma \Delta n_i$  показаний прибора. На горизонтальной оси откладывать сумму приращений нагрузки  $\Sigma \Delta F_j$ . Полученные точки соединить прямыми штриховыми отрезками, а затем через каждую группу точек провести сплошные прямые так, чтобы сумма отклонений была минимальной. Из графиков (рис. 218) очевидно, что относительные линейные деформации продольных волокон действительно близки к прямолинейным зависимостям. Поэтому закон Гука выполняется. В местах установки датчиков  $D_1$  и  $D_2$  продольные волокна укорачиваются, а в местах установки датчиков  $D_4$  и  $D_5$  продольные волокна удлиняются. На уровне центра тяжести сечения (датчик  $D_3$ ) деформация продольного волокна близка к нулю. Это подтверждает, что слой нейтральных волокон расположен на уровне центра тяжести сечения.



**Рис. 218.** Графики зависимости относительной линейной деформаций от нагрузки (в скобках указан номер ступени нагружения, за скобками – номер датчика)

4. Вычислить средние относительные линейные деформации продольных волокон балки в местах установки датчиков

$$\varepsilon_{i,m} = \frac{2\Delta n_{i,m} \cdot \alpha}{K}$$

5. Построить эпюру средних относительных линейных деформаций по высоте сечения балки (рис. 219). Для этого в масштабе отложить полученные значения  $\varepsilon_{i,m}$  и соединить полученные точки прямыми отрезками. Затем провести прямую линию так, чтобы сумма отклонений была минимальной. Убедиться, что полученная эпюра относительных линейных деформаций (рис. 219) незначительно отклоняется от прямой. Это подтверждает гипотезу плоских сечений.

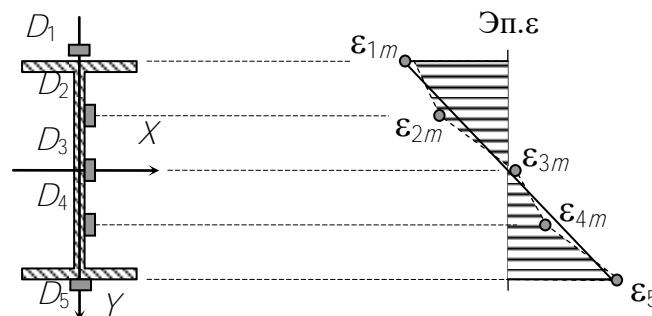


Рис. 219. – Эпюра относительных линейных деформаций

6. По результатам опыта, используя закон Гука, в местах установки датчиков вычислить средние нормальные напряжения

$$\sigma_i = E\varepsilon_i.$$

Значение модуля упругости взять из справочника.

### 3.10.5. Результаты теоретического расчета

1. Построить расчетную схему балки с указанием места приложения нагрузки (рис. 220)

2. Из уравнений равновесия

$$\sum M_A = \Delta F \cdot a - Y_B \cdot l = 0; \quad \sum M_B = Y_A \cdot l - \Delta F \cdot (l - a) = 0$$

вычислить реакции опор балки

$$Y_B = \Delta F \frac{a}{l}; \quad Y_A = \Delta F \frac{l - a}{l}.$$

3. Определить максимальный изгибающий момент (момент в сечении C) и момент в расчетном сечении S

$$M_C = Y_A \cdot a; \quad M_S = Y_A \cdot e.$$

4. Вычислить нормальные напряжения в точках расчетного сечения S

$$\sigma_i = \frac{M_S}{J_X} \cdot y_i,$$



где  $y_i$  – координата точки сечения, в которой установлен датчик  $D_i$ . (ось  $Y$  направить в сторону растянутых волокон – в данном случае вниз).

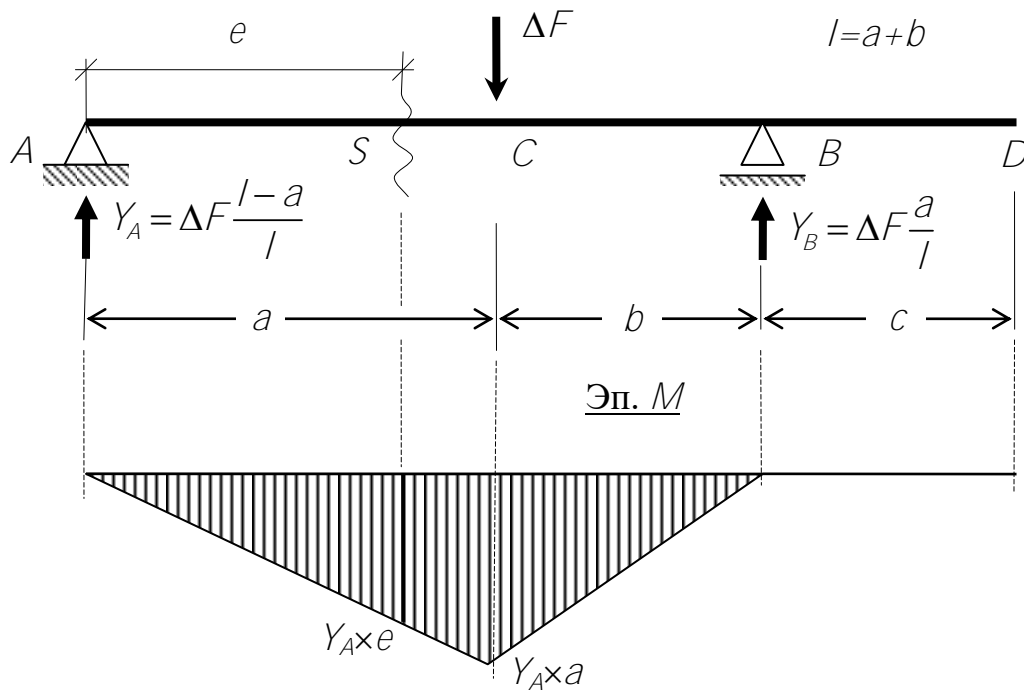


Рис. 220. Расчетная схема балки и эпюра изгибающих моментов

5. Построить в расчетном сечении эпюры нормальных напряжений, полученные в опыте и теоретически (рис.221).

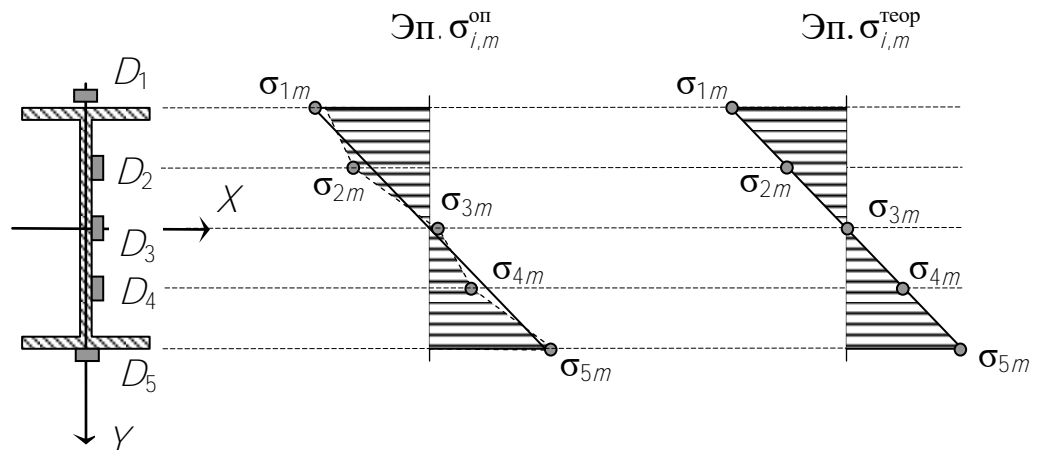


Рис. 221. Эпюры нормальных напряжений, полученных в опыте и теоретическим расчетом

6. Сравнить результаты опыта и теоретического расчета. Отличие напряжений оценить в процентах

$$D_i\% = \left| \frac{\sigma_i^{\text{оп}} - \sigma_i^{\text{теор}}}{\sigma_i^{\text{теор}}} \right| \cdot 100\%.$$

Если в знаменателе приведенной формулы для  $D_i\%$  содержится ноль, значение  $D_i\%$  не вычисляется, а в таблице ставится прочерк.

Таблица 5. Сравнение опытных и теоретических результатов

Напряжения	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$	$\sigma_5$
Опытные, МПа	$\sigma_1^{\text{оп}}$	$\sigma_2^{\text{оп}}$	$\sigma_3^{\text{оп}}$	$\sigma_4^{\text{оп}}$	$\sigma_5^{\text{оп}}$
Теоретические, МПа	$\sigma_1^{\text{теор}}$	$\sigma_2^{\text{теор}}$	$\sigma_3^{\text{теор}}$	$\sigma_4^{\text{теор}}$	$\sigma_5^{\text{теор}}$
Отличие, %	$D_{1,\%}$	$D_{2,\%}$	$D_{3,\%}$	$D_{4,\%}$	$D_{5,\%}$

7. По полученным результатам сделать вывод.
8. Оформить отчет по лабораторной работе.

### 3.10.6 Контрольные вопросы по разделу 3.10

1. Какие элементы строительных конструкций испытывают поперечный изгиб?
2. Какие гипотезы и допущения приняты в теории расчета тонких балок?
3. Как формулируется цель лабораторной работы?
4. Какие требования предъявляются при испытании балки?
5. На какой установке проводится испытание балки на изгиб?
6. Что является объектом испытания на изгиб?
7. Как опирается балка?
8. С помощью какого устройства осуществляется нагружение балки?
9. Для чего служит спаренная швеллерная балка?
10. Для чего измеряются высота сечения двутавра и средняя толщина полки?
11. Как выполняется снятие показаний прибора?
12. Как заполняется таблица опытных данных?
13. Как устроен датчик, и по какому принципу вырабатывается в нем сигнал?
14. Как влияет температура на сопротивление металлических проводников?
15. Для чего служит компенсирующий датчик и где на опытной установке он расположен?
16. Какой принцип действия заложен в способе установки нуля, использованном в измерительном приборе ИДЦ-1?
17. Какая величина обозначена буквой  $\alpha$ ?
18. Как строится график зависимости деформаций продольных волокон балки от нагрузки?
19. Какие выводы можно сделать, анализируя график деформации продольных волокон от нагрузки?

20. Как формулируется закон Гука?
21. Как вычисляются средние линейные деформации продольных волокон балки в местах установки датчиков?
22. Как строится эпюра средних относительных линейных деформаций по высоте сечения балки?
23. Какая гипотеза подтверждается эпюрой средних относительных линейных деформаций по высоте сечения балки?
24. Как вычисляются средние нормальные напряжения по результатам опыта?
25. Как вычисляются реакции опор балки?
26. Как вычисляются максимальный и расчетный изгибающие моменты?
27. По какой формуле вычисляются теоретические значения нормальных напряжений в точках расчетного сечения балки?
28. Какие величины обозначены буквами  $y_i$ ,  $M_x$ ,  $J_x$ ?
29. Почему ось  $Y$  следует направлять вниз?
30. Как строятся эпюры нормальных напряжений, полученных в опыте и теоретическим расчетом?
31. По какой зависимости распределяются нормальные напряжения по высоте поперечного сечения?
32. В каких точках сечения балки появляются максимальные нормальные напряжения?
33. В каких точках поперечного сечения балки появляются нулевые нормальные напряжения?
34. Что называется нейтральным слоем и нейтральной осью балки?
35. Как расположена нейтральная ось в балке при плоском поперечном изгибе?
36. Какой вывод можно сделать по результатам сравнения нормальных напряжений, полученных в опыте и теоретическим расчетом?

### 3.11. Исследование деформаций при плоском изгибе

При расчете изгибаемых элементов зданий и строительных сооружений следует выполнять требования не только по прочности, но и по жесткости. Это значит, что прогибы балок лимитированы и не могут превышать нормативных величин. Необходимость выполнения условий по жесткости связана с технологическими требованиями – обеспечением нормальных условий эксплуатации технологического оборудования (станков, технологических линий, восприятие вибраций и динамики и пр.), а также эстетические требования в помещениях, где находятся люди (жилые помещения, производственные и административные здания).

Под действием внешних сил балка деформируется, в результате чего ее ось искривляется. Деформация изгиба балок характеризуется углами поворота поперечных сечений  $\theta$  и прогибом  $V$ . Эти параметры могут быть

определены теоретически и по результатам опыта. Для расчета прогибов и углов поворота поперечных сечений балки в лабораторной работе следует использовать метод начальных параметров, суть которого состоит в решении приближенного дифференциального уравнения изгиба балки. Решение получается в виде степенного полинома с двумя неизвестными, которые называются начальными параметрами. Первый начальный параметр равен прогибу левого крайнего сечения балки, а второй – углу поворота этого же сечения.

Полученное дифференциальное уравнение и его решение не учитывают деформации балки, вызванные поперечными силами, и поэтому является приближенными. Для тонких балок с отношением ее длины к высоте поперечного сечения не менее десяти поперечные силы вызывают незначительные деформации. Поэтому ими можно пренебречь. Как раз такие балки чаще всего встречаются в строительных конструкциях. В связи с этим метод начальных параметров пригоден для расчета деформаций балок и балочных плит.

### 3.11.1. Цель испытания

1. Проверить достоверность обобщенного уравнения оси изогнутой балки (метод начальных параметров) в связи с некоторыми допущениями в теории плоского изгиба.
2. Подтвердить пропорциональность зависимости прогибов от нагрузки (закон Гука).

### 3.11.2. Исходные данные

**3.11.2.1. Требования к испытанию.** Нагружение балки выполнять статической нагрузкой (без толчков и вибрации) равными ступенями. Максимальный относительный прогиб балки не должен превышать  $1/400$  пролета.

**3.11.2.2. Испытательная установка.** Описание образца и нагружающего устройства приведено в п.3.10.2.2. Для измерения деформаций используются приборы – механические стрелочные тензометры с ценой деления  $\alpha = 0,01$  мм. Для определения прогибов в пролете балки (точка  $S$ ) и на ее консоли (точка  $D$ ) установлены стрелочные тензометры 12 (рис. 217). Определение углов поворота сечения на левой опоре (точка  $A$ ) и сечения в пролете (точка  $S$ ) выполняется с помощью механических тензометров 14, которые непосредственно измеряют перемещения соответствующих точек стержней 13, прикрепленных к балке. Для учета деформаций опор балки на них установлены стрелочные тензометры 16. Все стрелочные тензометры удерживаются штативами, установленными на полу лаборатории.

**3.11.2.3. Измерительные приборы и инструменты.** В лабораторной работе для измерения пролета и консоли балки, расстояния от левой опоры до расчетного сечения использовалась стальная лента, для измерения

высоты сечения и средней толщины полки двутавра использован штангенциркуль, а для измерения прогибов и углов поворота сечений балки использованы стрелочные механические тензометры с ценой деления  $\alpha=0,01$  мм.

### 3.11.3. Порядок проведения испытания и обработка результатов

#### 3.11.3.1. Порядок проведения испытания.

1. С помощью стальной измерительной ленты измерить расстояние между опорами балки и длину ее консоли.
2. Измерить расстояние между левой опорой балки и расчетным сечением.
3. Измерить расстояние от левой опоры балки до середины верхней траверсы загрузочного узла.
4. С помощью штангенциркуля измерить высоту сечения двутавра и среднюю толщину его полки.
5. Используя таблицы прокатных профилей установить номер двутавра и выписать его геометрические характеристики его поперечного сечения.
6. Закрывать выпускной клапан гидравлического домкрата, повернув рычаг домкрата по ходу часовой стрелки.
7. Совершая колебательные движения рычагом закачивать масло в цилиндр гидравлического домкрата до тех пор, пока нагрузка на балке не достигнет первой ступени.
8. Поворачивая шкалы стрелочных индикаторов, установить на всех тензометрах нулевой отсчет.
9. Снять отсчеты по всем восьми стрелочным тензометрам и записать их в таблицу.
10. Повторить действия при второй, третьей и т.д. ступенях нагружения.
11. После завершения испытания разгрузить балку. Для этого выпустить масло из цилиндра, повернув рычаг гидравлического домкрата против хода часовой стрелки.

3.11.3.2. **Заполнение таблицы результатов испытания.** Записать в колонки  $F, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8$  таблицы результатов испытания – значения нагрузок и отсчеты по стрелочным тензометрам.

#### 3.11.4. Результаты испытания и оформление отчета

1. Вычитая из последующего значения предыдущее в колонках  $F, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8$  таблицы опытных данных, вычислить приращение нагрузки  $\Delta F$  и приращения показания стрелочных тензометров  $\Delta n_1, \Delta n_2, \Delta n_3, \Delta n_4, \Delta n_5, \Delta n_6, \Delta n_7, \Delta n_8$ .
2. Построить графики зависимостей прогибов балки от нагрузки. Учитывая, что прогибы балки пропорциональны показаниям стрелочных тензометров, на вертикальной оси откладывать сумму приращений показаний прибора  $\Sigma \Delta n_i$ . На горизонтальной оси откладывать сумму

приращений нагрузки  $\Sigma\Delta F_i$ . Полученные точки соединить прямыми штриховыми отрезками, а затем провести сплошные прямые так, чтобы отклонения опытных точек были минимальными. Из графиков (рис. 222) очевидно, что зависимости прогибов балки от нагрузки действительно близки к прямым линиям. Поэтому делаем вывод о том, что закон Гука выполняется. Вблизи середины пролета (в точке  $S$ ) прогиб направлен вниз, а на консоли (в точке  $D$ ) – направлен вверх.

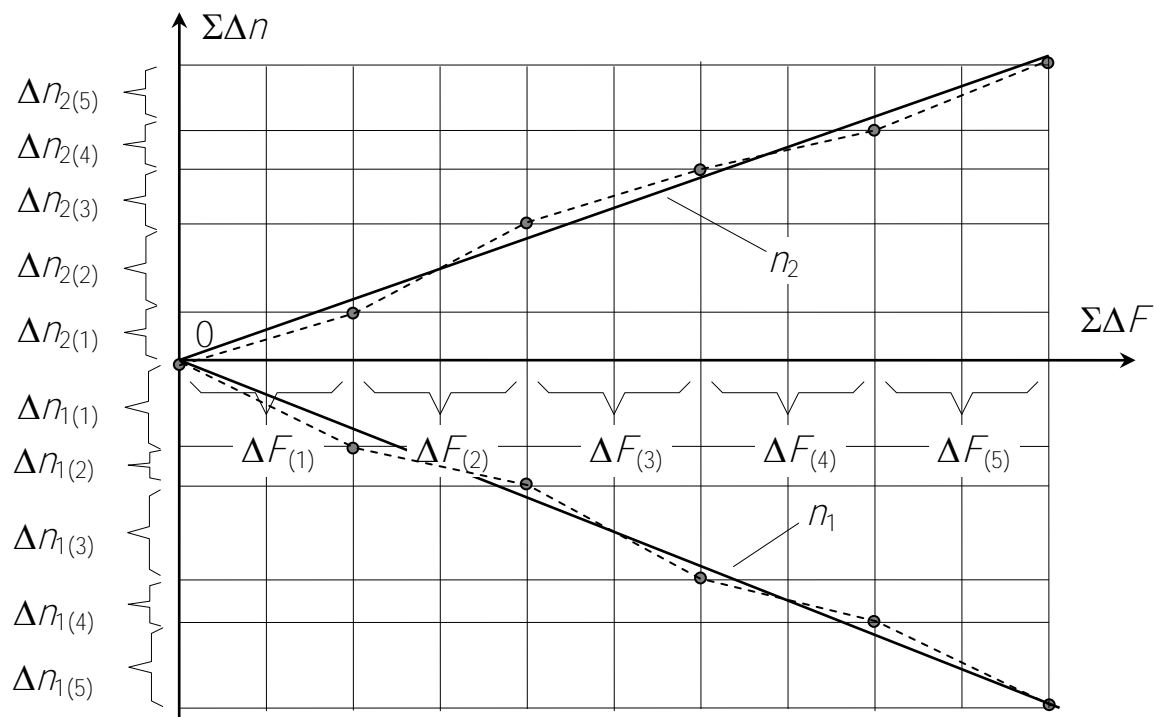


Рис. 222. Графики зависимости прогибов от нагрузки (в скобках указан номер ступени нагружения)

3. Вычислить средние арифметические значения приращений нагрузки  $\Delta F_m$  и средние значения приращений показаний приборов  $\Delta n_{1m}$ ,  $\Delta n_{2m}$ ,  $\Delta n_{3m}$ ,  $\Delta n_{4m}$ ,  $\Delta n_{5m}$ ,  $\Delta n_{6m}$ ,  $\Delta n_{7m}$ ,  $\Delta n_{8m}$  и записать их в соответствующие позиции таблицы опытных данных.

$$\Delta F_m = \frac{\sum_{k=1}^M \Delta F_k}{M}; \quad \Delta n_{im} = \frac{\sum_{k=1}^M \Delta n_{i(k)}}{M}, \quad i=1, \dots, N,$$

где  $i$  – номер прибора;

$m$  – обозначение среднего значения;

$k$  – номер ступени загрузки;

$M$  – количество ступеней загрузки;

$N$  – количество измерительных приборов.

4. Вычислить средние значения углов поворота сечений на одной ступени нагружения на левой опоре балки и в ее пролете. Так как углы поворота

сечений малы по сравнению с единицей, то справедливо приближенное равенство (рис. 223)

$$\theta \approx \operatorname{tg}\theta = \frac{u_{\text{в}} - u_{\text{н}}}{d} = \frac{\Delta r_m^{\text{в}} \cdot a - \Delta r_m^{\text{н}} \cdot \alpha}{d} = \frac{(\Delta r_m^{\text{в}} - \Delta r_m^{\text{н}}) \cdot \alpha}{d},$$

где  $u_{\text{в}}$ ,  $u_{\text{н}}$  – горизонтальные перемещения, соответственно, верхней и нижней точек стержня 13;

$\Delta r_m^{\text{в}}$ ,  $\Delta r_m^{\text{н}}$  – среднее приращение показаний верхнего и нижнего приборов, установленных на стержне 13;

$d$  – расстояние между верхним и нижним приборами на стержне 13.

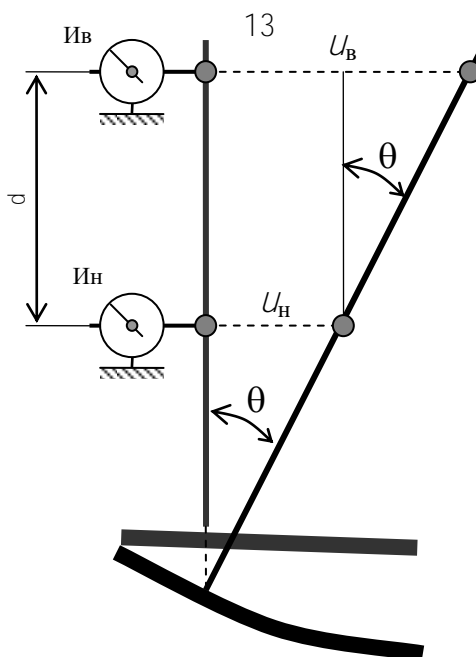


Рис. 223. Схема, поясняющая вычисление угла поворота сечения балки

5. Вычислить перемещение произвольной точки балки за счет осадок опор, предполагая, что балка остается прямолинейной. Согласно рисунку 224, получим выражение

$$V_z^{\text{оп}} = V_A^{\text{оп}} + z \cdot \operatorname{tg}\alpha = V_A^{\text{оп}} + z \cdot \frac{V_B^{\text{оп}} - V_A^{\text{оп}}}{l}.$$

Задавая соответствующие значения координате  $z$ , вычислить перемещения в точках  $S$  и  $D$ .

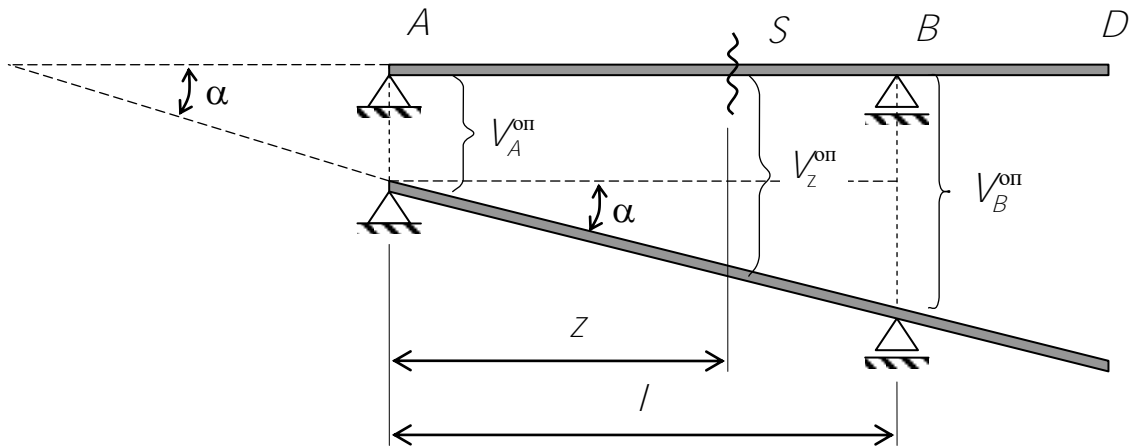


Рис. 224 – Схема к определению перемещений точек балки, вызванных деформациями опор

6. Вычислим опытные перемещения, включающие перемещения, вызванные деформациями опор балки

$$V_S = \Delta n_{Sm} \cdot \alpha; \quad V_D = \Delta n_{Dm} \cdot \alpha.$$

7. Вычислить прогибы балки, то есть перемещения, вызванные только ее искривлением

$$V_S^* = V_S - V_S^{\text{опоры}}; \quad V_D^* = V_D - V_D^{\text{опоры}}.$$

8. Вычислить относительные прогибы в расчетных точках балки  $\frac{V_S^*}{l}$  и  $\frac{V_D^*}{l}$

9. Вычислить реакции опор балки от среднего значения приращения нагрузки  $\Delta F$ . Для этого следует использовать уравнения равновесия

$$\sum M_A = \Delta F \cdot a - Y_B \cdot (a+b) = 0; \quad Y_B = \Delta F_m \frac{a}{a+b};$$

$$\sum M_B = Y_A \cdot (a+b) - \Delta F \cdot b = 0; \quad Y_A = \Delta F_m \frac{b}{a+b}.$$

10. Для определения прогибов балки и углов поворота ее расчетных сечений использовать метод начальных параметров. Составим универсальное уравнение упругой оси балки по расчетной схеме (рис. 225).

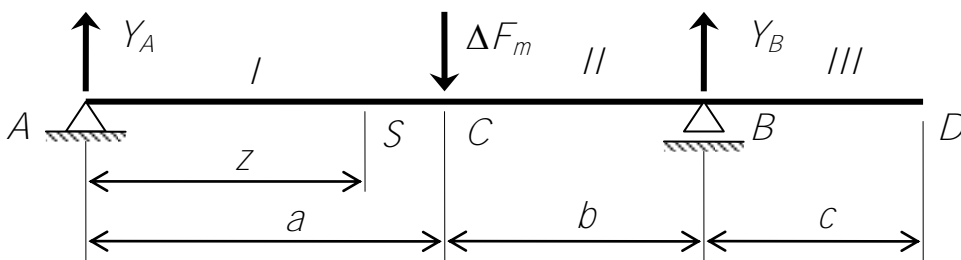


Рис. 225. Расчетная схема балки для определения прогибов и углов поворота



$$EJV = EJV_0 + EJ\theta_0 \cdot z + \frac{Y_A(z-0)^3}{6} \Big|_I - \frac{\Delta F_m(z-a)^3}{6} \Big|_{II} + \frac{Y_B(z-a-b)^3}{6} \Big|_{III};$$

$$EJ\theta = EJ\theta_0 + \frac{Y_A(z-0)^2}{2} \Big|_I - \frac{\Delta F_m(z-a)^2}{2} \Big|_{II} + \frac{Y_B(z-a-b)^2}{2} \Big|_{III}.$$

11. Определить начальные параметры универсального уравнения упругой изогнутой оси балки из условия ее закрепления. По условию закрепления балки на левой опоре  $A$  вычислим первый начальный параметр. При  $z = 0$  прогиб должен быть равным нулю  $V = 0$

$$EJV_A = EJV_0 + EJ\theta_0 \cdot 0 + \frac{Y_A(0-0)^3}{6} = 0.$$

Решение уравнения дает значение  $EJV_0 = 0$ . Модуль упругости и осевой момент инерции поперечного сечения балки не равны нулю  $E \neq 0$  и  $J \neq 0$ . Отсюда следует, что первый начальный параметр равен нулю  $V_0 = 0$ .

По условию закрепления балки на правой опоре  $B$  определить второй начальный параметр. При  $z = a + b$  прогиб должен быть равен также нулю  $V = 0$

$$EJV_B = EJ\theta_0 \cdot (a+b) + \frac{Y_A(a+b)^3}{6} \Big|_I - \frac{\Delta F_m(b)^3}{6} \Big|_{II} = 0.$$

Из полученного уравнения найти значение  $EJ\theta_0$  и значение второго начального параметра  $\theta_0$ .

12. Используя универсальное уравнение упругой оси балки вычислить прогибы балки в расчетных точках  $S$  и  $D$ , задавая соответствующие значения координате  $z$ .

13. Используя уравнение для углов поворота определить углы поворота сечения на опоре  $A$  и расчетного сечения  $S$ .

14. Сделать сравнение результатов, полученных испытанием балки и теоретическим расчетом в форме таблицы.

Таблица 6. Сравнение опытных и теоретических результатов

Величина	$\theta_A$	$\theta_S$	$V_S$ , мм	$V_D$ , мм
Опытные	$\theta_A^{\text{оп}}$	$\theta_S^{\text{оп}}$	$v_S^{\text{оп}}$	$v_D^{\text{оп}}$
Теоретические	$\theta_A^{\text{теор}}$	$\theta_S^{\text{теор}}$	$v_S^{\text{теор}}$	$v_D^{\text{теор}}$
Расхождения, %	$\frac{\theta_A^{\text{теор}} - \theta_A^{\text{оп}}}{\theta_A^{\text{теор}}} \cdot 100$	$\frac{\theta_S^{\text{теор}} - \theta_S^{\text{оп}}}{\theta_S^{\text{теор}}} \cdot 100$	$\frac{(v_S^{\text{теор}} - v_S^{\text{оп}})}{v_S^{\text{теор}}} \cdot 100$	$\frac{(v_D^{\text{теор}} - v_D^{\text{оп}})}{v_D^{\text{теор}}} \cdot 100$

Расхождение в прогибах и углах поворота вычислить как отношение результатов, полученных опытным путем и теоретически, деленное на

теоретический результат. Если знаменатель равен нулю, то расхождение не вычисляется и в соответствующей позиции таблицы ставится прочерк.

15. По полученным результатам сделать выводы.

16. Оформить отчет по лабораторной работе.

### 3.11.5. Контрольные вопросы по разделу 3.11

1. Чем обусловлена необходимость требований по жесткости к изгибаемым элементам?

2. Какой метод использован в лабораторной работе для определения прогибов и углов поворота сечений балки?

3. Почему метод начальных параметров является приближенным методом расчета деформаций балок?

4. Какая цель ставится в лабораторной работе?

5. Какие требования предъявляются при испытании балки?

6. На какой установке проводится испытание на изгиб?

7. Что является объектом испытания на изгиб?

8. Как опирается балка?

9. Для чего служит спаренная швеллерная балка?

10. Для чего измеряются высота сечения двутавра и средняя толщина полки?

11. Какие измерительные инструменты используются при проведении лабораторной работы?

12. Какие приборы используются для определения прогибов и углов поворота сечений балки?

13. Чему равна цена деления стрелочного индикатора?

14. Как заполняется таблица опытных данных?

15. Как строятся графики зависимостей прогибов балки от нагрузки?

16. Какой вывод можно сделать по результатам анализа зависимости прогибов балки от нагрузки?

17. Как показания стрелочных тензометров, предназначенных для измерения линейных смещений, используются для определения углов поворота поперечных сечений балки?

18. Как вычисляются перемещения точек балки только за счет деформации опор?

19. По каким выражениям определяются опытные перемещения точек балки?

20. Как вычисляются опытные прогибы балки, то есть перемещения, вызванные только искривлением балки?

21. Как определяются реакции опор опытной балки?

22. Как составляются универсальное уравнение упругой оси балки и уравнение углов поворота ее поперечных сечений по методу начальных параметров?

23. По каким условиям определяются начальные параметры?

24. Как оценивается достоверность теории расчета тонких балок?

25. Какие выводы можно сделать по результатам исследований, проведенных в лабораторной работе?

### 3.12. Подтверждение теоремы о взаимности перемещений

Эта теорема впервые опубликована итальянским ученым Бетти (1823-1892 гг) и названа его именем. Теорема о взаимности перемещений является следствием теорем о взаимности работ внешних и внутренних сил.

Теорему о взаимности перемещений можно сформулировать так – *перемещение точки приложения первой единичной силы по ее направлению, вызванное действием второй единичной силы, равно перемещению точки приложения второй единичной силы по ее направлению, вызванное действием первой единичной силы.*

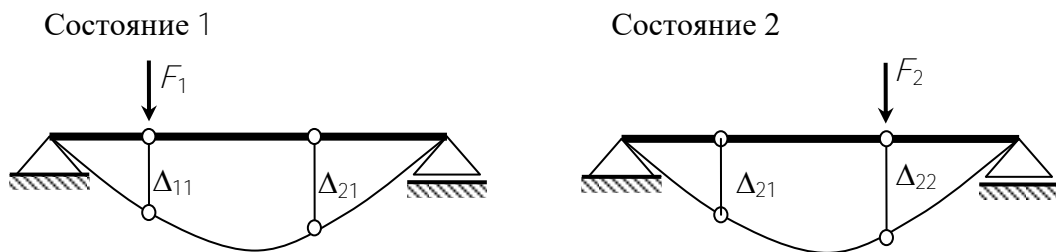


Рис. 226. Пример пояснения теоремы о взаимности перемещений балки

Поясним обозначения.

$\Delta_{11}$  – перемещение по направлению первой силы от действия этой же силы;

$\Delta_{21}$  – перемещение по направлению второй силы от действия первой силы;

$\Delta_{12}$  – перемещение по направлению первой силы от действия второй силы;

$\Delta_{22}$  – перемещение по направлению второй силы от действия этой же силы.

Теорема о взаимности перемещений справедлива для любых видов сопротивления (центрального растяжения-сжатия, кручения, простого и косоугольного изгиба, внецентренного растяжения-сжатия и пр), при выполнении двух условий – если механическая система геометрически и физически линейная.

**Геометрически линейная система** – это такая механическая система, перемещения точек которой, вызванные деформацией ее элементов, малы по сравнению с ее размерами.

**Физически линейная система** – это такая механическая система, материал элементов которой деформируется по закону Гука.

Если силы  $F_1$  и  $F_2$  равны друг другу, то перемещения  $\Delta_{12}$  и  $\Delta_{21}$  так же будут равны друг другу  $\Delta_{12} = \Delta_{21}$ . Перемещения, вызванные единичными силами  $F_1=1$  и  $F_2=1$ , обычно обозначают,  $\delta_{12}$  и  $\delta_{21}$ . Тогда теорема о взаимности формально может быть выражена следующим образом

$$\delta_{12} = \delta_{21}.$$

### 3.12.1. Цель испытания

На модели упругой системы опытным путем подтвердить принцип теоремы о взаимности перемещений. Сравнить опытные перемещения с теоретическими.

### 3.12.2. Исходные данные

**3.12.2.1. Требования к испытанию.** Положение подвесок с гирями и приборов (механических тензометров) должно точно соответствовать расчетной схеме. Измерительные стержни тензометров должны быть вертикальны, а сами приборы надежно закреплены на штативах. При укладке гирь не допускать толчков и ударов.

**3.12.2.2. Испытательная установка.** Для проведения опыта использована испытательная напольная либо настольная установка, состоящая из станины, крепежного узла, стальной пластины с нанесенной разметкой, двух штативов, двух подвесок и набора гирь.

**3.12.2.3. Измерительные приборы и инструменты.** Для определения размеров поперечного сечения используются штангенциркуль с ценой деления 0,1 мм и стальная линейка. Прогибы стальной пластины, играющей роль балки, измеряются с помощью стрелочных тензометров с ценой деления  $\alpha_u = 0,01$  мм.

**3.12.2.4. Используемый образец.** В качестве исследуемого образца использована стальная пластина с нанесенной на ее поверхности разметкой. Один конец пластина жестко закреплен болтами к станине, а другой свободен.

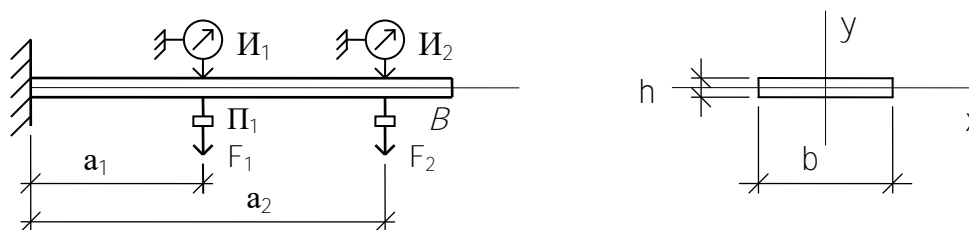


Рис. 227. Схема испытательной установки

### 3.12.3. Порядок проведения испытания и обработка результатов

#### 3.12.3.1. Порядок проведения испытания

1. Ознакомиться с основными узлами и принципом работы испытательной установки.
2. Ознакомиться с образцом, его положением по отношению к нагрузке и узлу его крепления.
3. Установить одну гирю на подвеску П1 и, поворачивая шкалу прибора И2, установить нулевой отсчет.
4. Последовательно укладывая гири на подвеску П1, снимать отсчеты со шкалы прибора И2 и записывать их в таблицу.

5. Разгрузить установку, сняв все гири с подвески П1.
6. Установить одну гирю на подвеску П2 и, поворачивая шкалу прибора И1, установить нулевой отсчет.
7. Последовательно укладывая гири на подвеску П2, снимать отсчеты со шкалы прибора И1 и записывать их в таблицу.
8. После завершения испытания разгрузить образец.

**3.12.3.2. Заполнение таблицы результатов испытания.** По мере проведения испытаний в таблицу заносятся значения нагрузки и показания тензометров. Затем вычисляются и заносятся в таблицу приращения нагрузок и приращения отсчетов по приборам. Далее вычисляются средние значения приращения нагрузок и средние значения приращения отсчетов по тензометрам, которые записываются в нижнюю часть таблицы.

$$\Delta n_m = \frac{\sum \Delta n_i}{4}, \quad \Delta F_m = \frac{\sum \Delta F_i}{4}.$$

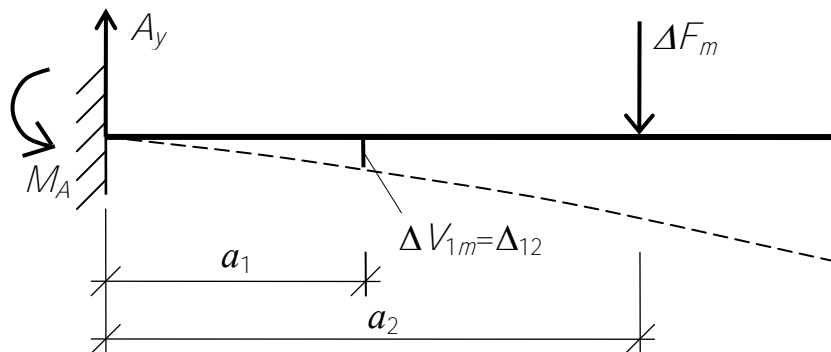
**3.12.3.3. Опытные перемещения сечений стержня.** Для вычисления опытных перемещений первого и второго сечений стержня следует средние перемещения отсчетов по приборам умножить на их цену деления  $\alpha_u$

$$\Delta_{12}^{\text{оп}} = V_{1(\text{оп})} = \Delta n_{1m} \cdot \alpha_u; \quad \Delta_{21}^{\text{оп}} = V_{2(\text{оп})} = \Delta n_{2m} \cdot \alpha_u.$$

#### 3.12.4. Результаты теоретического расчета

##### 3.12.4.1. Перемещения сечений стержня, найденные теоретически

Для аналитического определения перемещений наиболее удобным является метод начальных параметров. Рассмотрим случай, когда гири укладывались на вторую подвеску. На рисунке 228 показана соответствующая расчетная схема.



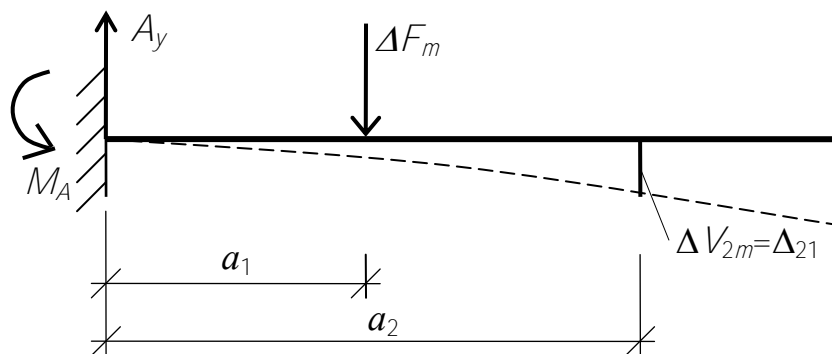
**Рис. 228 – Расчетная схема при нагружении балки весом гирь, уложенных на вторую подвеску**

Учитывая, что балка закреплена левым концом

$$V_0 = 0; \quad \theta_0 = 0; \quad A_y = \Delta F_m; \quad M_A = \Delta F_m \cdot a_2,$$

прогиб балки в месте, где расположена первая подвеска (в точке 1) определим из выражений

$$EJ\Delta V_{1m} = EJV_0 + EJ\theta_0 a_1 - \frac{M_A(a_1 - 0)^2}{2} + \frac{A_y(a_1 - 0)^3}{6}; \quad \Delta_{12}^{\text{теор}} = \Delta V_{1m} = \frac{EJ\Delta V_{1m}}{EJ}.$$



**Рисунок 229 – Расчетная схема при нагружении балки весом гирь, уложенных на первую подвеску**

Так как балка закреплена левым концом, имеем

$$V_0 = 0; \quad \theta_0 = 0; \quad A_y = \Delta F_m; \quad M_A = \Delta F_m \cdot a_1,$$

Прогиб балки в месте, где расположена вторая подвеска (в точке 2) определим из выражений

$$EJ\Delta V_{2m} = EJV_0 + EJ\theta_0 a_2 - \frac{M_A(a_2 - 0)^2}{2} + \frac{A_y(a_2 - 0)^3}{6} - \frac{\Delta F_m(a_2 - a_1)^3}{6};$$

$$\Delta_{21}^{\text{теор}} = \Delta V_{2m} = \frac{EJ\Delta V_{2m}}{EJ}.$$

### 3.12.4.2. Сравнение перемещений сечений стержня

Сравнивая перемещения сечений стержня, полученные из опыта и по теории, убедимся в их равенстве и справедливости теоремы о взаимности перемещений.

**Таблица 7 – Сравнение перемещений балки**

Перемещения	$\Delta_{12}$ , мм	$\Delta_{21}$ , мм	Расхождение, %
Опытные	$\Delta_{12}^{\text{оп}}$	$\Delta_{21}^{\text{оп}}$	$\frac{ \Delta_{12}^{\text{оп}} - \Delta_{21}^{\text{оп}} }{ \Delta_{12}^{\text{оп}} } \times 100$
Теоретические	$\Delta_{12}^{\text{теор}}$	$\Delta_{21}^{\text{теор}}$	$\frac{ \Delta_{12}^{\text{теор}} - \Delta_{21}^{\text{теор}} }{ \Delta_{12}^{\text{теор}} } \times 100$
Расхождение, %	$\frac{ \Delta_{12}^{\text{оп}} - \Delta_{12}^{\text{теор}} }{\Delta_{12}^{\text{теор}}} \times 100$	$\frac{ \Delta_{21}^{\text{оп}} - \Delta_{21}^{\text{теор}} }{\Delta_{21}^{\text{теор}}} \times 100$	—

### 3.12.5. Оформление отчета и выводы

На основании сравнения результатов опыта и теоретических расчетов, приведенных в таблице 7, сделать вывод о справедливости теоремы о взаимности перемещений, о достоверности теории расчета тонких балок.

### 3.12.6 Контрольные вопросы по разделу 3.12

1. Кем и когда впервые опубликована теорема о взаимности перемещений?
2. Как формулируется теорема о взаимности перемещений?
3. Что означает первый и второй индексы в принятой индексации перемещений?
4. Для каких видов сопротивления справедлива теорема о взаимности перемещений?
5. При каких условиях выполняется теорема о взаимности перемещений?
6. Какие механические системы называются геометрически линейными?
7. Какие механические системы называются физически линейными?
8. Какая цель поставлена в лабораторной работе?
9. Какие требования предъявляются к испытанию?
10. На какой испытательной установке проводилось испытание?
11. Какие измерительные инструменты и приборы использовались при проведении лабораторной работы?
12. Какую цену деления имел использованный стрелочный индикатор?
13. Из какого материала и какую форму имел испытываемый образец?
14. Как закреплен испытываемый образец?
15. Какой вид сопротивления испытывал испытываемый образец?
16. К какому виду балок следует отнести испытываемый образец?
17. Из каких основных частей и деталей состояла испытательная установка?
18. Каким способом нагружался испытываемый образец?
19. Как заполнялась таблица результатов испытания?
20. Как вычислялись опытные перемещения (прогибы) балки?
21. Почему начальные параметры для испытываемой балки равны нулю?
22. Как составлено универсальное уравнение упругой оси балки по методу начальных параметров для первой и для второй расчетных схем?
23. Какой вывод можно сделать по результатам сравнения прогибов балки?

### 3.13. Исследование статически неопределимой балки

Механические системы делятся на статически определимые и статически неопределимые системы. Применение статически неопределимых систем обусловлено конструктивными или экономическими соображениями.

**Статически неопределимыми системами** называются такие системы, когда число неизвестных реакций или внутренних сил превышает число уравнений равновесия. В этом случае реакции и внутренние силы

методами статики найдены быть не могут. Любая статически неопределимая система характеризуется **степенью статической неопределимости**, которая равна разности числа неизвестных и числа линейно независимых уравнений равновесия.

Для расчета статически неопределимых систем составляются дополнительные уравнения из условия совместности деформаций. Число дополнительных уравнений равно степени статической неопределимости механической системы. Дополнительные уравнения присоединяются к уравнениям равновесия. В результате решения полученной системы уравнений, определяются все неизвестные – внешние (реакции) и внутренние (внутренние силы).

### 3.13.1. Цель испытания

Определить для заданной статически неопределимой балки опытным путем опорный момент в закреплении и сравнить его с теоретическим значением. Подтвердить справедливость метода расчета статически неопределимых систем.

### 3.13.2. Исходные данные

**3.13.2.1. Требования к испытанию.** Положение подвески с гирями и прибора (механических тензометров) должно точно соответствовать расчетной схеме. Измерительные стержни тензометров должны быть вертикальны, а сами приборы надежно закреплены на штативах. При укладке гирь не допускать толчков и ударов.

**3.13.2.2. Испытательная установка.** Для проведения опыта использована испытательная настольная установка, состоящая из станины, крепежного узла со стрелочным тензометром, шарнирной опоры стальной пластины (балки) с нанесенной разметкой, подвески и набора гирь. С одной стороны установки имеется консоль с подвеской. Для создания нагрузки в пролете балки имеется подвеска с гирями.

**3.13.2.3. Измерительные приборы и инструменты.** Для определения размеров поперечного сечения используются штангенциркуль с ценой деления 0,1 мм и стальная линейка. Угол поворота сечения стальной пластины, играющей роль балки, на опорном узле контролируется с помощью стрелочных тензометров с ценой деления  $\alpha_{\text{ц}} = 0,01 \text{ мм}$ .

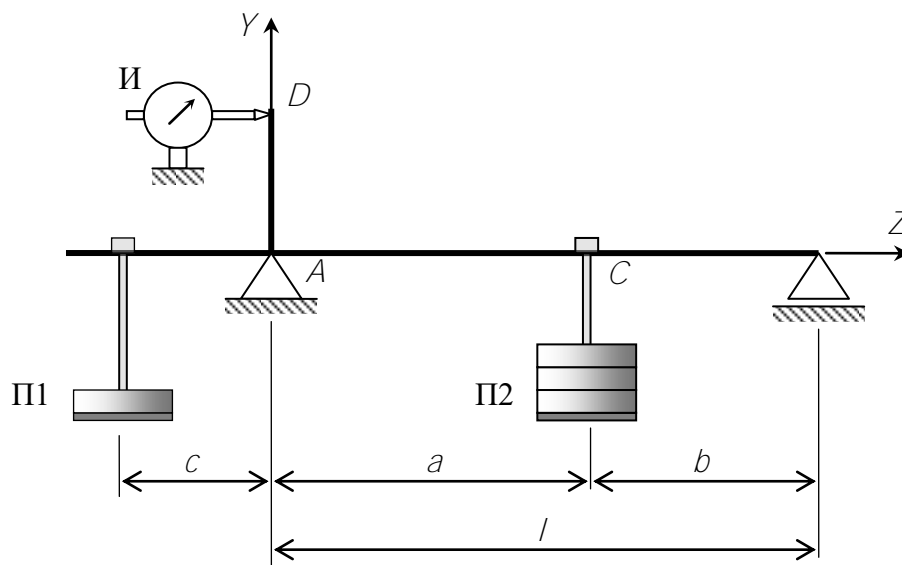
**3.13.2.4. Используемый образец.** В качестве исследуемого образца использована стальная пластина с нанесенной на ее поверхности разметкой. Один конец пластины опирается на шарнирно неподвижную опору, а другой – на шарнирно подвижную (рис. 230).

### 3.13.3. Порядок проведения испытания и обработка результатов

#### 3.13.3.1. Порядок проведения испытания.



1. Ознакомиться с основными узлами и принципом работы испытательной установки.
2. Ознакомиться с образцом, его положением по отношению к нагрузке и узлу его крепления.
3. Установить одну гирю на подвеску П1 и одну гирю на подвеску П2.
4. Придвинуть подвеску П1 максимально близко к опоре и записать в журнал расстояние от опоры до подвеске, используя разметку на консоли.
5. Поворачивая шкалу стрелочного тензометра установить нулевой отсчет.
6. Установить еще одну гирю на подвеску П2.
7. Отодвигая подвеску П1 от опоры, добиться того, чтобы отсчет на тензомере снова был нулевым.
8. Записать в журнал нагрузку на подвеске П2 и расстояние от опоры до подвески П1.
9. Последовательно повторять пункты 6-8 до тех пор, пока не будут использованы все гири.



**Рисунок 230 – Схема установки для исследования статически неопределимой балки**

**3.13.3.2. Заполнение таблицы результатов испытания.**  
 Обрабатываем результаты измерения. Вычисляем приращения нагрузки и приращения расстояний подвески П1 от опоры. Для этого от последующего веса гирь и подвески П1 вычитаем предыдущее значение веса подвески П2 и гирь. Полученные приращения записываем в соответствующую колонку таблицы. Аналогично поступаем и с расстояниями от опоры до подвески П1. Затем вычисляем среднее приращение нагрузки и расстояний от подвески П1 до опоры.

$$\Delta C_m = \frac{\sum \Delta C_i}{4}, \quad \Delta F_m = \frac{\sum \Delta F_i}{4}.$$

**3.13.3.3. Схема испытания и опытные перемещения сечений стержня.** В лабораторной работе с помощью шарнирно опертой статически определимой балки моделируется статически неопределимая защемленная на левой опоре балка. Для того, чтобы “заставить” шарнирную опору  $A$  работать как защемление требуется поставить условие – угол поворота поперечного сечения балки на опоре  $A$  должен быть равен нулю  $\theta_A = 0$ .

Для пояснений рассмотрим схему испытания, приведенную на рисунке 231. Пусть после укладки очередной гири весом  $\Delta F$  на подвеску П2 стрелка индикатора отклонилась от нулевого отсчета. Это означает, что поперечное сечение на опоре  $A$  повернулось на некоторый угол (рис. 231 а). Для того, чтобы вернуть это сечение в предыдущее положение будем отодвигать подвеску П1 от опоры, то есть создавать дополнительный момент, до тех пор пока на стрелочном тензомере не установится опять нулевой отсчет (рис. 231 б). Величина дополнительного смещения обозначена как  $\Delta C$ .

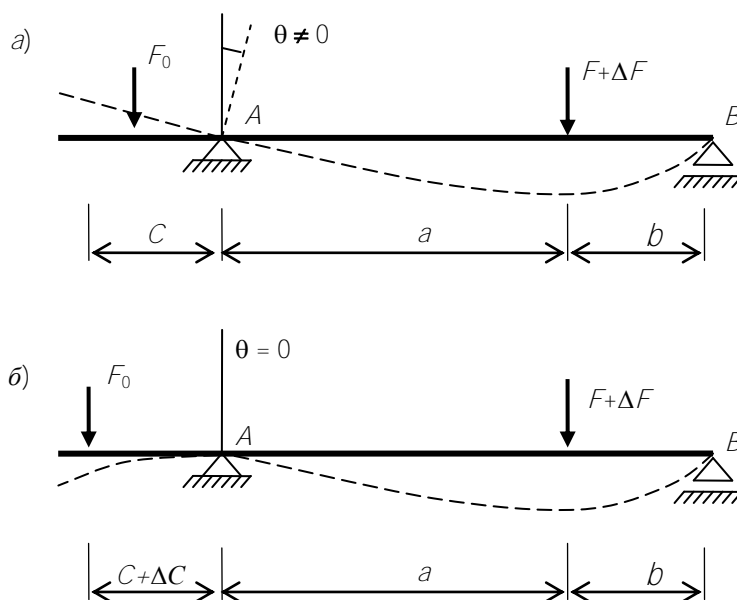


Рисунок 231 – Схема испытания неопределимой балки

Тогда момент на опоре  $A$ , необходимый для выполнения условий в защемлении, будет равен

$$M_A = F_0 \cdot \Delta C_m.$$

### 3.13.4. Результаты теоретического расчета

**3.13.4.1. Расчетная схема балки и раскрытие статической неопределимости.** Расчетная схема испытываемой балки показана на рисунке 265. Рассматриваем балку как диск на плоскости. Поэтому условие равновесия этого диска выражается тремя уравнениями.

$$\sum X = 0; \quad \sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0.$$

На левой опоре (защемление) имеется три связи, а на правой опоре (шарнирно подвижная) – одна связь. Таким образом, балку удерживают четыре связи. Поэтому балка один раз статически неопределимая  $n=4-3=1$ . Для раскрытия статической неопределимости, то есть определения всех реактивных сил и реактивного момента требуется составить одно дополнительное уравнение.

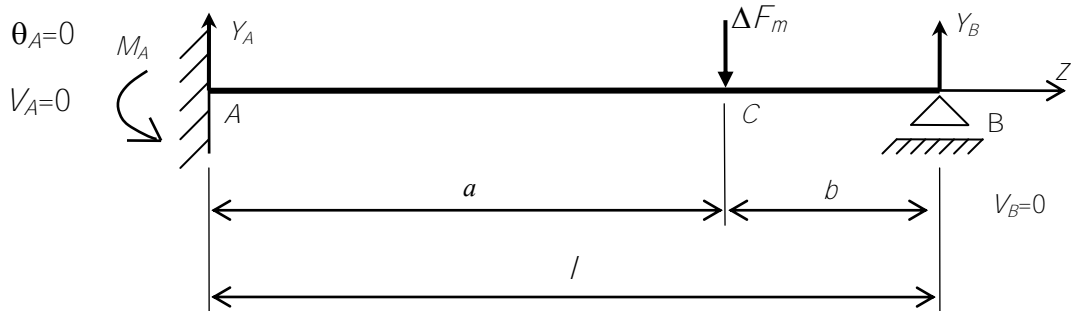


Рисунок 232 – Расчетная схема статически неопределимой балки

Составим уравнения статического равновесия.

$$\begin{cases} \sum Z = Z_A = 0; \\ \sum M_A = -M_A + \Delta F_m a - Y_B (a + b) = 0; \\ \sum M_B = -M_A + Y_A (a + b) - \Delta F_m b = 0. \end{cases}$$

Дополнительное уравнение составим по кинематическому условию – прогиб балки в точке B равен нулю.

$$EJ V_B = EJ V_0 + EJ \theta_0 \cdot (a + b) - \frac{M_A (a + b)^2}{2} + \frac{Y_A (a + b)^3}{6} - \frac{\Delta F_m (b)^3}{6} = 0.$$

Так как слева балка защемлена, то значения начальных параметров заранее известны и равны  $V_0 = 0$ ;  $\theta_0 = 0$ .

Так как уравнения имеют одни и те же неизвестные  $M_A$  и  $Y_A$ , они образуют отдельную систему двух уравнений с двумя неизвестными. Решив эту систему, определим значения момента  $M_A$  и реактивной силы  $Y_A$  в защемлении. Из уравнения статического равновесия определим значение реакции  $Y_B$ .

**3.13.4.2. Построение эпюр внутренних сил в балке.** Балка испытывает поперечный изгиб, так как в ее сечениях появляются поперечные силы и изгибающие моменты.

На двух участках AC и CB балки нет распределенных нагрузок. Поэтому эпюра поперечных сил  $Q_y$  на каждом участке имеет постоянное значение. На участке AC поперечная сила равна значению реакции  $Y_A$  и имеет положительный знак. На участке CB поперечная сила равна реакции  $Y_B$  и имеет отрицательный знак.

На участках  $AC$  и  $CB$  изгибающие моменты изменяются по линейному закону. В сечении  $A$  изгибающий момент равен реактивному моменту  $M_A$  и имеет отрицательное значение, а в сечении  $C$  – изгибающий момент положительный и равен произведению реакции  $Y_B$  на длину второго участка  $b$ . В сечении на опоре  $B$  изгибающий момент равен нулю. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов приведены на рисунке (рис.233).

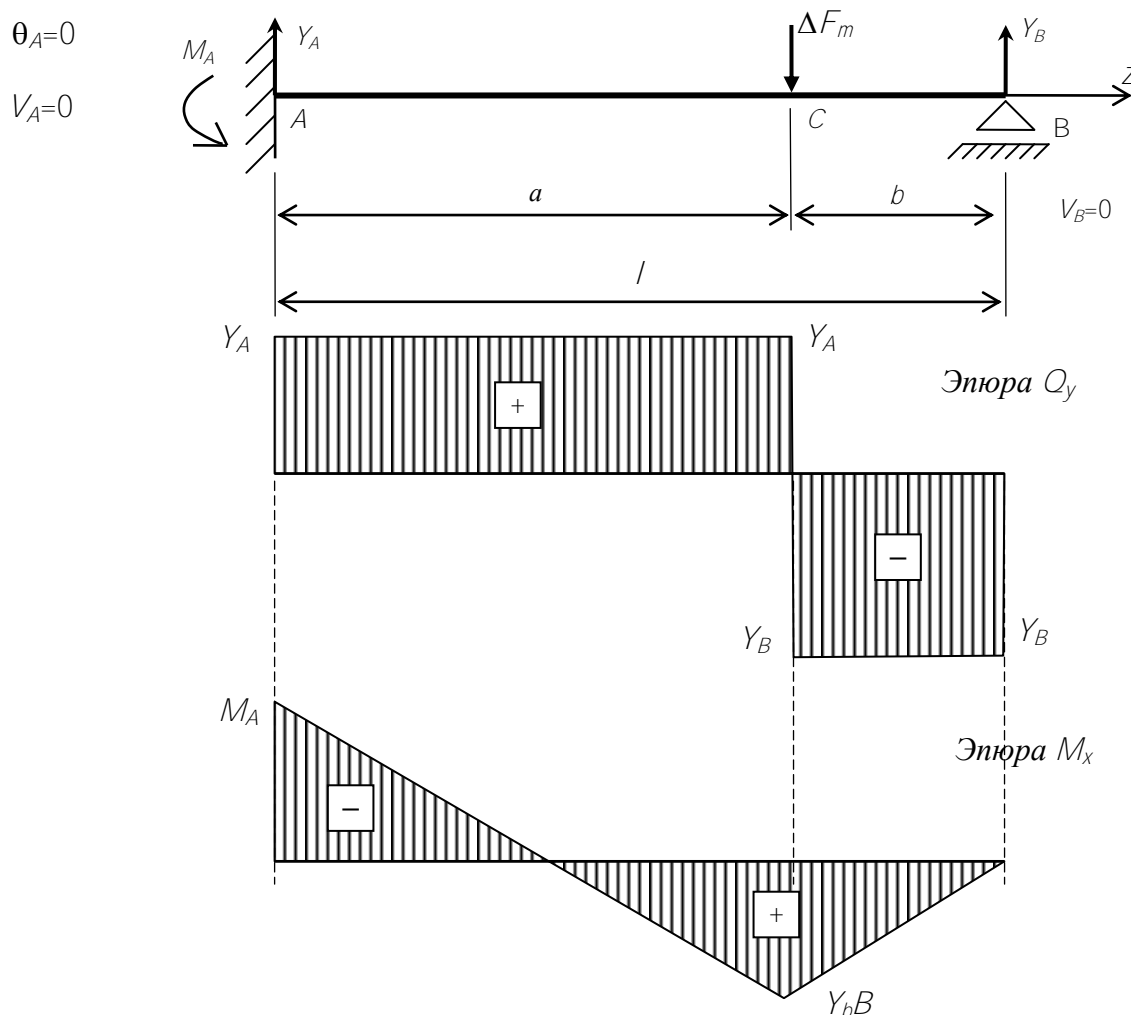


Рис. 233. Эпюры внутренних сил в балке

### 3.13.5. Сравнение результатов, оформление отчета и выводы

Сравнить значения реактивных моментов на опоре  $A$ , полученных из опыта и теоретическим расчетом.

$$\left| \frac{M_A^{on} - M_A^{теор}}{M_A^{теор}} \right| \times 100.$$

На основании сравнения результатов полученных из опыта и теоретического расчета, сделать вывод о достоверности метода расчета тонких статически неопределимых балок.

По результатам проведенного опыта и сделанных теоретических расчетов оформить отчет.

### 3.13.6 Контрольные вопросы по разделу 3.13

- 1 Какие механические системы называются статически неопределимыми?
- 2 Чем характеризуются статически неопределимые системы?
- 3 Для чего составляются дополнительные уравнения?
- 4 Сколько дополнительных уравнений требуется для расчета статически неопределимых систем?
- 5 Какая цель поставлена в лабораторной работе?
- 6 Какие требования должны быть выполнены при проведении испытания?
- 7 Какая установка использована для проведения исследований статически неопределимой балки?
- 8 Из каких частей и деталей состоит испытательное устройство?
- 9 Каким способом нагружалась балка?
- 10 Какие приборы и измерительные инструменты использовались при испытании?
- 11 Какую цену деления имеет использованный в лабораторной работе стрелочный тензомер?
- 12 Что использовано в лабораторной работе в качестве образца?
- 13 Какой порядок проведения испытания?
- 14 Как заполнялась таблица результатов испытания?
- 15 Какие условия поставлены, для того, чтобы статически определимая шарнирно опертая балка установки работала как статически неопределимая?
- 16 Каким способом удастся обеспечить отсутствие поворота поперечного сечения балки на опоре  $A$ ?
- 17 Как вычислялся момент в заземлении по результатам испытания?
- 18 Какую степень статической неопределимости имеет опытная балка?
- 19 Сколько и какие уравнения статического равновесия можно составить для исследуемой балки?
- 20 Какое кинематическое условие использовано для составления дополнительного уравнения для расчетной схемы балки?
- 21 Решением какой системы уравнений получены неизвестны  $M_A$  и  $Y_A$ ?
- 22 Как найдено значение реакции  $Y_B$  на правой опоре?
- 23 Как найдены поперечные силы на левом и правом участках балки?
- 24 Почему поперечные силы на обоих участках постоянные?
- 25 Как найдены изгибающие моменты в сечениях  $A$ ,  $C$  и  $B$ ?
- 26 Почему в сечении  $A$  изгибающий момент отрицательный, а в сечении  $C$  – положительный?

27 Чем вызвано отличие значений реактивного момента  $M_A$ , полученных из опыта и теоретически?

28 Какой вывод можно сделать по результатам исследований?

### 3.14. Исследование напряжений при косом изгибе

*Изгиб бруса, при котором плоскость действия суммарного изгибающего момента в сечении не содержит ни одной из главных осей инерции этого сечения, называется косым изгибом.*

Косой изгиб является сложным видом сопротивления, так как в сечениях балки появляются два изгибающих момента и две поперечные силы. Если справедлив принцип независимости действия сил, то косой изгиб можно представить как сочетание двух простых изгибов. Поэтому при косом изгибе справедливы те же гипотезы, которые были приняты при изучении простого плоского изгиба – гипотеза плоских сечений и статическая теория об отсутствии давлений между продольными волокнами балки.

Расчет балки на прочность при косом изгибе усложняется, если поперечное сечение имеет сложную геометрическую форму. В этом случае сложно определить опасные точки поперечного сечения. Опасными точками сечения будут такие точки, в которых появляются максимальные напряжения. Чтобы их найти используется нейтральная ось.

*Линия, в каждой точке которой напряжения равны нулю, называется нейтральной линией (осью).*

Точки сечения, которые максимально удалены от нейтральной оси и будут опасными, так как в них действуют максимальные напряжения. Положение нейтральной оси при косом изгибе можно найти по углу наклона ее к оси  $X$  и учитывая, что она всегда проходит через центр тяжести сечения.

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{M_y \cdot J_x}{M_x \cdot J_y}.$$

Предполагается также, что деформации балки малы по сравнению с ее размерами и материал деформируется по закону Гука.

#### 3.14.1. Цель испытания

Проверить применимость для практических целей расчетных формул, принятых в теории косоугольного изгиба.

#### 3.14.2. Исходные данные

3.14.2.1. **Требования к испытанию.** Максимальные нормальные напряжения в опасном сечении балки не должны превышать значения

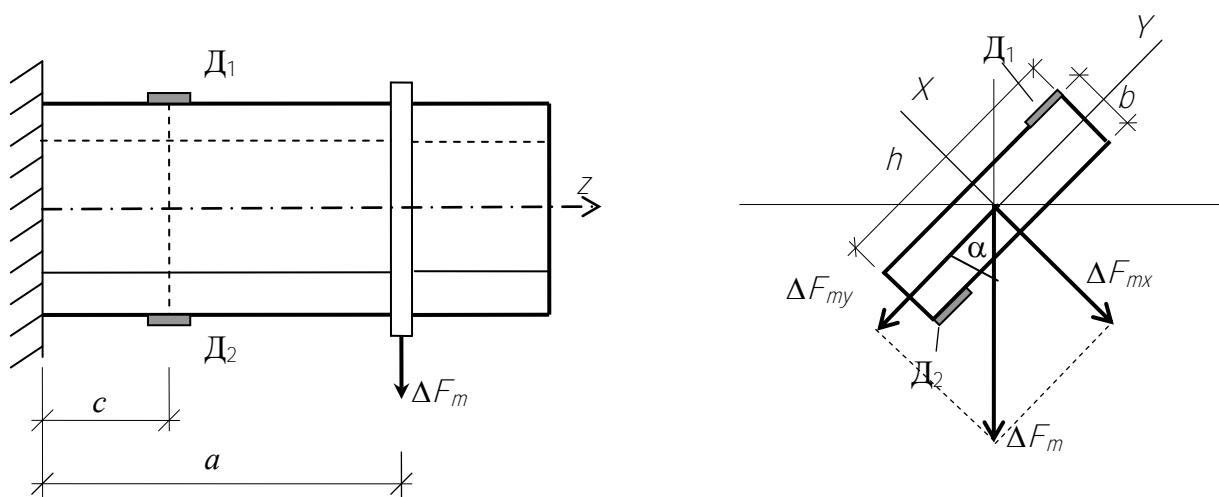
предела пропорциональности, нагружение должно быть статическим. Положение подвески с гирями должно точно соответствовать расчетной схеме. При укладке гирь не допускать толчков и ударов.

**3.14.2.2. Испытательная установка.** Для проведения опыта использована испытательная настольная установка, состоящая из станины, крепежного узла, стальной пластины (балки) с нанесенной разметкой, подвески и набора гирь.

Для создания нагрузки в пролете балки имеется подвеска с гирями. Подвеска закреплена на подшипнике. За счет этого нагрузка за счет веса гирь при любом положении пластины сохраняет свое вертикальное направление. Поэтому плоскость суммарного изгибающего момента всегда расположена вертикально. Крепежный узел позволяет поворачивать пластину вокруг ее оси, тем самым изменяя угол между главными осями инерции и плоскостью действия суммарного изгибающего момента. Крепежный узел снабжен шкалой с градуировкой в градусах.

**3.14.2.3. Измерительные приборы и инструменты.** Для определения размеров поперечного сечения используются штангенциркуль с ценой деления 0,1 мм и стальная линейка. Для измерения деформаций волокон балки используются проволочные датчики сопротивления и измеритель деформаций цифровой ИДЦ1 с ценой деления  $\alpha = 1 \times 10^{-5}$  и коэффициентом  $K=2,1$ .

**3.14.2.4. Используемый образец.** В качестве исследуемого образца использована стальная пластина с нанесенной на ее поверхности разметкой. Один конец пластины зашпелен в крепежном узле, а другой свободен. Вблизи закрепленного конца балки на верхней и на нижней точках наклеены два проволочных датчика. Рабочее направление датчиков совпадает с направлением продольных волокон балки.



**Рис. 234. Схема установки для исследования напряжений при косом изгибе**

### **3.14.3. Порядок проведения испытания и обработка результатов**

#### **3.14.3.1. Порядок проведения испытания**

1. Ознакомиться с основными узлами и принципом работы испытательной установки.
2. Ознакомиться с образцом, его положением по отношению к нагрузке и узлу его крепления.
3. Определить положение рабочих датчиков и компенсирующего датчика.
4. Установить подвеску на расчетном расстоянии от места расположения рабочих датчиков.
5. Уложить одну гирю на подвеску и снять отсчеты с обоих датчиков по прибору ИДЦ1.
6. Записать отсчеты и значение нагрузки в таблицу результатов испытания.
7. Последовательно устанавливая гири на подвеску и снимать отсчеты для обоих датчиков.
8. Записывать отсчеты и значение нагрузки в таблицу результатов испытания.

**3.14.3.2. Заполнение таблицы результатов испытания.**  
 Обрабатываем результаты измерения. Вычисляем приращения нагрузки и приращения отсчетов для обоих датчиков. Для этого от последующего веса гирь, установленных на подвеске, вычитаем предыдущее значение веса гирь. Полученные приращения записываем в соответствующую колонку таблицы. Аналогично поступаем и с отсчетами по обоим датчикам. Затем вычисляем среднее приращение нагрузки и среднее приращение отсчетов по обоим датчикам.

Полученные средние значения приращений записываем в таблицу результатов испытания.

$$\Delta n_{1m} = \frac{\sum \Delta n_{1i}}{4}, \quad \Delta n_{2m} = \frac{\sum \Delta n_{2i}}{4}, \quad \Delta F_m = \frac{\sum \Delta F_i}{4}.$$

### 3.14.3.3. Результаты испытания

Относительные деформации продольных волокон в исследуемых точках балки вычисляются по формулам

$$\varepsilon_{(1)} = 2 \cdot \Delta n_m \cdot \alpha / K; \quad \varepsilon_{(2)} = 2 \cdot \Delta n_m \cdot \alpha / K.$$

Нормальные напряжения в исследуемых точках балки определим из закона Гука.

$$\sigma_{(1)} = E \cdot \varepsilon_{(1)}; \quad \sigma_{(2)} = E \cdot \varepsilon_{(2)}.$$

### 3.14.4. Результаты теоретического расчета

#### 3.14.4.1. Расчетная схема балки и эпюры изгибающих моментов

Слева на опытной установке расположен крепежный узел, не позволяющий сечению балки смещаться и поворачиваться, что соответствует заземлению (заделке). Правый конец балки свободен. Центральные главные оси инерции  $X$  и  $Y$  повернуты относительно плоскости суммарного изгибающего момента, которая образована линией действия силы  $\Delta F_m$  и плечом этой силы, расположенной на оси балки. При



этом положение главных осей инерции и положение плоскости суммарного изгибающего момента во всех поперечных сечениях балки одинаковое. Поэтому балка испытывает плоский косой изгиб.

Разложим силу  $\Delta F_m$  на две составляющих – проекцию на ось  $X$  и на ось  $Y$ , соответственно,

$$\Delta F_{mY} = \Delta F_m \cos(\alpha); \quad \Delta F_{mX} = \Delta F_m \sin(\alpha).$$

Составляющая  $\Delta F_{mY}$  вызывает в расчетном сечении балки, то есть там, где установлены датчики, изгибающий момент относительно оси  $X$ . Составляющая  $\Delta F_{mX}$ , в том же сечении вызывает изгибающий момент относительно оси  $Y$ .

$$M_X = \Delta F_{mY} \cdot (a-c); \quad M_Y = \Delta F_{mX} \cdot (a-c).$$

Таким образом, косой изгиб можно представить как два простых плоских изгиба в плоскостях  $XZ$  и  $YZ$ . Построим эпюры изгибающих моментов в обеих плоскостях (рис. 235).

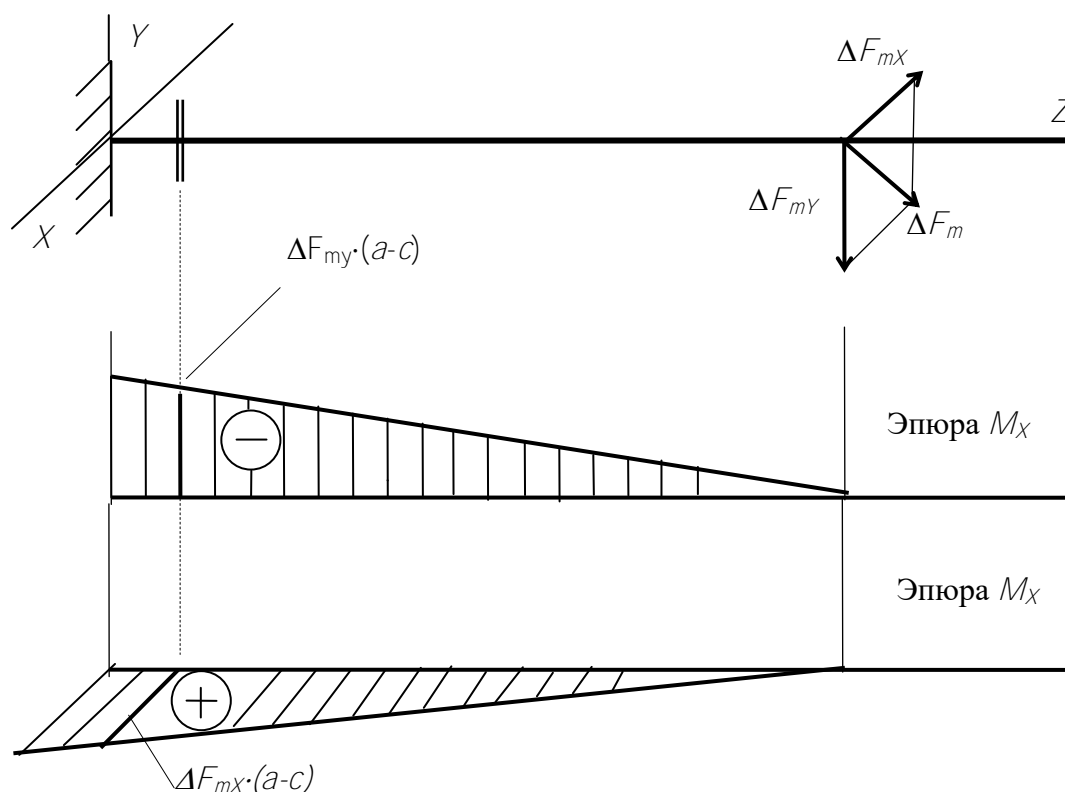


Рисунок 235. Эпюры изгибающих моментов в балке

**3.14.4.2. Нормальные напряжения в расчетных точках балки.** Нормальные напряжения в расчетных точках балки, то есть в тех местах, где наклеены датчики, вычисляем как сумму напряжений, вызванных изгибающими моментами в обеих плоскостях.

$$\sigma_{(1)} = \frac{M_x}{J_x} \cdot y_{(1)} + \frac{M_y}{J_y} \cdot x_{(1)} = \frac{M_x}{J_x} \cdot \frac{h}{2} + \frac{M_y}{J_y} \cdot \frac{b}{2};$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{M_x}{J_x} \cdot y_{(2)} + \frac{M_y}{J_y} \cdot x_{(2)} = \frac{M_x}{J_x} \cdot \left(-\frac{h}{2}\right) + \frac{M_y}{J_y} \cdot \left(-\frac{b}{2}\right).$$

### 3.14.4.3. Положение нейтральной оси и эпюра нормальных напряжений в расчетном сечении балки.

Положение нейтральной оси определяется углом  $\alpha$ , отложенным от оси  $X$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{M_y \cdot J_x}{M_x \cdot J_y}.$$

Угол  $\beta$  откладываем от оси  $X$  в сторону отрицательных квадрантов, если главные центральные оси  $X$  и  $Y$  направлены в сторону растянутых волокон (рис. 269).

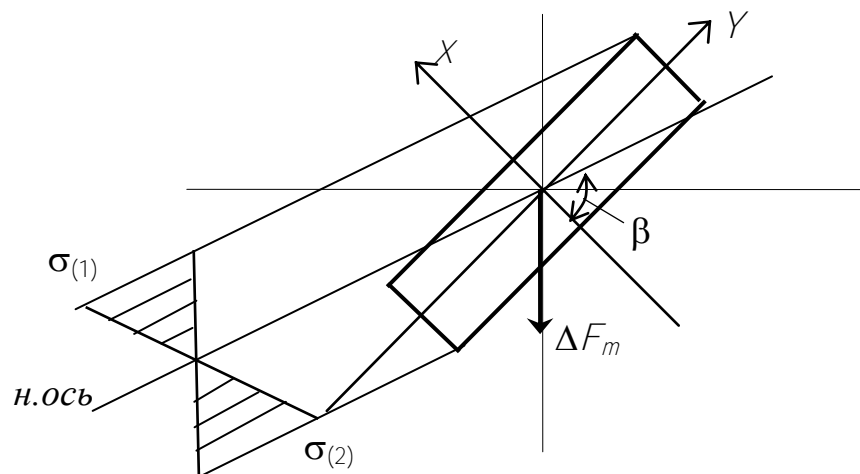


Рис. 236. Эпюры нормальных напряжений

### 3.14.5. Сравнение результатов, оформление отчета и выводы

Сравнить значения нормальных напряжений в расчетных точках балки, полученных в опыте и теоретическим расчетом.

$$\left| \frac{\sigma_{(1)}^{оп} - \sigma_{(1)}^{теор}}{\sigma_{(1)}^{теор}} \right| \times 100; \quad \left| \frac{\sigma_{(2)}^{оп} - \sigma_{(2)}^{теор}}{\sigma_{(2)}^{теор}} \right| \times 100.$$

На основании сравнения результатов полученных из опыта и теоретического расчета, сделать вывод о достоверности метода расчета балки при косом изгибе.

По результатам проведенного опыта и сделанных теоретических расчетов оформить отчет.

### 3.14.6. Контрольные вопросы по разделу 3.14

1. Какой вид сопротивления называется косым изгибом?
2. При каких условиях косой изгиб можно представить как сочетание двух плоских простых изгиба?
3. Какие точки сечения при косом изгибе следует считать опасными?
4. Какая ось при косом изгибе считается нейтральной осью?
5. Как располагаются опасные точки сечения по отношению к нейтральной оси при косом изгибе?
6. Как определить положение нейтральной оси при косом изгибе?
7. Какая цель исследований поставлена в лабораторной работе?
8. Какие требования следует выполнять при проведении опыта?
9. Как устроена и из каких узлов и деталей состоит испытательная установка?
10. Почему испытательная установка обеспечивает вертикальное положение плоскости суммарного изгибающего момента?
11. Какие измерительные инструменты и приборы использованы для проведения опыта?
12. Что используется в качестве образца?
13. Как закреплен образец в опытной установке?
14. Где и как располагаются рабочие датчики?
15. Где расположен компенсирующий датчик?
16. Для чего служит компенсирующий датчик на установке?
17. Какой порядок действий следует выполнять при проведении опыта?
18. Как заполняется таблица результатов испытания?
19. Как вычисляются значений средних приращений нагрузки и показаний прибора?
20. Как вычисляются относительные продольные деформации волокон в расчетных точках балки?
21. Как вычисляются нормальные напряжения в расчетных точках балки?
22. Почему на расчетной схеме левая опора балки принята в виде заземления?
23. Почему балка в опытной установке испытывает плоский косой изгиб?
24. Как вычисляются изгибающие моменты в главных плоскостях сечения?
25. По каким формулам вычисляются напряжения в расчетных точках балки?
26. По какому правилу определяется положение нейтральной оси?
27. Как сравниваются результаты, полученные в опыте и по теории?
28. Какой вывод можно сделать по результатам, полученным в лабораторной работе?

### 3.15. Исследование деформаций при косом изгибе

Как указано в предыдущем разделе кривой изгиб – это такой вид сложного сопротивления, при котором плоскость суммарного изгибающего момента не содержит ни одной из главных осей поперечного сечения. Косой изгиб делится на два вида – плоский и пространственный. Если упругая ось балки является плоской кривой, то имеет место плоский косой изгиб. Если упругая ось пространственная кривая, то изгиб считается пространственным. При расчете на прочность это не имеет значения, так как формула для вычисления нормальных напряжений в поперечном сечении одинаковая. Следует учитывать это лишь при определении положения нейтральной оси. Для плоского косого изгиба угол наклона нейтральной оси к главной оси сечения  $X$  можно определить по простой формуле

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{J_X}{J_Y} \operatorname{tg}\alpha,$$

где  $\alpha$  – угол наклона плоскости суммарного изгибающего момента к главной оси  $Y$ ;

$\beta$  – угол наклона нейтральной оси к главной оси поперечного сечения  $X$ ;

$J_X, J_Y$  – главные моменты инерции поперечного сечения.

В случае пространственного косого изгиба угол наклона нейтральной оси к главной оси  $X$  вычисляется по другой формуле

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{J_X}{J_Y} \frac{M_Y}{M_X}.$$

Однако, при вычислении направления полного прогиба балки следует учитывать какой изгиб испытывает балка. Если косой изгиб плоский, то угол наклона направления полного прогиба  $\gamma$  к главной оси  $Y$  равен углу  $\beta$ . При пространственном косом изгибе нет отдельной формулы для непосредственного вычисления угла наклона направления полного прогиба к оси  $Y$ . Для определения направления полного прогиба в этом случае требуется отдельно найти прогибы по направлениям главных осей инерции и по их величинам найти угол  $\gamma$ .

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{V_X}{V_Y}.$$

Предполагается также, что деформации балки малы по сравнению с ее размерами и материал деформируется по закону Гука.

Согласно определению сложно установить какой изгиб является плоским, а какой пространственным, так как в этом случае придется находить прогибы балки и строить ее упругую ось.

Вид косого изгиба можно установить и по другим признакам. Если для всех сечений балки положение главных осей инерции и плоскости

суммарного изгибающего момента одинаковые, то имеет место плоский косой изгиб. Если эти условия не выполняются, то косой изгиб будет пространственным.

### 3.15.1. Цель испытания

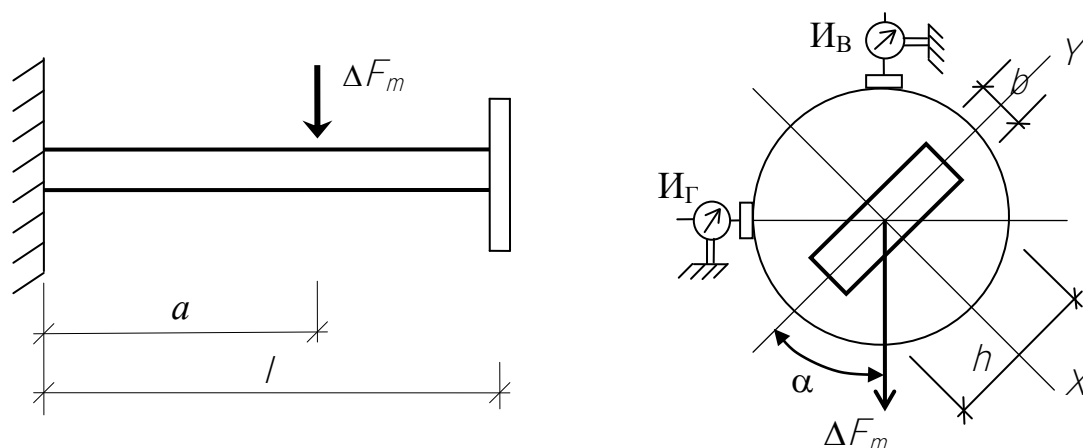
1. Проверить применимость для практических целей принятых в теории косоуго изгиба методов определения перемещений.
2. Подтвердить закон Гука при косом изгибе.
3. Проверить соответствие положений силовой плоскости и плоскости деформации по отношению к направлению нейтральной линии.

### 3.15.2. Исходные данные

**3.15.2.1. Требования к испытанию.** Максимальные нормальные напряжения в опасном сечении балки не должны превышать значения предела пропорциональности, нагружение должно быть статическим. Положения подвески с гирями и стрелочных тензометров должны точно соответствовать расчетной схеме. При укладке гирь не допускать толчков и ударов.

**3.15.2.2. Испытательная установка.** Для проведения опыта использована испытательная настольная установка, состоящая из станины, крепежного узла, стальной пластины (балки) с нанесенной разметкой, подвески и набора гирь.

Нагрузка создается весом гирь, устанавливаемых на подвеску. Подвеска закреплена на подшипнике. За счет этого нагрузка при любом положении пластины сохраняет свое вертикальное направление. Поэтому плоскость суммарного изгибающего момента всегда расположена вертикально. Крепежный узел позволяет поворачивать пластину вокруг ее оси, тем самым изменяя угол между главными осями инерции и плоскостью действия суммарного изгибающего момента. Крепежный узел снабжен шкалой с градуировкой в градусах.



**Рис. 237. Схема опытной установки для исследования прогибов при косом изгибе**

**3.15.2.3. Измерительные инструменты и приборы.** Для определения размеров поперечного сечения используются штангенциркуль с ценой деления 0,1 мм и стальная линейка. Для измерения прогибов балки используются два стрелочных тензометра с ценой деления равной 0,01 мм. Тензометры установлены так, что по одному измеряется вертикальное, а по другому – горизонтальное перемещения расчетной точки балки.

**3.15.2.4. Используемый образец.** В качестве исследуемого образца использована стальная пластина прямоугольного сечения с нанесенной на ее поверхности разметкой. Один конец пластина защемлен в крепежном узле, а другой свободен.

### 3.15.3. Порядок проведения испытания и обработка результатов

#### 3.15.3.1. Порядок проведения испытания

1. Ознакомиться с основными узлами и принципом работы испытательной установки.
2. Ознакомиться с образцом, его положением по отношению к нагрузке и узлу его крепления.
3. Определить положение стрелочных тензометров.
4. Установить подвеску на расчетном расстоянии от места расположения рабочих датчиков.
5. Уложить одну гирю на подвеску и снять отсчеты с обоих тензометров.
6. Записать отсчеты и значение нагрузки в таблицу результатов испытания.
7. Последовательно устанавливая гири на подвеску и снимать отсчеты с обеих приборов.
8. Записывать отсчеты и значение нагрузки в таблицу результатов испытания.

**3.15.3.2. Заполнение таблицы результатов испытания и построение графика деформирования балки.** Обрабатываем результаты измерения. Вычисляем приращения нагрузки и приращения отсчетов снятых с обеих приборов. Для этого от последующего веса гирь, установленных на подвеске, вычитаем предыдущее значение веса гирь.

Таблица 8. Результаты испытания

Нагрузка, Н		Индикатор $I_b$		Индикатор $I_r$	
$F$	$\Delta F$	$n$	$\Delta n$	$n$	$\Delta n$
$F_1$		$n_1$		$n_1$	
$F_2$	$\Delta F_{12}$	$n_2$	$\Delta n_{12}$	$n_2$	$\Delta n_{12}$
$F_3$	$\Delta F_{23}$	$n_3$	$\Delta n_{23}$	$n_3$	$\Delta n_{23}$
$F_4$	$\Delta F_{34}$	$n_4$	$\Delta n_{34}$	$n_4$	$\Delta n_{34}$
$F_5$	$\Delta F_{45}$	$n_5$	$\Delta n_{45}$	$n_5$	$\Delta n_{45}$
Средние значения	$\Delta F_m$		$\Delta n_{mb}$		$\Delta n_{mr}$

Полученные приращения записываем в соответствующую колонку таблицы. Аналогично поступаем и с отсчетами по обоим приборам. Затем вычисляем среднее приращение нагрузки и среднее приращение отсчетов по обоим приборам.

Полученные средние значения приращений записываем в таблицу результатов испытания.

$$\Delta n_{em} = \frac{\sum \Delta n_{ei}}{4}, \quad \Delta n_{zm} = \frac{\sum \Delta n_{zi}}{4}, \quad \Delta F_m = \frac{\sum \Delta F_i}{4}.$$

Для подтверждения справедливости закона Гука построим график деформирования балки. На вертикальной оси откладываем нагрузку, а на горизонтальной оси – показания приборов.

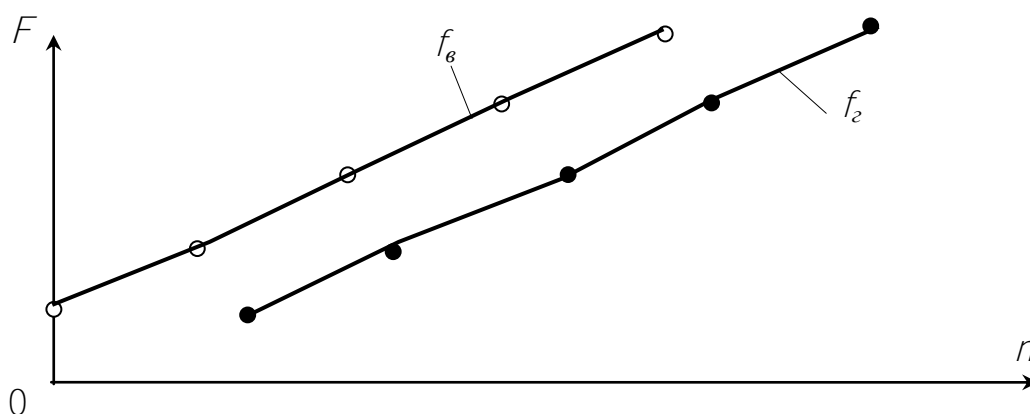


Рис. 238. График зависимости вертикальных и горизонтальных прогибов балки при косом изгибе

**3.15.3.3. Результаты испытания.** По результатам испытания вычислим прогибы балки в вертикальном и в горизонтальном направлениях.

Полный прогиб в расчетном сечении балки вычислим, как геометрическую сумму прогибов в вертикальном и в горизонтальном направлениях.

$$f_{tot}^{оп} = \sqrt{f_v^2 + f_u^2}.$$

Угол между направлением полного прогиба и вертикали вычислим по отношению прогиба в горизонтальном направлении и прогиба в вертикальном направлении

$$\operatorname{tg} \gamma^{оп} = \frac{f_{г}}{f_{в}}.$$

### 3.15.4. Результаты теоретического расчета

#### 3.15.4.1. Расчетная схема балки и эпюры изгибающих моментов

Слева на опытной установке расположен крепежный узел, не позволяющий сечению балки смещаться и поворачиваться, что

соответствует заземлению (заделке). Правый конец балки свободен. Центральные главные оси инерции  $X$  и  $Y$  повернуты относительно плоскости суммарного изгибающего момента, которая образована линией действия силы  $\Delta F_m$  и плечом этой силы – осью балки. При этом положение главных осей инерции и положение плоскости суммарного изгибающего момента во всех поперечных сечениях балки одинаковое. Поэтому балка испытывает плоский кривой изгиб. Главные оси инерции  $X$  и  $Y$  повернуты на угол  $\alpha$  по отношению, соответственно, к горизонтальному и вертикальному направлениям.

Разложим вертикальную силу  $\Delta F_m$  на две составляющие – проекцию на ось  $X$  и на ось  $Y$ , соответственно,

$$\Delta F_{mY} = \Delta F_m \cos(\alpha); \quad \Delta F_{mX} = \Delta F_m \sin(\alpha).$$

Составляющая  $\Delta F_{mY}$  вызывает в расчетном сечении балки, то есть в заземлении, изгибающий момент относительно оси  $X$ . Составляющая  $\Delta F_{mX}$  вызывает изгибающий момент относительно оси  $Y$ .

$$M_X = \Delta F_{mY} \cdot a; \quad M_Y = \Delta F_{mX} \cdot a.$$

Таким образом, кривой изгиб можно представить как два простых плоских изгиба в плоскостях  $XZ$  и  $YZ$ . Построим эпюры изгибающих моментов в обеих плоскостях.

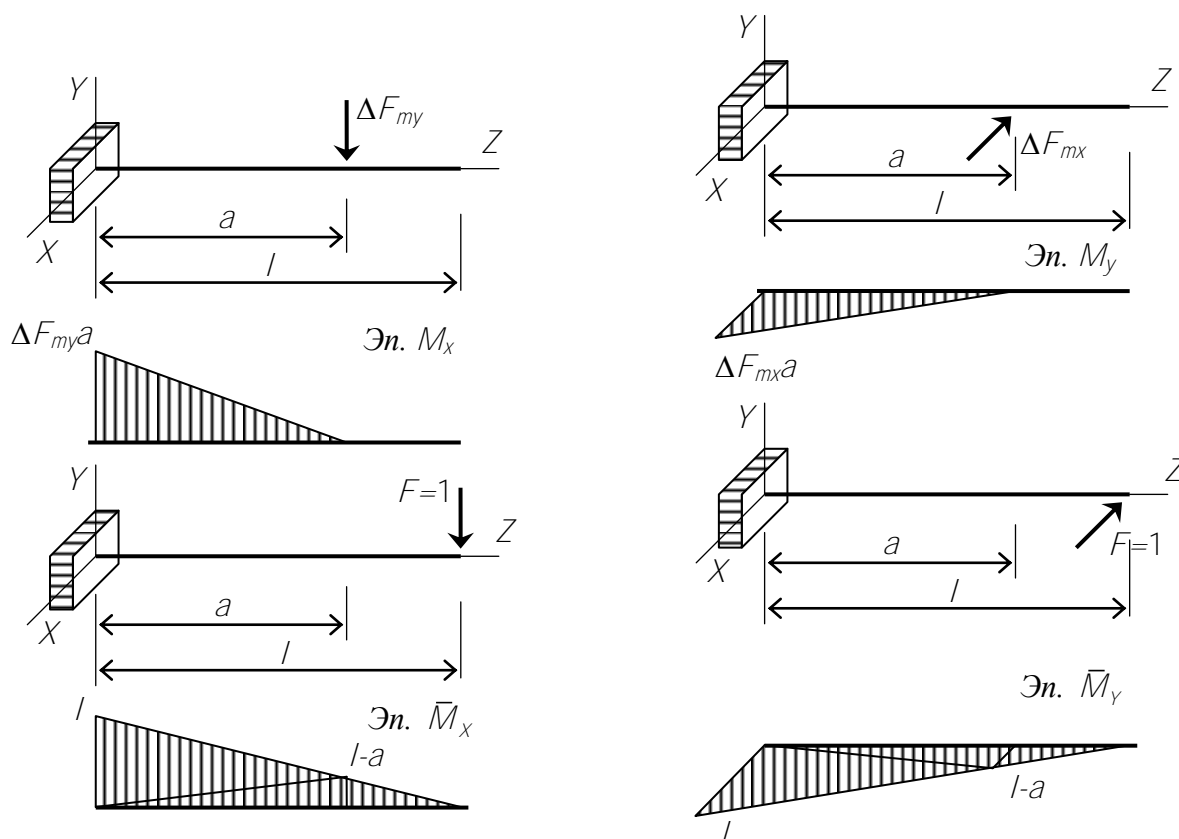


Рис. 239. Единичные и грузовые эпюры в плоскости  $ZY$  и в плоскости  $ZX$



Очевидно, что отношение изгибающих моментов во всех сечениях балки одинаковое. Поэтому исследуемая балка испытывает плоский косой изгиб.

**3.15.4.2. Прогибы балки по направлениям главных моментов инерции  $X$  и  $Y$ .** Для вычисления прогибов балки используем метод Максвелла-Мора (способ Верещагина).

$$V_Y = \frac{M_X \cdot \bar{M}_X}{EJ_X} = \frac{1}{EJ_X} \left\{ \frac{1}{2} F_{mY} a \cdot a \cdot \left[ \frac{2}{3} l + \frac{1}{3} (l-a) \right] \right\};$$

$$V_X = \frac{M_Y \cdot \bar{M}_Y}{EJ_Y} = \frac{1}{EJ_Y} \left\{ \frac{1}{2} F_{mX} a \cdot a \cdot \left[ \frac{2}{3} l + \frac{1}{3} (l-a) \right] \right\},$$

где  $E$  – модуль упругости материала балки;

$J_X = \frac{bh^3}{12}$  – момент инерции прямоугольного поперечного сечения балки относительно главной оси  $X$ ;

$J_Y = \frac{b^3h}{12}$  – момент инерции прямоугольного поперечного сечения балки относительно главной оси  $Y$ .

Отметим, что оси  $X$  и  $Y$  являются главными центральными осями инерции поперечного сечения, потому, что они его оси симметрии.

#### 3.15.4.3. Полный прогиб и его направление

Полный прогиб балки в расчетном сечении определим как геометрическую сумму прогибов по направлению осей  $X$  и  $Y$ .

$$V_{tot}^{теор} = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2}.$$

Учитывая, что балка испытывает плоский косой изгиб, направление полного прогиба балки в расчетном сечении, то есть угол  $\gamma$ , найдем по формуле

$$\operatorname{tg} \gamma^{теор} = \frac{J_X}{J_Y} \operatorname{tg} \alpha.$$

#### 3.15.5. Сравнение результатов, оформление отчета и выводы

Сравним значения полных прогибов, полученных в опыте и теоретическим расчетом.

$$\left| \frac{f_{(tot)}^{он} - f_{(tot)}^{теор}}{f_{(tot)}^{теор}} \right| \times 100.$$

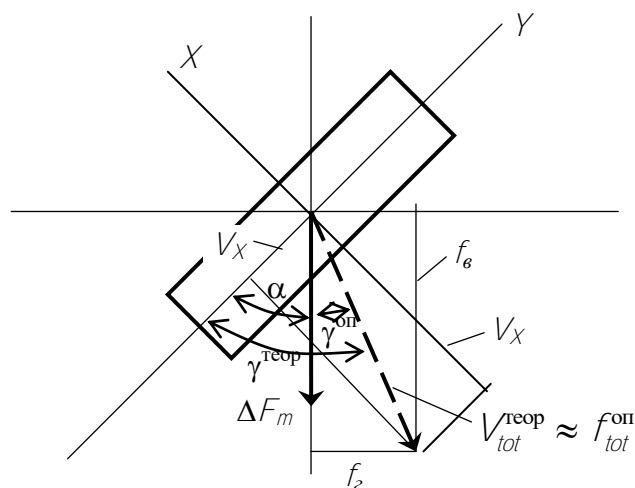


Рис. 240. Схема расположения прогибов балки

На основании сравнения результатов полученных из опыта и теоретического расчета, сделать вывод о достоверности метода расчета прогибов балки при косом изгибе.

По результатам проведенного опыта и сделанных теоретических расчетов оформить отчет.

### 3.15.6 Контрольные вопросы по разделу 3.15

1. Какой вид сопротивления называется косым изгибом?
2. На какие два вида делится косою изгиб?
3. Чем отличается плоский косою изгиб от пространственного?
4. Как определяется положение нейтральной оси при плоском и при пространственном косою изгибах?
5. Как определить направление полного прогиба при плоском и при пространственном косою изгибах?
6. По какому более простому признаку можно установить вид косою изгиба?
7. Какая цель поставлена в лабораторной работе?
8. Какие требования предъявляются при проведении испытания?
9. Из каких узлов и деталей состоит испытательная установка?
10. Почему плоскость суммарного изгибающего момента при испытании располагается вертикально?
11. Какие измерительные инструменты и приборы использованы в лабораторной работе?
12. Что являлось образцом в лабораторной работе?
13. В каком порядке проводилось испытание балки на косою изгиб?
14. Как заполнялась таблица результатов испытания?
15. Как строился график деформаций?
16. Как вычислялись опытные значения прогибов?
17. Как вычислялся по опытным данным полный прогиб балки?
18. Как определяется по опытным данным направление полного прогиба?

19. Какой вид имеет расчетная схема балки?
20. Почему балка в лабораторной работе испытывает плоский кривой изгиб?
21. На какие составляющие разложена нагрузка на балку?
22. Как вычисляются изгибающие моменты вблизи заземления?
23. Как строятся грузовые эпюры и единичные эпюры изгибающих моментов?
24. Как вычисляются прогибы балки по направлениям главных центральных осей инерции методом Максвелла-Мора (способом Верещагина)?
25. Как определяется полный прогиб балки по результатам расчета?
26. Как определяется направление полного прогиба по результатам расчета?
27. Как сравнивались прогибы, полученные в опыте и теоретически?
28. Какой вывод можно сделать из результатов испытания?

### 3.16. Исследование внецентренного растяжения

*Внецентренное растяжение (сжатие) – это такой вид сложного сопротивления, который вызван действием продольной силы, не совпадающей с продольной осью стержня.*

Этот вид сопротивления вызывается сжимающей либо растягивающей силой, параллельной оси стержня, но не совпадающей с ней. Пусть система геометрически и физически линейная, то есть перемещения малы по сравнению с ее размерами и выполняется закон Гука. Тогда справедлив принцип независимости действия сил. Пусть внецентренно растянутый или сжатый стержень длинный. При выполнении этих условий внецентренное растяжение-сжатие, являясь сложным видом сопротивления, может быть представлен как сумма простых видов сопротивления – центральное растяжение (сжатие) и кривой изгиб (изгиба в двух плоскостях). Все формулы, справедливые для центрального растяжения-сжатия и кривой изгиба, будут справедливы и для внецентренного растяжения-сжатия.

Для расчета на прочность стержня, испытывающего внецентренное растяжение-сжатие, требуется найти положение опасных точек сечения. Если материал стержня имеет разную прочность на растяжение и сжатие, то следует искать опасные точки, как в растянутой, так и в сжатой частях сечения. А для этого требуется найти положение нулевой линии, которая делит сечение на растянутую и сжатую части.

*Линия, соединяющая все точки сечения колонны, в которой напряжения равны нулю, называется нулевой линией (нейтральной осью).*

Опасные точки – это точки, максимально удаленные от нулевой линии в растянутой и в сжатой частях сечения.

Такой вид сопротивления испытывают опоры мостов, фундаменты под колонны, колонны промышленных корпусов и др.

### 3.16.1. Цель испытания

1. В намеченных точках опытного стержня экспериментально определить нормальные напряжения и установить характер распределения их по сечению.
2. В этих же точках вычислить нормальные напряжения теоретически.
3. Сравнить напряжения и сделать вывод о достоверности расчетных формул.

### 3.16.2. Исходные данные

**3.16.2.1. Требования к испытанию.** Максимальные нормальные напряжения в испытываемом стержне не должны превышать значения предела пропорциональности, нагружение должно быть статическим. Нагружение образца должно быть плавным без толчков и вибрации.

**3.16.2.2. Испытательная установка.** Для проведения опыта использован гидравлический пресс Р-50 (разрывная машина, способная создать нагрузку в 50 т). Пресс оснащен самописцем и силоизмерителем.

**3.16.2.3. Измерительные инструменты и приборы.** Для определения размеров поперечного сечения используются штангенциркуль с ценой деления 0,1 мм и стальная линейка. Для измерения деформаций волокон стержня используются проволочные датчики сопротивления и измеритель деформаций цифровой ИДЦ1 с ценой деления  $\alpha = 1 \times 10^{-5}$  и коэффициентом  $K=2,1$ . Будем называть продольными волокнами стержня те волокна, направление которых совпадает с направлением растягивающей или сжимающей силы. Так как линия действия силы вертикальна, то для измерения деформаций продольных волокон датчики должны быть наклеены так, чтобы их вытянутость была вертикальной.

**3.16.2.4. Используемый образец.** В качестве исследуемого образца использована стальная пластина прямоугольного сечения. На обоих концах пластины имеются узлы с шарнирами, позволяющие исключить перекосы нагрузки и надежный захват. В пластине сделан вырез, который увеличивал эксцентриситет приложения силы. Для распределения сосредоточенной силы в узлах по всему поперечному сечению на концах образца сделаны утолщения.

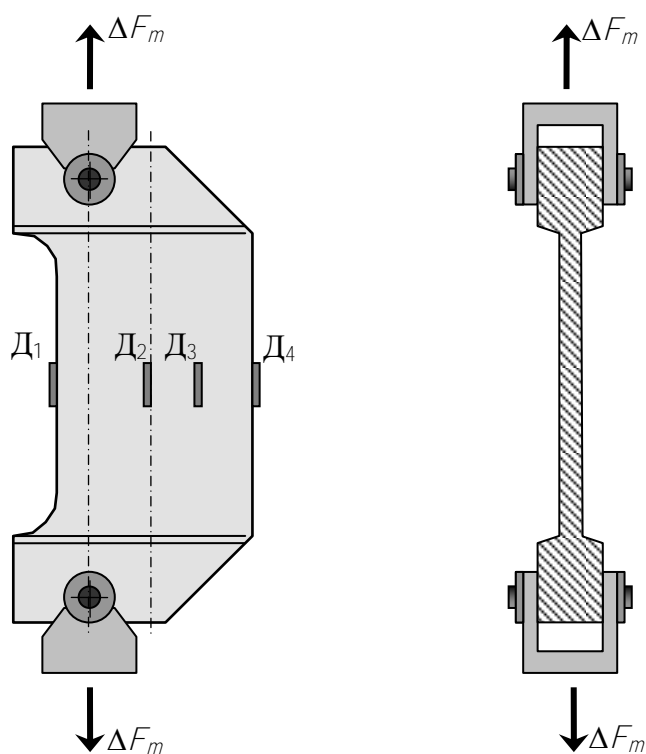


Рис. 241. Испытываемый на внецентренное растяжение образец

### 3.16.3. Порядок проведения испытания и обработка результатов

#### 3.16.3.1. Порядок проведения испытания

1. Ознакомиться с основными узлами и принципом работы испытательной машины.
2. Ознакомиться с образцом, его положением по отношению к нагрузке и узлам его крепления.
3. Определить положение рабочих датчиков и компенсирующего датчика.
4. Включить пресс и нагружать образец последовательными ступенями.
5. Последовательно с каждого датчика по прибору ИДЦ1 снимать отсчеты и заносить их в журнал.
6. После завершения испытания снять нагрузку и выключить пресс.

**3.16.3.2. Заполнение таблицы результатов испытания и построение графика деформирования балки.** Обрабатываем результаты измерения. Вычисляем приращения нагрузки и приращения отсчетов снятых с прибора ИДЦ1. Для этого от нагрузки последующей ступени нагружения вычтем нагрузку предыдущей ступени нагружения. Полученные приращения записываем в соответствующую колонку таблицы. Аналогично поступаем и с отсчетами по всем четырем датчикам. Вычисляем средние приращения нагрузки и отсчетов по прибору.

$$\Delta n_m = \frac{\sum \Delta n_{si}}{4}, \quad \Delta F_m = \frac{\sum \Delta F_i}{4}.$$

Полученные средние значения приращений записываем в таблицу результатов испытания.

Таблица 9. Результаты испытания

Нагрузка кН		Д <sub>1</sub>		Д <sub>2</sub>		Д <sub>3</sub>		Д <sub>4</sub>	
F	ΔF	n <sub>1</sub>		n <sub>2</sub>		n <sub>3</sub>		n <sub>4</sub>	
F <sub>1</sub>		n <sub>11</sub>		n <sub>12</sub>		n <sub>13</sub>		n <sub>14</sub>	
	ΔF <sub>21</sub>		Δn <sub>11</sub>		Δn <sub>12</sub>		Δn <sub>13</sub>		Δn <sub>14</sub>
F <sub>2</sub>		n <sub>21</sub>		n <sub>22</sub>		n <sub>23</sub>		n <sub>24</sub>	
	ΔF <sub>32</sub>		Δn <sub>21</sub>		Δn <sub>22</sub>		Δn <sub>23</sub>		Δn <sub>24</sub>
F <sub>3</sub>		n <sub>31</sub>		n <sub>32</sub>		n <sub>33</sub>		n <sub>34</sub>	
	ΔF <sub>43</sub>		Δn <sub>31</sub>		Δn <sub>32</sub>		Δn <sub>33</sub>		Δn <sub>34</sub>
F <sub>4</sub>		n <sub>41</sub>		n <sub>42</sub>		n <sub>43</sub>		n <sub>44</sub>	
	ΔF <sub>54</sub>		Δn <sub>41</sub>		Δn <sub>42</sub>		Δn <sub>43</sub>		Δn <sub>44</sub>
F <sub>5</sub>		n <sub>51</sub>		n <sub>52</sub>		n <sub>53</sub>		n <sub>54</sub>	
	ΔF <sub>65</sub>		Δn <sub>51</sub>		Δn <sub>52</sub>		Δn <sub>53</sub>		Δn <sub>54</sub>
F <sub>6</sub>		n <sub>61</sub>		n <sub>62</sub>		n <sub>63</sub>		n <sub>64</sub>	
	ΔF <sub>76</sub>		Δn <sub>61</sub>		Δn <sub>62</sub>		Δn <sub>63</sub>		Δn <sub>64</sub>
F <sub>7</sub>		n <sub>71</sub>		n <sub>72</sub>		n <sub>73</sub>		n <sub>74</sub>	
ΔF <sub>m</sub>		Δn <sub>m1</sub>		Δn <sub>m2</sub>		Δn <sub>m3</sub>		Δn <sub>m4</sub>	

Для подтверждения справедливости закона Гука построим график деформирования балки. На вертикальной оси откладывать нагрузку, а на горизонтальной оси – показания прибора.

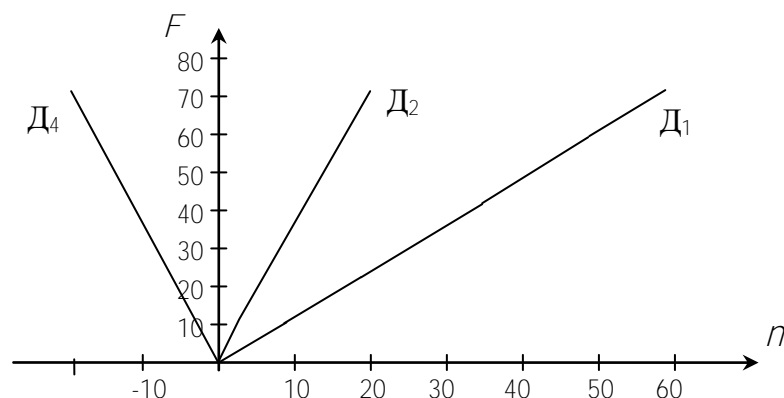


Рис. 242. График зависимости деформаций волокон стержня от нагрузки

3.16.3.3. **Результаты испытания.** Относительные линейные продольные деформации во всех точках, где наклеены датчики, вычисляем по формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 2 \cdot \Delta n_{m1} \cdot \alpha / K; & \varepsilon_2 &= 2 \cdot \Delta n_{m2} \cdot \alpha / K; \\ \varepsilon_3 &= 2 \cdot \Delta n_{m3} \cdot \alpha / K; & \varepsilon_4 &= 2 \cdot \Delta n_{m4} \cdot \alpha / K. \end{aligned}$$

Учитывая закон Гука, определим нормальные напряжения в расчетных точках образца

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= E \cdot \varepsilon_1; & \sigma_2 &= E \cdot \varepsilon_2; \\ \sigma_3 &= E \cdot \varepsilon_3; & \sigma_4 &= E \cdot \varepsilon_4.\end{aligned}$$

### 3.16.4. Результаты теоретического расчета

#### 3.16.4.1. Нормальные напряжения в расчетных сечениях балки

Так как образец подвергнут внецентренному растяжению продольная сила  $N$  принимается со знаком “плюс”

$$N = +\Delta F_m.$$

Нормальные напряжения в расчетных точках сечения стержня вычисляются как сумма напряжений, вызванных центральным растяжением и двумя изгибающими моментами – изгибающим моментом относительно главной центральной оси  $X$  и изгибающим моментом относительно главной центральной оси  $Y$ .

$$\sigma_{(k)} = \frac{N}{A} + \frac{M_X}{J_X} y_k + \frac{M_Y}{J_Y} x_k,$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения стержня;

$M_X = N \cdot y_F$  – изгибающий момент, вызванный эксцентриситетом приложения силы, относительно главной центральной оси  $X$ ;

$M_Y = N \cdot x_F$  – изгибающий момент, вызванный эксцентриситетом приложения силы, относительно главной центральной оси  $Y$ ;

$x_F, y_F$  – координаты точки приложения силы (или равнодействующей) относительно главных центральных осей инерции поперечного сечения.

$J_X, J_Y$  – главные центральные моменты инерции поперечного сечения

$$J_X = \frac{bh^3}{12}; \quad J_Y = \frac{hb^3}{12};$$

$k$  – номер расчетной точки (точек, где расположены датчики).

Отметим, что в лабораторной работе сила приложена так, что один из эксцентриситетов точки приложения силы равен нулю  $y_F = 0$ . Поэтому изгибающий момент  $M_X = 0$ . Формула для вычисления нормальных напряжений упрощается и принимает вид

$$\sigma_{(k)} = \frac{N}{A} + \frac{M_Y}{J_Y} x_k.$$

При этом, заранее известно, что оси  $X$  и  $Y$  являются главными центральными инерции, так как они оси симметрии прямоугольного поперечного сечения. Положение нулевой линии определяем по формулам

$$x_0 = -\frac{J_Y}{A \cdot x_F}; \quad y_0 = -\frac{J_X}{A \cdot y_F}.$$

Так как эксцентриситет  $y_F$  точки приложения силы  $\Delta F_m$  равен нулю, то отсеченный отрезок нулевой линии  $y_0 \rightarrow \infty$ . Это значит, что нулевая линия располагается параллельно оси  $Y$ .

3.16.4.2. **Построение эпюры нормальных напряжений.** По найденным значениям нормальных напряжений построим их эпюру.

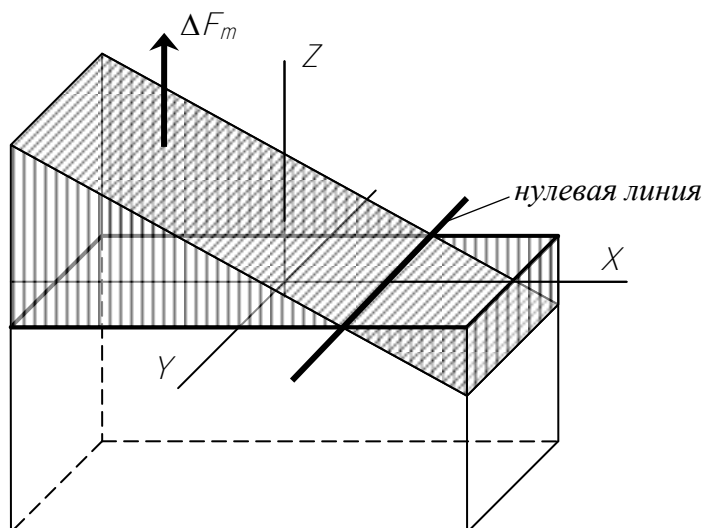


Рис. 243. Вид эпюры нормальных напряжений в поперечном сечении опытного образца

### 3.16.5. Сравнение результатов, выводы и оформление отчета

Сравним результаты опыта и теоретического расчета. Оценим погрешность в процентах

$$\left| \frac{\sigma_{(k)}^{оп} - \sigma_{(k)}^{теор}}{\sigma_{(k)}^{теор}} \right| \times 100.$$

Для удобства оформим сравнение в виде таблицы.

Таблица 10. Сравнение результатов

Напряжения	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$
Опытные	$\sigma_{(1)}^{оп}$	$\sigma_{(2)}^{оп}$	$\sigma_{(3)}^{оп}$	$\sigma_{(4)}^{оп}$
Теоретические	$\sigma_{(1)}^{теор}$	$\sigma_{(2)}^{теор}$	$\sigma_{(3)}^{теор}$	$\sigma_{(4)}^{теор}$
Расхождение, %	$\left  \frac{\sigma_{(1)}^{оп} - \sigma_{(1)}^{теор}}{\sigma_{(1)}^{теор}} \right  \times 100.$	$\left  \frac{\sigma_{(2)}^{оп} - \sigma_{(2)}^{теор}}{\sigma_{(2)}^{теор}} \right  \times 100.$	$\left  \frac{\sigma_{(3)}^{оп} - \sigma_{(3)}^{теор}}{\sigma_{(3)}^{теор}} \right  \times 100.$	$\left  \frac{\sigma_{(4)}^{оп} - \sigma_{(4)}^{теор}}{\sigma_{(4)}^{теор}} \right  \times 100.$

По результатам проведенного опыта и сделанных теоретических расчетов сделать выводы и оформить отчет.



### 3.16.6. Контрольные вопросы по разделу 3.16

1. Какой вид сопротивления называется внецентренным растяжением или внецентренным сжатием?
2. Когда появляется внецентренное растяжение (сжатие)?
3. На какие виды простых сопротивлений можно разложить внецентренное растяжение (сжатие)?
4. Что называется нулевой линией?
5. На какие части делит сечение нулевая линия?
6. Как найти опасные точки в поперечном сечении при внецентренном растяжении (сжатии)?
7. Какая цель поставлена в лабораторной работе?
8. Какие требования предъявляются к испытанию стержня на внецентренное растяжение (сжатие)?
9. На какой испытательной машине проводилось испытание?
10. Какие измерительные инструменты и приборы использованы в лабораторной работе?
11. Как устроены и для чего предназначены проволочные датчики?
12. Как располагались датчики на образце?
13. Какую форму и из какого материала изготовлен образец?
14. Для чего предназначены узлы на концах образца?
15. Для чего в образце сделан вырез?
16. В каком порядке проводится испытание образца?
17. Как заполнялась таблица результатов испытания?
18. Как вычислялись средние значения приращений нагрузки и приращений показаний прибора?
19. Как строится график зависимости деформаций от нагрузки?
20. Как вычислялись относительные линейные деформации в образце?
21. По каким формулам вычислялись опытные значения нормальных напряжений в сечении образца?
22. Почему продольная сила принята положительной?
23. Может ли быть при внецентренном действии нагрузки продольная сила отрицательной?
24. По какой формуле вычислялись теоретические значения нормальных напряжений в поперечном сечении стержня при внецентренном действии нагрузки?
25. Как вычисляются изгибающие моменты, вызванные эксцентриситетом приложения нагрузки?
26. Почему для вычисления нормальных напряжений в лабораторной работе применяется неполная формула?
27. Как определяется положение нулевой линии?
28. Какой вид имеет эпюра нормальных напряжений при внецентренном действии нагрузки?
29. Как сравнивались результаты опыта и результаты теоретического расчета?

30. Какие выводы можно сделать по результатам проведенной лабораторной работы?

### 3.17. Исследование устойчивости сжатого стержня

Во многих случаях выполнение условия прочности при центральном сжатии является недостаточным для нормальной (безопасной) эксплуатации сооружения. Возможно разрушение сжатых стержней, плит, оболочек, связанное с их потерей устойчивости – внезапного изменения формы с последующим разрушением.

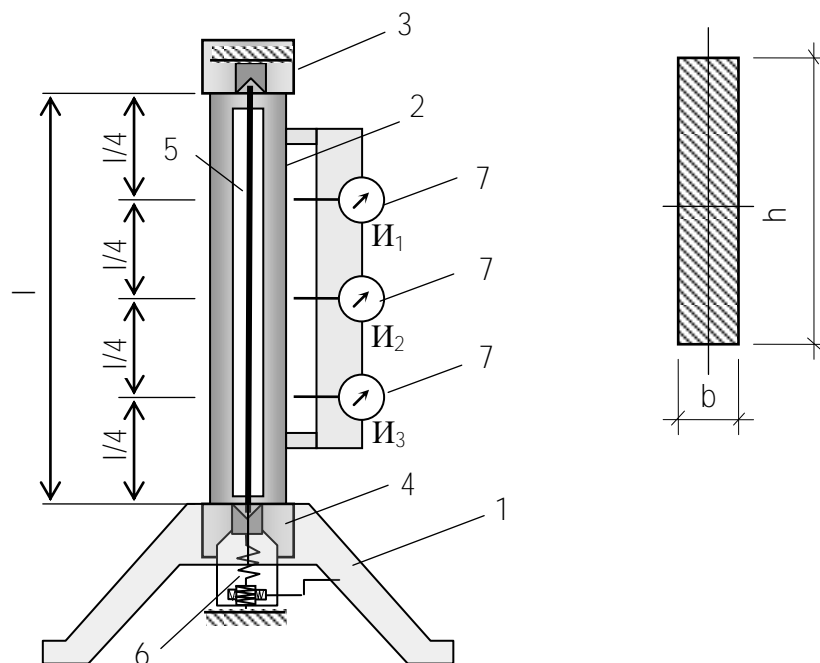
#### 3.17.1. Цель испытания

1. Изучить явление потери устойчивости сжатого стержня.
2. Определить опытным и теоретическим способом величину критической силы и сравнить их.

#### 3.17.2. Исходные данные

**3.17.2.1. Требования к испытанию.** Максимальные нормальные напряжения в испытываемом стержне не должны превышать значения предела пропорциональности, нагружение должно быть статическим. Нагружение образца должно быть плавным без толчков и вибрации.

**3.17.2.2. Испытательная установка.** Для проведения опыта использована настольная установка (рис. 244).



**Рис. 244. Настольная установка для исследования сжатого стержня на устойчивость**

1 – станина в виде треноги; 2 – цилиндрический кожух; 3 – верхний неподвижный патрон; 4 – нижний подвижный патрон; 5 – образец (стальная пластинка); 6 – червячный механизм; 7 – стрелочные тензометры.

Настольная установка расположена на станине в виде треноги, цилиндрического кожуха с продольной щелью, верхнего неподвижного и нижнего подвижного патронов, стальной пластинки, червячного механизма с силоизмерителем и трех стрелочных тензометров, вставленных в отверстия в кожухе.

**3.17.2.3. Измерительные инструменты и приборы.** Для определения размеров поперечного сечения используются штангенциркуль с ценой деления 0,1 мм и стальная линейка. Для измерения смещений стального стержня использованы три стрелочных тензометра (индикаторов часового типа) с ценой деления  $\alpha = 0,01$  мм.

**3.17.2.4. Используемый образец.** В качестве исследуемого образца использована стальная пластина прямоугольного сечения. С обоих концов пластинка заточена для точного их попадания в клинообразные вырезы в патронах.

### **3.17.3. Порядок проведения испытания и обработка результатов**

#### **3.17.3.1. Порядок проведения испытания.**

1. Ознакомиться с основными узлами и принципом работы испытательной машины.
2. Ознакомиться с образцом, его положением по отношению к нагрузке и узлам его крепления.
3. Вращая ручку червячного механизма и контролируя показания на шкале силоизмерителя довести нагрузку до первой ступени.
4. Снять отсчеты со стрелочных тензометров.
5. Записать в журнал испытания значения нагрузки и показания тензометров.
6. Повторять пп 3-5 при нагрузках второй и последующих ступеней.
7. После завершения испытания вращая ручку червячного механизма снять нагрузку с образца.

**3.17.3.2. Заполнение таблицы результатов испытания и построение графика смещений образца.** По отсчетам на силоизмерителе и, учитывая цену деления динамометра  $\alpha$ , вычисляем нагрузки на образец и записываем их в таблицу.

$$F_k = \alpha n_k.$$

По отсчетам на тензометрах и, учитывая их цену деления  $\alpha_u$ , вычисляем смещения точек образца и записываем их в таблицу.

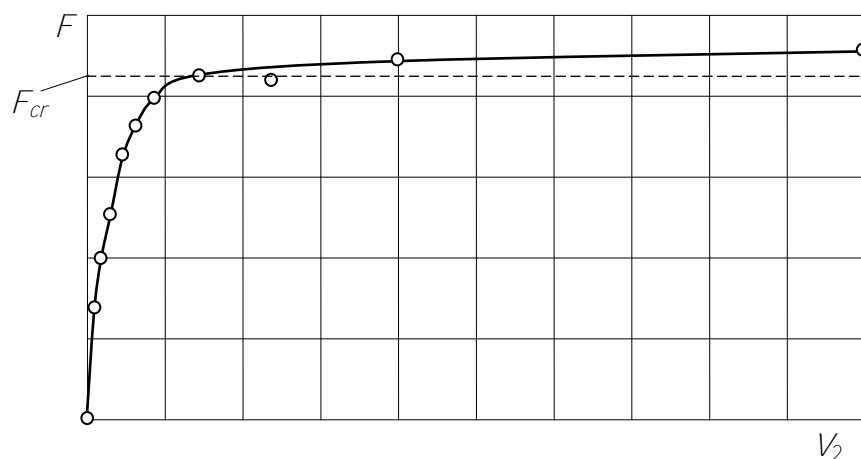
$$V_{i(k)} = \alpha_u \cdot n_{iu(k)}.$$

**Таблица 11. Результаты испытания на устойчивость**

№ супе-ни	От-счет $n$ , мм	Нагру-зка $F$ , Н	И <sub>1</sub>		И <sub>2</sub>		И <sub>3</sub>	
			$n_{1u}$	$V_1$ , мм	$n_{2u}$	$V_2$ , мм	$n_{3u}$	$V_3$ , мм
1.	$n_1$	$F_1$	$n_{1u(1)}$	$V_{1(1)}$	$n_{2u(1)}$	$V_{2(1)}$	$n_{3u(1)}$	$V_{3(1)}$
2.	$n_2$	$F_2$	$n_{1u(2)}$	$V_{1(2)}$	$n_{2u(2)}$	$V_{2(2)}$	$n_{3u(2)}$	$V_{3(2)}$
3.	$n_3$	$F_3$	$n_{1u(3)}$	$V_{1(3)}$	$n_{2u(3)}$	$V_{2(3)}$	$n_{3u(3)}$	$V_{3(3)}$
4.	$n_4$	$F_4$	$n_{1u(4)}$	$V_{1(4)}$	$n_{2u(4)}$	$V_{2(4)}$	$n_{3u(4)}$	$V_{3(4)}$
5.	$n_5$	$F_5$	$n_{1u(5)}$	$V_{1(5)}$	$n_{2u(5)}$	$V_{2(5)}$	$n_{3u(5)}$	$V_{3(5)}$
6.	$n_6$	$F_6$	$n_{1u(6)}$	$V_{1(6)}$	$n_{2u(6)}$	$V_{2(6)}$	$n_{3u(6)}$	$V_{3(6)}$
7.	$n_7$	$F_7$	$n_{1u(7)}$	$V_{1(7)}$	$n_{2u(7)}$	$V_{2(7)}$	$n_{3u(7)}$	$V_{3(7)}$
8.	$n_8$	$F_8$	$n_{1u(8)}$	$V_{1(8)}$	$n_{2u(8)}$	$V_{2(8)}$	$n_{3u(8)}$	$V_{3(8)}$
9.	$n_9$	$F_9$	$n_{1u(9)}$	$V_{1(9)}$	$n_{2u(9)}$	$V_{2(9)}$	$n_{3u(9)}$	$V_{3(9)}$
10.	$n_{10}$	$F_{10}$	$n_{1u(10)}$	$V_{1(10)}$	$n_{2u(10)}$	$V_{2(10)}$	$n_{3u(10)}$	$V_{3(10)}$

Для анализа закона отклонения образца за счет его искривления от сжимающей силы построим график. На вертикальной оси откладывать нагрузку, а на горизонтальной оси – показания второго тензометра.

**3.17.3.3. Результаты испытания.** Из графика зависимости отклонения стержня от действия сжимающей силы (рис. 245), очевидно, что до некоторого предела этот график имеет прямолинейный характер, то есть деформации прямопропорциональны нагрузке. При этих условиях сжимающая сила меньше критической и стержень работает на центральное сжатие. Его сопротивление очень большое. При увеличении силы на графике наблюдаются значительные отклонения – график становится почти горизонтальным. Это значит, что сжимающая сила превышает критическую силу.



**Рис. 245. График зависимости отклонения стержня за счет его искривления от сжимающей силы**

Воспользуемся этим и определим (ориентировочно) значение критической сжимающей силы, которое будет соответствовать месту на графике, где наблюдается изменение характера деформирования стержня.

Это место условно отмечено на графике (рис. 245) штриховой линией, а в таблице затупешкой соответственных значений.

Для подтверждения предположения Эйлера о форме искривления сжатого стержня в момент потери устойчивости в виде синусоиды выпишем значения отклонений в трех местах стержня.

$$V_{1(8)}, V_{2(8)}, V_{3(8)}.$$

### 3.17.4. Результаты теоретического расчета

3.17.4.1. **Критическая сжимающая сила и критические напряжения.** Определим предельную гибкость сжатого стержня по условию  $\sigma_{cr} = \sigma_{pr}$ . Эту величину иногда называют верхним пределом гибкости.

$$\lambda_U = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}}.$$

Затем определяем гибкость испытываемого стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}},$$

где  $\mu$  – коэффициент приведения длины стержня, зависящий от способа закрепления сжатого стержня;

$l$  – длина стержня;

$i_{min}$  – минимальный радиус инерции поперечного сечения стержня.

В момент потери устойчивости стержень искривляется, образуя волны. Форма искривления стержня зависит от условия закрепления стержня.

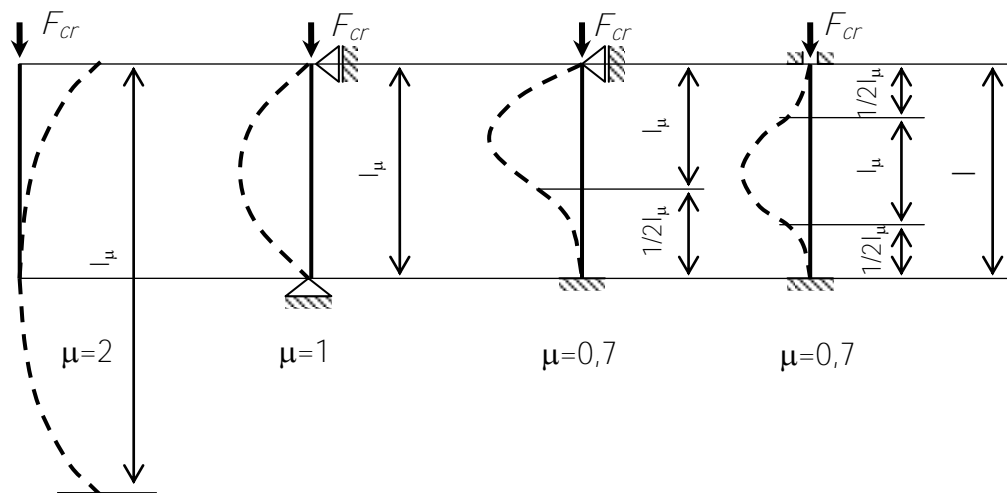


Рис. 246. Формы искривления сжатого стержня в момент потери устойчивости при различных условиях его закрепления

Минимальный радиус инерции поперечного сечения сжатого стержня вычисляется по формуле

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A_{br}}} = \sqrt{\frac{J_V}{A_{br}}}$$

Здесь  $J_{min}$  или  $J_V$  – это меньший из главных центральных моментов инерции поперечного сечения сжатого стержня, а  $A_{br}$  – площадь поперечного сечения стержня без учета местных ослаблений (отверстий, выточек и пр. сделанных на небольшом участке стержня).

Для того, чтобы можно было применить метод Эйлера, должно выполняться условие  $\lambda > \lambda_U$ .

Если это условие выполняется, то критическую силу для сжатого стержня следует определять по формуле Эйлера

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu l)^2}, \quad \sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A_{br}},$$

если нет – то по формуле Ясинского

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda; \quad F_{cr} = \sigma_{cr} A_{br},$$

где  $a, b$  – эмпирические коэффициенты (из справочника).

Сопоставить полученное критическое напряжение и предел пропорциональности материала стержня. Убедиться, что критическое напряжение меньше предела пропорциональности  $\sigma_{cr} \leq \sigma_{pr}$ .

**3.17.4.2. Форма искривления сжатого стержня в момент потери устойчивости.** В соответствии с допущением Эйлера форма сжатого стержня в момент потери устойчивости имеет вид синусоиды

$$V = B \sin\left(\frac{\pi Z}{l}\right).$$

Примем коэффициент  $B$  равным отклонению стержня посередине его длины, полученное в опыте  $V_2$ . Тогда отклонение стержня при потере его устойчивости на четвертях его длины равно

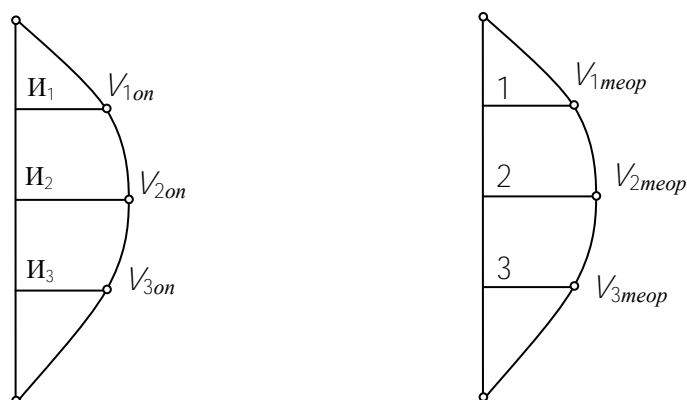
$$V_1 = V_3 = B \cdot \sin\left(\frac{\pi Z}{l}\right) = V_2 \cdot \sin\left[\frac{\pi(l/4)}{l}\right] = V_2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

### 3.17.5. Сравнение результатов, выводы и оформление отчета

Сравним значения критических сил, полученных из опыта и по методу Эйлера. Оценить их отличие в процентах

$$\frac{F_{cr}^{оп} - F_{cr}^{теор}}{F_{cr}^{теор}} \cdot 100.$$

Для подтверждения достоверности предположения Эйлера о синусоидальной форме искривления сжатого стержня в момент потери устойчивости сравним смещения, полученные в опыте и найденные из теоретического расчета. Покажем форму потери устойчивости на рисунке.



**Рис. 247. Формы искривления сжатого стержня в момент потери устойчивости, полученные из опыта и по теории**

По результатам, полученным из опыта и теоретическим расчетом сделать выводы и оформить отчет.

### 3.17.6 Контрольные вопросы по разделу 3.17

1. Как происходит разрушение сооружения при потере устойчивости?
2. Какое состояние называется устойчивым состоянием равновесия?
3. Какое состояние называется неустойчивым состоянием равновесия?
4. При каком условии сжатый стержень находится в состоянии устойчивого равновесия?
5. При каком условии сжатый стержень находится в неустойчивом состоянии равновесия?
6. Что следует понимать под возмущением равновесной механической системы?
7. Какой вид сопротивления называется продольным изгибом?
8. Какие методы расчета используются для расчета на устойчивость?
9. Как следует понимать смежные формы равновесия и при каких условиях они появляются?
10. Как понимать бифуркацию ?
11. Что называется критической силой по методу Эйлера?
12. Когда можно использовать метод Эйлера для расчета сжатого стержня?
13. Чем опасен продольный изгиб?
14. Какая ставится цель в лабораторной работе?
15. Какие ставятся требования при проведении опыта?
16. Как устроена испытательная установка и из каких узлов и деталей она состоит?
17. Какие измерительные инструменты и приборы используются в лабораторной работе?
18. Как выглядит образец и из какого материала он изготовлен?
19. В каком порядке проводилось испытание образца на сжатие?
20. Как определялась нагрузка на образец?

21. Как определялись смещения расчетных точек сжатого стержня?
22. Как строился график зависимости отклонения расчетных точек сжатого стержня?
23. Какую особенность имеет график зависимости смещения центральной точки сжатого стержня от нагрузки?
24. Почему часть графика имеет вид близкий к прямой, а другая его часть – почти горизонтальная линия?
25. Как по графику определялось значение критической силы?
26. По какой формуле определялась предельная гибкость стержня?
27. По какой формуле определялась гибкость стержня?
28. Что называется приведенной длиной сжатого стержня?
29. Что характеризует коэффициент приведения длины сжатого стержня?
30. От чего зависит и какие значения может принимать коэффициент приведения длины сжатого стержня?
31. Как вычисляется минимальный радиус инерции поперечного сечения стержня?
32. При каком условии для расчета сжатого стержня на устойчивость может применяться формула Эйлера?
33. Как вычисляется критическая сила для сжатого стержня по решению Эйлера?
34. Какой вид имеет формула Ясинского и в каком случае она применяется для расчета сжатого стержня?
35. Какую форму искривления имеет сжатый стержень в момент потери устойчивости согласно решению Эйлера?
36. Как сравнивались результаты, полученные из опыта и по теоретическому расчету?
37. Какие выводы сделаны по результатам лабораторной работы?



## 4. КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

Расчетно-графическая работа состоит из восьми задач по наиболее важным разделам сопротивления материалов и выполняется студентами самостоятельно. Исходные данные для каждого студента выдаются преподавателем индивидуально. Расчетно-графическая работа разделена на четыре части: расчет ступенчатого бруса (задача 1); определение геометрических характеристик плоских сечений (задача 2); расчет балок и рамы (задачи 3, 4, 5, 6 и 7); расчет внецентренно сжатой колонны (задача 8). Список вариантов и заданий приведен в сборник задач для расчетно-проектировочных работ по дисциплине «сопротивление материалов» для студентов строительных специальностей.

### 4.1. Контрольные вопросы для защиты первой части контрольной работы

1. Какие силы называются внешними?
2. Какие силы называются внутренними?
3. Какой элемент называется стержнем?
4. Что называется осью стержня?
5. Что называется продольной силой?
6. Как обозначается продольная сила и в чем она измеряется?
7. Когда продольная сила считается положительной, а когда отрицательной?
8. Как определяется продольная сила? Метод сечений?
9. Какой вид сопротивления называется центральным растяжением-сжатием?
10. Как обозначается и какую размерность имеет нормальное напряжение?
11. От чего зависит знак нормального напряжения?
12. Когда нормальное напряжение считается положительным, а когда отрицательным?
13. По какой формуле вычисляется нормальное напряжение при центральном растяжении-сжатии стержня?
14. По какой формуле вычисляются деформации при центральном растяжении (сжатии) ?
15. Какой знак принимает продольная деформация стержня при центральном растяжении-сжатии?
16. Что характеризует и в чем измеряется модуль упругости?
17. Как вычисляются смещения сечений стержня, подвергнутого центральному растяжению-сжатию?
18. Какие упрощения приняты при расчете стержневой системы, содержащей жесткие диски?
19. Как строится деформированная схема системы? Объяснить на своей задаче.

20. Какая связь существует между перемещениями точек абсолютно жесткого диска, закрепленного в одной точке шарнирной опорой?
21. Сколько реакций появляется в шарнирно неподвижной (цилиндрической) опоре?
22. Сколько реакций появляется в шарнирно подвижной опоре?
23. Как вычисляются реакции опор плоской стержневой системы?
24. Как записывается условие прочности при центральном растяжении-сжатии?
25. Как подбирается элемент по условию прочности для центрально сжатого и для центрально растянутого стержней?
26. Как выглядит сечение уголка равнополочного и неравнополочного?
27. Что характеризует номер уголка?
28. Какие еще выпускаются промышленностью прокатные профили и что характеризуют их номера?

#### 4.2. Контрольные попросы для защиты второй части контрольной работы

1. Что называется статическим моментом плоского сечения (фигуры)?
2. В чем измеряется статический момент плоского сечения?
3. Какие значения может принимать статический момент?
4. По каким формулам вычисляются площади элементарных фигур – прямоугольника, круга и треугольника?
5. Где располагается центр тяжести элементарных фигур – прямоугольника, круга и треугольника?
6. Как определяется статический момент элементарной геометрической фигуры – прямоугольника, круга, треугольника?
7. Как определяется статический момент плоского сечения сложной формы?
8. По какой формуле вычисляются координаты центра тяжести плоского сечения сложной формы?
9. На чем основана проверка положения сечения сложной формы?
10. Что называется осевым моментом инерции плоского сечения?
11. В чем измеряется осевой момент инерции плоского сечения?
12. Какие значения может принимать осевой момент инерции?
13. Чему равен осевой момент инерции прямоугольного сечения относительно центральной оси, параллельной одной из его сторон?
14. Чему равен осевой момент инерции прямоугольного сечения относительно оси, проходящей через его сторону?
15. Чему равен осевой момент инерции круглого сечения относительно его центральной оси?
16. Чему равен осевой момент инерции треугольного сечения относительно оси, проходящей через его основание?
17. Чему равен осевой момент инерции треугольного сечения относительно центральной оси, параллельной его основанию?

18. Что называется полярным моментом инерции сечения?
19. Какую размерность имеет полярный момент инерции плоского сечения?
20. Какие значения может принимать полярный момент инерции плоского сечения?
21. Какая связь существует между полярным и осевыми моментами инерции сечения?
22. По какой формуле вычисляется полярный момент инерции круглого сечения?
23. Что называется центробежным моментом инерции плоского сечения?
24. Какую размерность имеет центробежный момент инерции плоского сечения?
25. Какие значения может принимать центробежный момент инерции?
26. Какая зависимость существует между осевыми моментами инерции сечения относительно параллельных осей?
27. Как выражается центробежный момент инерции прямоугольного треугольника относительно осей, проведенных через его катеты?
28. Какие оси инерции называются главными и главными центральными осями инерции?
29. Какие моменты инерции называются главными?
30. Какие моменты инерции называются главными и главными центральными моментами инерции сечения?
31. Как определяется положение главных осей инерции?
32. Какая особенность существует для сечений имеющих оси (ось) симметрии?
33. Какая особенность существует для сечений, имеющих более чем две оси симметрии?
34. По какой формуле вычисляются значения главных моментов инерции?

#### 4.3. Контрольные вопросы для защиты третьей части контрольной работы

1. Какой вид сопротивления называется изгибом?
2. Что называется балкой?
3. Чем отличается чистый изгиб от поперечного изгиба?
4. Когда изгиб называется простым (плоским)?
5. Какие связи имеет шарнирно неподвижная цилиндрическая опора?
6. Как обозначается шарнирно неподвижная опора на расчетной схеме?
7. Какие связи имеет шарнирно подвижная опора?
8. Как обозначается шарнирно подвижная опора на расчетной схеме?
9. Какие связи имеет защемление (заделка)?
10. Как обозначается защемление (заделка) на расчетной схеме?
11. Как обозначается на расчетной схеме простая шарнирная балка?

12. Как обозначается на расчетной схеме балка защемленная?
13. Как обозначается на расчетной схеме балка с консолями?
14. Что называется пролетом балки?
15. Что называется консолью балки?
16. Какие внутренние силы появляются в поперечных сечениях балки при плоском поперечном изгибе?
17. Что называется поперечной силой?
18. Что называется изгибающим моментом?
19. Когда поперечная сила в балке считается положительной и когда отрицательной?
20. Когда изгибающий момент в балке считается положительным и когда отрицательным?
21. В какую сторону откладываются положительные и отрицательные ординаты поперечных сил при построении их эпюры в балках?
22. В какую сторону откладываются положительные и отрицательные ординаты изгибающих моментов при построении их эпюры в балках?
23. Десять правил анализа эпюр поперечных сил и изгибающих моментов в балках?
24. Что называется нейтральной осью балки?
25. По какой формуле вычисляется нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения балки?
26. Какая величина обозначается буквой  $u$  для вычисления нормальных напряжений в произвольной точке сечения при изгибе балки?
27. Какой вид имеет эпюра нормальных напряжений в поперечном сечении балки?
28. По какой формуле вычисляется касательное напряжение в произвольной точке поперечного сечения балки?
29. Как вычисляется статический момент отсеченной части балки и как получается отсеченная часть сечения?
30. Какую ширину сечения следует подставлять в формулу Журавского?
31. Какой момент инерции следует подставлять в формулу Журавского?
32. Какой вид имеет эпюра касательных напряжений в поперечном сечении балки (для случая прямоугольного и для случая двутаврового сечений)?
33. Как записывается условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе балки?
34. Что называется осевым моментом сопротивления сечения балки? Его размерность?
35. Как записывается условие прочности по касательным напряжениям при поперечном изгибе балки?
36. Статический момент какой части сечения подставляется в условие прочности по касательным напряжениям при поперечном изгибе балки?

37. Какую ширину сечения следует подставлять в условие прочности по касательным напряжениям при поперечном изгибе балки?
38. Какой момент инерции следует подставлять в условие прочности по касательным напряжениям при поперечном изгибе балки?
39. Как в общем виде выглядит универсальное уравнение упругой оси балки по методу начальных параметров?
40. Что обозначает первый и второй начальные параметры?
41. Из каких условий определяются начальные параметры?
42. Какие требования следует выполнить при использовании метода начальных параметров для определения прогибов и углов поворота сечений балки?
43. Как получить уравнение углов поворота сечений балки по универсальному уравнению упругой оси балки?
44. Какому правилу необходимо следовать при определении знака перед слагаемым в универсальном уравнении упругой оси балки?
45. Как записывается условие жесткости для балки?

## 5 ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

### 5.1 Модули курса

#### **Модуль 1 Общие понятия и определения**

Основные гипотезы: сплошность, однородность, изотропия, упругость, пластичность, ползучесть, малые перемещения. Объекты, изучаемые в курсе: брус, пластина, оболочка, массив. Реальная конструкция и ее расчетная схема (модель). Типы опор.

Внешние силовые воздействия (нагрузки) и их классификация: объемные и поверхностные, сосредоточенные и распределенные, постоянные и временные, статические и динамические, случайные и повторяющиеся. Температурные, кинематические и другие воздействия.

Деформации и перемещения. Деформации линейные и угловые, абсолютные и относительные. Перемещения линейные и угловые.

Метод сечений. Силы упругости (внутренние силы) и их составляющие. Напряжения: полное, нормальное и касательное. Понятие о напряженном состоянии в точке.

Зависимость напряжений от деформаций. Закон Гука. Модули упругости материалов.

Элементарные внутренние силы. Равнодействующая внутренних сил и ее составляющие (продольные и поперечные силы). Равнодействующий момент внутренних сил и его составляющие (крутящий и изгибающие моменты). Простые и сложные сопротивления элементов конструкций. Связь составляющих внутренних сил и напряжений.

Предпосылки при расчете конструкций: гипотезы о плоских сечениях, принцип суперпозиций, принцип начальных размеров, принцип Сен-Венана, допущение об отсутствии начальных внутренних сил и об отсутствии взаимного давления продольных волокон стержня.

#### **Модуль 2 Центральное растяжение (сжатие)**

Осевое (центральное) растяжение (сжатие). Продольные силы в поперечных сечениях, правило знаков для продольных сил. Эпюры продольных сил. Дифференциальные и интегральные зависимости между продольной силой в сечении и интенсивностью распределенной нагрузки. Элементы строительных конструкций, работающие на растяжение и сжатие: короткие колонны и стойки, стержневые системы, панели, раскосы и стойки ферм, ванты и др.

Особенности деформации центрально растянутого (сжатого) стержня. Равенство деформаций всех продольных волокон. Равенство напряжений во всех точках поперечного сечения стержня. Формула для определения нормальных напряжений в поперечном сечении стержня. Напряжения в наклонном сечении стержня. Эпюра напряжений.

Линейное (одноосное) напряженное состояние в точках растянутого (сжатого) стержня. Экстремальные значения нормальных напряжений.

Продольные и поперечные деформации стержня. Коэффициент Пуассона. Осевые перемещения (смещения) сечений стержня. Деформации участков стержня, закон Гука для центрального растяжения (сжатия). Жесткость сечения и жесткость участка стержня. Эпюры перемещений.

Полная и удельная работа, затраченная на деформирование участка стержня при растяжении (сжатии). Закон сохранения энергии. Потенциальная энергия упругой деформации: полная и удельная.

### **Модуль 3 Механические характеристики материалов**

Механические свойства конструкционных материалов: прочность, жесткость, твердость, выносливость и др. Виды испытания материалов.

Испытательные машины и предъявляемые к ним требования. Типы образцов для испытаний. Необходимые условия для проведения испытаний.

Испытание на растяжение. Машинная диаграмма испытания. Характерные точки и характерные участки на диаграмме. Понятие о текучести материала и об упрочнении при повторных нагружениях (наклепе). Закономерности разгрузки и повторного нагружения. Особенности деформирования и разрушения материала в пластическом и хрупком состояниях.

Физические основы пластической деформации разрушения. Понятие о вакансиях и дислокациях, линии скольжения, вектор Бюргерса. Теоретическая прочность. Эффект Баушингера. Понятие о трещиностойкости материала.

Основные механические характеристики материалов – пределы пропорциональности, упругости, пластичности, прочности. Характеристики пластичности. Нормативные и расчетные сопротивления материалов. Испытание на сжатие, особенности диаграмм.

Испытание на длительную прочность. Кривые ползучести и релаксации напряжений. Предел длительной прочности.

Влияние скорости нагружения, температуры образца, радиоактивного облучения, глубокого вакуума и других воздействий внешней среды на механические характеристики материалов.

### **Модуль 4 Методы расчета на прочность**

Основные требования к инженерным конструкциям: прочность, жесткость, надежность. Понятие о предельных состояниях, критерий их наступления в зависимости от свойств материалов, условия работы, назначения конструкций и др.

Основы методов расчета: по допускаемым напряжениям, по разрушающим нагрузкам и по предельным состояниям. Три вида задач при

расчетах на прочность: проверка прочности по расчетному условию, подбор сечений (проектный расчет), определение эксплуатационной нагрузки (несущей способности).

### **Модуль 5 Геометрические характеристики плоских сечений**

Назначение геометрических характеристик в курсе сопротивления материалов. Статические моменты, их свойства. Статические моменты сечений сложной формы. Определение центра тяжести сложного (составного) сечения. Осевые, полярный и центробежный моменты инерции сечений, их свойства. Зависимость осевых и центробежного моментов инерции при параллельном переносе и при повороте координатных осей. Главные оси и главные моменты инерции. Определение главных моментов инерции и положения главных осей инерции сечений сложной формы (составных сечений) аналитическим и графическим методами.

Моменты инерции сечений простых форм: прямоугольной, треугольной, круглой и кольцевой.

Понятие о радиусе инерции.

### **Модуль 6 Изгиб прямых стержней**

Классификация видов изгиба. Изгиб прямого бруса (балки) в главной плоскости инерции. Внешние силы (нагрузки), типы опор, реакции. Внутренние силы в поперечных сечениях балки при чистом и поперечном изгибах.

Определение поперечных сил и изгибающих моментов в сечениях балки. Правила знаков. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Способы построения эпюр и их практическое значение.

Дифференциальные зависимости между поперечной силой, изгибающим моментом и интенсивностью распределенной нагрузки. Использование указанных зависимостей для контроля построения эпюр (десять правил анализа).

Особенности деформирования участка балки с чистым изгибом. Нейтральный слой и нейтральная ось. Зависимость между изгибающим моментом и кривизной оси изогнутой балки. Жесткость сечения. Нормальные напряжения в точках сечения. Эпюра нормальных напряжений.

Особенности деформирования участка балки при поперечном изгибе. Условие распространения выводов для чистого изгиба на поперечный изгиб. Касательные напряжения для сплошных сечений (формула Журавского). Эпюра касательных напряжений в различных по форме сечениях.



Расчеты на прочность при изгибе. Осевой момент сопротивления сечения. Проверка прочности по нормальным напряжениям. Рациональные сечения балки.

Анализ напряженного состояния балки. Главные напряжения, их траектории. Использование теорий прочности и пластичности при проверке прочности балки.

Линейные и угловые перемещения балки в результате ее деформации. Связь углового и линейного перемещения. Дифференциальное уравнение оси изогнутой балки (упругой ось балки).

Интегрирование дифференциального уравнения для случая одного участка. Определение постоянных интегрирования. Правило знаков линейных и угловых перемещений. Условие жесткости.

Определение постоянных интегрирования при наличии нескольких участков на балке. Обобщенное уравнение упругой линии балки с начальными параметрами. Метод начальных параметров. Условия его применения.

### **Модуль 7 Напряженное и деформированное состояние в точке**

Напряженное состояние в точке деформированного тела. Компоненты напряжения. Тензор напряжений. Обозначения и правила знаков для компонент напряжения. Главные площадки и главные напряжения. Виды напряженного состояния: линейное (одноосное), плоское (двухосное), объемное (трехосное).

Напряжения на наклонной площадке в условиях плоского напряженного состояния. Определение главных напряжений и положения главных площадок.

Круги Мора для напряжений. Графическое определение величины и направления напряжений на произвольных площадках при плоском напряженном состоянии.

Понятие о деформированном состоянии. Компоненты деформации. Тензор деформаций. Обозначения и правила знаков для компонент деформации. Плоская и объемная деформации в точке тела. Главные оси деформации и главные деформации.

Обобщенный закон Гука. Закон Гука при плоском и объемном напряженных состояниях в точке.

Удельная потенциальная энергия деформации. Энергия изменения объема и энергия изменения формы.

### **Модуль 8 Чистый сдвиг**

Сдвиг (чистый сдвиг) как сопротивление простой деформации стержня. Внутренние силы при сдвиге. Примеры элементов конструкций сопротивляющихся сдвигу (срезу).

Анализ напряженного состояния при сдвиге – напряжения на наклонной площадке, положение главных площадок, значения главных

напряжений. Закон Гука при сдвиге. Модуль упругости второго рода (модуль сдвига). Жесткость сечения при сдвиге.

Зависимости между модулями упругости первого и второго рода.

Расчет заклепочных, болтовых и сварных соединений.

### **Модуль 9 Кручение**

Внутренние силы в сечениях скручиваемого стержня (вала). Дифференциальные зависимости, эпюры крутящих моментов. Учет передаваемой валом мощности и угловой скорости.

Особенности деформации цилиндрического стержня – допущение о прямолинейности радиуса и об отсутствии деформации поперечных сечений. Относительный угол закручивания. Формула для вычисления касательных напряжений в поперечном сечении стержня при кручении. Эпюра напряжений.

Определение угловых деформаций (углов закручивания). Закон Гука при кручении стержня. Жесткость стержня при кручении. Эпюры углов поворота.

Расчеты на прочность и жесткость стержня (вала) круглого (кольцевого) сечения. Полярный момент сопротивления.

Анализ напряженного состояния в стержне, подвергнутом кручению. Главные напряжения и их направления. Виды разрушения стержней при кручении, выполненных из различных материалов.

Особенности деформации при кручении стержней некруглого поперечного сечения. Основные результаты теории кручения стержней прямоугольного сечения.

### **Модуль 10 Теории прочности**

Назначение теорий прочности, понятие об эквивалентном напряжении и равноопасных напряженных состояниях. Хрупкое и вязкое разрушение. Критериальные условия наступления предельных состояний.

Теории прочности при хрупком состоянии материала. Гипотеза наибольших нормальных напряжений и соответствующее ей эквивалентное напряжение. Гипотеза наибольших относительных удлинений и соответствующее ей эквивалентное напряжение.

Предельные состояния пластичных материалов. Гипотеза наибольших касательных напряжений и соответствующее ей эквивалентное напряжение. Гипотеза энергии формоизменения и соответствующее ей эквивалентное напряжение.

Феноменологический критерий Мора для материалов с различными пределами прочности при растяжении и при сжатии. Эквивалентные напряжения.

## **Модуль 11 Статически неопределимые системы. Метод сравнения деформаций**

Статический и кинематический анализ простейших стержневых систем.

Расчет статически неопределимых стержневых систем при растяжении–сжатии и кручении. Внутренние силы и напряжения в статически неопределимых стержневых системах от температурных воздействий.

Способы регулирования напряжений в статически неопределимых системах, понятие о преднапряжении.

Основы метода сил при расчете простейших статически неопределимых балок.

## **Модуль 12 Определение перемещений энергетическим методом. Метод Максвелла-Мора**

Работа сил на перемещениях в упругой системе. Возможная работа. Теоремы о взаимности работ и о взаимности перемещений.

Определение перемещений методом Максвелла–Мора. Графоаналитические способы вычисления интегралов универсальной формулы Максвелла-Мора по правилу Верещагина. Расчет статически неопределимых систем методом сил. Канонические уравнения метода сил.

## **Модуль 13 Сложное сопротивление**

Общий случай действия сил на брус. Составляющие внутренних сил и их эпюры. Характерные случаи сложного сопротивления бруса. Общий случай сложения напряжений в поперечных сечениях стержня – нормальных алгебраически, касательных геометрически.

Сложный (косой) изгиб. Внутренние силы, напряжения и их эпюры. Положение нейтральной линии (оси), опасные точки в сечениях. Расчет на прочность и особенности подбора сечения. Плоский и пространственный косые изгибы. Определение линейных и угловых перемещений, направление полного прогиба.

Внецентренное действие продольных сил. Внутренние силы, напряжения, их эпюры. Положение нейтральной (нулевой) линии. Опасные точки в сечении. Расчетное условие, определение несущей способности. Ядро сечения. Его свойства.

Кручение с изгибом и кручение с растяжением (сжатием) цилиндрического стержня. Внутренние силы, нормальные, касательные и главные напряжения. Расчеты на прочность с применением теорий прочности.

#### **Модуль 14. Устойчивость сжатых стержней**

Понятие о формах равновесия сжатых стержней. Критические нагрузки, продольный изгиб. Примеры потери устойчивости элементов конструкции.

Формула Эйлера для критической силы упругой стадии материала. Учет опорных закреплений стержней, приведенная длина.

Критические напряжения, понятие о гибкости стержня, предельная гибкость. Пределы применимости формулы Эйлера.

Потеря устойчивости при напряжениях, превышающих предел пропорциональности. График зависимости критических напряжений от гибкости стержня. Эмпирическая формула Ясинского.

Практический метод расчета сжатых стержней на устойчивость. Использование коэффициента продольного изгиба.

#### **Модуль 15 Динамический расчет строительных конструкций**

Типы динамических нагрузок на элементы строительных конструкций и деталей машин. Понятие о динамическом коэффициенте. Расчетное условие на прочность и жесткость.

Подъем и опускание груза с ускорением. Принцип Даламбера.

Расчеты на удар. Формула динамического коэффициента, условие ее применимости. Случай продольного, поперечного и крутильного удара. Приближенный учет массы конструкции при ударных нагрузках.

#### **Модуль 16 Прочность при переменных напряжениях**

Понятие об усталостном разрушении элементов конструкций и деталей машин. Возникновение и развитие усталостного разрушения. Классификация режимов циклических нагрузок. Основные виды циклов напряжений, показатель асимметрии цикла.

Кривая усталости и ее построение.

Влияние асимметрии цикла напряжений на сопротивление усталости. Диаграмма предельных амплитуд и ее схематизация. Расчетные выражения.

Факторы, влияющие на сопротивление усталости: концентрация напряжений, масштабный эффект, состояние поверхности и др.

#### **Модуль 17 Учет пластических деформаций при расчета элементов**

Упрощенные диаграммы сопротивления упруго-пластических материалов. Условия применения этой диаграммы в различных задачах.

Развитие пластических деформаций в стержневых системах. Расчет балки с учетом пластических деформаций. Пластический момент сопротивления.

Понятие о приспособляемости.

## 5.2 Учебно-методическое обеспечение дисциплины

### Основная литература

1. Александров, А.В. Сопротивление материалов/А.В.Александров, В.Д.Потапов, Б.П.Державин; под ред. А.В.Александрова. – М.: Высш. шк., 1995. – 560 с.
2. Сопротивление материалов/А.Ф.Смирнов [и др.]; под общ. ред. А.Ф.Смирнова. – М.: Высш. шк., 1975. – 480 с.
3. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов/В.И.Феодосьев. – М.: Наука, 1986. – 560 с.
4. Сопротивление материалов/Г.С.Писаренко [и др.]; под общ. ред. Г.С.Писаренко. – Киев: Вища шк., 1973. – 672 с.

### Дополнительная литература

5. Сопротивление материалов (примеры и задачи), учебно-методическое пособие для студентов строительных специальностей/ М.К.Балыкин [и др.]. – Минск: БНТУ, 2008. – 365 с.
6. Справочник по сопротивлению материалов / Е.Ф.Винокуров [и др.]. – Минск: Наука и техника, 1988. – 464 с.
7. Вербицкая, О.Л. Сопротивление материалов. Пособие по выполнению лабораторных работ для студентов строительных специальностей. Часть 1./О.Л.Вербицкая, С.И.Зиневич, Л.И.Шевчук.– Минск, БНТУ, 2014. – 138 с.
8. Сопротивление материалов (лабораторный практикум) / М.К.Балыкин, В.А.Пенькевич, В.Н.Заяц, И.А.Голубев. Минск, 1999 – 158 с.
9. Заяц, В.Н. Сопротивление материалов / В.Н.Заяц, М.К.Балыкин, И.А.Голубев. – Минск: БГПА, 1998. – 367 с.

## 5.3 Информационное обеспечение дисциплины

Для успешного усвоения всех разделов дисциплины используются следующие средства:

1. Учебная литература по курсу;
2. Конспект лекций;
3. Плакаты по разделам сопротивления материалов;
4. Учебное компьютерное и программное обеспечение кафедры.