Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра высшей математики №2

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
для студентов энергетических специальностей БНТУ
(I семестр)

Учебно-методическое пособие
для студентов энергетических специальностей БНТУ

Электронный учебный материал

Минск 2013

УДК 512.64(035.5)+514.12(035.5)+517.1(035.5)

Автор: *П.Г. Ласый*

Рецензенты:

А.П. Шилин, доцент кафедры высшей математики и математической физики БГУ, кандидат физико-математических наук, доцент;

Н.И. Чепелев, доцент кафедры высшей математики №1 БНТУ, кандидат физико-математических наук, доцент

В пособии изложен теоретический материал по курсу математики, читаемом в первом семестре на энергетическом факультете БНТУ. В нем представлены следующие разделы: „Линейная алгебра“, „Векторная алгебра“, „Аналитическая геометрия“, „Математический анализ. Введение“, „Производная. Исследование функций с помощью производной“. Изложение хорошо проиллюстрировано примерами и графиками, построенными в среде компьютерной алгебры ***Mathematica***. Данное пособие может служить хорошим подспорьем как студентам при их подготовке к практическим занятиям и экзамену, так и преподавателям, читающим курс математики на энергетическом факультете БНТУ.

Белорусский национальный технический университет
Пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь
Тел. (017)292-82-73
E-mail: kafvm2@bntu.by
http://www.bntu.by/ef-vm2
Регистрационный № БНТУ/ЭФ41-2.2013

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ . . . 5
ГЛАВА I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА . . . 6
§1. Матрицы и операции над ними . . . 6
1. Основные определения . . . 6
2. Операции над матрицами . . . 7
§2. Определитель матрицы и его свойства . . . 9
1. Перестановки . . . 9
2. Определитель и его вычисление для матриц второго и третьего порядков . . . 10
3. Свойства определителя . . . 11
§3. Обратная матрица . . . 13
§4. Ранг матрицы и его вычисление . . . 14
§5. Системы линейных алгебраических уравнений . . . 16
1. Основные определения . . . 16
2. Решение невырожденных линейных систем . . . 17
3. Решение произвольных систем линейных уравнений.
Метод исключения неизвестных (метод Гаусса) . . . 18
4. Обращение невырожденной матрицы с помощью элементарных преобразований . . . 20
ГЛАВА II. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА . . . 22
§1. Векторы и линейные операции над ними . . . 22
§2. Базис. Декартова система координат . . . 24
§3. Скалярное произведение векторов . . . 27
§4. Векторное произведение векторов . . . 29
§5. Смешанное произведение векторов . . . 30
ГЛАВА III. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ . . . 33
§1. Плоскость в пространстве. Различные виды уравнения плоскости . . . 33
§2. Уравнения прямой в пространстве . . . 36
§3. Прямая на плоскости . . . 40
§4. Кривые второго порядка на плоскости . . . 43
1. Эллипс . . . 43
2. Гипербола . . . 44
3. Парабола . . . 46
4. Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду . . . 47
§5. Поверхности второго порядка в пространстве . . . 50
0. Поверхность вращения . . . 50
1. Эллипсоид . . . 50
2. Гиперболоиды . . . 51
3. Параболоиды . . . 52
4. Цилиндры второго порядка . . . 54
5. Конус второго порядка . . . 55
6. О приведении уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду . . . 57
ГЛАВА IV. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ВВЕДЕНИЕ . . . 58
§1. Свойства действительных чисел.
Основные подмножества множества действительных чисел . . . 58
§2. Числовые множества . . . 59
§3. Предел последовательности . . . 61
1. Основные определения. Примеры . . . 61
2. Свойства пределов последовательностей . . . 62
3. Число e . . . 64
4. О неопределенностях, возникающих при вычислении пределов . . . 65
§4. Предел функции . . . 66
1. Числовая функция и некоторые ее элементарные свойства . . . 66

2. Предел функции и его свойства . . . 67
3. Два важных в анализе предела . . . 71
4. Бесконечно малые (бесконечно большие) функции, их свойства и использование . . . 73
§5. Непрерывность функции . . . 75
1. Определение непрерывности функции. Общие свойства непрерывности . . . 75
2. Классификация точек разрыва функции . . . 76
3. Свойства функций, непрерывных на отрезке . . . 78
4. Непрерывность элементарных функций . . . 80
5. Равномерная непрерывность функции . . . 81
ГЛАВА V. ПРОИЗВОДНАЯ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ . . . 82
§1. Определение производной и дифференциала и их основные свойства . . . 82
§2. Дифференцирование элементарных функций. Производные функций, заданных неявно и параметрически. Производные и дифференциалы высших порядков . . . 87
1. Таблица производных основных элементарных функций . . . 87
2. Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически . . . 89
3. Производные и дифференциалы высших порядков . . . 91
§3. Теоремы о среднем для дифференцируемых функций . . . 93
§4. Правило Лопиталя . . . 95
§5. Формула Тейлора . . . 97
1. Полином Тейлора. Формулы Тейлора и Маклорена . . . 97
2. Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций . . . 99
§6. Исследование функции с помощью производной . . . 101
1. Монотонность. Точки экстремума . . . 101
2. Выпуклость функции. Точки перегиба . . . 105
3. Асимптоты функции. Алгоритм полного исследования функции . . . 107
§7. Векторная функция действительного аргумента . . . 109
§8. Компле́ксные числа и операции над ними. Разложение полинома на множители . . . 113
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА . . . 123

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий электронный конспект лекций соответствует программе по математике для студентов энергетических специальностей БНТУ, которая рассчитана на четыре семестра.

При написании этого учебника я, не претендуя на безупречность, стремился к полноте и строгости в формулировках и доказательствах утверждений (особенно это касается анализа). Полагаю, что по этой причине учебник не стал перегруженным, так как я старался выбирать короткие и содержательные доказательства, которые позволяют оставаться в пределах объема отведенных на курс учебных часов. Опущенные здесь громоздкие доказательства некоторых утверждений можно найти в учебниках, список которых помещен в конце данного пособия. Имеющиеся в каждом параграфе не всегда тривиальные примеры и достаточное количество графиков дополняют и поясняют изложение.

Текст лекций подготовлен мной с помощью программы набора и верстки сложных текстов ***MiKTEX*** (современная версия ***TEX***'а). Все имеющиеся в тексте графики являются точными, они построены в среде компьютерной алгебры ***Mathematica*** и затем инкапсулированы в текст как *PostScript*-файлы. Получившийся в итоге *dvi*-файл был для большей доступности конвертирован в *pdf*-формат. Если возникнут проблемы с печатью текста лекций, то я могу порекомендовать небольшую программу ***GSview*** для просмотра и печати *PostScript*-файлов, которую по ее названию несложно отыскать в сети *Internet*.

Я надеюсь, что этот учебник не окажется совершенно бесполезным как для студентов-энергетиков, так и для моих уважаемых коллег – преподавателей, читающих курс математики на энергетическом факультете БНТУ.

2013 г. *П. Ласый*

ГЛАВА I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

§1. Матрицы и операции над ними

1. Основные определения

В математике и ее приложениях наряду с числами часто бывает удобным использовать числовые таблицы, которые называются матрицами. Аппарат теории матриц эффективно применяется, например, при решении систем линейных уравнений, как мы скоро в этом убедимся. Перейдем к точным определениям.

Определение. *Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица действительных чисел, состоящая из m строк и n столбцов.*

Числа, составляющие матрицу, называются ее *элементами.* Для доступа к элементам матрицы используются два индекса: первый указывает на номер строки, второй – на номер столбца, на пересечении которых расположен данный элемент.

Обозначаются матрицы, как правило, прописными латинскими буквами $A, B, C, ...$, иногда указывается размерность, например, $A_{m\times n}$. В развернутой форме матрица записывается как таблица:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Более компактно с указанием элементов матрица записывается в виде: $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

Матрицы A и B одинаковой размерности считаются *равными*, если все элементы одной матрицы равны соответствующим элементам другой матрицы.

Рассмотрим некоторые специальные виды матриц.

Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется *нуль-матрицей* и обозначается через O.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется *квадратной.* Размерность квадратной матрицы часто называют ее *порядком.*

Числа $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ в квадратной матрице $A = (a_{ij})_{n\times n}$ называются *диагональными элементами.* Совокупность диагональных элементов составляет *главную диагональ* квадратной матрицы.

Квадратная матрица, диагональные элементы которой равны единице, а все остальные – нулю, называется *единичной* матрицей и обозначается через E_n, где n – порядок матрицы. Таким образом,

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется *треугольной*, если все ее элементы, расположенные ниже (выше) главной диагонали, равны нулю. Например, треугольной является матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица называется *трапециевидной*, если она представляет собой следующую таблицу:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2,r+1} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Операции над матрицами

Введем сначала *линейные* операции над матрицами.

Произведением действительного числа λ на матрицу $A = (a_{ij})_{m\times n}$ называется матрица

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m\times n}.$$

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})_{m\times n}$ и $B = (b_{ij})_{m\times n}$ одинаковой размерности называется матрица

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}.$$

Таким образом, элементы суммы матриц равны суммам соответствующих элементов данных матриц.

Разность матриц A и B можно определить как $A - B = A + (-1)B$.

Свойства линейных операций над матрицами *аналогичны* соответствующим свойствам действительных чисел.

Пример. *Даны матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & 4 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ -4 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $-2A + 3B$.

Решение.

$$-2A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 & 8 \\ -2 & 6 & -8 & 4 \end{pmatrix},\ 3B = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 3 & 15 \\ -12 & -3 & -9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$-2A + 3B = \begin{pmatrix} 13 & -12 & 3 & 23 \\ -14 & 3 & -17 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определим теперь операцию умножения матриц. Рассмотрим сначала матрицу-строку и матрицу-столбец с одинаковым числом элементов, т. е.

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Произведением этих строки и столбца называется число[1]

$$ab = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = \sum_{k=1}^{n} a_kb_k.$$

Рассмотрим так называемые согласованные матрицы $A = (a_{ij})_{m\times n}$ и $B = (b_{ij})_{n\times p}$, у первой из которых число столбцов равно числу строк второй матрицы. Обозначим строку с номером i матрицы A через a_{i*}, а столбец с номером j матрицы B через b_{*j}.

Произведением данных согласованных матриц A и B называется матрица

$$AB = (a_{i*}b_{*j})_{m\times p}$$

[1]Часто для суммы n чисел $c_1 + c_2 + \ldots + c_n$ мы будем использовать короткое обозначение $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k$.

размерности $m \times p$, элементы которой равны произведениям строк матрицы A на столбцы матрицы B.

Пример. *Найти произведение согласованных матриц*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \\ 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем произведения строк матрицы A на столбцы матрицы B.

$a_{1*}b_{*1} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) = 4;\ a_{1*}b_{*2} = 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 = -7;\ a_{1*}b_{*3} = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 4 = -5;$
$a_{2*}b_{*1} = -3 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) = -6;\ a_{2*}b_{*2} = -3 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 = 3;\ a_{2*}b_{*3} = -3 \cdot 3 + 0 \cdot 4 = -9;$
$a_{3*}b_{*1} = 4 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 3;\ a_{3*}b_{*2} = 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 3 = 11;\ a_{3*}b_{*3} = 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 32;$
$a_{4*}b_{*1} = -2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = -5;\ a_{4*}b_{*2} = -2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 5;\ a_{4*}b_{*3} = -2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = -2.$

Осталось записать искомое произведение матриц:

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -5 \\ -6 & 3 & -9 \\ 3 & 11 & 32 \\ -5 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Отметим некоторые свойства произведения матриц[1].

1) $A\mathrm{O} = \mathrm{O};\ \mathrm{O}A = \mathrm{O};$
2) $AE_n = A;\ E_mA = A;$
3) $(A+B)C = AC + BC;\ A(B+C) = AB + AC;$
4) $(AB)C = A(BC).$

Первые три сразу следуют из определения произведения матриц. Докажем последнее свойство. Пусть заданы три матрицы $A = (a_{ij})_{m\times n},\ B = (b_{ij})_{n\times p},\ C = (c_{ij})_{p\times q}$. Элемент d_{ij} произведения $(AB)C$ равен произведению строки с номером i матрицы AB на столбец с номером j матрицы C :

$$d_{ij} = (a_{i*}B)\, c_{*j} = \sum_{k=1}^{p} (a_{i*}b_{*k})c_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk} \right) c_{kj}.$$

Поменяв порядок суммирования в последней двойной сумме, получим:

$$d_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{lk}c_{kj} \right) = \sum_{l=1}^{n} a_{il}(b_{l*}c_{*j}) = a_{i*}\,(Bc_{*j})\,,$$

что представляет собой произведение строки с номером i матрицы A на столбец с номером j матрицы BC. Тем самым свойство 4 доказано.

Заметим, что в отличие от чисел матрицы, вообще говоря, *не коммутируют* (не перестановочны). Приведем соответствующий

Контрпример. *Доказать, что матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

не коммутируют.

Действительно,

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для этих матриц $AB \neq BA$.

Замечание. Пользуясь случаем, введем здесь определение *n-мерного векторного пространства $\mathbf{R}^n$, как множества упорядоченных совокупностей n действительных чисел.* Каждую

[1] Мы предполагаем, что все матрицы в свойствах согласованы.

такую совокупность мы будем обозначать через

$$(x_1, x_1, \ldots, x_n) \text{ или } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

и называть *n-мерным вектором.*

Очевидно, каждый вектор мы можем отождествить с соответствующей матрицей-строкой или матрицей-столбцом, поэтому на векторы автоматически переносятся *линейные операции*, которые мы определили выше для матриц.

§2. Определитель матрицы и его свойства

Познакомимся теперь с такой важнейшей характеристикой матрицы, как определитель. Введем предварительно понятие перестановки и изучим некоторые ее свойства.

1. Перестановки

Перестановкой n натуральных чисел $1, 2, ..., n$ называется строка

$$(i_1, i_2, \ldots, i_n), \tag{1}$$

содержащая все эти числа.

Первым элементом перестановки может быть любое из чисел $1, 2, ..., n$, вторым – любое из оставшихся $n-1$ чисел и так далее, следовательно, число различных перестановок данных чисел равно $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ (читается n-факториал).

Два числа в перестановке находятся *в инверсии*, если большее из них имеет меньший номер. Число всех инверсий в перестановке (1) мы обозначим через $\sigma(i_1, i_2, \ldots, i_n)$.

В связи с этим перестановка (1) называется *четной*, если в ней число $\sigma(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ четно и *нечетной* – в противном случае.

Отметим два свойства перестановок, которые мы будем использовать ниже.

Лемма 1. *Характер четности перестановки изменится на противоположный, если в ней поменять местами какие-нибудь два элемента.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим сначала, что меняются местами рядом стоящие элементы k и l перестановки. В этом случае число инверсий в новой перестановке изменится на единицу, а именно, увеличится на единицу, если k и l не находились в инверсии, или настолько же уменьшится, если они находились в инверсии. Таким образом, характер четности перестановки изменится на противоположный. Рассмотрим теперь случай, когда числа k и l разделяют s других элементов перестановки. Тогда поменять местами данные элементы мы можем последовательно переставляя число k с s промежуточными элементами, а затем переставляя число l в обратном порядке с элементом k и всеми s промежуточными. В результате мы выполним $2s+1$ обменов рядом стоящих элементов и, таким образом, характер четности исходной перестановки изменится нечетное число раз и, следовательно, он изменится на противоположный. Л е м м а д о к а з а н а.

Из этой леммы сразу же следует, что *количество четных перестановок равно количеству нечетных.* В самом деле, поменяв местами любые два элемента в каждой из p четных перестановок, мы получим p нечетных и, следовательно, $p \le q$, где q – количество нечетных перестановок. Аналогично мы можем убедиться в справедливости неравенства $p \ge q$. Из этих неравенств и следует, что $p = q$.

Лемма 2. *Пусть*

$$(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}) \tag{2}$$

– перестановка чисел $1, 2, \ldots, n-1$. Зафиксируем число j из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ и вставим его в перестановку (2) на место с номером i, сдвинув вправо на одну позицию все ее элементы с номерами $i, i+1, \ldots, n-1$ и увеличив на единицу все не меньшие, чем j элементы этой перестановки. В результате получим перестановку

$$(j_1, j_2, \ldots, j_n) \tag{3}$$

чисел $1, 2, \ldots, n$. *Четности перестановок* (2) *и* (3) *связаны равенством*

$$(-1)^{\sigma(j_1, j_2, \ldots, j_n)} = (-1)^{i+j+\sigma(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1})}.$$

Действительно, предположим сначала, что элемент j в перестановке (3) стоит на первом месте. Тогда, очевидно, количество инверсий в этой перестановке равно $\sigma(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}) + j - 1$. Перегоним теперь число j на место с номером i, последовательно обменивая его со следующими $i-1$ элементами. По лемме 1 характер четности перестановки изменится $i-1$ раз и, значит,

$$(-1)^{\sigma(j_1, j_2, \ldots, j_n)} = (-1)^{i-1}(-1)^{\sigma(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1})+j-1} = (-1)^{i+j+\sigma(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1})}.$$

2. Определитель и его вычисление для матриц второго и третьего порядков

Рассмотрим квадратную матрицу порядка n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Составим произведение элементов данной матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Упорядочив элементы этого произведения по возрастанию номеров строк, мы можем записать его в виде:

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n}.$$

Номера столбцов в записанном произведении образуют перестановку чисел $1, 2, \ldots, n$.

Определение. *Число, равное сумме всех* $n!$ *произведений*

$$(-1)^{\sigma(i_1, i_2, \ldots, i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n}$$

называется определителем данной квадратной матрицы A (*определителем* n*-го порядка*) *и обозначается через* $|A|$ *или* $\det A$. *В развернутой форме определитель записывается как*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Найдем пользуясь этим определением выражение для определителей второго и третьего порядков.

Так как $\sigma(1, 2) = 0,\ \sigma(2, 1) = 1$, то

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

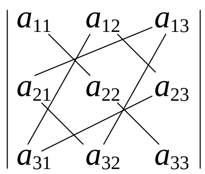
Аналогично, для вычисления определителя третьего порядка найдем число инверсий в каждой из перестановок чисел $1, 2, 3$:

$$\sigma(1, 2, 3) = 0,\ \sigma(2, 3, 1) = 2,\ \sigma(3, 1, 2) = 2,$$
$$\sigma(3, 2, 1) = 3,\ \sigma(2, 1, 3) = 1,\ \sigma(1, 3, 2) = 1.$$

Тогда

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Для упрощения вычисления определителя третьего порядка можно использовать *правило треугольников*, согласно которому со знаком " + " следует брать произведения по схеме



а со знаком " $-$ " – по схеме

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Пример. *Вычислить определитель*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Воспользуемся правилом треугольников: $\Delta = -2 + 6 - 6 - 9 - 8 - 1 = -20$.

3. Свойства определителя

1) *Если какая-либо строка (столбец) определителя состоит из нулей, то и определитель равен нулю.*

2) *Общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) можно выносить за знак определителя.*

3) *Если все элементы какой-нибудь строки (столбца) определителя равны суммам двух слагаемых, то данный определитель равен сумме двух определителей, в которых в указанной строке (столбце) стоят, соответственно, первые и вторые слагаемые, а остальные элементы обоих определителей такие же, как и в исходном определителе.*

Эти свойства напрямую следуют из определения определителя.

4) *Если переставить две какие-нибудь строки (столбца) определителя, то он поменяет знак на противоположный.*

Действительно, переставим, например, две строки определителя. В результате получим определитель, каждое слагаемое которого отличается знаком от соответствующего слагаемого исходного определителя, так как по доказанной в пункте 1 лемме 1 четность соответствующей перестановки вторых индексов изменится на противоположную.

5) *Если в определителе совпадают (пропорциональны) две какие-нибудь строки (столбца), то этот определитель равен нулю.*

В самом деле, если в определителе совпадают две какие-нибудь строки (столбца), то, с одной стороны, определитель при этом не изменится, а, с другой стороны, по предыдущему свойству его знак поменяется на противоположный. Таким образом, $|A| = -|A|$ и, стало быть, $|A| = 0$. Если же в определителе имеются две пропорциональные строки (столбца), то после вынесения за его знак по свойству 2) общего множителя элементов строки (столбца), мы получим определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами), который равен нулю.

6) *Определитель не изменится, если к элементам какой-нибудь строки (столбца) добавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и тоже число.*

Это следует из свойств 3) и 5), так как в этом случае полученный определитель можно представить в виде суммы двух определителей, один из которых равен исходному, а в другом имеются пропорциональные строки (столбцы), и поэтому он равен нулю.

Прежде чем сформулировать очередное свойство, введем понятие алгебраического дополнения к элементу матрицы.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} квадратной матрицы $A = (a_{ij})_{n\times n}$ мы будем называть число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij},$$

где Δ_{ij} – определитель порядка $n-1$, полученный из определителя этой матрицы вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

7) *Разложение определителя по элементам строки (столбца).*
Определитель матрицы равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения. Таким образом,

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

или

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}.$$

Докажем, например, первую из этих формул. Убедимся в том, что правая часть данной формулы содержит все слагаемые определителя матрицы A. Выражение

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

содержит $n(n-1)! = n!$ различных произведений элементов определителя матрицы A, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Осталось проверить соответствие знаков. Рассмотрим произвольное произведение

$$a_{ij}A_{ij} = (-1)^{i+j}a_{ij}\Delta_{ij}.$$

Каждое слагаемое определителя Δ_{ij} представляет собой произведение элементов данной матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, исключая строку с номером i и столбец с номером j. Знак этого произведения определяется четностью перестановки

$$(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1})$$

чисел $1, 2, \ldots, n-1$. Умножив данное произведение на число $(-1)^{i+j}a_{ij}$ и поставив множитель a_{ij} на место с номером i, мы получим соответствующее произведение определителя матрицы A с перестановкой вторых индексов $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ и знаком $(-1)^{i+j+\sigma(i_1,i_2,\ldots,i_{n-1})}$, который по лемме 2 пункта 1 соответствует четности перестановки $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$.

Таким образом, вычисление определителя n-го порядка сводится к вычислению n определителей $(n-1)$-го порядка.

Пример 1. *Вычислить определитель*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Разложим этот определитель по элементам второй строки:

$$\Delta = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 0 = -11 + 10 = -1.$$

Пример 2. *Вычислить определитель треугольной матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Разлагая этот и следующие определители по первому столбцу, получим:

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \ldots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \ldots & a_{4n} \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn},$$

таким образом, определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

8) *Сумма произведений n действительных чисел на алгебраические дополнения к элементам какой-нибудь строки (столбца) равна определителю, в котором в указанной строке (столбце) расположены данные числа, а все остальные элементы совпадают с соответствующими элементами исходного определителя.*

Это свойство является прямым следствием предыдущего.

9) *Сумма произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) на алгебраические дополнения к элементам какой-нибудь другой строки (столбца) определителя равна нулю.*

Действительно, по предыдущему свойству эта сумма произведений равна определителю с двумя совпадающими строками (столбцами), а такой определитель по свойству 5) равен нулю.

10) *Определитель произведения матриц равен произведению определителей этих матриц, т. е.*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Достаточно громоздкое доказательство этого свойства мы приводить не будем.

§3. Обратная матрица

Определение. *Обратной к квадратной матрице $A = (a_{ij})_{n\times n}$ называется обозначаемая через A^{-1} матрица, для которой $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E – единичная матрица.*

Из этого определения следует, что матрица A^{-1} также является квадратной той же размерности, что и матрица A.

Отметим некоторые свойства обратной матрицы, следующие из ее определения.

a) *У матрицы не может существовать больше одной обратной.*

Действительно, пусть для матрицы A имеются две обратные A_1^{-1} и A_2^{-1}. Тогда

$$AA_1^{-1} = AA_2^{-1} = E.$$

Умножив обе части первого равенства слева на матрицу A_1^{-1}, получим $A_1^{-1} = A_2^{-1}$.

b) $(A^{-1})^{-1} = A$.

c) *Если для квадратных матриц A и B одного порядка существуют обратные, то и у матрицы AB также существует обратная, причем*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Выясним условия, при которых обратная матрица существует.

Теорема (критерий существования обратной матрицы). *Для того, чтобы существовала матрица, обратная данной, необходимо и достаточно, чтобы данная матрица была невырожденной, то есть чтобы ее определитель был не равен нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала *необходимость* условия теоремы. Пусть для матрицы A существует обратная матрица. Тогда из равенства $AA^{-1} = E$, воспользовавшись свойством 10) определителя произведения матриц, получаем: $\det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1$. Следовательно, $\det A \neq 0$.

Убедимся теперь в том, что условие теоремы является и *достаточным.* Предположим, что матрица A является невырожденной. Проверим, что обратной к данной является матрица со следующей структурой[1]:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ A_{1n} & a_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Действительно, если $AA^{-1} = (b_{ij})_{n\times n}$, то

$$b_{ij} = \frac{1}{|A|}\left(a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn}\right),$$

откуда, воспользовавшись свойствами 7) и 9) определителя (§2, пункт 3), заключаем:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

т. е. $AA^{-1} = E$. Аналогично убеждаемся, что $A^{-1}A = E$. Т е о р е м а д о к а з а н а.

[1]В строках указанной ниже матрицы записаны алгебраические дополнения к элементам соответствующих столбцов.

Пример. *Найти обратную к матрице*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем сначала определитель матрицы: $|A| = -1 + 12 - 9 - 6 = -4 \neq 0$. Обратная матрица существует. Находим алгебраические дополнения к элементам данной матрицы:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 11; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10;$$
$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -6;$$
$$A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -2.$$

Следовательно,

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 11 & -3 & -10 \\ 7 & -3 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Обратную матрицу можно использовать при решении линейных матричных уравнений. Пусть, например, требуется решить матричное уравнение

$$AX = B$$

с известными матрицами A и B, причем матрица A является невырожденной. Умножая обе части данного матричного уравнения слева на обратную матрицу A^{-1}, получим:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Longleftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Longleftrightarrow EX = A^{-1}B \Longleftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Аналогично, решением матричного уравнения $XA = B$ является матрица $X = BA^{-1}$, а решением матричного уравнения $AXB = C$ с невырожденными матрицами A и B является матрица $X = A^{-1}CB^{-1}$.

§4. Ранг матрицы и его вычисление

Рассмотрим произвольную матрицу $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

Минором порядка k матрицы A называется определитель, стоящий на пересечении выбранных k строк и k столбцов данной матрицы.

Определение. *Рангом матрицы A называется максимальный из порядков ненулевых миноров этой матрицы. Обозначается ранг через* $\operatorname{rang} A$.

Естественно считать, что $\operatorname{rang} \mathrm{O} = 0$. Очевидно также, что $0 \leq \operatorname{rang} A \leq \min\{m, n\}$.

Пример 1. *Найти ранг матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -2 & 5 \\ -4 & 6 & -2 & 6 & -1 \\ -6 & 9 & -3 & 8 & -6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим минор, находящийся на пересечении первых двух строк и первого и четвертого столбцов:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Все же миноры третьего порядка этой матрицы равны нулю, так как третья строка равна разности второй и первой строк. Следовательно, $\operatorname{rang} A = 2$.

Как видно из определения, вычисление ранга матрицы через миноры является весьма трудоемкой задачей, особенно для матриц большой размерности. Значительно сократить объем вычислений позволяет другой метод, основанный на элементарных преобразованиях матрицы.

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие операции над ее строками или столбцами:

1) *перестановка двух строк (столбцов) матрицы*;

2) *умножение строки (столбца) на ненулевое действительное число*;

3) *добавление к строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на действительное число.*

Тот факт, что матрица B получена из матрицы A с помощью одного или нескольких последовательно выполненных элементарных преобразований, мы будем обозначать как $A \longrightarrow B$.

Теорема. *Ранг матрицы не меняется при ее элементарных преобразованиях.*

Доказательство этого утверждения для первого и второго элементарных преобразований следует из того, что по свойствам 2) и 4) определителя (§2, пункт 3) миноры исходной матрицы могут отличаться от миноров преобразованной разве лишь знаком или ненулевым множителем, что, естественно, не отражается на ранге матрицы. Пусть теперь матрица A' получена из матрицы A с помощью третьего элементарного преобразования, для определенности будем считать, что к строке с номером i добавлена строка с номером j, умноженная на действительное число λ. Возьмем в матрице A' минор M порядка $r > \operatorname{rang} A$ (если такого минора нет, то $\operatorname{rang} A' \leq \operatorname{rang} A$). Этот минор либо совпадает с минором матрицы A, либо по свойствам 3), 2), 4) определителя он равен сумме двух миноров матрицы A с действительными коэффициентами, один из которых равен 1, а второй λ или $-\lambda$. В обоих случаях по определению ранга матрицы минор M равен 0. Следовательно, $\operatorname{rang} A' \leq \operatorname{rang} A$. Точно также мы можем убедиться в том, что $\operatorname{rang} A \leq \operatorname{rang} A'$, так как матрица A может быть получена из матрицы A' вычитанием из ее строки с номером i строки с номером j, умноженной на число λ. Таким образом, и для третьего элементарного преобразования $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A'$, что и завершает доказательство теоремы.

Из этой теоремы следует, что для вычисления ранга матрицы достаточно привести ее с помощью элементарных преобразований к более простой – трапециевидной, ранг которой легко находится. Изложим соответствующий *алгоритм*, который мы будем использовать ниже при решении систем линейных алгебраических уравнений.

Итак, рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если $A = O$, то $\operatorname{rang} A = 0$. Пусть теперь $A \neq O$. Мы всегда можем считать, что $a_{11} \neq 0$, так как в противном случае этого всегда можно добиться перестановкой соответствующих строк и столбцов. Превратим теперь в нули все элементы первого столбца, расположенные ниже первого диагонального элемента a_{11}. Для этого из каждой строки с номером[1] $i = \overline{2, m}$ данной матрицы вычтем первую строку, умноженную на число $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$. В результате получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ 0 & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Повторяя теперь все рассуждения из предыдущего абзаца применительно к полученной матрице с вычеркнутыми из нее первой строкой и первым столбцом и всем последующим матрицам, после конечного числа шагов, не превышающего $m - 1$, мы придем к трапециевидной матрице

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & b_{2,r+1} & \dots & b_{2n} \\ . & . & \dots & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \dots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

[1]Здесь и в дальнейшем под записью $p = \overline{1, q}$ мы подразумеваем, что величина p последовательно принимает значения $1, 2, \dots, q$.

с r ненулевыми диагональными элементами $a_{11}, b_{22}, \ldots, c_{rr}$.

Ранг матрицы A_1 равен r, так как минор этой матрицы, расположенный первых ее r строках и столбцах равен $a_{11}b_{22} \cdot \ldots \cdot c_{rr} \neq 0$, а все миноры более высокого порядка содержат нулевую строку и потому равны нулю. Так как матрица A_1 получена из матрицы A с помощью элементарных преобразований, то $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A_1 = r$.

Замечание. При практическом использовании приведенного алгоритма матрицу бывает иногда удобно приводить к форме, которая отличается от трапециевидной порядком следования столбцов.

Пример 2. *Найти ранг матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -3 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Приведем матрицу к трапециевидной с помощью элементарных преобразований:

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & -3 \\ -5 & -14 & -19 & 0 & 14 \\ -1 & -10 & -10 & 0 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & -3 \\ -5 & -14 & -19 & 0 & 14 \\ 0 & -36 & -31 & 0 & 26 \end{pmatrix}.$$

Здесь вторая матрица получена из исходной вычитанием в ней из второй и третьей строк первой, умноженной на 4 и 3 соответственно, а затем вторая матрица преобразована в третью вычитанием из последней строки, умноженной на 5, второй строки. Перегнав в последней матрице четвертый столбец на первое место, получим трапециевидную матрицу с тремя ненулевыми элементами на диагонали. Следовательно, $\operatorname{rang} A = 3$.

§5. Системы линейных алгебраических уравнений

1. Основные определения

Определение. *Системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными (или, короче, линейной системой) называется система вида*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где действительные числа a_{ij}, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ – коэффициенты системы, b_i, $i = \overline{1,m}$ – правые части уравнений системы, x_j, $j = \overline{1,n}$ – неизвестные.

Числа $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n$, которые при подстановке их в систему обращают каждое из уравнений в верное равенство, составляют *решение* линейной системы. Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется *совместной*, иначе – *несовместной*.

Представим линейную систему в компактной *матричной* форме. Для этого введем следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – основная матрица системы,}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ – столбец неизвестных, } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ – столбец правых частей.}$$

В этих обозначениях данная линейная система принимает вид:

$$AX = B.$$

Линейная система с нулевыми правыми частями, т. е. система $AX = \mathrm{O}$, называется *однородной.*

2. Решение невырожденных линейных систем

Рассмотрим линейную систему n уравнений с n неизвестными и невырожденной основной матрицей. Такая система называется *невырожденной.*

Рассмотрим два метода решения невырожденных систем.

a) ***Метод обратной матрицы.***

Так как определитель основной матрицы невырожденной системы линейных уравнений отличен от нуля, то решение этой системы мы можем найти как решение матричного линейного уравнения (§3)

$$AX = B$$

по формуле

$$X = A^{-1}B.$$

Полученное таким образом решение является единственным. Действительно, пусть X_1 и X_2 – два решения системы. Тогда $AX_1 = AX_2 = B$ и, следовательно, после умножения слева обеих частей первого из этих равенств на матрицу A^{-1}, получим, что $X_1 = X_2$.

Пример 1. *Решить систему линейных уравнений*:

$$\begin{cases} \phantom{-2x_1 + {}} -x_2 + 3x_3 = 11, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = -5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14. \end{cases}$$

Решение. Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

В §3 был вычислен определитель матрицы данной системы $|A| = -4 \neq 0$, следовательно, она является невырожденной. Там же была найдена и обратная матрица:

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 11 & -3 & -10 \\ 7 & -3 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 11 & -3 & -10 \\ 7 & -3 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$.

b) ***Формулы Крамера.***

Воспользовавшись представлением обратной матрицы через алгебраические дополнения, получим:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ . & . & \ldots & . \\ A_{1n} & a_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

следовательно,

$$x_j = \frac{1}{|A|}\left(b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \ldots + b_nA_{nj}\right), \; j = \overline{1, n}.$$

По свойству 8) определителя выражение в скобках равно

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

т. е. определителю, который может быть получен из определителя $\Delta = |A|$ основной матрицы системы заменой в нем столбца с номером j столбцом правых частей. Таким образом, решение данной невырожденной системы линейных уравнений может быть найдено по следующим *формулам Крамера*:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},\ j = \overline{1, n}.$$

Пример 2. *Решить систему линейных уравнений*:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Для этой системы $\Delta = -20$ (§2, пункт 2), следовательно, она является невырожденной. Кроме того,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -7,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -11,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5.$$

Тогда по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{7}{20},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{11}{20},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{1}{4}.$$

3. Решение произвольных систем линейных уравнений. Метод исключения неизвестных (метод Гаусса)

Рассмотрим линейную систему общего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Определим, как и для матриц, *элементарные преобразования* над уравнениями линейной системы. Таковыми являются:

1) *перестановка двух уравнений системы*;

2) *умножение обеих частей уравнения на отличное от нуля действительное число*;

3) *добавление к обеим частям уравнения соответствующих частей другого уравнения, умноженных на действительное число.*

Все эти преобразования, очевидно, обратимы и поэтому их результатом является система, *эквивалентная* исходной, т. е. система, множество решений которой, совпадает с множеством решений данной системы.

Упростим теперь систему, последовательно исключая неизвестные из ее уравнений с помощью элементарных преобразований. Для этого, *расширенную* матрицу системы

$$\widetilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & \dots & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

с помощью элементарных преобразований над ее строками приведем к трапециевидной форме с помощью алгоритма, изложенного в §4. В результате получим матрицу

$$\widetilde{A}_1 = \left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & b_{2,r+1} & \dots & b_{2n} & c_2 \\ . & . & \dots & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & \dots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \dots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right),$$

где диагональные элементы $a_{11}, b_{22}, \dots, c_{rr}$ отличны от нуля. Линейная система, для которой матрица $\widetilde{A}_1$ является расширенной, имеет вид:

$$\left\{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ b_{22}x_2 + \dots + b_{2r}x_r + b_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + b_{2n}x_n &= c_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & \quad . \\ c_{rr}x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{rn}x_n &= d_r, \\ 0 &= d_{r+1}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Очевидно, последняя система получена из исходной с помощью тех же элементарных преобразований, какими матрица $\widetilde{A}$ приведена к трапециевидной $\widetilde{A}_1$ и, следовательно, эта упрощенная система эквивалентна данной.

Рассмотрим два случая, которые здесь возможны.

a) $d_{r+1} \neq 0$. Тогда система (2), а, значит, и система (1) *несовместны.*

b) $d_{r+1} = 0$. В этом случае имеем *совместную* систему

$$\left\{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ b_{22}x_2 + \dots + b_{2r}x_r + b_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + b_{2n}x_n &= c_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & \quad . \\ c_{rr}x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{rn}x_n &= d_r. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Здесь, в свою очередь, представляются две возможности.

b_1) $r < n$. Из последнего, самого короткого, уравнения этой системы мы находим неизвестное x_r, которое линейно выражается через неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$, называемые *свободными.* Далее из предпоследнего уравнения системы (3), подставив в него полученное выражение для неизвестного x_r, мы определяем неизвестное x_{r-1}. Продолжая этот процесс, мы найдем неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_r$, которые называются *базисными*, через свободные неизвестные. На свободные неизвестные никаких ограничений нет, поэтому подставляя их произвольные значения $x_{r+1} = c_1, x_{r+2} = c_2, \dots, x_n = c_{n-r}$ в полученные выражения для базисных неизвестных, мы найдем тем самым множество решений системы (1). Таким образом, в этом случае система имеет *бесконечное множество* решений.

b_2) $r = n$. Здесь свободных неизвестных нет и система имеет *единственное решение*, так как все неизвестные однозначно находятся таким же образом, как и в предыдущем пункте.

Приведенный алгоритм метода исключения неизвестных позволяет сформулировать *критерий совместности* линейной системы.

Теорема Кронекера. *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы.*

Доказательство немедленно следует из вида матрицы $\widetilde{A}_1$, к которой приводится расширенная матрица системы. Совместность имеет место и том и только в том случае, когда $d_{r+1} = 0$, что равносильно тому, что $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \widetilde{A}_1 = \operatorname{rang} \widetilde{A}$.

Из теоремы Кронекера следует, что если $\operatorname{rang} A < \operatorname{rang} \widetilde{A}$, то система линейных уравнений (1) *несовместна*, если же $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \widetilde{A} = n$, то система имеет *единственное* решение и, наконец, если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \widetilde{A} < n$, то множество решений данной линейной системы *бесконечно*.

Пример. *Решить систему линейных уравнений*:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1, \\ \ \ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 2, \\ \ \ 3x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases}$$

Решение. Приведем расширенную матрицу этой системы к трапециевидной с помощью элементарных преобразований над ее строками:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -2 & -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -3 & 2 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} -2 & -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right).$$

Вторая матрица получена из первой вычитанием из третьей строки второй и добавлением ко второй строке, умноженной на 2, первой строки. С точностью до перестановки столбцов, мы получили трапециевидную матрицу. Здесь, очевидно, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \widetilde{A}$, поэтому система совместна. Осталось решить упрощенную систему

$$\begin{cases} -2x_1 \ -x_2 +2x_3 \ +x_4 +3x_5 = 1, \\ \ \ 4x_1 +3x_2 \qquad\quad -x_4 \ \ -x_5 = 5, \\ \qquad\quad -x_2 \qquad\quad -2x_4 +4x_5 = 1. \end{cases}$$

Придавая свободным неизвестным x_4 и x_5 произвольные значения $x_4 = c_1$, $x_5 = c_2$, найдем базисные неизвестные x_1, x_2, x_3. Из третьего уравнения системы мы находим неизвестное $x_2 = -1 - 2c_1 + 4c_2$. Подставив его во второе уравнение, определим неизвестное $x_1 = 2 + \frac{7}{4}\,c_1 - \frac{11}{4}\,c_2$. Наконец, из первого уравнения получим: $x_3 = 2 + \frac{1}{4}\,c_1 - \frac{9}{4}\,c_2$. Таким образом, линейная система имеет бесконечное множество решений

$$x_1 = 2 + \frac{7}{4}\,c_1 - \frac{11}{4}\,c_2,\ x_2 = -1 - 2c_1 + 4c_2,\ x_3 = 2 + \frac{1}{4}\,c_1 - \frac{9}{4}\,c_2,\ x_4 = c_1,\ x_5 = c_2,$$

где c_1, c_2 – любые действительные числа.

Замечание. *Однородная* система линейных уравнений *всегда совместна*, так как она имеет нулевое решение. Если $\operatorname{rang} A = n$, то однородная система имеет *единственное* (*нулевое*) решение, а если $\operatorname{rang} A < n$, то множество решений этой системы *бесконечно*. В частности, если в однородной системе число уравнений равно числу неизвестных, т. е. $m = n$, то она имеет единственное (нулевое) решение в том и только в том случае, когда $|A| \neq 0$. Соответственно, эта система имеет ненулевое решение (а, значит, и бесконечно много решений) тогда и только тогда, когда $|A| = 0$.

4. Обращение невырожденной матрицы с помощью элементарных преобразований

Рассмотрим невырожденную квадратную матрицу $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Решая невырожденную систему линейных уравнений с матрицей A и столбцом правых частей B методом исключения неизвестных (пункт 3), мы приведем расширенную матрицу $(A|B)$ этой системы с помощью элементарных преобразований над ее строками к виду $(A_1|B_1)$, где A_1 – треугольная матрица с ненулевыми диагональными элементами. Продолжая далее элементарные преобразования над строками, мы можем привести расширенную матрицу к виду $(E|B_2)$, где E – единичная матрица. Столбец B_2 представляет собой решение системы, т. е. $B_2 = A^{-1}B$. Следовательно, выбирая в качестве B столбцы единичной матрицы, мы получим соответствующие столбцы обратной матрицы A^{-1} как решения соответствующих систем линейных уравнений.

Таким образом, *для того, чтобы найти матрицу, обратную к данной невырожденной матрице* A, *достаточно в расширенной матрице* $(A|E)$ *с помощью элементарных преобразований над ее строками перегнать матрицу* A *в единичную* E. *В результате получим матрицу* $\left(E|A^{-1}\right)$.

Пример. *Найти обратную к матрице*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Воспользуемся изложенным выше алгоритмом.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 & -1 \end{array}\right).$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Изложенный выше *алгоритм* нахождения обратной матрицы является более *экономичным* по сравнению с изложенным в §3, так как он требует гораздо меньшего объема вычислений. Заметим также, что *программирование* этого метода также не представляет трудностей.

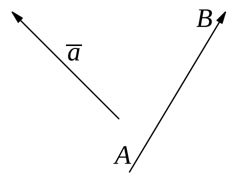
ГЛАВА II. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§1. Векторы и линейные операции над ними

Займемся теперь таким важным как в самой математике, так и в ее многочисленных приложениях, понятием вектора.

Определение. *Вектором на плоскости или в пространстве называется отрезок прямой с заданным на нем направлением, т. е. одна из его граничных точек считается начальной, а вторая – конечной.*

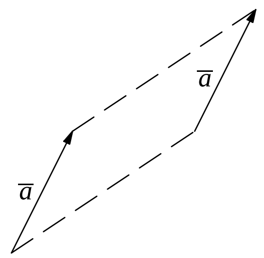
Обозначать векторы мы будем строчными латинскими буквами $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}, \ldots$ или через $\overline{AB}$, $\overline{CD}, \ldots$ с указанием начальной и конечной точек.



Длина отрезка, изображающего вектор $\bar{a}$, называется его *длиной* и обозначается через $|\bar{a}|$.

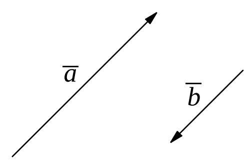
Вектор с совпадающими начальной и конечной точками называется *нуль-вектором.* Для него используется обозначение $\bar{0}$.

По определению, два вектора считаются *равными,* если один из них можно преобразовать в другой с помощью параллельного переноса.

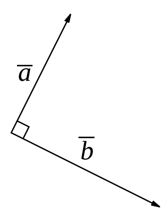


Учитывая приведенное определение, всюду в дальнейшем мы без специальных оговорок будем перемещать вектор параллельным переносом в любую удобную для нас точку.

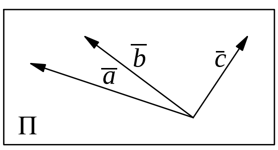
Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *коллинеарными* (обозначение $\bar{a} \| \bar{b}$), если отрезки их изображающие параллельны.



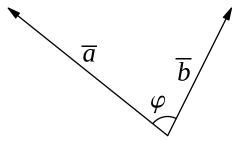
Аналогично, векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *ортогональными* (обозначение $\bar{a} \perp \bar{b}$), если соответствующие отрезки перпендикулярны.



Три вектора называются *компланарными*, если после приведения их общему началу, они будут расположены в одной плоскости.



Углом между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, приведенными к общему началу, называется меньший из двух углов между соответствующими отрезками. Обозначать угол мы будем строчными греческими буквами α, β, γ, φ, $\psi, \ldots$ или через $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$.

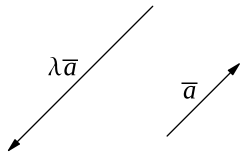


Два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ мы будем считать *одинаково направленными*, если $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 0$ и *противоположно направленными*, если $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \pi$.

Введем теперь *линейные операции* над векторами.

a) *Умножение числа на вектор.*

Произведением действительного числа $\lambda \neq 0$ на вектор $\bar{a} \neq \bar{0}$ называется вектор $\lambda\bar{a}$, длина которого равна $|\lambda||\bar{a}|$, а направление его совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, если $\lambda > 0$ и имеет противоположное с ним направление, если $\lambda < 0$. Если $\lambda = 0$ или $\bar{a} = \bar{0}$, то $\lambda\bar{a} = \bar{0}$.



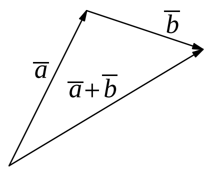
В частности, вектор $(-1)\bar{a}$ обозначается через $-\bar{a}$ и называется вектором, противоположным вектору $\bar{a}$.

Если $0 \neq \lambda \in \mathbf{R}$, то произведение $\dfrac{1}{\lambda}\,\bar{a}$ мы будем иногда записывать в виде $\dfrac{\bar{a}}{\lambda}$.

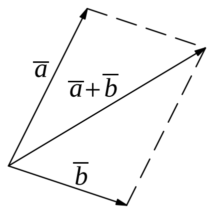
Из приведенного определения сразу же следует, что коллинеарные векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ *линейно связаны*, т. е. существует константа λ такая, что $\bar{b} = \lambda\bar{a}$. В качестве такой константы следует взять число $\lambda = \dfrac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$. Если $\bar{a} = \bar{0}$, то $\bar{a} = 0\bar{b}$. В частности, если $\bar{a} \neq 0$, то вектором *единичной* длины с *направлением* данного вектора является вектор $\bar{a}_1 = \dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$.

b) *Сложение векторов.*

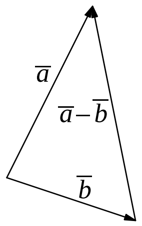
Суммой двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{a} + \bar{b}$, который находится по *правилу треугольника*



или по равносильному ему *правилу параллелограмма*



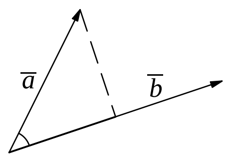
Вектор $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$ называется *разностью* векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.



Свойства линейных операций над векторами аналогичны соответствующим свойствам действительных чисел.

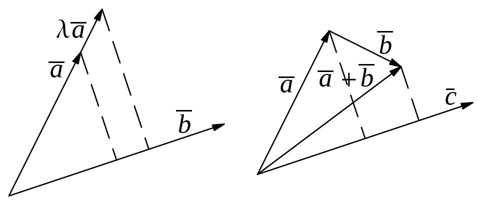
Проекцией вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется число

$$\mathrm{Pr}_{\bar{b}}\,\bar{a} = |\bar{a}|\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}}).$$



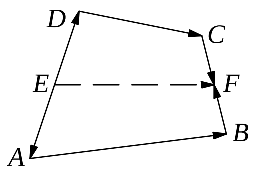
Геометрически очевидны следующие *свойства* проекции:

$$\mathrm{Pr}_{\bar{b}}\,\lambda\bar{a} = \lambda\,\mathrm{Pr}_{\bar{b}}\,\bar{a};$$
$$\mathrm{Pr}_{\bar{c}}(\bar{a}+\bar{b}) = \mathrm{Pr}_{\bar{c}}\,\bar{a} + \mathrm{Pr}_{\bar{c}}\,\bar{b}.$$



Пример. *Пусть E и F – середины сторон AD и BC соответственно выпуклого четырехугольника $ABCD$. Доказать, что*

$$\overline{EF} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{DC}\right).$$



Доказательство. Из четырехугольников $EDCF$ и $EABF$ по правилу сложения векторов получим:

$$\overline{EF} = \overline{ED} + \overline{DC} + \overline{CF};$$
$$\overline{EF} = \overline{EA} + \overline{AB} + \overline{BF}.$$

Сложив данные равенства и учитывая, что $\overline{ED} + \overline{EA} = \overline{CF} + \overline{BF} = \bar{0}$, будем иметь:

$$2\overline{EF} = \overline{DC} + \overline{AB} \Longrightarrow \overline{EF} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{DC}\right),$$

что и требовалось.

§2. Базис. Декартова система координат

Определение. *Базисом на плоскости называется упорядоченная пара неколлинеарных векторов. Базисом в пространстве называется упорядоченная тройка некомпланарных векторов.*

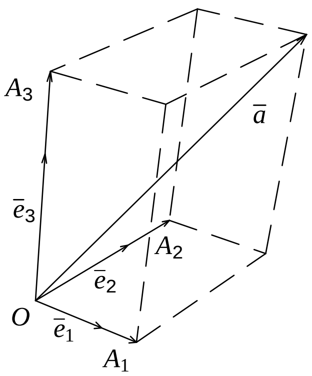
Обозначение: $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ – базис на плоскости, $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ – базис в пространстве.

Всюду в дальнейшем, не оговаривая это особо, будем рассматривать только *положительно ориентированные* базисы, т. е. базисы, у которых кратчайший поворот от вектора $\bar{e}_1$ к вектору $\bar{e}_2$ совершается против часовой стрелки, если наблюдение ведется со стороны вектора $\bar{e}_3$.

Сформулируем теперь фундаментальное свойство базиса.

Теорема. *Любой вектор единственным образом разлагается по базису, т. е. представляется в виде $\bar{a} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3$, где действительные числа a_1, a_2, a_3 – координаты вектора $\bar{a}$ в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.*

Приведем геометрическое доказательство этого утверждения.



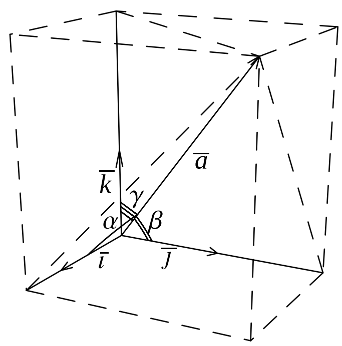
Вектор $\bar{a}$ можно единственным образом представить как большую диагональ параллелепипеда, ребра которого, параллельны базисным векторам. Тогда по правилу сложения векторов $\bar{a} = \overline{OA}_1 + \overline{OA}_2 + \overline{OA}_3$. Ввиду коллинеарности векторов $\overline{OA}_1, \overline{OA}_2, \overline{OA}_3$ соответствующим базисным векторам, мы можем записать, что $\overline{OA}_1 = a_1\bar{e}_1, \overline{OA}_2 = a_2\bar{e}_2, \overline{OA}_3 = a_3\bar{e}_3$, где a_1, a_2, a_3 – некоторые действительные числа. Отсюда и следует искомое разложение.

Если базис зафиксирован, то факт, что вектор $\bar{a}$ в этом базисе имеет координаты a_1, a_2, a_3 коротко записывается как $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$.

Из доказанной теоремы следует, что при выполнении линейных операций над векторами точно также преобразуются и их координаты, т. е. если $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$, то $\lambda\,\bar{a}(\lambda\, a_1, \lambda\, a_2, \lambda\, a_3)$, если $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b}(b_1, b_2, b_3)$, то $(\bar{a}+\bar{b})(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$. Отсюда, в частности, следует, что два вектора *коллинеарны* тогда и только тогда, когда их координаты *пропорциональны*, т. е.

$$\bar{a} \| \bar{b} \iff \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Рассмотрим теперь *ортонормированный базис* $\{\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}\}$, т. е. базис, в котором все векторы имеют единичную длину и попарно ортогональны. Векторы этого базиса мы будем называть *ортами*. Пусть в этом базисе $\bar{a} = a_x\bar{\imath} + a_y\bar{\jmath} + a_z\bar{k}$.



Как видно из чертежа, координаты вектора в ортонормированном базисе представляют собой проекции этого вектора на соответствующие орты, т. е.

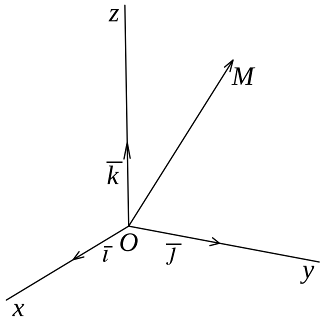
$$a_x = \mathrm{Pr}_{\bar{\imath}}\,\bar{a} = |\bar{a}|\cos\alpha,\ a_y = \mathrm{Pr}_{\bar{\jmath}}\,\bar{a} = |\bar{a}|\cos\beta,\ a_z = \mathrm{Pr}_{\bar{k}}\,\bar{a} = |\bar{a}|\cos\gamma.$$

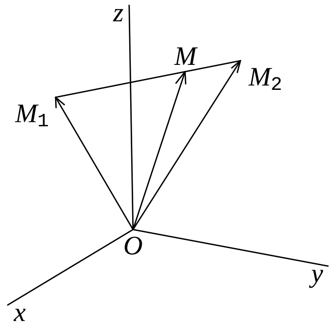
Величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, т. е. косинусы углов, которые образует данный вектор с ортами $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$, $\bar{k}$ соответственно, называются *направляющими косинусами* вектора $\bar{a}$. *Единичный вектор* $\bar{a}$ имеет координаты $\bar{a}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Очевидно также, что

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Свяжем теперь с ортонормированным базисом *декартову* (*прямоугольную*) *систему координат*. Для этого поместим начала ортов в некоторую точку O, ось Ox (абсцисс) направим вдоль орта $\bar{\imath}$, ось Oy (ординат) – вдоль орта $\bar{\jmath}$, наконец, ось Oz (аппликат) направим вдоль орта $\bar{k}$.





В выбранной системе координат *координаты радиуса-вектора* $\overline{OM} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k}$ мы будем называть *координатами точки* M и записывать $M(x, y, z)$.

Если известны координаты начальной $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и конечной $M_2(x_2, y_2, z_2)$ точек вектора, то из равенства $\overline{M_1M_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1}$ следует, что его координаты равны

$$\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$$

и, значит, *расстояние* между точками M_1 и M_2 вычисляется по формуле

$$|M_1M_2| = |\overline{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Найдем теперь *координаты точки* M, делящей отрезок с концами в точках M_1, M_2 *в данном отношении* $\lambda > 0$. Так как $\frac{|\overline{M_1M}|}{|\overline{MM_2}|} = \lambda$, то $\overline{M_1M} = \lambda\overline{MM_2}$. Отсюда, переходя к координатам, получим:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x),\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y),\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

Следовательно, координаты искомой точки вычисляются по формулам:

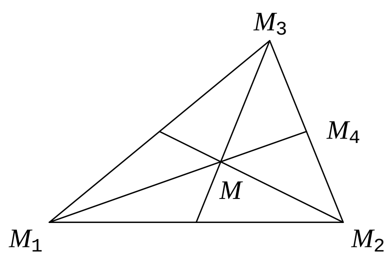
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Найдем, в частности, *координаты середины отрезка*. Здесь $\lambda = 1$, поэтому

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2),\ y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2),\ z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

Пример. *Треугольник задан координатами своих вершин* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$. *Найти координаты точки пересечения его медиан.*

Решение.



Пусть $M_4(x_4, y_4, z_4)$ – середина отрезка M_2M_3, $M(x, y, z)$ – точка пересечения медиан. Тогда

$$x_4 = \frac{1}{2}(x_2 + x_3),\ y_4 = \frac{1}{2}(y_2 + y_3),\ z_4 = \frac{1}{2}(z_2 + z_3).$$

По известному свойству точки пересечения медиан $|\overline{M_1M}| = 2|\overline{MM_4}|$ и потому

$$x = \frac{1}{3}(x_1 + 2x_4),\ y = \frac{1}{3}(y_1 + 2y_4),\ z = \frac{1}{3}(z_1 + 2z_4).$$

Подставив сюда найденные координаты точки M_4, получим:

$$x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3),\ y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3),\ z = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3).$$

Таким образом, координаты точки пересечения медиан треугольника равны средним арифметическим соответствующих координат его вершин.

Замечание. *Базисом n-мерного пространства* $\mathbf{R}^n$ называется упорядоченная совокупность n векторов

$$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n, \tag{1}$$

обладающая тем свойством, что любой вектор $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ единственным образом представляется в виде линейной комбинации базисных векторов (1), т. е. существуют действительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (координаты вектора $\bar{x}$ в базисе (1)) такие, что

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \ldots + x_n\bar{e}_n. \tag{2}$$

В качестве базиса в $\mathbf{R}^n$ мы можем взять, например, векторы

$$\bar{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ \bar{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0),\ \ldots,\ \bar{e}_n = (0, 0, \ldots, 1),$$

так как, очевидно, любой вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ однозначно представляется в виде (2).

§3. Скалярное произведение векторов

Определение. *Скалярным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число*

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}).$$

Из этого определения сразу же следует, что

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \operatorname{Pr}_{\bar{a}} \bar{b} = |\bar{b}| \operatorname{Pr}_{\bar{b}} \bar{a}$$

и, таким образом, *если один из векторов имеет единичную длину, то их скалярное произведение равно проекции второго вектора на единичный.*

Отметим основные *свойства* скалярного произведения.

$$\begin{array}{ll} 1) & |\bar{a}| = \sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a}}; \\ 2) & \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}; \\ 3) & (\lambda\bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (\lambda\bar{b}) = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b}); \\ 4) & (\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}; \\ 5) & \bar{a} \perp \bar{b} \Longleftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0. \end{array}$$

Первые два и последнее свойства немедленно следуют из определения скалярного произведения, а третье и четвертое – из сформулированных в §1 свойств проекции.

Найдем теперь *представление скалярного произведения в координатах.* Пусть в ортонормированном базисе $\{\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}\}$ векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют координаты $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b}(b_x, b_y, b_z)$. Заметив, что по свойствам 1) и 5) скалярного произведения

$$\bar{\imath} \cdot \bar{\imath} = \bar{\jmath} \cdot \bar{\jmath} = \bar{k} \cdot \bar{k} = 1,\ \bar{\imath} \cdot \bar{\jmath} = \bar{\jmath} \cdot \bar{k} = \bar{k} \cdot \bar{\imath} = 0,$$

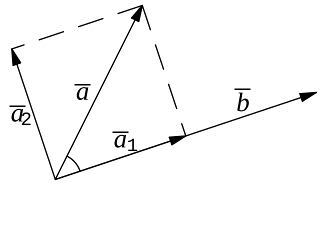
перемножим векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ скалярно, используя свойства 2) – 4):

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (a_x\bar{\imath} + a_y\bar{\jmath} + a_z\bar{k}) \cdot (b_x\bar{\imath} + b_y\bar{\jmath} + b_z\bar{k}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

Таким образом, *скалярное произведение в ортонормированном базисе равно сумме произведений соответствующих координат векторов.*

Пример. *Разложить вектор $\bar{a}(1, -1, 1)$ на две ортогональные составляющие, одна из которых коллинеарна вектору $\bar{b}(2, 1, 3)$.*

Решение.



Из чертежа следует, что $\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2$ – искомое разложение. Найдем векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$. Составляющая $\bar{a}_1$, коллинеарная вектору $\bar{b}$ равна, очевидно, вектору проекции $\bar{a}$ на $\bar{b}$ и, следовательно,

$$\bar{a}_1 = \frac{\mathrm{Pr}_{\bar{b}}\,\bar{a}}{|\bar{b}|}\,\bar{b} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\bar{b}\cdot\bar{b}}\,\bar{b}.$$

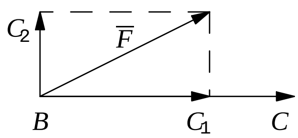
Так как $\bar{a}\cdot\bar{b} = 2 - 1 + 3 = 4,\ \bar{b}\cdot\bar{b} = 4 + 1 + 9 = 14$, то

$$\bar{a}_1\left(\frac{4}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right).$$

Тогда вторая ортогональная составляющая вектора $\bar{a}$ равна

$$\bar{a}_2 = \bar{a} - \bar{a}_1,\ \text{следовательно,}\ \bar{a}_2\left(\frac{3}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{1}{7}\right).$$

В заключение параграфа рассмотрим одно простое *приложение скалярного произведения в механике.* Пусть под действием постоянной силы $\overline{F}$ материальная точка переместилась по прямой из положения B в положение C.



Найдем работу этой силы. Для этого разложим вектор силы $\overline{F}$ на две ортогональные составляющие, одна из которых коллинеарна вектору перемещения $\overline{BC}$. Тогда

$$\overline{F} = \overline{BC}_1 + \overline{BC}_2.$$

Составляющая $\overline{BC}_2$ работы не совершает, следовательно, работа силы $\overline{F}$ равна работе составляющей $\overline{BC}_1$ и, таким образом,

$$A = \mathrm{Pr}_{\overline{BC}}\,\overline{F}\,|\overline{BC}| = \overline{F}\cdot\overline{BC}.$$

Окончательно, *работа силы $\overline{F}$, под действием которой материальная точка перемещается по отрезку прямой из положения B в положение C*, вычисляется по формуле:

$$A = \overline{F}\cdot\overline{BC}.$$

Замечание. *Скалярным произведением* векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ n-мерного пространства $\mathbf{R}^n$ называется число $\bar{x}\cdot\bar{y}$, равное произведению первого вектора, записанного строкой, на второй вектор, записанный столбцом. Таким образом, если

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

то

$$\bar{x}\cdot\bar{y} = \bar{x}\bar{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Несложной проверкой мы можем убедиться в том, что таким образом определенное скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$ обладает свойствами 2) – 4) скалярного произведения векторов на плоскости или в пространстве.

Длиной вектора $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ называется число

$$|\bar{x}| = \sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Векторы $\bar{x}$, $\bar{y} \in \mathbf{R}^n$ называются *ортогональными*, если $\bar{x}\cdot\bar{y} = 0$.

Векторы

$$\bar{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ \bar{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0),\ \ldots,\ \bar{e}_n = (0, 0, \ldots, 1) \tag{1}$$

составляют *ортонормированный базис* пространства $\mathbf{R}^n$, так как каждый из этих векторов имеет единичную длину и все они попарно ортогональны.

Любой вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ мы можем рассматривать как *точку*

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

n-мерного пространства с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Взяв еще одну точку $N(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, соответствующую вектору $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, мы под *расстоянием* между точками M и N будем понимать длину вектора $\bar{y} - \bar{x}$, т. е. число

$$|MN| = |\bar{y} - \bar{x}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}. \tag{2}$$

Таким образом переопределенное пространство $\mathbf{R}^n$ с расстоянием (2) между точками мы будем называть *евклидовым пространством*, сохранив для него то же обозначение.

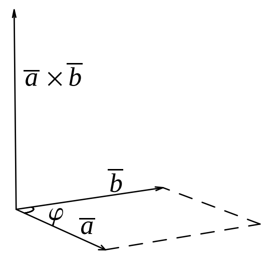
Совокупность точки $O(0, 0, \ldots, 0)$ и ортонормированного базиса (1) называется *декартовой системой координат* евклидова пространства $\mathbf{R}^n$. Точка $O(0, 0, \ldots, 0)$ называется, естественно, началом координат.

§4. Векторное произведение векторов

Определение. *Векторным произведением неколлинеарных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{a} \times \bar{b}$ такой, что*

1) $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}| \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$;
2) $\bar{a} \times \bar{b} \perp \bar{a}$, $\bar{a} \times \bar{b} \perp \bar{b}$;
3) *тройка векторов* $\{\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{a} \times \bar{b}\}$ *положительно ориентирована* (§2).

Если $\bar{a} \| \bar{b}$, *то* $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$.



Из этого определения следует, что *площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равна длине векторного произведения $\bar{a} \times \bar{b}$, т. е.*

$$S_{\bar{a}\bar{b}} = |\bar{a} \times \bar{b}|.$$

Сформулируем основные *свойства* векторного произведения.

1) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$;
2) $(\lambda \bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda \bar{b}) = \lambda(\bar{a} \times \bar{b})$;
3) $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$.

Первые два свойства очевидным образом следуют из определения векторного произведения. Доказательство третьего ввиду его громоздкости мы приводить не будем.

Найдем формулу для *вычисления векторного произведения в координатах.* Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в ортонормированном базисе $\{\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}\}$ имеют координаты $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b}(b_x, b_y, b_z)$. Учитывая, что по определению векторного произведения

$$\bar{\imath} \times \bar{\imath} = \bar{\jmath} \times \bar{\jmath} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0},\ \bar{\imath} \times \bar{\jmath} = \bar{k},\ \bar{\jmath} \times \bar{k} = \bar{\imath},\ \bar{k} \times \bar{\imath} = \bar{\jmath},$$

раскроем скобки в векторном произведении $\bar{a} \times \bar{b}$, принимая во внимание свойства 1) – 3):

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_x \bar{\imath} + a_y \bar{\jmath} + a_z \bar{k}) \times (b_x \bar{\imath} + b_y \bar{\jmath} + b_z \bar{k}) = (a_y b_z - a_z b_y)\bar{\imath} + (a_z b_x - a_x b_z)\bar{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x)\bar{k}.$$

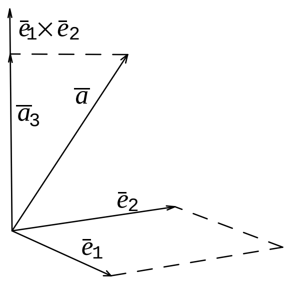
Полученный вектор мы можем записать в виде следующего *символического определителя*:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix},$$

вычислять который удобно разложением по первой строке.

Пример. *Найти составляющую вектора* $\bar{a}(1,2,3)$, *ортогональную плоскости векторов* $\bar{e}_1(-3,1,1)$, $\bar{e}_2(2,-1,0)$.

Решение.



Из чертежа видно, что искомая составляющая представляет собой вектор проекции данного вектора $\bar{a}$ на векторное произведение $\bar{e}_1\times\bar{e}_2$ и, следовательно (§3, пример),

$$\bar{a}_3=\frac{\bar{a}\cdot(\bar{e}_1\times\bar{e}_2)}{|\bar{e}_1\times\bar{e}_2|^2}\,\bar{e}_1\times\bar{e}_2.$$

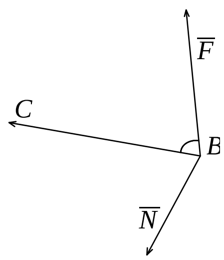
Переходим к вычислениям:

$$\bar{e}_1\times\bar{e}_2=\begin{vmatrix}\bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k}\\ -3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\bar{\imath}-\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}\bar{\jmath}+\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}\bar{k}=\bar{\imath}+2\bar{\jmath}+\bar{k},$$

$$\bar{a}\cdot(\bar{e}_1\times\bar{e}_2)=1+4+3=8,\ |\bar{e}_1\times\bar{e}_2|^2=1+4+1=6.$$

Тогда $\bar{a}_3\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{8}{3},\dfrac{4}{3}\right)$.

Среди многочисленных приложений векторного произведения отметим его *применение в механике при вычислении момента силы.*



Итак, пусть сила $\overline{F}$ приложена к материальной точке B. Моментом этой силы относительно неподвижной точки C называется вектор

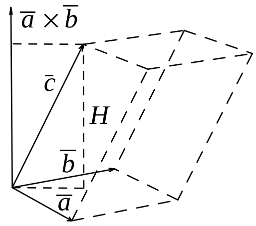
$$\overline{N}=\overline{F}\times\overline{BC}.$$

§5. Смешанное произведение векторов

Определение. *Смешанным произведением трех векторов* $\bar{a}$, $\bar{b}$ *и* $\bar{c}$ *называется число*

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}.$$

Выясним *геометрический смысл* смешанного произведения для тройки некомпланарных векторов.



По определению смешанного произведения

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = |\bar{a}\times\bar{b}||\bar{c}|\cos(\widehat{\bar{a}\times\bar{b},\bar{c}}).$$

Поскольку $|\bar{a}\times\bar{b}| = S_{\bar{a}\bar{b}}$ – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (§4), $\Big||\bar{c}|\cos(\widehat{\bar{a}\times\bar{b},\bar{c}})\Big| = H$ – высота параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, то

$$|(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}| = S_{\bar{a}\bar{b}}H = V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$$

– объем параллелепипеда. Таким образом, *абсолютная величина смешанного произведения трех векторов равна объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.*

Если векторы заданы своими координатами в ортонормированном базисе $\{\bar{\imath},\bar{\jmath},\bar{k}\}$, т. е. $\bar{a}(a_x,a_y,a_z)$, $\bar{b}(b_x,b_y,b_z)$, $\bar{c}(c_x,c_y,c_z)$, то учитывая формулы для вычисления скалярного и векторного произведений (§3, §4), получим:

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z.$$

Следовательно (глава I, §2, пункт 3, свойство 7)), *в координатах смешанное произведение вычисляется по формуле*:

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Докажем, пользуясь этой формулой, некоторые *свойства* смешанного произведения.

$$1) \quad (\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = \bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}),$$

что следует из свойства 4) определителя (глава I, §2, пункт 3). Таким образом, в смешанном произведении можно менять местами знаки скалярного и векторного произведения, и поэтому для него используется более короткое обозначение $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$, которым мы и будем пользоваться в дальнейшем.

$$2) \quad \bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c} = -\bar{a}\bar{c}\bar{b} = -\bar{c}\bar{b}\bar{a};$$
$$3) \quad (\lambda\bar{a})\bar{b}\bar{c} = \bar{a}(\lambda\bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{b}(\lambda\bar{c}) = \lambda(\bar{a}\bar{b}\bar{c});$$
$$4) \quad (\bar{a}+\bar{b})\bar{c}\bar{d} = \bar{a}\bar{c}\bar{d} + \bar{b}\bar{c}\bar{d}.$$

Эти свойства смешанного произведения также являются прямыми следствиями соответствующих свойств определителя.

Докажем еще одно, геометрическое свойство смешанного произведения.

Теорема. *Три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.*

Доказательство. Докажем *необходимость* условия теоремы. Пусть векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны. Очевидно, что, если хотя бы один из них равен нулю, то и их смешанное произведение равно нулю. Если же все они ненулевые, то, ввиду их компланарности, векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}$ ортогонально вектору $\bar{c}$ и, следовательно, $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$. Аналогично проверяется *достаточность* условия теоремы.

Следствие. *Три вектора $\{\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}\}$ образуют базис в том и только в том случае, когда их смешанное произведение отлично от нуля.*

Заметим, кроме того, что, если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} > 0$ ($\bar{a}\bar{b}\bar{c} < 0$), то угол между векторами $\bar{a}\times\bar{b}$ и $\bar{c}$ – острый (тупой) и, следовательно, базис $\{\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}\}$ является *положительно* (*отрицательно*) *ориентированным.*

Пример. *Доказать, что пять точек*

$$A_1(-1,-1,0),\ A_2(-2,0,1),\ A_3(0,1,1),\ A_4(2,-1,-1),\ A_5(0,-2,-1)$$

расположены в одной плоскости.

Решение. Рассмотрим векторы $\overline{A_1A_2}(-1,1,1)$, $\overline{A_1A_3}(1,2,1)$, $\overline{A_1A_4}(3,0,-1)$. Так как

$$\overline{A_1A_2}\,\overline{A_1A_3}\,\overline{A_1A_4} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 0 = 4 - 4 = 0,$$

то по доказанной выше теореме эти векторы компланарны и, стало быть, точки A_1, A_2, A_3, A_4 находятся в одной плоскости Π_1. Аналогично покажем, что и точки A_1, A_2, A_3, A_5 также принадлежат одной плоскости Π_2. Действительно, $\overline{A_1A_5}(1,-1,-1)$,

$$\overline{A_1A_2}\,\overline{A_1A_3}\,\overline{A_1A_5} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

так как первая и третья строки в определителе пропорциональны. Плоскости Π_1 и Π_2 имеют три общие точки A_1, A_2, A_3, следовательно, они совпадают и, таким образом, все пять точек расположены в одной плоскости.

ГЛАВА III. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В этой главе *все геометрические объекты мы будем определять и изучать с помощью соответствующих уравнений этих объектов* и, следовательно, в принципе геометрия может быть изложена без единого чертежа. И, действительно, все чертежи, которые мы будем использовать, будут служить лишь для визуальной иллюстрации наших рассуждений.

Уравнение *поверхности* в выбранной декартовой системе координат $Oxyz$ мы будем записывать в виде

$$F(x, y, z) = 0,$$

т. е. в виде связи или зависимости между координатами x, y, z произвольной точки поверхности.

Аналогично, уравнение

$$F(x, y) = 0$$

определяет некоторую *линию* (*кривую*) в системе координат Oxy на плоскости.

Кривая в пространстве может быть задана как *пересечение двух поверхностей* и, следовательно, она определяется системой из уравнений этих поверхностей:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Кроме того, кривую на плоскости или в пространстве можно также задать с помощью зависимостей координат произвольной точки этой кривой от некоторого параметра, т. е. с помощью *параметрических уравнений*:

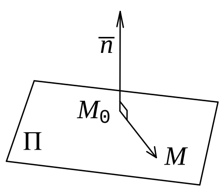
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad - \text{кривая на плоскости,}$$

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases} \quad - \text{линия в пространстве,}$$

где t – действительный параметр.

§1. Плоскость в пространстве. Различные виды уравнения плоскости

Найдем уравнение плоскости в пространстве с выбранной в нем декартовой системой координат $Oxyz$. Будем исходить из того, что положение этой плоскости полностью определяется точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$, через которую проходит плоскость и ненулевым вектором $\bar{n}(A, B, C)$, ей перпендикулярным. Вектор $\bar{n}$ называется *нормальным вектором* плоскости.



Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости П. Тогда вектор $\bar{n}$ ортогонален вектору $\overline{M_0M}$ и, следовательно,

$$\bar{n} \cdot \overline{M_0M} = 0,$$

или, учитывая, что $\overline{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, запишем в координатах уравнение плоскости П :

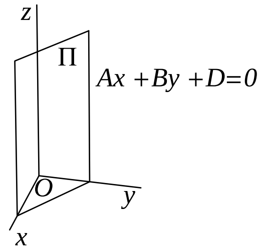
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Преобразовав полученное уравнение к виду

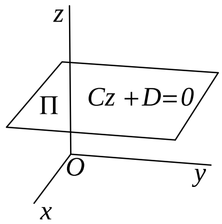
$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

мы получим тем самым *общее уравнение плоскости.*

Рассмотрим теперь некоторые *частные случаи* общего уравнения плоскости. Если в общем уравнении плоскости *отсутствует одна из координат*, то нормальный вектор $\bar{n}$ этой плоскости перпендикулярен соответствующей координатной оси и, следовательно, плоскость расположена *параллельно этой координатной оси.*



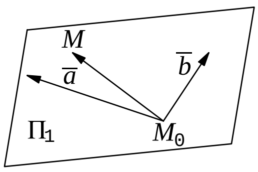
Аналогично, если в общем уравнении плоскости *отсутствуют две координаты*, то нормальный вектор данной плоскости перпендикулярен соответствующей координатной плоскости и, значит, плоскость расположена *параллельно этой координатной плоскости.*



Научимся теперь находить *уравнение плоскости по трем элементам.*

1) *Плоскость, проходящая через точку, параллельно двум векторам.*

Пусть плоскость Π_1 проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, параллельно неколлинеарным векторам $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ и $\bar{b}(b_x, b_y, b_z)$.



Обозначим через $M(x, y, z)$ произвольную точку плоскости Π_1. Для точек данной плоскости и только для них три вектора $\overline{M_0M}$, $\bar{a}$, $\bar{b}$ *компланарны* и, следовательно (глава II, §5, теорема), их смешанное произведение равно нулю, т. е.

$$\overline{M_0M}\bar{a}\bar{b} = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель (проще всего, разлагая его по первой строке), получим общее уравнение плоскости Π_1.

2) *Плоскость, проходящая через две точки, параллельно вектору.*

Найдем уравнение плоскости Π_2, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, параллельно ненулевому вектору $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$. Задача сводится к предыдущей, если положить, например, $M_0 = M_1$, $\bar{b} = \overline{M_1M_2}$. Тогда

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_x & a_y & a_z \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

– искомое уравнение плоскости Π_2.

3) *Плоскость, проходящая через три точки.*

Если плоскость Π_3 проходит через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой, то ее уравнение можно найти, как и в случае 1), положив, например, $M_0 = M_1$, $\bar{a} = \overline{M_1M_2}$, $\bar{b} = \overline{M_1M_3}$. Следовательно, уравнение плоскости Π_3 можно записать в виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Замечание. Во всех трех случаях уравнение плоскости можно найти, вычислив предварительно ее нормальный вектор. Например, в первом случае в качестве нормального вектора можно взять векторное произведение $\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b}$. Тогда $\bar{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$ – уравнение плоскости.

Пример 1. *Найти уравнение плоскости* Π_2, *перпендикулярной плоскости*

$$\Pi_1 : \; x - 2y + 3z - 4 = 0,$$

параллельной вектору $\bar{a}(3, -1, 1)$ *и проходящей через точку пересечения плоскости* Π_1 *с координатной осью* Oy.

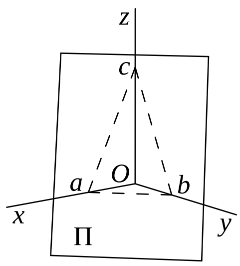
Решение. Из уравнения плоскости Π_1 при $x = 0$, $z = 0$ находим $y = -2$. Следовательно, плоскость Π_2 проходит через точку $M_0(0, -2, 0)$. Кроме того, $\Pi_2 \perp \Pi_1$, поэтому нормальный вектор $\overline{n}(1, -2, 3)$ плоскости Π_1 параллелен плоскости Π_2. Осталось записать искомое уравнение по трем элементам: точке M_0 и векторам $\bar{a}$ и $\overline{n}$. Имеем:

$$\begin{vmatrix} x & y+2 & z \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - (y+2) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -x - 8(y+2) - 5z = 0.$$

Таким образом, общее уравнение плоскости Π_2 имеет вид:

$$x + 8y + 5z + 16 = 0.$$

Пусть плоскость $\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$ не проходит через начало координат и не параллельна ни одной из координатных осей. Тогда, очевидно, все числа A, B, C, D отличны от нуля.

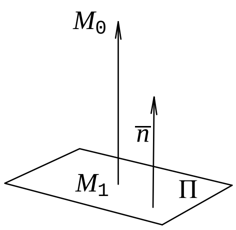


Разделив обе части уравнения плоскости на число D, мы можем записать его в виде:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Числа a, b, c представляют собой величины отрезков, которые плоскость Π отсекает на координатных осях. Полученное уравнение называется *уравнением плоскости в отрезках.*

Найдем теперь формулу для вычисления расстояния от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $\Pi : \; Ax + By + Cz + D = 0$.



Обозначим искомое расстояние через $\rho(M_0,\Pi)$. Очевидно, $\rho(M_0,\Pi) = |\overline{M_1M_0}|$, где точка $M_1(x_1,y_1,z_1)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на плоскость Π. Вычислим скалярное произведение коллинеарных векторов $\bar{n}(A,B,C)$ и $\overline{M_1M_0}$. С одной стороны,

$$\bar{n}\cdot\overline{M_1M_0} = |\bar{n}||\overline{M_1M_0}|\cos(\widehat{\bar{n},\overline{M_1M_0}}) = \pm\rho(M_0,\Pi)|\bar{n}|.$$

С другой,

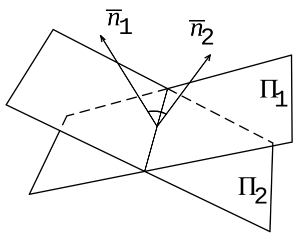
$$\bar{n}\cdot\overline{M_1M_0} = A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1) = Ax_0+By_0+Cz_0+D,$$

так как $M_1\in\Pi$ и поэтому $-Ax_1-By_1-Cz_1 = D$. Следовательно, *расстояние от точки* M_0 *до плоскости* Π вычисляется по формуле:

$$\rho(M_0,\Pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{|\bar{n}|}.$$

В заключение этого параграфа выясним *характер взаимного расположения двух плоскостей.* Пусть плоскости заданы своими общими уравнениями:

$$\Pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0;\quad \Pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$



Очевидно, что *угол* $(\widehat{\Pi_1,\Pi_2})$ *между этими плоскостями* равен углу между их нормальными векторами $\bar{n}_1(A_1,B_1,C_1)$ и $\bar{n}_2(A_2,B_2,C_2)$ и, следовательно,

$$\cos(\widehat{\Pi_1,\Pi_2}) = \frac{\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|}.$$

В частности,

$$\Pi_1\|\Pi_2 \Longleftrightarrow \bar{n}_1\|\bar{n}_2 \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2};$$

$$\Pi_1\perp\Pi_2 \Longleftrightarrow \bar{n}_1\perp\bar{n}_2 \Longleftrightarrow \bar{n}_1\cdot\bar{n}_2=0 \Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Пример 2. *Убедиться в том, что плоскость* Π_1, *отсекающая на координатных осях* Ox, Oy, Oz *отрезки величиной* 2, -1, 2 *соответственно и плоскость*

$$\Pi_2:\ -2x+4y-2z-5=0$$

параллельны и найти расстояние между ними.

Решение. Запишем уравнение плоскости Π_1 в отрезках:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=1.$$

Преобразовав его к общему виду, получим:

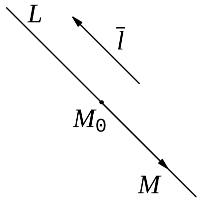
$$\Pi_1:\ x-2y+z-2=0.$$

Так как нормальные векторы $\bar{n}_1(1,-2,1)$ и $\bar{n}_2(-2,4,-2)$ плоскостей Π_1 и Π_2 коллинеарны, то эти плоскости параллельны. Возьмем какую-нибудь точку в плоскости Π_1, например, $M_0(0,0,2)$. Тогда

$$\rho(\Pi_1,\Pi_2) = \rho(M_0,\Pi_2) = \frac{|-2\cdot0+4\cdot0-2\cdot2-5|}{\sqrt{(-2)^2+4^2+(-2)^2}} = \frac{9}{2\sqrt{6}}.$$

§2. Уравнения прямой в пространстве

Пусть прямая L в пространстве с декартовой системой координат $Oxyz$ проходит через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и параллельна ненулевому вектору $\bar{l}(l_x,l_y,l_z)$, который называется *направляющим вектором* прямой.



Обозначим через $M(x,y,z)$ произвольную точку прямой L. Вектор $\overline{M_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ коллинеарен вектору $\bar{l}$ и, следовательно, их координаты пропорциональны, т. е.

$$\frac{x-x_0}{l_x} = \frac{y-y_0}{l_y} = \frac{z-z_0}{l_z}.$$

Эта двойная пропорция представляет собой *канонические уравнения прямой в пространстве.*

Заметим, что в канонических уравнениях прямой *формально допускается запись нулей в знаменателях*, это означает лишь то, что *прямая перпендикулярна соответствующей координатной оси или координатной плоскости.*

Если *прямая проходит через две точки* $M_1(x_1,y_1,z_1)$ *и* $M_2(x_2,y_2,z_2)$, то в качестве ее направляющего вектора можно взять вектор $\overline{M_1M_2}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ и, следовательно, канонические уравнения этой прямой имеют вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Коллинеарные векторы $\overline{M_0M}$ и $\bar{l}$ линейно связаны (глава II, §1), т. е. существует действительный параметр t такой, что

$$\overline{M_0M} = t\bar{l}.$$

Если точка M перемещается вдоль прямой, параметр t изменяется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Так как $\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0$, где $\bar{r}_0 = \overline{OM}_0$, $\bar{r} = \overline{OM}$ – радиусы-векторы точек M_0 и M соответственно, то последнее уравнение мы можем переписать в виде

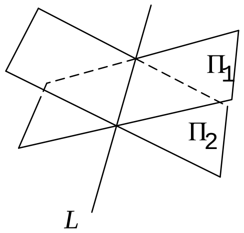
$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{l}, \ -\infty < t < +\infty.$$

Это уравнение называется *векторным уравнением прямой.*

Переходя в полученном векторном уравнении к координатам, запишем *параметрические уравнения прямой*:

$$\begin{cases} x = x_0 + l_x t, \\ y = y_0 + l_y t, \\ z = z_0 + l_z t, \ -\infty < t < +\infty. \end{cases}$$

Прямую в пространстве можно задать также как *пересечение двух плоскостей.*



Система

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

составленная из уравнений этих плоскостей, дает нам *общие уравнения прямой в пространстве.* Для перехода от общих к каноническим уравнениям прямой, достаточно найти какую-нибудь точку на ней, решив при фиксированном значении одной из координат систему уравнений плоскостей, а также определить направляющий вектор прямой, которым может служить векторное произведение нормальных векторов $\bar{n}_1(A_1, B_1, C_1)$, $\bar{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ плоскостей, т. е. вектор $\bar{l} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2$.

Пример 1. *Найти канонические уравнения прямой*

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 5 = 0, \\ 2x + 3y - 4z + 4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Полагая в данной системе $z = 0$, получим

$$\begin{cases} x - 2y - 5 = 0, \\ 2x + 3y + 4 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем $x = 1$, $y = -2$. Таким образом, мы получили точку $M_0(1, -2, 0)$ на прямой. Найдем ее направляющий вектор:

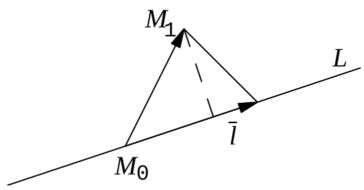
$$\bar{l} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \bar{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \bar{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \bar{k} = -\bar{\imath} + 10\bar{\jmath} + 7\bar{k}.$$

Осталось записать канонические уравнения данной прямой:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{10} = \frac{z}{7}.$$

Научимся теперь вычислять *расстояние от точки до прямой в пространстве.* Пусть задана точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и прямая L своими каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_0}{l_x} = \frac{y-y_0}{l_y} = \frac{z-z_0}{l_z}.$$



Искомое расстояние $\rho(M_1, L)$ равно, очевидно, высоте треугольника, построенного, на векторах $\bar{l}$ и $\overline{M_0M_1}$. Воспользовавшись геометрическим смыслом длины векторного произведения (глава II, §4), найдем:

$$\rho(M_1, L) = \frac{|\bar{l} \times \overline{M_0M_1}|}{|\bar{l}|}.$$

Пусть нам известны канонические уравнения двух прямых в пространстве:

$$L_1: \ \frac{x-x_1}{l_{1x}} = \frac{y-y_1}{l_{1y}} = \frac{z-z_1}{l_{1z}},$$

$$L_2: \ \frac{x-x_2}{l_{2x}} = \frac{y-y_2}{l_{2y}} = \frac{z-z_2}{l_{2z}}.$$

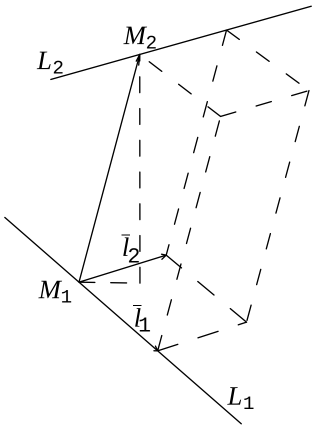
Очевидно, $M_1(x_1, y_1, z_1) \in L_1$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in L_2$.

Один из углов между этими прямыми равен углу между их направляющими векторами $\bar{l}_1$ и $\bar{l}_2$ и, следовательно,

$$\cos(\widehat{L_1, L_2}) = \frac{\bar{l}_1 \cdot \bar{l}_2}{|\bar{l}_1||\bar{l}_2|}.$$

Изучим *взаимное расположение* прямых L_1 и L_2. Если направляющие векторы $\bar{l}_1$ и $\bar{l}_2$ коллинеарны, то данные *прямые параллельны или совпадают.* Совпадать они будут в том случае, когда $M_1 \in L_2$. Если же $M_1 \notin L_2$, то $L_1 \| L_2$.

В случае, когда $\bar{l}_1 \nparallel \bar{l}_2$, *прямые пересекаются или являются скрещивающимися.*



Прямые пересекаются, очевидно, тогда и только тогда, когда векторы $\bar l_1$, $\bar l_2$, $\overline{M_1M_2}$ компланарны. В противном случае данные прямые являются скрещивающимися. Таким образом, *для того, чтобы выяснить, являются ли две данные непараллельные прямые пересекающимися или скрещивающимися, достаточно вычислить смешанное произведение $\bar l_1\bar l_2\overline{M_1M_2}$ и, если оно окажется равным нулю, то прямые пересекаются, иначе – скрещиваются.*

Расстояние $\rho(L_1, L_2)$ между двумя скрещивающимися прямыми равно, очевидно, расстоянию между параллельными плоскостями, в которых расположены эти прямые и, следовательно, равно высоте параллелепипеда, построенного на векторах $\bar l_1$, $\bar l_2$, $\overline{M_1M_2}$. Отсюда, использовав геометрический смысл смешанного произведения (глава II, §5), мы и найдем искомое расстояние:

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{|\bar l_1\bar l_2\overline{M_1M_2}|}{|\bar l_1 \times \bar l_2|}.$$

Пример 2. *Убедиться в том, что прямые*

$$L_1: \ \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+2}{0},$$

$$L_2: \ \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-2}$$

являются скрещивающимися. Найти расстояние между ними и уравнение общего перпендикуляра к ним.

Решение. Первая прямая проходит через точку $M_1(1, 0, -2)$ параллельно вектору $\bar l_1(1, -2, 0)$, а вторая – через точку $M_2(0, 2, -1)$ параллельно вектору $\bar l_2(2, -1, -2)$. Вычислим смешанное произведение векторов $\bar l_1$, $\bar l_2$, $\overline{M_1M_2}(-1, 2, 1)$:

$$\bar l_1\bar l_2\overline{M_1M_2} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 = 3 \neq 0,$$

следовательно, прямые L_1 и L_2 являются скрещивающимися. Для вычисления расстояния между ними используем приведенную выше формулу. Так как

$$\bar l_1 \times \bar l_2 = \begin{vmatrix} \bar\imath & \bar\jmath & \bar k \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}\bar\imath - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\bar\jmath + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\bar k = 4\bar\imath + 2\bar\jmath + 3\bar k, \ |\bar l_1 \times \bar l_2| = \sqrt{29},$$

то

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{3}{\sqrt{29}}.$$

Осталось найти уравнение общего перпендикуляра к данным прямым. Заметим, прежде всего, что его направляющим вектором является уже вычисленный нами вектор $\bar l = \bar l_1 \times \bar l_2$. Очевидно, указанный перпендикуляр расположен в пересечении двух плоскостей Π_1 и Π_2, проходящих через данные прямые параллельно вектору $\bar{l}$. Найдем уравнения этих плоскостей по трем элементам. Первая из них проходит через точку M_1, параллельно векторам $\bar{l}_1$ и $\bar{l}$, следовательно (§1),

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (z+2)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6(x-1)-3y+10(z+2) = 0.$$

Таким образом, плоскость Π_1 имеет уравнение $6x+3y-10z-26=0$. Аналогично, плоскость Π_2 содержит точку $M_2(0,2,-1)$ и расположена параллельно векторам $\bar{l}_2$ и $\bar{l}$, поэтому

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z+1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (z+1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = x-14(y-2)+8(z+1) = 0$$

и, стало быть, $x-14y+8z+36=0$ – уравнение плоскости Π_2. Система из уравнений плоскостей Π_1 и Π_2 и даст нам общие уравнения перпендикуляра к прямым L_1 и L_2 :

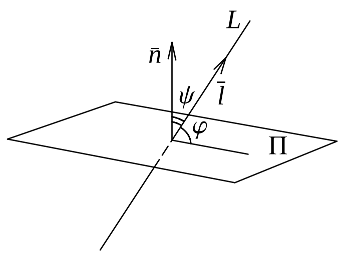
$$\begin{cases} 6x+3y-10z-26=0, \\ \ x-14y+8z+36=0. \end{cases}$$

В заключение этого параграфа вычислим *угол между прямой L, заданной каноническими уравнениями*

$$\frac{x-x_0}{l_x} = \frac{y-y_0}{l_y} = \frac{z-z_0}{l_z},$$

и плоскостью Π, для которой известно ее общее уравнение

$$Ax+By+Cz+D=0.$$



Очевидно, искомый угол φ связан с углом ψ между направляющим вектором $\bar{l}$ прямой и нормальным вектором $\bar{n}$ плоскости соотношением $\psi = \frac{\pi}{2} \mp \varphi$, следовательно, $\cos\psi = \pm\sin\varphi$, откуда,

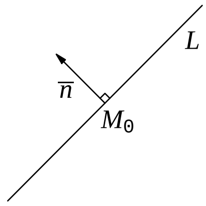
$$\sin\varphi = |\cos\psi| = \frac{|\bar{l}\cdot\bar{n}|}{|\bar{l}||\bar{n}|}.$$

В частности, если $\bar{l}\perp\bar{n}$, то $L\|\Pi$. Если же $\bar{l}\|\bar{n}$, то $L\perp\Pi$.

§3. Прямая на плоскости

Для прямой на плоскости наблюдается *большее разнообразие* ее уравнений, так как на плоскости *прямая фиксируется точкой, через которую она проходит* и, либо вектором ей перпендикулярным (*нормальным вектором*), либо вектором ей параллельным (*направляющим вектором*) и, следовательно, для прямой на плоскости можно записывать как уравнения, характерные для плоскости в пространстве (§1), так и аналоги уравнений прямой в пространстве (§2). Перечислим, не повторяя деталей, изложенных в предыдущих двух параграфах, основные уравнения прямой на плоскости и связанные с ними формулы.

Пусть прямая L на плоскости с выбранной в ней системой координат Oxy проходит через точку $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно ненулевому вектору $\bar{n}(A,B)$.



Уравнение такой прямой имеет вид:

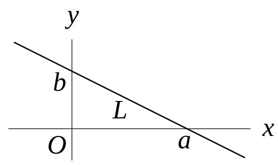
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

откуда после очевидных преобразований получим уравнение

$$Ax + By + C = 0,$$

которое представляет собой *общее уравнение прямой на плоскости.*

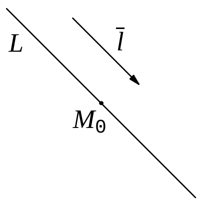
Пусть прямая L отсекает на координатных осях Ox и Oy отрезки величиной a и b соответственно.



Тогда, как и для плоскости, мы можем записать *уравнение прямой в отрезках*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Если прямая L содержит точку $M_0(x_0, y_0)$ и расположена параллельно ненулевому вектору $\bar{l}(l_x, l_y)$,



то ее *каноническое уравнение* имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{l_x} = \frac{y - y_0}{l_y}.$$

По аналогии с прямой в пространстве, прямая на плоскости может быть задана также *векторным уравнением*

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{l}, \ -\infty < t < +\infty$$

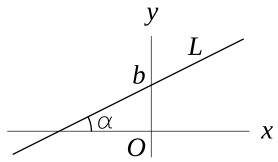
и *параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x = x_0 + l_x t, \\ y = y_0 + l_y t, \ -\infty < t < +\infty. \end{cases}$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой L на плоскости, заданной общим уравнением $Ax + By + C = 0$, может быть вычислено по формуле:

$$\rho(M_0, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{|\bar{n}|}.$$

Найдем еще одно уравнение прямой на плоскости, характерное для этого геометрического объекта. Пусть прямая L, заданная своим каноническим уравнением $\dfrac{x - x_0}{l_x} = \dfrac{y - y_0}{l_y}$, непараллельна оси Oy.



Тогда $l_x \neq 0$ и мы можем записать *уравнение прямой L с угловым коэффициентом*:

$$y = kx + b,$$

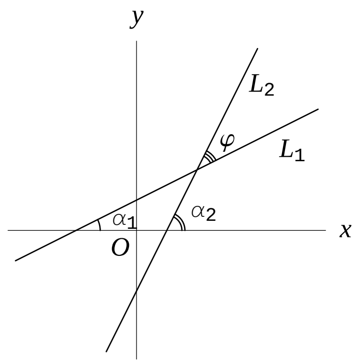
где $k = \dfrac{l_y}{l_x} = \operatorname{tg}\alpha$ – угловой коэффициент прямой, b – величина отрезка, который отсекает эта прямая на оси Oy. В частности,

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

представляет собой уравнение прямой с угловым коэффициентом, которая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$.

Если две прямые на плоскости заданы общими или каноническими уравнениями, то их взаимное расположение исследуется по аналогии с плоскостями или прямыми, заданными такими же уравнениями (§1 или §2). Изучим поэтому взаимное расположение двух прямых, которые заданы уравнениями с угловым коэффициентом. Итак, рассмотрим две прямые

$$L_1: \ y = k_1x + b_1; \quad L_2: \ y = k_2x + b_2.$$



Предположим сначала, что прямые не являются перпендикулярными, обозначим через $(\widehat{L_1, L_2}) = \varphi$ острый угол между ними. Тогда, очевидно, $(\widehat{L_1, L_2}) = |\alpha_1 - \alpha_2|$ и, следовательно,

$$\operatorname{tg}(\widehat{L_1, L_2}) = |\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)| = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|.$$

Если же $L_1 \perp L_2$, то нормальные векторы $\bar{n}_1(k_1, -1)$ и $\bar{n}_2(k_2, -1)$ этих прямых ортогональны, следовательно,

$$\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = k_1k_2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow k_1k_2 = -1.$$

Таким образом, *для перпендикулярности прямых L_1 и L_2 необходимо и достаточно, чтобы* $k_1k_2 = -1$.

Очевидно, прямые L_1 и L_2 параллельны в том и только в том случае, когда равны углы, которые они образуют с осью Ox. Следовательно, *для параллельности прямых L_1 и L_2 необходимо и достаточно, чтобы совпадали их угловые коэффициенты, т. е. $k_1 = k_2$.*

Пример. *Даны прямая $L: \ x + 3y - 5 = 0$ и точка $A(-2, 1)$. Найти уравнения прямых L_1, L_2, L_3, L_4, проходящих через точку A и таких, что $L_1 \| L$, $L_2 \perp L$, $(\widehat{L_3, L}) = (\widehat{L_4, L}) =$* $\operatorname{arctg} 2$.

Решение. Прямые L_1 и L имеют общий нормальный вектор $\bar{n}(1, 3)$, поэтому,

$$1(x + 2) + 3(y - 1) = 0,$$

т. е.

$$x + 3y - 1 = 0 \text{ – общее уравнение прямой } L_1.$$

Так как $L_2 \perp L$, то направляющим вектором прямой L_2 является нормальный вектор прямой L, следовательно,

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{3} \text{ – каноническое уравнение прямой } L_2.$$

Из уравнения прямой L находим $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$, следовательно, $k_L = -\frac{1}{3}$. Тогда угловые коэффициенты прямых L_3 и L_4 удовлетворяют уравнению

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2) = \left|\frac{k - k_L}{1 + kk_L}\right| \Longleftrightarrow 2 = \left|\frac{k + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}k}\right|,$$

откуда, $k_3 = -7,\ k_4 = 1$. Осталось записать уравнения прямых L_3 и L_4.

$$L_3:\ y - 1 = -7(x+2) \Longleftrightarrow y = -7x - 13;$$
$$L_4:\ y - 1 = 1(x+2) \Longleftrightarrow y = x + 3.$$

§4. Кривые второго порядка на плоскости

В предыдущих трех параграфах нами были изучены *линейные геометрические объекты – плоскость и прямая в пространстве и на плоскости.* Мы показали, что в декартовой системе координат они определяются алгебраическими уравнениями первой степени, т. е. линейными уравнениями. Предметом нашего исследования в этом параграфе будут являться *кривые второго порядка*, т. е. линии на плоскости, уравнения которых в декартовой системе координат Oxy имеют вид:

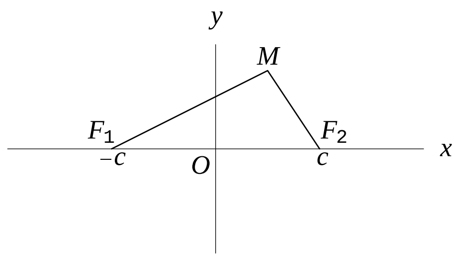
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где A, B, C, D, E, F – действительные числа. Мы убедимся в том, что, за исключением случаев вырождения данное уравнение определяет одну из трех замечательных линий – *эллипс, гиперболу или параболу.* Приведем сначала геометрическое определение каждой из этих линий и найдем их канонические уравнения.

1. Эллипс

Определение. *Эллипсом называется множество точек на плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек (фокусов эллипса) есть величина постоянная.*

Найдем каноническое уравнение эллипса. Обозначим через $2c$ фокусное расстояние, т. е. расстояние между фокусами, а через $2a$ – постоянную сумму расстояний от точек эллипса до фокусов. Из неравенства треугольника следует, что $a > c$. Выберем декартову систему координат на плоскости следующим образом: ось Ox направим через фокусы, а начало координат выберем посередине между ними.



Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка эллипса. По определению этой линии,

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a \Longleftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Упростим последнее уравнение:

$$(x-c)^2 + y^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 \Longleftrightarrow a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx;$$

$$a^2((x+c)^2 + y^2) = (a^2 + cx)^2 \Longleftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

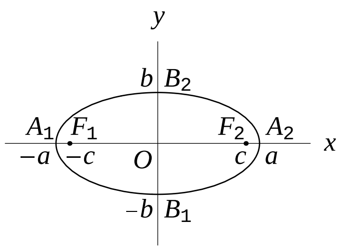
откуда, использовав обозначение $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, мы и получим *каноническое уравнение эллипса*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Построим эту линию. Для этого прежде всего заметим, что она симметрична относительно координатных осей и начала координат, так как переменные x и y входят в каноническое уравнение в квадратах. Отсюда следует, что эллипс достаточно построить в первой координатной четверти и затем отразить его относительно координатных осей. Из канонического уравнения эллипса находим:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Очевидно, эта функция определена и убывает при $0 \le x \le a$. Кроме того, ее график располагается выше прямой $y = \dfrac{b}{a}(a - x)$. Из приведенных рассуждений следует, что эллипс представляет собой следующую замкнутую линию на плоскости:



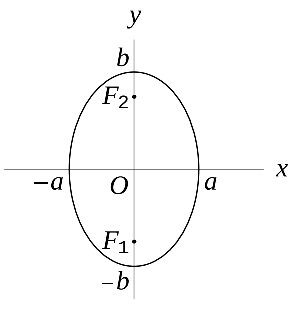
Числа a и b называются соответственно *большой и малой полуосями эллипса*. Точка $O(0,0)$ – *центр эллипса*, точки $A_1(-a,0), A_2(a,0), B_1(0,-b), B_2(0,b)$ – *вершины эллипса*, отрезок A_1A_2 – *большая*, B_1B_2 – *малая оси эллипса*.

Форму эллипса характеризует величина $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, равная отношению фокусного расстояния к длине большой оси. Это число называется *эксцентриситетом эллипса*. Очевидно, $0 \le \varepsilon < 1$. Так как

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2},$$

то при $\varepsilon \approx 0$ мы имеем $b \approx a$ и, следовательно, эллипс по форме мало отличается от окружности. В предельном случае, когда $\varepsilon = 0$, полуоси совпадают и эллипс превращается в окружность. Если же $\varepsilon \approx 1$, то $\dfrac{b}{a} \approx 0$ и эллипс является вытянутым вдоль оси Ox.

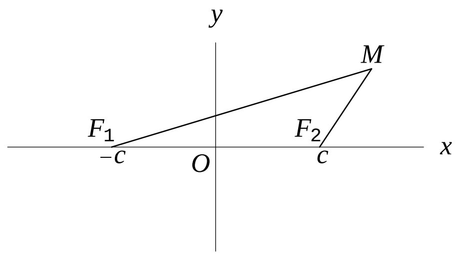
Замечание. В уравнении эллипса может оказаться, что $a < b$. Тогда фокусы эллипса находятся на оси Oy в точках $F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$ и b – большая, $a = \sqrt{b^2 - c^2}$ – малая полуоси эллипса.



2. Гипербола

Определение. *Гипербола представляет собой линию на плоскости, для каждой точки которой абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек (фокусов гиперболы) есть величина постоянная.*

Обозначим и здесь фокусное расстояние через $2c$, а через $2a$ – постоянную абсолютную величину разности расстояний от точек гиперболы до фокусов. Для гиперболы $a < c$, что следует из неравенства треугольника. Выберем декартову систему координат на плоскости точно также, как и при выводе канонического уравнения эллипса.



По определению гиперболы для произвольной точки $M(x, y)$ этой линии

$$||F_1M| - |F_2M|| = 2a \Longleftrightarrow |\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a.$$

Избавляясь от корней в этом уравнении, получим:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

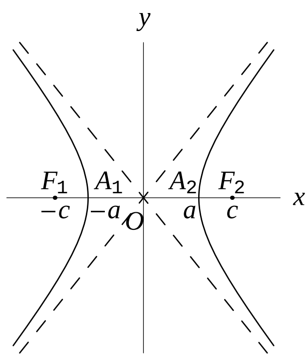
Обозначая здесь $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, получим *каноническое уравнение гиперболы*:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Как видно из ее уравнения, гипербола симметрична относительно координатных осей и начала координат. Из канонического уравнения гиперболы следует, что в первой четверти

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},\ x \geq a.$$

Эта функция возрастает, $\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} < \frac{b}{a}x$ при всех $x \geq a$ и $\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \approx \frac{b}{a}x$ при больших x. Это означает, что в первой четверти гипербола, выходя из точки $(a, 0)$ на оси Ox, приближается затем при больших значениях x к прямой $y = \frac{b}{a}x$. Следовательно, гипербола выглядит следующим образом:



Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ называются *асимптотами гиперболы.* Точка $O(0, 0)$ – *центр гиперболы.* Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ называются *вершинами гиперболы.* Ось симметрии гиперболы, пересекающая ее в вершинах, называется *действительной осью.* Вторая ось симметрии, не имеющая с гиперболой общих точек, называется *мнимой осью гиперболы.* Числа a и b называются соответственно *действительной и мнимой полуосями гиперболы.* Если полуоси равны, то гипербола называется *равносторонней* (*равнобочной*).

Как и для эллипса, определим *эксцентриситет гиперболы* как отношение половины фокусного расстояния к действительной полуоси:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Так как

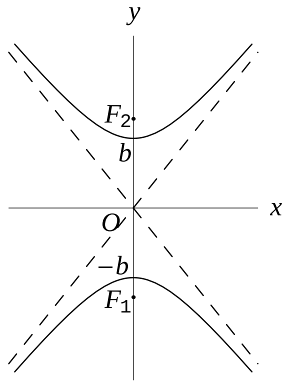
$$\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1},$$

то эксцентриситет гиперболы характеризует величину угла, в котором она располагается. При $\varepsilon \approx 1$ угол мал и, наоборот, если эксцентриситет велик, то и угол, в котором находится гипербола, близок к развернутому.

Замечание. В каноническом уравнении гиперболы знаки перед квадратами могут располагаться и в обратном порядке:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

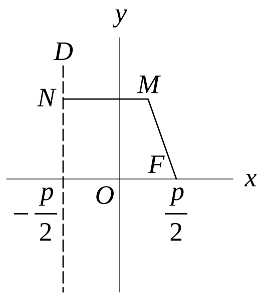
В этом случае фокусы и вершины находятся на оси Oy и $a = \sqrt{c^2 - b^2}$.



3. Парабола

Определение. *Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки (фокуса параболы) и фиксированной прямой (директрисы параболы).*

Обозначим расстояние от фокуса до директрисы через p. Число $p > 0$ называется *параметром параболы.* Выберем удобную систему координат на плоскости: ось Ox направим через фокус F перпендикулярно директрисе D, а начало координат возьмем посередине между директрисой и фокусом.



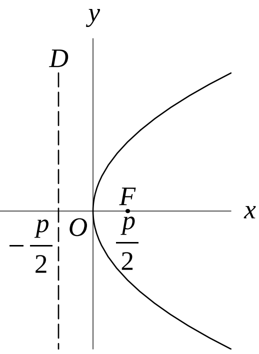
Если $M(x, y)$ – произвольная точка параболы, то по определению этой кривой

$$|MF| = |MN| \Longleftrightarrow \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

После возведения в квадрат и очевидных преобразований, получим *каноническое уравнение параболы*:

$$y^2 = 2px.$$

Очевидно, парабола проходит через начало координат и симметрична относительно оси Ox. Точка $O(0, 0)$ называется *вершиной параболы*, ось Ox – *осью параболы.*



Замечание. Если бы при выборе системы координат мы направили ее оси в противоположные стороны, то каноническое уравнение параболы приняло бы вид:

$$y^2 = -2px.$$

Аналогично, уравнения

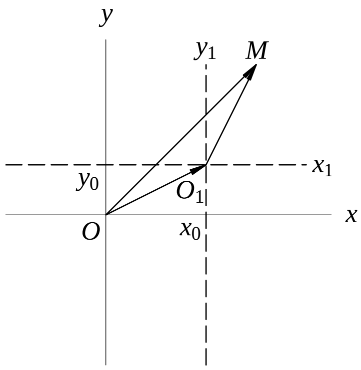
$$x^2 = \pm 2py$$

также определяют параболы, фокусы которых расположены на оси Oy, а директрисы параллельны оси Ox.

4. Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

Покажем, что общее уравнение кривой второго порядка на плоскости, кроме случаев вырождения, определяет одну из линий – эллипс, гиперболу или параболу.

Выясним сначала, как преобразуются координаты точки на плоскости при параллельном переносе системы координат. Предположим, что осуществлен параллельный перенос системы координат Oxy в точку $O_1(x_0, y_0)$. Пусть $M(x, y)$ – координаты точки M в старой Oxy, а $M(x_1, y_1)$ – координаты той же точки в новой $O_1x_1y_1$ системе координат.



Так как $\overline{O_1M} = \overline{OM} - \overline{OO_1}$, то новые и старые координаты точки на плоскости связаны линейными соотношениями:

$$\begin{cases} x_1 = x - x_0, \\ y_1 = y - y_0. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь *уравнение второго порядка на плоскости в частном случае, когда оно не содержит произведения координат xy* :

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

причем коэффициенты A и C не равны одновременно нулю. Здесь возможны три случая.

а) $AC > 0$. Очевидно, всегда можно считать, что $A > 0,\ C > 0$.
Выделяя в уравнении второго порядка полные квадраты по переменным x и y, получим:

$$A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 + F_1 = 0, \tag{1}$$

где x_0, y_0, F_1 – некоторые действительные числа. Ясно, что при $F_1 > 0$ ни одна из точек плоскости не удовлетворяет этому уравнению. Если $F_1 = 0$, то единственным решением полученного уравнения является точка $O_1(x_0, y_0)$. Наконец, при $F_1 < 0$ уравнение приводится к виду

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

и, следовательно, в смещенной с помощью параллельного переноса в точку $O_1(x_0, y_0)$ системе координат оно является каноническим уравнением эллипса:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

b) $AC < 0$. Будем считать для определенности, что $A > 0,\ C < 0$.
В этом случае исходное уравнение второго порядка также приводится к виду (1). При $F_1 = 0$ оно определяет пару прямых, проходящих, через точку $O_1(x_0, y_0)$:

$$\sqrt{A}(x-x_0) \pm \sqrt{-C}(y-y_0) = 0.$$

Если же $F_1 \neq 0$, то полученное уравнение мы можем преобразовать к виду

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \pm 1$$

и, стало быть, после параллельного переноса системы координат в точку $O_1(x_0, y_0)$ последнее уравнение является каноническим уравнением гиперболы:

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = \pm 1.$$

c) $AC = 0$. Предположим, например, что $C \neq 0$.
Выделяя в данном уравнении второго порядка полный квадрат по переменной y, получим:

$$C(y-y_0)^2 + Dx + F_1 = 0.$$

Если в этом уравнении $D = 0$, то при $CF_1 > 0$ множество решений этого уравнения пусто, а при $CF_1 \leq 0$ полученное уравнение определяет пару прямых, параллельных оси Ox :

$$y - y_0 = \pm\sqrt{-\frac{F_1}{C}}.$$

Если же $D \neq 0$, то мы можем привести уравнение к виду:

$$(y-y_0)^2 = \pm 2p(x-x_0),$$

т. е. после параллельного переноса системы координат в точку $O_1(x_0, y_0)$, мы получим тем самым каноническое уравнение параболы:

$$y_1^2 = \pm 2px_1.$$

Аналогично, если в исходном уравнении второго порядка $AC = 0$ и $A \neq 0$, то, не принимая во внимание вырожденные случаи, это уравнение мы также можем привести к каноническому уравнению параболы:

$$x_1^2 = \pm 2py_1.$$

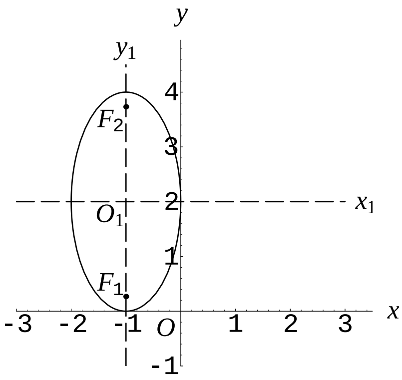
Пример 1. *Привести уравнение второго порядка к каноническому виду, назвать и построить кривую*:

$$4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0.$$

Решение. Выделяя полные квадраты по обеим переменным, получим:

$$4(x+1)^2 + (y-2)^2 - 4 = 0 \Longleftrightarrow \frac{(x+1)^2}{1^2} + \frac{(y-2)^2}{2^2} = 1,$$

что представляет собой каноническое уравнение эллипса в смещенной в точку $O_1(-1, 2)$ системе координат. Для этого эллипса $a = 1,\ b = 2,\ c = \sqrt{3}$ и, следовательно, фокусы находятся в точках $F_1(-1,\ 2-\sqrt{3}),\ F_2(-1,\ 2+\sqrt{3})$. Эксцентриситет эллипса равен $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Пример 2. *Найти каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $O_1(3,2)$, осью симметрии, параллельной координатной оси Ox и фокусом на оси Oy. Построить параболу.*

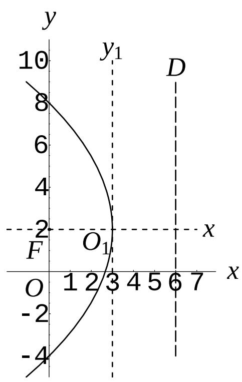
Решение. Фокус параболы находится в точке $F(0,2)$, следовательно, уравнение параболы с учетом смещения имеет вид:

$$(y-2)^2 = -2p(x-3).$$

Здесь $\dfrac{p}{2} = 3 \Longrightarrow p = 6$ и, стало быть,

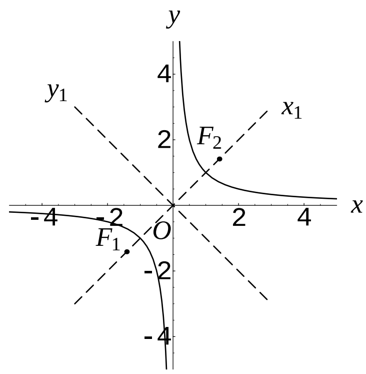
$$(y-2)^2 = -12(x-3)$$

– каноническое уравнение параболы.



Замечание. Для приведения к каноническому виду уравнения второго порядка, содержащего произведение координат xy, необходимо кроме параллельного переноса выполнить еще и поворот системы координат на определенный угол. Например, для равносторонней гиперболы $xy = 1$ следует повернуть систему координат Oxy вокруг ее начала на угол $45°$ против часовой стрелки. Поскольку вершины гиперболы находятся на расстоянии $\sqrt{2}$ от начала координат, то в новой системе координат Ox_1y_1 каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x_1^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{y_1^2}{(\sqrt{2})^2} = 1.$$

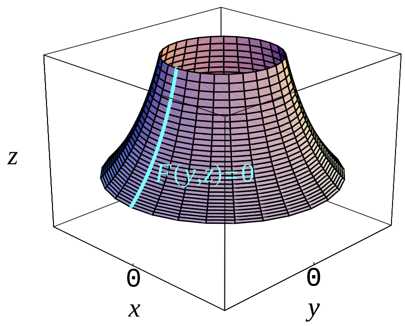


§5. Поверхности второго порядка в пространстве

В заключение этой главы мы изучим поверхности в пространстве, которые в декартовой системе координат задаются алгебраическими уравнениями второй степени. Существуют пять видов таких поверхностей: *эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды, цилиндры второго порядка и конус второго порядка.*

0. Поверхность вращения

Найдем уравнение поверхности, которая получается вращением некоторой линии вокруг одной из координатных осей. Пусть линия L, которая в координатной плоскости Oyz задается уравнением $F(y,z)=0$, вращается вокруг оси Oz.



Пусть $M(x,y,z)$ – произвольная точка на поверхности вращения. Перегоним ее по окружности, расположенной в сечении поверхности плоскостью, проходящей через данную точку перпендикулярно оси Oz, в точку N на линии L. Поскольку расстояние от точки M до оси Oz равно $\sqrt{x^2+y^2}$, то точка N имеет координаты $N\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z\right)$. Подставив координаты точки N в уравнение линии L, мы и получим тем самым *уравнение поверхности вращения*:

$$F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z\right)=0.$$

Найдем теперь уравнения поверхностей, которые получаются вращением кривых второго порядка с последующей линейной деформацией этих поверхностей.

1. Эллипсоид

Возьмем в плоскости Oyz эллипс

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

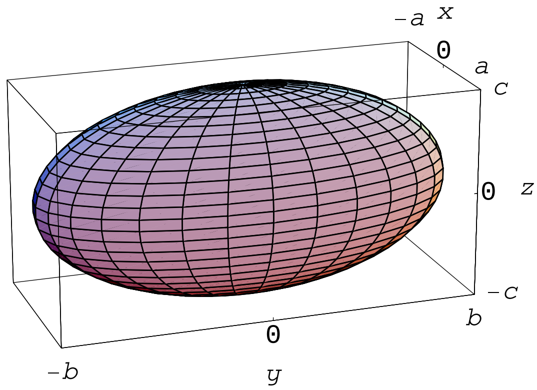
и будем вращать его вокруг оси Oz. В результате, как следует из предыдущего пункта, мы получим поверхность с уравнением

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

которая называется *эллипсоидом вращения.* Заменив в найденном уравнении координату x на $\dfrac{b}{a}x$, т. е. линейно деформируя поверхность вдоль оси Ox с коэффициентом $\dfrac{a}{b}$, мы получим тем самым уравнение *эллипсоида* общего вида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Положительные числа a, b, c называются *полуосями эллипсоида.*



Очевидно, *сечениями эллипсоида* плоскостями параллельными координатным, являются *эллипсы.*

Замечание. В частном случае, когда $a = b = c = R$ эллипсоид превращается в сферу

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

радиуса R с центром в начале координат.

2. Гиперболоиды

а) ***Однополостный гиперболоид.***

Вращая гиперболу

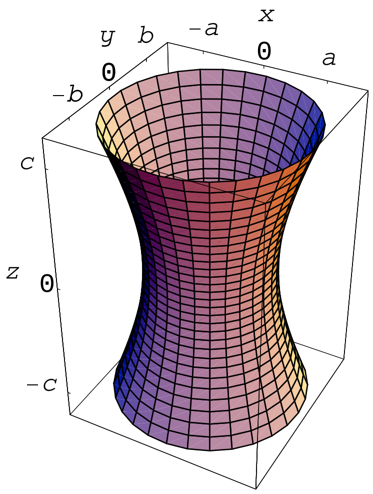
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

вокруг оси Oz, получим *однополостный гиперболоид вращения* с уравнением

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

После линейной деформации вдоль оси Ox эта поверхность превращается в *однополостный гиперболоид общего вида с осью* Oz :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Аналогично, уравнения однополостных гиперболоидов с осями Ox и Oy имеют, соответственно, вид:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Сечениями однополостного гиперболоида плоскостями, перпендикулярными его оси, являются *эллипсы*, а в сечениях плоскостями, перпендикулярными другим координатным осям, располагаются *гиперболы.*

b) *Двухполостный гиперболоид.*

Поверхность, полученная вращением вокруг оси Oz гиперболы

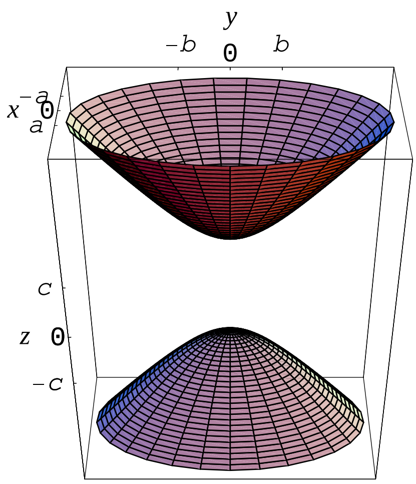
$$-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

вершины которой расположены на оси вращения, называется *двухполостным гиперболоидом вращения.* Запишем уравнение двухполостного гиперболоида:

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Линейная деформация двухполостного гиперболоида вращения вдоль оси Ox преобразует его в *двухполостный гиперболоид общего вида с осью Oz*. Уравнение этой поверхности имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$



Двухполостные гиперболоиды с осями Ox и Oy имеют, соответственно, уравнения:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1,\ \ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Как и в случае однополостного гиперболоида, *сечениями двухполостного гиперболоида* плоскостями, параллельными координатным, являются *эллипсы и гиперболы.*

3. Параболоиды

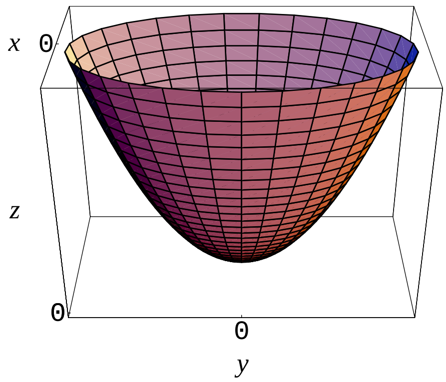
a) *Эллиптический параболоид.*

Вращение параболы вокруг ее оси приводит к поверхности, которая называется *параболоидом вращения.* В частности, если параболу с каноническим уравнением $y^2=2pz$ вращать вокруг оси Oz, то, как следует из пункта 0, уравнение полученного параболоида вращения имеет вид:

$$\frac{x^2+y^2}{p}=2z.$$

Линейная деформация параболоида вращения вдоль оси Oy превращает его в *эллиптический параболоид* с уравнением:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z.$$



Положительные числа p, q называются *параметрами параболоида*, точка $O(0,0)$ – *вершина*, ось Oz – *ось эллиптического параболоида.*

Уравнения эллиптических параболоидов с осями Ox и Oy имеют, соответственно, вид:

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x, \ \frac{x^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2y.$$

Как следует из уравнения эллиптического параболоида, плоскости, перпендикулярные его оси, *пересекают* эту поверхность по *эллипсам*, а в сечениях плоскостями, параллельными другим координатным, находятся *параболы.*

Замечание. Изменение знака в правой части уравнения эллиптического параболоида приводит к отражению этой поверхности относительно координатной плоскости, перпендикулярной оси параболоида.

b) *Гиперболический параболоид.*

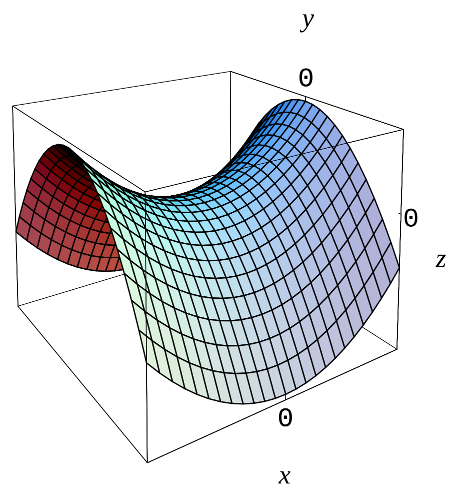
Будем поступательно перемещать *образующую параболу*

$$y^2 = -2qz, \ q > 0,$$

расположенную в плоскости Oyz, параллельно самой себе вдоль *направляющей параболы*

$$x^2 = 2pz, \ p > 0,$$

находящейся в плоскости Oxz. Полученная таким образом поверхность называется *гиперболическим параболоидом* или *седловидной поверхностью.*



Найдем уравнение этой поверхности. Пусть $M(x,y,z)$ – произвольная точка гиперболического параболоида. По его построению точка M принадлежит параболе с вершиной в точке $(x, 0, \frac{x^2}{2p})$, параллельной параболе $y^2 = -2qz$. Так как координаты произвольной точки $M_1(x, y_1, z_1)$ этой параболы удовлетворяют уравнению

$$y_1^2 = -2q\left(z_1 - \frac{x^2}{2p}\right),$$

то, подставив в него координаты точки M, мы и получим после несложных преобразований *уравнение гиперболического параболоида*:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Здесь, как и для эллиптического параболоида, числа p, q – *параметры гиперболического параболоида*, точка $O(0,0)$ и ось Oz – соответственно *вершина и ось гиперболического параболоида.*

Замечание 1. Седловидная поверхность может быть также получена перемещением параболы $x^2 = 2pz$ параллельно самой себе вдоль параболы $y^2 = -2qz$.

Судя по уравнению гиперболического параболоида, в сечениях этой поверхности плоскостями $z = h > 0$ находятся гиперболы, действительные оси которых параллельны координатной оси Ox. Аналогично, плоскости $z = h < 0$ пересекают данную поверхность по гиперболам с действительными осями, параллельными оси Oy. Наконец, плоскость Oxy пересекает гиперболический параболоид по двум прямым $\sqrt{q}x \pm \sqrt{p}y = 0$.

Гиперболические параболоиды, осями которых служат координатные оси Ox и Oy, имеют, соответственно, уравнения:

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x, \quad \frac{z^2}{p} - \frac{x^2}{q} = 2y.$$

Замечание 2. Отразив седловидную поверхность относительно координатной плоскости, перпендикулярной ее оси, получим гиперболический параболоид, уравнение которого отличается знаком правой части от уравнения исходной поверхности.

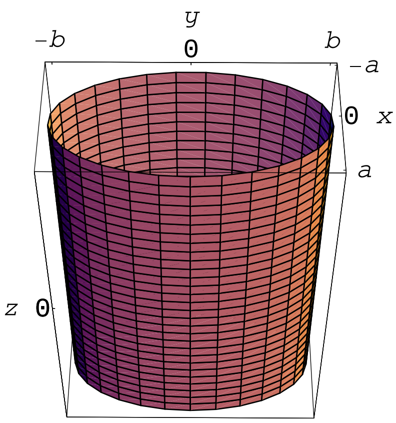
4. Цилиндры второго порядка

Цилиндром второго порядка называется поверхность, полученная перемещением некоторой прямой (*образующей*) вдоль кривой второго порядка (*направляющей*), расположенной в плоскости, не содержащей образующую, параллельно фиксированному ненулевому вектору в пространстве.

Ограничимся случаем, когда направляющая расположена в одной из координатных плоскостей, а образующая перпендикулярна этой плоскости. Возьмем для определенности в плоскости Oxy кривую второго порядка и будем перемещать прямую, параллельную оси Oz, вдоль этой кривой. Так как проекцией любой точки $M(x, y, z)$ полученного таким образом цилиндра на плоскость Oxy является точка $N(x, y)$, принадлежащая кривой второго порядка, то координаты точки M удовлетворяют уравнению этой кривой. Следовательно, *уравнением построенного цилиндра является уравнение его направляющей.*

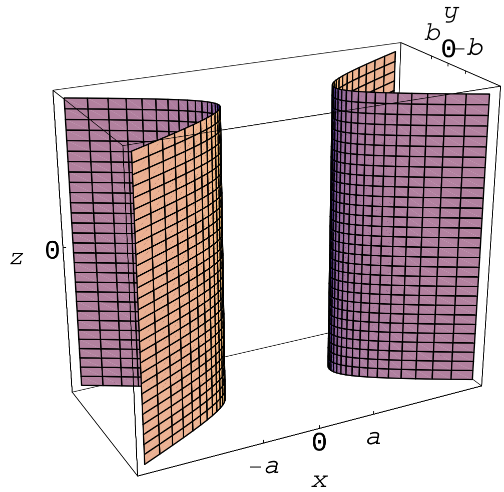
Перечислим теперь цилиндры второго порядка.

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – *эллиптический цилиндр.*

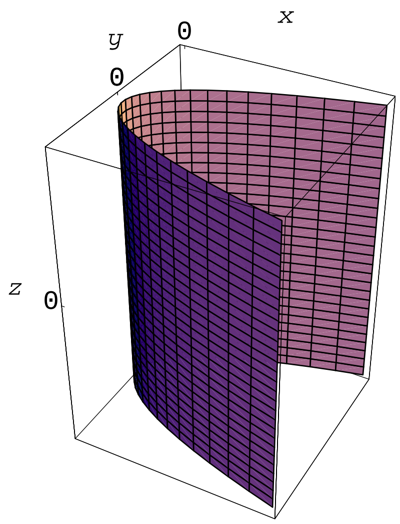


В частности, при $a = b$ мы получим *круговой цилиндр.*

2) $\quad \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – *гиперболический цилиндр.*



3) $\quad y^2 = 2px$ – *параболический цилиндр.*



Аналогичные уравнения имеют цилиндры второго порядка, образующие которых параллельны осям Ox и Oy, а направляющие расположены в координатных плоскостях Oyz и Oxz, соответственно.

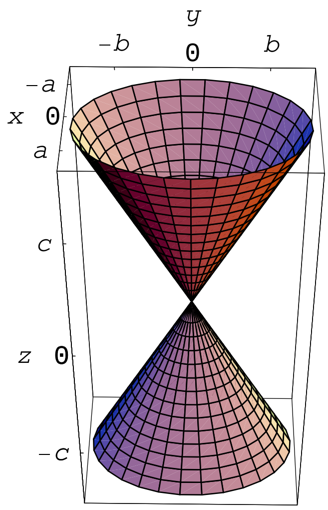
5. Конус второго порядка

Конус второго порядка представляет собой поверхность, которая может быть получена перемещением прямой (*образующей*), имеющей неподвижную точку, которая называется *вершиной конуса*, вдоль кривой второго порядка (*направляющей*), расположенной в плоскости, не содержащей вершину.

Найдем уравнение конуса, вершина которого совпадает с началом координат, а направляющей служит эллипс с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

расположенный в плоскости $z = c,\ c > 0$.



Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка конуса. Обозначим через $M_1(x_1, y_1, z_1)$ точку пересечения образующей, проходящей через точку M, с направляющей. Координаты точки M_1 удовлетворяют уравнениям

$$z_1 = c; \ \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

а точки M – уравнениям

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}.$$

Из последних уравнений мы находим:

$$x_1 = \frac{cx}{z}, \ y_1 = \frac{cy}{z}.$$

Подставив найденные выражения для x_1, y_1 в уравнение эллипса, получим после несложных преобразований *уравнение конуса второго порядка*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Координатная ось Oz называется *осью конуса*. Если $a = b$, то конус является *круговым.*

Конусы второго порядка с осями Ox и Oy имеют, соответственно, уравнения:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Покажем, что *вид конуса второго порядка не зависит от выбора направляющей.* Действительно, если в качестве направляющей взять гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

находящуюся в плоскости $z = c$, то после рассуждений, аналогичных предыдущим, получим поверхность с уравнением

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

т. е. конус с осью Ox. Если же за направляющую мы выберем в плоскости $z = c$ параболу с уравнением

$$y^2 = 2px, \ p > 0,$$

то построенный таким образом конус имеет уравнение

$$cy^2 = 2pxz.$$

Наблюдая со стороны положительной полуоси Oy, повернем систему координат Oxz вокруг оси Oy на угол $45°$ против часовой стрелки. Тогда произведение xz в системе координат Ox_1z_1

запишется как $\frac{1}{2}(z_1^2 - x_1^2)$ (§4, пункт 4, замечание). Следовательно, в новой системе координат Ox_1yz_1 найденное уравнение поверхности приобретает вид

$$\frac{x_1^2}{(\sqrt{c})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{p})^2} - \frac{z_1^2}{(\sqrt{c})^2} = 0$$

и, стало быть, эта поверхность является конусом с осью Oz_1.

Как следует из уравнения конуса и его построения, плоскости, перпендикулярные его оси, пересекают эту поверхность по *эллипсам*, сечениями конуса плоскостями, параллельными его оси, являются *гиперболы*, и, наконец, в сечениях конуса плоскостями, параллельными образующей, располагаются *параболы*.

6. О приведении уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду

По аналогии с уравнением кривой второго порядка (§4, пункт 4), уравнение поверхности второго порядка, не содержащее произведений координат, мы можем за счет выделения полных квадратов привести к уравнению одной из рассмотренных в пунктах 1 – 5 поверхностей. Следовательно, мы получим одну из поверхностей второго порядка в смещенной с помощью параллельного переноса системе координат. Исключение, правда, составляет случай, когда уравнение поверхности содержит полный квадрат и два линейных слагаемых относительно других координат. Такая поверхность представляет собой параболический цилиндр в смещенной с помощью параллельного переноса и повернутой затем вокруг одной из координатных осей системе координат.

Пример. *Привести уравнение второго порядка*

$$4y^2 - z^2 - 8x - 8y - 2z + 27 = 0$$

к каноническому виду, назвать и построить поверхность.

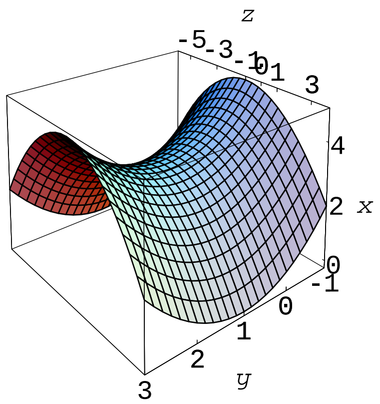
Решение. После выделения полных квадратов по переменным y, z получим:

$$4(y-1)^2 - (z+1)^2 - 8(x-3) = 0.$$

Переписав это уравнение в виде

$$\frac{(y-1)^2}{1} - \frac{(z+1)^2}{4} = 2(x-3),$$

мы замечаем, что в смещенной с помощью параллельного переноса в точку $O_1(3, 1, -1)$ системе координат, эта поверхность представляет собой гиперболический параболоид с параметрами $p = 1,\ q = 4$.



ГЛАВА IV. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей главе мы познакомимся с основными понятиями важнейшего, как в самой математике, так и в ее приложениях, раздела – математического анализа. *Основой математического анализа служит понятие предела или бесконечно малой.*

§1. Свойства действительных чисел. Основные подмножества множества действительных чисел

В этом параграфе мы перечислим *основные свойства множества* $\mathbf{R}$ *действительных чисел, которыми оно полностью определяется.* Многие из этих свойств известны из курса элементарной математики. При изложении мы будем также считать известными простейшие понятия теории множеств и принятые там обозначения.

Сформулируем сначала свойства, касающиеся операций *сложения и умножения* действительных чисел.

1) *Коммутативность*: $a+b=b+a$; $ab=ba$, где $a,\ b\in\mathbf{R}$.

2) *Ассоциативность*: $(a+b)+c=a+(b+c)$; $(ab)c=a(bc)$, где $a,\ b,\ c\in\mathbf{R}$.

3) *Существуют числа* 0 *(нуль) и* 1 *(единица) такие, что* $a+0=a$; $a\cdot 1=a$ *для любого* $a\in\mathbf{R}$.

4) *Для любого* $a\in\mathbf{R}$ *существует противоположное ему число* $-a$, *для которого* $a+(-a)=0$. *Если, кроме того,* $a\neq 0$, *то найдется также число* a^{-1} *(обратное данному) такое, что* $aa^{-1}=1$.

Число $a+(-b)$ называется *разностью* действительных чисел a,b и обозначается через $a-b$. Аналогично, *частным* от деления чисел $a,b,\ b\neq 0$ называется число ab^{-1}, которое обозначается через a/b.

5) *Дистрибутивность*: $(a+b)c=ac+bc$, где $a,\ b,\ c\in\mathbf{R}$.

Теперь остановимся на свойствах *упорядоченности* множества действительных чисел. Упорядоченность означает, что *любые два действительных числа* a *и* b *сравнимы*, т. е. для них выполняется одно их трех соотношений: $a<b,\ a>b,\ a=b$. Число $a>0$ ($a<0$) называется *положительным* (*отрицательным*).

6) *Транзитивность*: *из неравенств* $a<b,\ b<c$ *для действительных чисел* a,b,c *следует неравенство* $a<c$.

7) *Если* $a<b,\ a,b\in\mathbf{R}$, *то* $a+c<b+c$ *для любого числа* c.

8) *Для любых положительных чисел* a,b *произведение* ab *также положительно.*

Отсюда и из свойств 5) и 7), в частности, следует, что, если $a<b$ и $c>0$, то $ac<bc$.

Укажем еще одно важное свойство множества действительных чисел.

9) *Полнота (непрерывность). Пусть* A *и* B *– произвольные числовые множества. Если для любых чисел* $a\in A,\ b\in B$ *выполняется неравенство* $a\leq b$, *то существует число-разделитель* c *такое, что* $a\leq c\leq b$ *для всех* $a\in A,\ b\in B$.

Например, если множества A и B составляют рациональные числа, квадраты которых меньше и больше 2, соответственно, то разделителем здесь служит число $c=\sqrt{2}$.

Определим теперь основные подмножества множества действительных чисел.

а) *Множество натуральных чисел* $\mathbf{N}$ составляют числа

$$1,\ 2=1+1,\ 3=2+1,\ \ldots,\ n=(n-1)+1,\ \ldots$$

Такое определение множества натуральных чисел является основой *метода математической индукции*: если имеется утверждение $S(n)$, зависящее от произвольного натурального номера n, то для его доказательства необходимо проверить его при $n=1$, а затем, предположив, что оно верно для всех номеров, не превосходящих n, доказать справедливость утверждения $S(n+1)$.

В качестве примера применения метода математической индукции приведем доказательство *неравенства Бернулли*

$$(1+a)^n\geq 1+na,\ n\in\mathbf{N},\ a>-1,$$

которое мы будем использовать в дальнейшем.

Доказательство. Очевидно, при $n = 1$ неравенство справедливо. Предположим, что оно верно для номера n. Умножив обе его части на положительное число $1 + a$, получим

$$(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \Longrightarrow (1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a,$$

что и требовалось доказать.

b) *Множество целых чисел*: $\mathrm{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots\}$.

c) *Множество рациональных чисел*: $\mathbf{Q} = \{m/n \,|\, m,\, n \in \mathrm{Z}\}$.

d) *Множество иррациональных чисел*: $\mathbf{I} = \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$.

Отметим еще некоторые подмножества множества действительных чисел, которые мы часто будем использовать в дальнейшем. Пусть $a,\, b \in \mathbf{R},\ a < b$. Тогда:

e) *интервал числовой оси*: $(a,\, b) = \{x \in \mathbf{R} \,|\, a < x < b\}$;

f) *отрезок числовой оси*: $[a,\, b] = \{x \in \mathbf{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$;

g) *полуинтервалы числовой оси*: $[a,\, b) = \{x \in \mathbf{R} \,|\, a \leq x < b\}$; $(a,\, b] = \{x \in \mathbf{R} \,|\, a < x \leq b\}$.
Множества e) – g) называются *промежутками числовой оси.*

Неограниченный в какую-нибудь сторону промежуток числовой оси называется *полуосью* или *бесконечным промежутком.*

§2. Числовые множества

Множество $A \subset \mathbf{R}$ называется *ограниченным сверху* (*снизу*), если существует действительное число M (m) такое, что для всех чисел $a \in A$ выполняется неравенство

$$a \leq M \ (a \geq m).$$

Числа M и m называются, соответственно, *мажорантой* и *минорантой* множества A.

Ограниченное снизу и сверху множество, называется *ограниченным.*

Наименьшая из мажорант (наибольшая из минорант) называется *верхней* (*нижней*) *гранью* множества A. Верхняя грань обозначается через $\sup A$ (*supremum*). Для нижней грани используется обозначение $\inf A$ (*infimum*).

В качестве примера рассмотрим множество

$$A = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{N} \right\}.$$

Здесь $\inf A = 0,\ \sup A = 1$.

Докажем теперь теорему о существовании граней множества.

Теорема 1. *Ограниченное сверху* (*снизу*) *множество имеет верхнюю* (*нижнюю*) *грань.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, для определенности, что множество A ограничено сверху. Обозначим через B множество его мажорант. Тогда для любых чисел $a \in A$, $b \in B$ выполняется неравенство $a \leq b$. По свойству полноты множества действительных чисел (§1, свойство 9)) существует число-разделитель c такое, что для всех $a \in A$, $b \in B$ имеет место неравенство

$$a \leq c \leq b.$$

Таким образом, с одной стороны, число c является мажорантой, а, с другой стороны, оно не превосходит любой из мажорант и, следовательно, $c = \sup A$. Аналогично доказывается существование нижней грани.

Рассмотрим *систему вложенных отрезков*

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \ldots,$$

т. е.

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1.$$

Принцип вложенных отрезков. *Любая система вложенных отрезков имеет непустое пересечение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть множества A и B состоят из левых и правых концов отрезков, соответственно. Так как для любых $a_k \in A$, $b_l \in B$ справедливо неравенство $a_k \leq b_l$, то по свойству полноты множества действительных чисел найдется разделитель $c \in \mathbf{R}$ этих множеств и, следовательно, для всех $n \in \mathbf{N}$

$$a_n \le c \le b_n.$$

Таким образом, число c принадлежит всех отрезкам системы. П р и н ц и п д о к а з а н.

Множества можно сравнивать по количеству элементов, содержащихся в них. Конечные множества считаются *равномощными*, если они имеют одинаковое число элементов. Если множество содержит бесконечное количество элементов, то можно попытаться сравнить его с другим бесконечным множеством простой структуры, например, с множеством натуральных чисел.

Бесконечное множество называется *счетным*, если его элементы можно пронумеровать, т. е. каждый элемент множества получает свой, отличный от других номер, выражающийся натуральным числом.

Примерами счетных множеств могут служить, например, множества целых и рациональных чисел. Целые числа можно пересчитать, расположив их в ряд:

$$0,\ -1,\ 1,\ -2,\ 2,\ \ldots,\ -n,\ n,\ \ldots$$

Для того, чтобы пронумеровать рациональные числа, расположим их в следующей бесконечной матрице:

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \ldots \\
\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{2} & -\dfrac{3}{2} & \dfrac{5}{2} & -\dfrac{5}{2} & \dfrac{7}{2} & \ldots \\
\dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} & -\dfrac{2}{3} & \dfrac{4}{3} & -\dfrac{4}{3} & \dfrac{5}{3} & \ldots \\
\dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{4} & \dfrac{3}{4} & -\dfrac{3}{4} & \dfrac{5}{4} & -\dfrac{5}{4} & \dfrac{7}{4} & \ldots \\
. & . & . & . & . & . & . & \ldots
\end{array}$$

В строках этой матрицы записаны все несократимые рациональные дроби с фиксированным знаменателем. Ясно, что каждому рациональному числу однозначно найдется место в этой матрице. Занумеруем теперь числа матрицы по диагоналям, начиная с левого верхнего угла, т. е.

$$1 \to 0,\ 2 \to 1,\ 3 \to \frac{1}{2},\ 4 \to \frac{1}{3},\ 5 \to -\frac{1}{2},\ 6 \to -1,\ \ldots,$$

где запись $n \to r$ означает, что рациональное число r получает номер n. Таким образом, каждое рациональное число будет пронумеровано и, следовательно, множество $\mathbf{Q}$ счетно.

На этих примерах мы наблюдаем любопытный парадокс, который является особенностью бесконечных множеств: *бесконечное множество может быть равномощно своей части*, т. е. содержать столько же элементов, сколько их имеется в собственном подмножестве.

В заключение этого параграфа покажем, что существуют множества, которые являются более мощными, чем счетные.

Теорема 2. *Любой отрезок множества действительных чисел является несчетным множеством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, наоборот, что отрезок $[a,\, b],\ a < b$ является счетным множеством и пусть

$$[a,\, b] = \{x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, \ldots\}$$

– пронумерованное множество чисел этого отрезка. Выберем внутри данного отрезка отрезок $[a_1,\, b_1]$, который не содержит число x_1, внутри отрезка $[a_1,\, b_1]$ найдется отрезок $[a_2,\, b_2]$, не содержащий число $x_2,\, \ldots$, внутри отрезка $[a_{n-1},\, b_{n-1}]$ возьмем отрезок $[a_n,\, b_n]$, в котором не содержится число $x_n,\, \ldots$. В результате мы получим систему вложенных отрезков

$$[a,b] \supseteq [a_1,b_1] \supseteq [a_2,b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_n,b_n] \supseteq \ldots\ .$$

В соответствии с принципом вложенных отрезков, найдется число c, общее для всех отрезков. Пусть s – номер этого числа, т. е. $c = x_s$ и, следовательно, $x_s \in [a_s, b_s]$. Полученное противоречие и доказывает утверждение теоремы.

§3. Предел последовательности

Перейдем к изучению *предела* – важнейшего в математическом анализе понятия. И начнем мы с предела последовательности.

1. Основные определения. Примеры

Последовательностью называется закономерность, по которой каждому натуральному числу ставится в соответствие некоторое действительное число, которое называется элементом последовательности.

Обозначаются последовательности, как правило, строчными латинскими буквами с указанием индекса, например,

$$a_n, \ n \in \mathbf{N}.$$

Всюду в дальнейшем мы будем считать, что последовательность задана аналитически, т. е. формулой, которая позволяет вычислять по номеру соответствующий элемент последовательности. Например, формула $a_n = (-1)^n/n$ задает последовательность

$$-1, \ \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \ldots \ .$$

Наоборот, периодическая последовательность

$$0, \ -1, \ 0, \ 1, \ 0, \ -1, \ 0, \ 1, \ \ldots$$

может быть задана, например, формулой

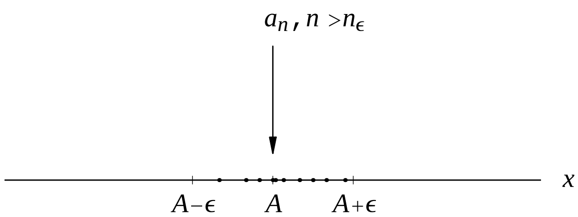
$$a_n = \cos\frac{\pi n}{2}.$$

Определение. *Число $A \in \mathbf{R}$ называется пределом последовательности a_n, если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует номер $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ такой, что при всех $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство*

$$|a_n - A| < \varepsilon \Longleftrightarrow A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$

Обозначается предел через $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Иначе говоря, число A является пределом последовательности a_n, если, какой бы малый интервал с центром в точке A мы не взяли, найдется номер, начиная с которого, все точки a_n попадут в этот интервал.



Простейшим примером может служить постоянная последовательность $a_n = c$, $c \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$. Здесь по определению предела $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

Замечание. В определении предела число $\varepsilon > 0$ можно считать сколь угодно малым, так как для всех остальных его значений искомый номер n_ε заведомо найдется.

Пример 1. *Убедиться по определению, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2+2} = 2.$$

Решение. Зафиксируем произвольное малое $\varepsilon > 0$ и подберем номер n_ε, после которого выполняется неравенство

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

В нашем случае
$$a_n - A = \frac{2n^2+1}{n^2+2} - 2 = -\frac{3}{n^2+2}.$$
Из неравенства
$$|a_n - A| = \frac{3}{n^2+2} < \varepsilon$$
находим:
$$n > \sqrt{\frac{3}{\varepsilon} - 2}.$$
Следовательно, в качестве номера n_ε можно взять число
$$n_\varepsilon = \left[\sqrt{\frac{3}{\varepsilon} - 2}\right],$$
где $[\cdot]$ обозначает целую часть числа, т. е. наибольшее целое, не превосходящее данное число.

Аналогично можно убедиться в том, что
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^s} = 0,\ 0 < s \in \mathbf{R}.$$

Введем понятие *бесконечного предела* последовательности a_n. Если для любого (можно считать сколь угодно большого) числа $M > 0$ существует номер $n_M \in \mathbf{N}$ такой, что
$$|a_n| > M,\ n > n_M,$$
то пределом данной последовательности считается *бесконечность*, т. е.
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Пример 2. *Доказать по определению, что*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n} = +\infty.$$

Доказательство. Здесь
$$a_n = \frac{n^2+1}{n} = n + \frac{1}{n} > n.$$
Следовательно, если, при заданном $M > 0$, мы возьмем $n_M = [M]$, то
$$\frac{n^2+1}{n} > M,\ n > n_M,$$
что и требовалось доказать.

Отметим еще тот очевидный факт, что $\lim\limits_{n\to\infty} n^s = +\infty,\ 0 < s \in \mathbf{R}$.

Последовательность, имеющая конечный предел, называется *сходящейся.* Соответственно, *расходящейся* называется последовательность, предел которой равен бесконечности или не существует.

2. Свойства пределов последовательностей

Изучим теперь *основные свойства* пределов сходящихся последовательностей.

Последовательность a_{n_k}, $n_k < n_{k+1}$ при всех $k \in \mathbf{N}$ называется *подпоследовательностью* последовательности a_n.

1) *Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к пределу последовательности.*

Доказательство очевидным образом следует из определения предела последовательности.

2) *Сходящаяся последовательность имеет единственный предел.*

Действительно, предположим, что у последовательности a_n существуют два различных предела A_1 и A_2. Выберем число $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы интервалы $(A_1 - \varepsilon,\ A_1 + \varepsilon)$ и $(A_2 - \varepsilon,\ A_2 + \varepsilon)$ не пересекались. По определению предела найдется номер $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ такой, что
$$A_1 - \varepsilon < a_n < A_1 + \varepsilon,\ A_2 - \varepsilon < a_n < A_2 + \varepsilon,\ n > n_\varepsilon.$$

Полученное противоречие и доказывает утверждение.

Это свойство можно использовать для того, чтобы доказать, что последовательность не имеет предела. В качестве примера рассмотрим упоминавшуюся в пункте 1 периодическую последовательность

$$a_n = \cos\frac{\pi n}{2}.$$

Рассмотрим две ее подпоследовательности. При n нечетном мы имеем: $a_{2k-1} = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = 0$. Аналогично, если $n = 4k$, $k \in \mathbf{N}$, то $a_{4k} = 1$ и, стало быть, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{4k} = 1$. Таким образом, пределы двух подпоследовательностей данной последовательности различны и, следовательно, она не может быть сходящейся, так как иначе по предыдущему свойству пределы всех подпоследовательностей совпадали бы с пределом последовательности.

3) *Сходящаяся последовательность ограничена.*

Действительно, пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Тогда найдется такое натуральное число n_1, что

$$A - 1 < a_n < A + 1,\ n > n_1.$$

Полагая теперь $m = \min\{A-1, a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}\},\ M = \max\{A+1, a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}\}$, будем иметь при всех натуральных n :

$$m \le a_n \le M,$$

т. е. последовательность ограничена.

Последовательность a_n называется *возрастающей* (*не убывающей*), или *убывающей* (*не возрастающей*), если при всех натуральных n выполняется неравенство $a_n < a_{n+1}$ ($a_n \le a_{n+1}$), или неравенство $a_n > a_{n+1}$ ($a_n \ge a_{n+1}$). Возрастающая или убывающая последовательность называется *монотонной.*

4) *Монотонная, ограниченная последовательность сходится.*

Пусть для определенности последовательность a_n не убывает и ограничена сверху. По теореме 1, §2 последовательность a_n имеет верхнюю грань $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}} a_n$. Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbf{N}} a_n.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как верхняя грань является минимальной из мажорант, то при всех $n \in \mathbf{N}$ справедливо неравенство $a_n < \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} a_n + \varepsilon$ и существует натуральное n_ε, для которого $a_{n_\varepsilon} > \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} a_n - \varepsilon$. Поскольку последовательность a_n не убывает, то последнее неравенство выполняется и при всех $n > n_\varepsilon$, что и завершает доказательство.

5) *Если две последовательности сходятся к общему пределу, то к тому же пределу сходится и заключенная между ними последовательность.*

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$ и $a_n \le c_n \le b_n,\ n \in \mathbf{N}$. По заданному $\varepsilon > 0$ найдется номер n_ε, после которого $A - \varepsilon < a_n,\ b_n < A + \varepsilon$, а, следовательно, и $A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon$. Свойство доказано.

6) *Если последовательность a_n сходится и $a_n \le M$ ($a_n \ge M$), $M \in \mathbf{R}$ при всех $n \in \mathbf{N}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le M$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ge M$).*

Пусть, для определенности, $a_n \le M$, $M \in \mathbf{R}$. Предположим, что, наоборот, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A > M$. Выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы выполнялось неравенство $A - \varepsilon > M$. Тогда, начиная с некоторого номера $a_n > A - \varepsilon > M$. Противоречие.

Сформулируем теперь свойства пределов последовательностей, связанные с *арифметическими операциями* над элементами этих последовательностей.

7) *Если две последовательности a_n и b_n сходятся, то сходятся также и последовательности $c_1 a_n + c_2 b_n,\ c_1,\ c_2 \in \mathbf{R}$ и $a_n b_n$, причем*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 \lim\limits_{n\to\infty} a_n + c_2 \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Если, кроме того, $b_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, то последовательность a_n/b_n также сходится и

$$\text{c)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Докажем, например, последнее из этих свойств. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. Так как $B \neq 0$, то, интервал $(B-\delta, B+\delta)$ можно выбрать столь малым, чтобы он не содержал нуля. Ввиду сходимости последовательности b_n, для всех $n > n_\delta$ имеет место неравенство $(B-\delta < b_n < B+\delta)$. Отсюда, учитывая, что все $b_1, b_2, \ldots, b_{n_\delta}$ также отличны от нуля, мы заключаем, что последовательность b_n отделена от нуля, т. е. существует положительное число m такое, что $|b_n| > m$. Так как

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| = \left|\frac{Ba_n - Ab_n}{Bb_n}\right| = \left|\frac{B(a_n - A) + A(B - b_n}{Bb_n}\right| = \frac{|B(a_n - A) + A(B - b_n|}{|Bb_n|},$$

то, учитывая известное из курса элементарной математики неравенство $|a+b| \leq |a|+|b|$, $a, b \in \mathbf{R}$ и отделенность от нуля последовательности b_n, получим:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| \leq \frac{|B||a_n - A| + |A||b_n - B|}{m|B|}. \tag{1}$$

Зафиксируем произвольное положительное число ε. Для числа $\varepsilon_1 = \varepsilon\dfrac{m|B|}{|A|+|B|} > 0$ существует номер n_{ε_1}, начиная с которого $|a_n - A| < \varepsilon_1$, $|b_n - B| < \varepsilon_1$, поэтому из неравенства (1) при $n > n_{\varepsilon_1}$ следует, что

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| \leq \varepsilon_1 \frac{|A|+|B|}{m|B|} = \varepsilon.$$

Утверждение доказано.

3. Число e

Используем приведенные в пункте 2 свойства пределов для определения важного в анализе числа e.

Рассмотрим последовательность

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,\ n \in \mathbf{N}$$

и докажем, что она сходится. Заметим, прежде всего, что

$$a_n < b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},\ n \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

Покажем, что последовательность b_n является убывающей. Действительно,

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} \frac{n}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \frac{n}{n+1}.$$

Воспользовавшись неравенством Бернулли (§1), получим:

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{n}{n+1} = 1 \Longrightarrow b_n > b_{n+1}.$$

Таким образом, последовательность b_n убывает. Аналогично проверяется, что последовательность a_n является возрастающей. Последовательность a_n ограничена сверху, а b_n – снизу, так как $a_n < b_1$, $b_n > a_1$, $n \in \mathbf{N}$. Следовательно, по свойству 4) предела последовательности a_n и b_n сходятся, причем сходятся они к общему пределу, так как благодаря свойству 7), b) предела произведения последовательностей

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Определение. $e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Пользуясь неравенством (1), мы можем указать сколь угодно малый интервал, в котором содержится число e и, таким образом, вычислить его с любой точностью. Например, уже при $n = 10$

$$2,59374 < e < 2,85312.$$

Более точные вычисления показывают, что

$$e = 2,718281828459045\ldots$$

4. О неопределенностях, возникающих при вычислении пределов

Мы можем пользоваться свойствами 7) предела последовательности (пункт 2) только для сходящихся последовательностей. Однако при вычислении предела может возникнуть ситуация, когда эти свойства нельзя использовать, по крайней мере непосредственно. Речь здесь идет о так называемых *неопределенностях.* Укажем некоторые из них.

Если при вычислении предела частного $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ выяснится, что $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, то говорят, что здесь возникает *неопределенность вида* $\frac{\infty}{\infty}$. Аналогично возникает *неопределенность вида* $\frac{0}{0}$.

При вычислении предела произведения $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$ возникает *неопределенность вида* $0 \cdot \infty$, если $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

Если требуется вычислить предел разности $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n)$, но $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, то здесь имеет место *неопределенность вида* $\infty - \infty$.

При вычислении указанных пределов следует *раскрыть неопределенность*, т. е. данную последовательность с помощью тождественных преобразований необходимо привести к виду, для которого уже применимы свойства 7).

Пример 1. Вычислить предел

$$A_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^3(3n-1)^2}{(n+1)^5}.$$

Решение. В данном случае возникает неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Так как числитель и знаменатель содержат степенные выражения переменной n, то раскрыть эту неопределенность мы можем, разделив числитель и знаменатель дроби на общую старшую степень n^5 :

$$A_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^3\left(3-\frac{1}{n}\right)^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^5}.$$

Воспользовавшись свойствами 7) предела, получим:

$$A_1 = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^3 \lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)^2}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5} = \frac{2^3\cdot 3^2}{1^5} = 72.$$

Пример 2. Найти предел

$$A_2 = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+2a} - n\right), \ a \in \mathbf{R}.$$

Решение. Здесь имеем неопределенность вида $\infty - \infty$. Преобразуем последовательность под знаком предела:

$$A_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\sqrt{n^2+2a}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2a}+n\right)}{\sqrt{n^2+2a}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2an}{\sqrt{n^2+2a}+n}.$$

Мы получили предел с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель последней дроби на n и используем свойства 7) предела:

$$A_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{2a}{\sqrt{1+\frac{2a}{n}}+1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2a}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{2a}{n}}+1\right)} = \frac{2a}{1+1} = a.$$

§4. Предел функции

В этом параграфе мы обобщим понятие предела на случай числовой функции одной действительной переменной.

1. Числовая функция и некоторые ее элементарные свойства

Определение. *Числовой функцией действительной переменной (действительного аргумента) называется закономерность, ставящая в соответствие каждому числу (точке) $x \in D \subseteq \mathbf{R}$ определенное действительное число (значение функции в точке x). Множество D называется областью определения функции.*

Обозначения для функции:

$$y = f(x),\ x \in D; \quad x \to f(x),\ x \in D; \quad f : D \to E,$$

где $E = \{f(x)\,|\,x \in D\}$ – *область значений* функции $f(x)$. Иногда для области значений функции мы будем использовать обозначение $f(D)$.

Частным случаем функции является последовательность: $n \to a_n,\ n \in \mathbf{N}$.

Всюду в наших дальнейших рассмотрениях мы будем предполагать, что *функция задана формулой*, позволяющей по определенному алгоритму вычислять ее значения.

Множество точек плоскости $G = \{(x,\ f(x))\,|\,x \in D\}$ называется *графиком* данной функции.

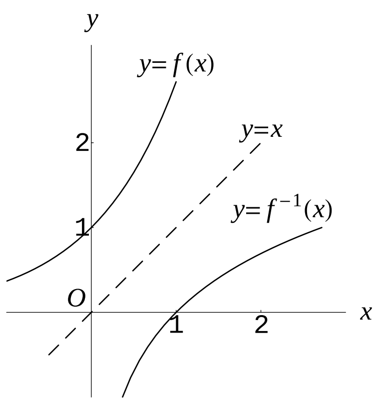
Функция $f(x)$ называется *убывающей* (*невозрастающей*) на множестве D, если для всех $x_1 < x_2,\ x_1, x_2 \in D$ выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$). Аналогично, если для тех же значений переменной справедливо $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \leq f(x_2)$), то функция называется *возрастающей* (*неубывающей*). Возрастающая или убывающая функция называется *монотонной*.

Функция $f : D \to E$ называется *ограниченной*, если множество ее значений E ограничено.

Пусть D и E – соответственно область определения и область значений функции $f(x)$. Эта функция называется *биективной* (*биекцией*) или *взаимно однозначной*, если различным значениям аргумента соответствуют различные значения функции. Примером биекции может служить любая монотонная в своей области определения функция.

Пусть $f : D \to E$ – биекция. *Обратной к данной называется функция $f^{-1} : E \to D$, которая каждому $y \in E$ ставит в соответствие такое $x \in D$, что $f(x) = y$.*

Из определения обратной функции следует, что $f^{-1}(f(x)) = x,\ x \in D;\ f(f^{-1}(y)) = y,\ y \in E$. Заметим далее, что, если (x, y) – точка графика функции $f(x)$, то точка (y, x) принадлежит графику обратной функции $f^{-1}(y)$ и, таким образом, графики данной функции и обратной к ней симметричны относительно прямой $y = x$.



Всякая *монотонная в своей области определения функция обратима*, поскольку, как уже отмечалось, она является биекцией.

Введем определение *композиции функций* или *сложной функции.* Рассмотрим две функции: $f_1 : D_1 \to E_1$ и $f_2 : D_2 \to E_2$, причем $D_2 \supseteq E_1$. Тогда функция $(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x))$, $x \in D_1$ называется *композицией функций f_1 и f_2* или *сложной функцией.*

Определим теперь класс *элементарных* функций. Введем сначала *основные элементарные* функции, известные из курса элементарной математики:

$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbf{R}$ – *степенная функция*;
$a^x,\ 0 < a \neq 1$ – *показательная функция*, в частности,
$\exp(x) = e^x$ – *экспонента*;
$\log_a x,\ 0 < a \neq 1$ – *логарифмическая функция*, в частном случае,
$\ln x = \log_e x$ – *натуральный логарифм*;
$\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ – *тригонометрические функции*;
$\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ – *обратные тригонометрические функции.*

Функция, полученная из основных элементарных с помощью конечного числа арифметических операций и композиций, называется *элементарной* функцией.

Элементарными функциями являются, например, *полином* (*многочлен*) степени $n \in \mathbf{N}$:

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,\ a_0 \neq 0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n \in \mathbf{R}$ – коэффициенты полинома и, так называемые, *гиперболические* функции:

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \text{ – \textit{синус гиперболический};}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \text{ – \textit{косинус гиперболический};}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \text{ – \textit{тангенс гиперболический};}$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \text{ – \textit{котангенс гиперболический.}}$$

2. Предел функции и его свойства

Пусть числовая функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале (a, b), содержащем точку x_0, кроме, возможно, самой точки x_0.

Определение. *Действительное число L называется пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к x_0, если для любого (можно считать, сколь угодно малого) положительного числа $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что при всех*

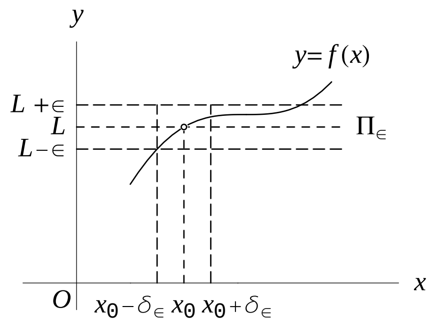
$$x \in (x_0 - \delta_\varepsilon,\, x_0) \cup (x_0,\, x_0 + \delta_\varepsilon) \Longleftrightarrow 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$$

выполняется неравенство

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \Longleftrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Обозначения для предела: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *или* $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} L.$

Проиллюстрируем понятие предела функции на ее графике.



Число L является пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к x_0, если для всякой сколь угодно узкой полосы Π_ε между горизонтальными прямыми $y = L - \varepsilon$ и $y = L + \varepsilon$ найдется достаточно малый интервал, симметричный относительно точки x_0, такой, что для всех чисел x из этого интервала соответствующие точки графика функции попадают в полосу Π_ε.

Примеры. *Проверить по определению, что*

$$1)\ \lim_{x\to x_0} c = c,\ x_0,\ c \in \mathbf{R};$$

$$2)\ \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1} = \frac{1}{4}.$$

Решение. В первом случае $|f(x) - L| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ для всех $x \in \mathbf{R}$, что и доказывает равенство. Для второго предела

$$|f(x) - L| = \left|\frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1} - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{(\sqrt{3+x}-2)(\sqrt{3+x}+2)}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)} - \frac{1}{4}\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{\sqrt{3+x}+2} - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{2-\sqrt{3+x}}{4(\sqrt{3+x}+2)}\right| = \left|\frac{1-x}{4(\sqrt{3+x}+2)^2}\right| < |x-1|.$$

Отсюда следует, что, если по заданному малому $\varepsilon > 0$ выбрать $\delta_\varepsilon = \varepsilon$, то при всех $x \neq 1$ таких, что $|x-1| < \delta_\varepsilon$ справедливо неравенство

$$|f(x) - L| < \varepsilon,$$

которое и доказывает утверждение.

Введем теперь определение конечного предела функции $f(x)$ при x стремящемся к бесконечности. Пусть эта функция определена при всех действительных x или вне некоторого интервала. *Число $L \in \mathbf{R}$ считается пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если для всякого положительного $\varepsilon > 0$ существует такое число $M_\varepsilon > 0$, что, как только $|x| > M_\varepsilon$, то $|f(x) - L| < \varepsilon$.*

Например,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^s} = 0,\ s > 0,$$

так как при заданном $\varepsilon > 0$ неравенство $|f(x) - L| = \left|\dfrac{1}{x^s}\right| < \varepsilon$ выполняется, очевидно, при $|x| > M_\varepsilon = \left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{s}}$.

Осталось ввести определение *бесконечного* предела функции. Пусть функция $f(x)$ определена в некотором интервале, содержащем точку x_0, исключая, возможно, саму точку x_0 (соответственно, вне некоторого интервала). *Если для любого (сколь угодно большого) положительного числа $A > 0$ существует положительное число $\delta_A > 0$ (соответственно, $M_A > 0$) такое, что для любого x из множества*

$$0 < |x - x_0| < \delta_A \quad (\textit{соответственно, } |x| > M_A)$$

справедливо неравенство

$$|f(x)| > A,$$

то

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \quad (\textit{соответственно, } \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty).$$

Пользуясь этим определением, несложно убедиться, например, в том, что

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{(x-x_0)^s} = \infty,\ x_0 \in \mathbf{R},\ s > 0;\ \lim_{x\to\infty} x^s = \infty,\ s > 0.$$

В определении предела функции при $x \to x_0$ аргумент x приближается к точке x_0 с обеих сторон, оставаясь как меньше, так и больше числа x_0. Если же заставить аргумент приближаться к точке x_0 только слева (справа), то мы получим *односторонний* предел. Приведем его точное определение.

Пусть функция $f(x)$ определена в некотором интервале $(a,\, x_0)$, $a < x_0$ (соответственно, $(x_0,\, b)$, $b > x_0$). *Число L^- (соответственно, L^+) называется левосторонним (соответственно, правосторонним) пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_\varepsilon^- > 0$ (соответственно, $\delta_\varepsilon^+ > 0$) такое, что при $x \in (x_0 - \delta_\varepsilon^-,\, x_0)$ (соответственно, $x \in (x_0,\, x_0 + \delta_\varepsilon^+)$) выполняется неравенство*

$$|f(x) - L^-| < \varepsilon \quad (\textit{соответственно, } |f(x) - L^+| < \varepsilon).$$

Обозначается левосторонний (соответственно, правосторонний) предел через

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \textit{ или } f(x_0 - 0) \quad (\textit{соответстенно, } \lim_{x\to x_0+0} f(x) \textit{ или } f(x_0+0)).$$

Перейдем теперь к изучению свойств конечных пределов функций.

1) *Для того, чтобы существовал конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны оба односторонних предела $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.*

Для доказательства достаточно сравнить определения предела функции и односторонних пределов.

2) *Предположим, что функция $f_1(x)$ определена в некотором интервале, содержащем точку x_0, кроме, возможно, точки x_0 и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = y_0$, а функция $f_2(y)$ определена в некотором интервале, содержащем область значений функции $f_1(x)$ и точку y_0, кроме, возможно, точки y_0 и существует предел $\lim\limits_{y\to y_0} f_2(y) = L$. Тогда существует предел композиции функций*

$$\lim_{x\to x_0} f_2(f_1(x)) = L.$$

Действительно, по определению предела функции для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta_{2\varepsilon} > 0$ такое, что при всех y из множества $|y - y_0| < \delta_{2\varepsilon}$ справедливо неравенство $|f_2(y) - L| < \varepsilon$. В свою очередь для числа $\delta_{2\varepsilon}$ отыщется такое $\delta_{1\varepsilon} > 0$, что при любом x, принадлежащем множеству $0 < |x - x_0| < \delta_{1\varepsilon}$ выполняется неравенство $|f_1(x) - y_0| < \delta_{2\varepsilon}$. Отсюда следует справедливость неравенства $|f_2(f_1(x)) - L| < \varepsilon$ при всех x таких, что $0 < |x - x_0| < \delta_{1\varepsilon}$. Свойство доказано.

Теперь сформулируем свойства пределов функций, которые аналогичны (вместе с доказательствами) соответствующим свойствам пределов последовательностей. Во всех этих свойствах мы будем предполагать, что функции определены некотором интервале (a, b), $a < b$, содержащем точку x_0, кроме, может быть, самой точки x_0.

3) *Функция имеет не более одного предела.*

4) *Если при всех x из интервала (a, b) выполняется неравенство*

$$f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)$$

и существуют равные друг другу пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$, то существует также предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, причем

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f_1(x) = \lim_{x\to x_0} f_2(x).$$

5) *Если для любого $x \in (a, b)$ справедливо неравенство $f(x) \le M$ $(f(x) \ge M)$, $M \in \mathbf{R}$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le M$ $(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \ge M)$.*

Это свойство, очевидно, справедливо и для односторонних пределов.

6) *Если функция монотонна и ограничена в интервале (a, x_0) (соответственно, (x_0, b)), то существует левосторонний предел $f(x_0 - 0)$* (соответственно, правосторонний предел $f(x_0 + 0)$).

7) *Если для функций* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *существуют конечные пределы* $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$, *то существуют также пределы функций* $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$, $c_1,\ c_2\in\mathbf{R}$ *и* $f_1(x)f_2(x)$, *причем*

a) $\lim\limits_{x\to x_0}(c_1f_1(x)+c_2f_2(x)) = c_1\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)+c_2\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$;

b) $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)f_2(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$.

Если, сверх того, $f_2(x)\neq 0,\ x\in(a,b)$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)\neq 0$, *то существует также предел дроби* $f_1(x)/f_2(x)$ *и*

$$\text{c)}\ \lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)}.$$

Покажем, пользуясь свойствами 2), 6) и 7), что

$$\lim_{x\to x_0} e^x = e^{x_0},\ x_0\in\mathbf{R};\ \lim_{x\to x_0}\ln x = \ln x_0,\ x_0>0. \tag{1}$$

Прежде всего заметим, что по свойству 6) существуют односторонние пределы этих функций. Так как благодаря свойству 7)

$$\lim_{x\to x_0} e^x = e^{x_0} \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} e^{x-x_0}=1,\ x_0\in\mathbf{R};\ \lim_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0}\ln\frac{x}{x_0}=0,\ x_0>0,$$

то для проверки этих равенств достаточно доказать, что

$$\lim_{x\to\pm 0} e^x = 1,\ \lim_{x\to 1\pm 0}\ln x = 0. \tag{2}$$

Используя свойства 2) и 7) получим:

$$\lim_{x\to\pm 0} e^x = \lim_{x\to\pm 0} e^{2x} = \left(\lim_{x\to\pm 0} e^x\right)^2,\ \lim_{x\to 1\pm 0}\ln x = \lim_{x\to 1\pm 0}\ln x^2 = 2\lim_{x\to 1\pm 0}\ln x,$$

откуда и следует справедливость утверждений (2), а, значит, и (1).

Предположим, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определены в некотором интервале, содержащем точку x_0, кроме, может быть, самой точки x_0 и существуют конечные пределы

$$L_1 = \lim_{x\to x_0} f_1(x) > 0 \text{ и } L_2 = \lim_{x\to x_0} f_2(x).$$

Найдем, пользуясь пределами (1) и свойством 2) предел функции $(f_1(x))^{f_2(x)}$.

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x))^{f_2(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{f_2(x)\ln f_1(x)} = e^{L_2\ln L_1} = L_1^{L_2}. \tag{3}$$

Замечание. Свойства 2) – 7) со специальными оговорками, касающимися областей определения и значений функций, справедливы и для конечных пределов функций на бесконечности.

Сделаем еще одно замечание, касающееся алгебраических операций над пределами функций. Если один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$ конечен, а второй равен бесконечности, то, как следует из определения предела,

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x)\pm f_2(x)) = \infty.$$

Если оба этих предела равны бесконечности или один из них конечен и не равен нулю, а второй равен бесконечности, то

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x)f_2(x) = \infty.$$

Наконец, если $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)\neq 0$, а $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)=\infty$ или наоборот, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0 \text{ или } \lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty.$$

В остальных случаях, как и при вычислении пределов последовательностей (§3, пункт 4) могут возникать неопределенности вида $\infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}$.

Пример 3. *Найти предел*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

где

$$P_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m,\ Q_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n$$

– полиномы степеней m и n соответственно.

Решение. Здесь возникает неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, которую мы раскроем, разделив числитель и знаменатель дроби на старшую степень. Возможны три случая: $m < n$, $m = n$ и $m > n$. Рассмотрим, например, второй из них, разделив числитель и знаменатель дроби на x^n и воспользовавшись свойствами 7) предела:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{b_n}{x^n}} = \frac{a_0 + 0 + \ldots + 0 + 0}{b_0 + 0 + \ldots + 0 + 0} = \frac{a_0}{b_0}.$$

Аналогично, в случае $m < n$ мы получим $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = 0$, если же $m > n$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \infty$. Таким образом, окончательно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \begin{cases} 0, & \text{если } m < n; \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{если } m = n; \\ \infty, & \text{если } m > n. \end{cases}$$

Пример 4. *Вычислить предел*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^m - x_0^m}{x^n - x_0^n},\ 0 \neq x_0 \in \mathbf{R},\ m,\ n \in \mathbf{N}.$$

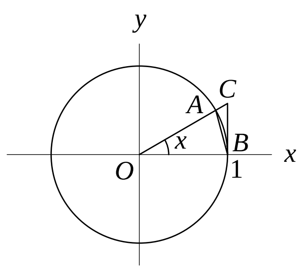
Решение. В этом случае возникает неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которую мы раскроем, разложив числитель и знаменатель дроби на множители:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^m - x_0^m}{x^n - x_0^n} = \lim_{x\to x_0}\frac{(x - x_0)(x^{m-1} + x^{m-2}x_0 + \ldots + xx_0^{m-2} + x_0^{m-1})}{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})} =$$
$$= \frac{x_0^{m-1} + x_0^{m-1} + \ldots + x_0^{m-1} + x_0^{m-1}}{x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \ldots + x_0^{n-1} + x_0^{n-1}} = \frac{m}{n}x_0^{m-n}.$$

3. Два важных в анализе предела

а) *Тригонометрический предел* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Найдем двустороннюю оценку для функции $\dfrac{\sin x}{x}$, воспользовавшись геометрическими соображениями.



Прежде всего заметим, что ввиду четности данной функции мы можем ограничиться лишь малыми положительными значениями x. Обозначим через $S_{\triangle OAB}$, S_{OAB}, $S_{\triangle OBC}$ площади треугольника OAB, сектора OAB и треугольника OBC. Так как

$$S_{\triangle OAB} < S_{OAB} < S_{\triangle OBC} \quad \text{и} \quad S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}\sin x,\ S_{OAB} = \frac{1}{2}x,\ S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

то справедливо неравенство:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}, \tag{1}$$

откуда

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \tag{2}$$

Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$. Действительно, из неравенства (1) следует, что

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{2},$$

поэтому, для любого положительного ε при $|x| < \sqrt{2\varepsilon}$ выполняется неравенство $|\cos x - 1| < \varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$. Возвращаясь теперь к неравенству (2), замечаем, что к функциям, входящим в него применимо свойство 4) предела функции, и, стало быть,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Из тригонометрического предела следует, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1. \tag{3}$$

В самом деле,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = 1.$$

Далее, из неравенства (1) мы заключаем, что $\operatorname{arctg} x < x$, откуда $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{arctg} x = 0$, а, значит, и $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x = 0$, так как $\arcsin x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Следовательно, воспользовавшись свойством 2) предела композиции функций и тригонометрическим пределом, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(\arcsin x)}{\arcsin x}\right)^{-1} = 1.$$

Аналогично доказывается последнее из утверждений (3).

Замечание. Как следует из свойства 2) предела композиции функций, во всех приведенных тригонометрических пределах вместо аргумента $x \to 0$ мы можем использовать функцию $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$. Таким образом,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin f(x)}{f(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{\operatorname{tg} f(x)}{f(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{\arcsin f(x)}{f(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{\operatorname{arctg} f(x)}{f(x)} = 1,\quad \text{если } f(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0. \tag{4}$$

Пример 1. *Найти предел* $L = \lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\arcsin(x^2-\pi^2)}{\operatorname{tg} x}$.

Решение. Здесь мы имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Используем для ее раскрытия тригонометрические пределы (4):

$$L = \lim_{x\to\pi}\frac{\arcsin(x^2-\pi^2)}{\operatorname{tg}(x-\pi)} = \lim_{x\to\pi}\frac{\arcsin(x^2-\pi^2)}{x^2-\pi^2}\cdot\frac{x-\pi}{\operatorname{tg}(x-\pi)}\cdot(x+\pi) = 1\cdot 1\cdot 2\pi = 2\pi.$$

b) *Число* $e = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Для проверки данного равенства используем уже найденный нами в параграфе 3, пункт 3 предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Ограничимся для определенности положительными значениями аргумента x. Обозначим через $n = [x]$ целую часть числа x, т. е. наибольшее целое, не превосходящее это число. Так как при любом $x > 0$ справедливы неравенства

$$n \le x < n+1,\ \frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{n},$$

то

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Из последнего неравенства, воспользовавшись тем, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$$

и свойством 4) предела функций, мы и получим, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Благодаря свойству 2) предела композиции функций

$$\lim_{x\to x_0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e, \text{ если } f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0. \tag{5}$$

В частности,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Предел (5) используется для раскрытия *неопределенностей вида* 1^∞.

Пример 2. *Вычислить предел* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение. В этом случае мы имеем неопределенность вида 1^∞. Попробуем раскрыть ее с помощью предела (5). Так как

$$\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left(1+\frac{\cos x-\cos 2x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left(\left(1+\frac{\cos x-\cos 2x}{\cos 2x}\right)^{\frac{\cos 2x}{\cos x-\cos 2x}}\right)^{\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2\cos 2x}},$$

то, использовав предел (5) и тригонометрический предел, получим:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\cos x-\cos 2x}{\cos 2x}\right)^{\frac{\cos 2x}{\cos x-\cos 2x}} = e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2\cos 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos 2x} = \frac{3}{2}$$

и, следовательно, сославшись на предел (3) из предыдущего пункта, мы заключаем, что

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{3}{2}}.$$

4. Бесконечно малые (бесконечно большие) функции, их свойства и использование

Функция $f(x)$, определенная в некотором интервале, содержащем точку x_0, кроме, возможно, самой этой точки, называется *бесконечно малой* (*бесконечно большой*) *в точке* x_0, *если существует и равен нулю* (*бесконечности*) *предел* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Изучим сначала свойства бесконечно малых. Очевидно, прежде всего, что вместе с бесконечно малыми $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в точке x_0 таковыми являются и функции

$$f_1(x)\pm f_2(x),\ f_1(x)f_2(x).$$

Произведение $f_1(x)f_2(x)$ *будет бесконечно малой и в случае, когда одна из этих функций является бесконечно малой, а вторая ограничена.* Действительно, пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = 0$, а $|f_2(x)| \le M,\ M > 0$ в области определения. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. По определению предела для положительного числа $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M}$ найдется положительное число δ_{ε_1} такое, что $|f_1(x)| < \varepsilon_1$ при $0 < |x-x_0| < \delta_{\varepsilon_1}$. Тогда при всех таких x

$$|f_1(x)f_2(x)| = |f_1(x)||f_2(x)| < \varepsilon_1 M = \varepsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)f_2(x) = 0$.

Частное $f_1(x)/f_2(x)$ мы будем использовать *для сравнения бесконечно малых* $f_1(x), f_2(x)$ в точке x_0.

Будем говорить, что *бесконечно малая* $f_1(x)$ *имеет порядок малости* k *относительно бесконечно малой* $f_2(x)$, если существует

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{(f_2(x))^k} \neq 0.$$

В частности, если $k = 1$, то $f_1(x)$ и $f_2(x)$ являются *бесконечно малыми одного порядка.* Если, сверх того,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1,$$

то бесконечно малые $f_1(x)$ и $f_2(x)$ называются *эквивалентными.* Для эквивалентных бесконечно малых используется обозначение: $f_1(x) \sim f_2(x), x \to x_0$.

Наконец, если окажется, что

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0,$$

то условимся говорить, что *бесконечно малая* $f_1(x)$ *имеет более высокий порядок малости относительно бесконечно малой* $f_2(x)$ и обозначать этот факт через $f_1(x) = o(f_2(x)), x \to x_0$.

Пример 1. *Сравнить бесконечно малые* $\operatorname{tg}(\sqrt{x}-1)$ *и* $\sqrt[3]{x-1}$ *в точке* $x_0 = 1$ *функции.*

Решение. Использовав тригонометрический предел (4) из пункта 3, получим:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{tg}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt[3]{x-1}} &= \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{tg}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}} = \\ &= 1 \cdot \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{x}-1)^2}}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}} = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, $\operatorname{tg}(\sqrt{x}-1) = o(\sqrt[3]{x-1}), x \to 1$, т. е. бесконечно малая $\operatorname{tg}(\sqrt{x}-1)$ имеет более высокий порядок малости относительно бесконечно малой $\sqrt[3]{x-1}$. Найдем этот порядок. По аналогии с предыдущим пределом мы можем убедиться в том, что

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{tg}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt[3]{x-1})^3} = \frac{1}{2} \neq 0$$

и, следовательно, искомый порядок малости равен 3.

Аналогично мы можем сравнивать бесконечно большие. В частности, две бесконечно большие в точке x_0 функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ функции называются *эквивалентными*, если

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1.$$

Обсудим теперь, как использовать эквивалентные бесконечно малые (бесконечно большие) при вычислении пределов.

Утверждение 1. *Пусть* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ – *две бесконечно малые (бесконечно большие) в точке* x_0 *и существует предел*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}.$$

Тогда при вычислении этого предела любую из данных функций мы можем заменить на эквивалентную ей.

Действительно, если, например, $f_2(x) \sim f_3(x), x \to x_0$, то существует также предел

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_3(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \cdot \frac{f_2(x)}{f_3(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \cdot 1 = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}.$$

Аналогично проверяется и

Утверждение 2. *Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – бесконечно малая и бесконечно большая в точке x_0 и существует предел*

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) f_2(x).$$

Тогда любую из этих функций при вычислении предела мы можем заменить на соответствующую эквивалентную.

Эти несложные утверждения иногда упрощают вычисление пределов.

Рассмотрим несколько пар эквивалентных бесконечно малых, которые являются следствиями соответствующих пределов из предыдущего пункта. Во всех нижеследующих соотношениях $f(x)$ – бесконечно малая в точке x_0.

1) $\sin f(x) \sim f(x)$;
2) $\arcsin f(x) \sim f(x)$;
3) $\operatorname{tg} f(x) \sim f(x)$;
4) $\operatorname{arctg} f(x) \sim f(x)$;
5) $\ln(1 + f(x)) \sim f(x)$.

Докажем последнее из этих утверждений. В самом деле, использовав пределы (5) и (1) из пунктов 3 и 2 соответственно, получим:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\ln(1 + f(x))}{f(x)} = \lim_{x \to x_0} \ln(1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = \ln e = 1,$$

т. е. $\ln(1 + f(x)) \sim f(x)$.

Пример 2. *Вычислить предел*:

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\sin \operatorname{tg}(x^2 + x)}{\arcsin 2\sqrt[3]{x} \cdot \ln(1 + 3\sqrt[3]{x^2})}.$$

Решение. Используем эквивалентные бесконечно малые 1) – 3), 5). Так как

$$\sin \operatorname{tg}(x^2 + x) \sim \operatorname{tg}(x^2 + x) \sim x^2 + x, \ \arcsin 2\sqrt[3]{x} \sim 2\sqrt[3]{x}, \ \ln(1 + 3\sqrt[3]{x^2}) \sim 3\sqrt[3]{x^2}, x \to 0,$$

то

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{2\sqrt[3]{x} \cdot 3\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{x + 1}{6} = \frac{1}{6}.$$

Замечание. Все сформулированные выше определения и утверждения справедливы, естественно, и для бесконечно малых и бесконечно больших функций на бесконечности.

§5. Непрерывность функции

Познакомимся теперь с таким важнейшим как в самой математике, так и в ее приложениях свойством функции, как непрерывность.

1. Определение непрерывности функции. Общие свойства непрерывности

Определение. *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в некотором интервале, содержащем эту точку и существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, равный значению функции в точке x_0, т. е.*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Приведем еще одно определение непрерывности функции, равносильное приведенному. Пусть Δx – *приращение аргумента* (малое положительное или отрицательное число) в точке x_0. Величина

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

называется *приращением функции* $f(x)$ в точке x_0. Тогда, очевидно, *функция непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0, \Delta x) = 0.$$

Если предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует или равен бесконечности, либо указанный предел существует и конечен, но не равен значению функции в точке x_0 или функция неопределена в этой точке, то будем говорить, что *функция $f(x)$ разрывна в точке x_0* или, иначе, x_0 – *точка разрыва данной функции.*

Перечислим теперь *основные свойства непрерывных функций*, следующие из соответствующих свойств пределов (§4, пункт 2).

1) *Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке x_0, то в этой же точке непрерывны и функции*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x),\ c_1, c_2 \in \mathbf{R} \text{ и } f_1(x) f_2(x).$$

Если, кроме того, в области определения $f_2(x) \neq 0$, то непрерывной является также и функция $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$. Наконец, если в области определения $f_1(x) > 0$, то непрерывна и функция $(f_1(x))^{f_2(x)}$.

Для доказательства достаточно использовать свойство 7) предела функций и предел (3) из пункта 2, §4.

2) *Если функция $f_1(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f_2(y)$, в свою очередь, непрерывна в точке $y_0 = f_1(x_0)$, то композиция функций $f_2(f_1(x))$ непрерывна в точке x_0.*

Здесь достаточно сослаться на свойство 2) предела композиции функций (пункт 2, §4).

3) *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то в некотором малом интервале, содержащем точку x_0 данная функция сохраняет знак значения $f(x_0)$.*

Действительно, выбрав число $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы $\varepsilon < |f(x_0)|$, мы по определению непрерывности можем указать $\delta_\varepsilon > 0$, для которого

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon,\ x \in (x_0 - \delta_\varepsilon,\ x_0 + \delta_\varepsilon),$$

что и доказывает данное свойство, так как по выбору ε числа $f(x_0) \pm \varepsilon$ имеют знак значения $f(x_0)$.

По аналогии с односторонними пределами мы можем также ввести понятие *односторонней непрерывности функции.* А именно, функция $f(x)$, определенная в полуинтервале $(a,\ x_0], a < x_0$ (полуинтервале $[x_0,\ b),\ x_0 < b$) называется *непрерывной слева* (*справа*) *в точке* x_0, если существует левосторонний (правосторонний) предел $f(x_0 - 0)$ ($f(x_0 + 0)$), равный значению функции в точке x_0. Из свойства 1) предела функции (§4, пункт 2) следует, что *для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывной слева и справа в этой точке и $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.*

Функция называется *непрерывной на промежутке числовой оси*, если она *непрерывна в любой точке этого промежутка*, причем, если промежуток содержит граничные точки, то под непрерывностью в них понимается соответствующая *односторонняя непрерывность.*

2. Классификация точек разрыва функции

а) *Устранимый разрыв.*

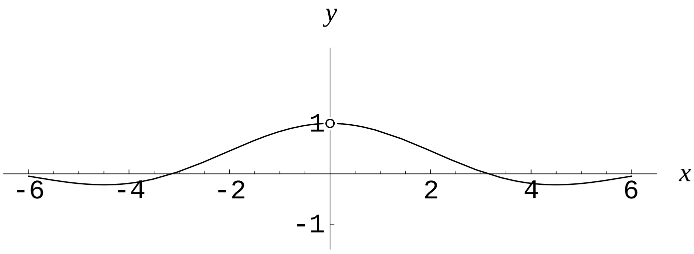
Если функция $f(x)$ определена в некотором интервале, содержащем точку x_0, кроме, возможно, самой этой точки и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (неравный $f(x_0)$, если функция определена в точке x_0), то по определению x_0 – *точка устранимого разрыва* данной функции.

Из определения непрерывности следует, что, если в этом случае доопределить или переопределить в точке x_0 функцию ее предельным значением, то она становится непрерывной в этой точке.

В качестве *примера* рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Она неопределена в нуле, но, как известно (§4, пункт 3)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

следовательно, данная функция имеет устранимый разрыв в точке $x_0 = 0$.



b) *Разрыв первого рода.*

Пусть функция $f(x)$ определена в некотором интервале, содержащем точку x_0, кроме, возможно, самой этой точки и существуют конечные односторонние, неравные друг другу пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$. Тогда будем говорить, что x_0 – *точка разрыва первого рода.*

Разность $h(f,\, x_0) = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется *скачком функции* $f(x)$ *в точке* x_0.

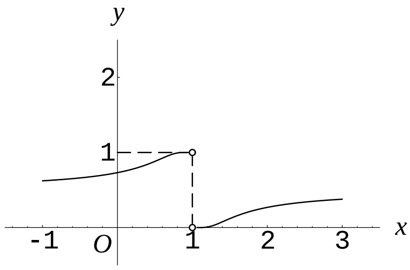
Примером разрыва первого рода может служить точка $x_0 = 1$ для функции

$$f(x) = \left(1 + e^{\frac{1}{x-1}}\right)^{-1}.$$

Действительно, здесь

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to 1-0} \left(1 + e^{\frac{1}{x-1}}\right)^{-1} = 1;\ f(x_0 + 0) = \lim_{x \to 1+0} \left(1 + e^{\frac{1}{x-1}}\right)^{-1} = 0.$$

Скачок функции в точке разрыва равен $h(f,\, 1) = -1$.



c) *Разрыв второго рода.*

Предположим, что функция $f(x)$ определена в некотором интервале, содержащем точку x_0, кроме, может быть, самой этой точки и по крайней мере один из односторонних пределов в точке x_0 не существует или равен бесконечности. В этом случае по определению x_0 – *точка разрыва второго рода.*

Рассмотрим *два примера* такого сложного разрыва.

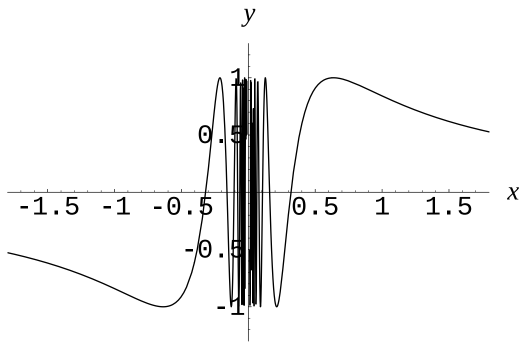
1) Для функции $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ предел $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ не существует. Действительно, на бесконечно малой последовательности $x_n^{(1)} = \dfrac{1}{\pi n}$, $n \in \mathbf{N}$ мы имеем:

$$\lim_{n \to \infty} f\left(x_n^{(1)}\right) = 0.$$

Аналогично, вдоль другой бесконечно малой последовательности $x_n^{(2)} = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, $n \in \mathbf{N}$

$$\lim_{n \to \infty} f\left(x_n^{(2)}\right) = 1.$$

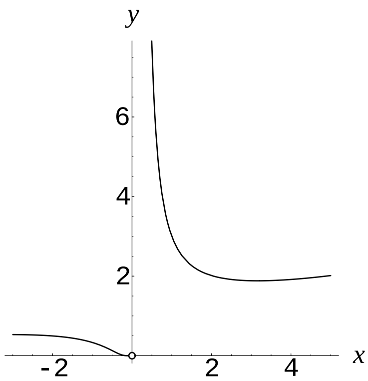
Отсюда, ввиду единственности предела функции (§4, пункт 2, свойство 3)) и следует, что предел $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ не существует и, таким образом, $x_0 = 0$ – точка разрыва второго рода данной функции.



2) Исследуем на непрерывность функцию $f(x) = e^{\frac{x}{10}+\frac{1}{x}}$ в точке $x_0 = 0$. Для этого вычислим в этой точке односторонние пределы:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x\to -0} e^{\frac{x}{10}+\frac{1}{x}} = 0,\ f(x_0 + 0) = \lim_{x\to +0} e^{\frac{x}{10}+\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Следовательно, в точке $x_0 = 0$ функция испытывает разрыв второго рода.



3. Свойства функций, непрерывных на отрезке

В этом пункте мы приведем несколько полезных утверждений о функциях, непрерывных на отрезке, которые мы будем использовать в дальнейшем.

Теорема Больцано-Коши (о промежуточных значениях). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $a < b$. Тогда для любой точки C отрезка, граничными точками которого являются числа $A = f(a)$ и $B = f(b)$, найдется точка $c \in [a, b]$ такая, что $f(c) = C$.*

Доказательство. Используем для доказательства *метод дихотомии* (*деления отрезка пополам*). Пусть для определенности $A \le B$. Обозначим через c_1 середину отрезка $[a, b]$. Если окажется, что $f(c_1) = C$, то $c = c_1$ и теорема доказана. Если же $f(c_1) \ne C$, то обозначим через $[a_1, b_1]$ отрезок $[a, c_1]$, если $f(c_1) > C$ и отрезок $[c_1, b]$, если $f(c_1) < C$. Таким образом $C \in [f(a_1), f(b_1)]$ и $l_1 = b_1 - a_1 = (b-a)/2$. Разделим далее отрезок $[a_1, b_1]$ точкой c_2 пополам. Если $f(c_2) = C$, то искомая точка найдена. В противном случае обозначим через $[a_2, b_2]$ отрезок $[a_1, c_2]$, если $C \in [f(a_1), f(c_2)]$ и отрезок $[c_2, b_1]$, если $C \in [f(c_2), f(b_1)]$. Здесь, очевидно, $C \in [f(a_2), f(b_2)]$ и $l_2 = b_2 - a_2 = (b-a)/2^2$. Продолжая этот процесс, мы либо через конечное число шагов найдем искомую точку c, либо получим систему вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbf{N}$, для которых

$$l_n = b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}; \tag{1}$$

$$f(a_n) \le C \le f(b_n). \tag{2}$$

В соответствии с *принципом вложенных отрезков* (§2) существует общая для всех отрезков точка $c \in [a_n, b_n]$, $n \in \mathbf{N}$. Из (1) следует, что с ростом n длины l_n отрезков $[a_n, b_n]$ стремятся к нулю, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

Ввиду непрерывности функции в точке c

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c).$$

Отсюда, воспользовавшись (2) и свойством 5) предела последовательности (§3, пункт 2), получим, что $f(c) = C$. Т е о р е м а д о к а з а н а.

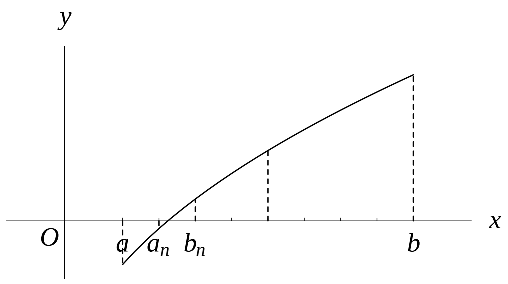
Из теоремы Больцано-Коши вытекает важное в приложениях

Следствие. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения противоположных знаков, то внутри отрезка существует нуль функции, т. е. точка $c \in (a, b)$, в которой $f(c) = 0$.*

Это следствие мы можем использовать для *приближенного решения* уравнения

$$f(x) = 0.$$

Чтобы избежать проблемы различения корней, будем считать, что внутри отрезка $[a, b]$ существует *единственный корень* данного уравнения. Это последнее будет иметь место, например, если функция монотонна на отрезке. Как следует из доказательства теоремы Больцано-Коши, для приближенного вычисления корня мы должны организовать *процесс половинного деления* отрезка, выбирая на каждом шаге тот из двух отрезков, на концах которого функция принимает значения противоположных знаков.



Если задана *погрешность вычислений* $\varepsilon > 0$, то остановиться мы должны на отрезке $[a_n, b_n]$, длина которого окажется меньше ε, т. е.

$$l_n = b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} < \varepsilon.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$n > \frac{\ln\frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln 2}$$

и, следовательно, закончить вычисления достаточно при

$$n = n_\varepsilon = \left[\frac{\ln\frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln 2}\right].$$

В качестве приближенного значения корня данного уравнения с точностью ε мы можем взять середину отрезка $[a_{n_\varepsilon}, b_{n_\varepsilon}]$, т. е. число

$$c^* = \frac{1}{2}(a_{n_\varepsilon} + b_{n_\varepsilon}).$$

Сформулируем без доказательства еще две теоремы о непрерывных на отрезке функциях.

Теорема Вейерштрасса (о наименьшем и наибольшем значении). *Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ ограничена и достигает на этом отрезке своих нижней и верхней граней, т. е. найдутся точки $x_1, x_2 \in [a, b]$ такие, что $f(x_1) = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $f(x_2) = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$.*

Теорема (о непрерывности обратной функции). *Непрерывная и монотонная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет на отрезке, граничными точками которого являются числа $f(a)$, $f(b)$ непрерывную и монотонную в том же смысле обратную функцию $f^{-1}(y)$.*

4. Непрерывность элементарных функций

Докажем, что *любая элементарная функция непрерывна всюду, где она определена.* Как следует из общих свойств непрерывности (пункт 1) для этого достаточно доказать, что непрерывными в своей области определения являются основные элементарные функции.

В §4, пункт 2 нами была доказана непрерывность экспоненты e^x и натурального логарифма $\ln x$ (равенства (1)). Отсюда на основании свойств 1), 2) непрерывности (пункт 1) немедленно следует непрерывность функций

$$a^x = e^{\ln a \cdot x},\ 0 < a \neq 1,\ x \in \mathbf{R};\ \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a},\ 0 < a \neq 1,\ x > 0;\ x^\alpha = e^{\alpha \ln x},\ \alpha \in \mathbf{R},\ x > 0.$$

Осталось доказать непрерывность тригонометрических и обратных тригонометрических функций. Рассмотрим приращение функции $f(x) = \sin x$ в произвольной точке x :

$$\Delta f(x,\,\Delta x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Из неравенства (1), §4, пункт 3 следует, что $\left|\sin \frac{\Delta x}{2}\right| < \left|\frac{\Delta x}{2}\right|$ при малых $\Delta x \neq 0$, поэтому,

$$|\Delta f(x,\,\Delta x)| < 2 \cdot \left|\frac{\Delta x}{2}\right| \cdot 1 = |\Delta x|.$$

Отсюда мы заключаем, что при любом заданном $\varepsilon > 0$

$$|\Delta f(x,\,\Delta x)| < \varepsilon \text{ как только } |\Delta x| < \varepsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x, \Delta x) = 0$, что и означает непрерывность функции $\sin x$.

Непрерывность остальных тригонометрических функций следует из соотношений

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),\ \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},\ \operatorname{ctg} x = (\operatorname{tg} x)^{-1}$$

и уже упоминавшихся общих свойств непрерывности (пункт 1).

Для доказательства непрерывности обратных тригонометрических функций достаточно сослаться на теорему о непрерывности обратной функции из предыдущего пункта.

Пример. *Исследовать на непрерывность функцию*

$$f(x) = \begin{cases} \sin x^2, & x \in (-\infty, 0]; \\ \ln(1+x), & x \in (0,1); \\ 2^{-x}, & x \in [1,3]; \\ (3-x)^{-1}, & x \in (3, +\infty). \end{cases}$$

Решение. На полуосях и интервалах $(-\infty, 0)$, $(0,1)$, $(1,3)$, $(3, +\infty)$ функция $f(x)$ непрерывна, поскольку она является там элементарной. Проверим функцию на непрерывность в точках, где меняется ее аналитическое выражение, т. е. в точках $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$. Для этого вычислим односторонние пределы функции в этих точках.

$$\lim_{x \to x_1 - 0} f(x) = \lim_{x \to -0} \sin x^2 = 0,\ \lim_{x \to x_1 + 0} f(x) = \lim_{x \to +0} \ln(1+x) = 0.$$

Так как $\lim\limits_{x \to x_1 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_1 + 0} f(x) = f(x_1)$, то в точке $x_1 = 0$ данная функция непрерывна. В точке x_2 имеем:

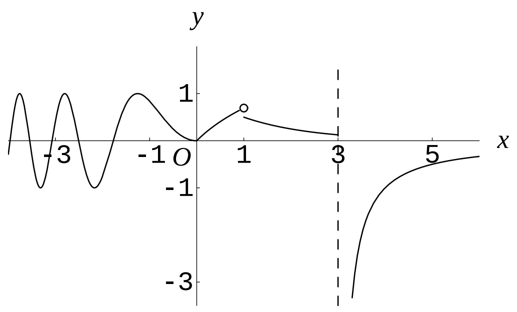
$$\lim_{x \to x_2 - 0} f(x) = \lim_{x \to 1 - 0} \ln(1+x) = \ln 2,\ \lim_{x \to x_2 + 0} f(x) = \lim_{x \to 1 + 0} 2^{-x} = \frac{1}{2}.$$

Здесь $\lim\limits_{x \to x_2 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_2 + 0} f(x)$, следовательно, $x_2 = 1$ – точка разрыва первого рода. Наконец, в точке x_3

$$\lim_{x \to x_3 - 0} f(x) = \lim_{x \to 3 - 0} 2^{-x} = \frac{1}{8},\ \lim_{x \to x_3 + 0} f(x) = \lim_{x \to 3 + 0} (3-x)^{-1} = -\infty$$

и, таким образом, в точке $x_3 = 3$ функция испытывает разрыв второго рода.

График этой функции имеет вид:



5. Равномерная непрерывность функции

Определение. *Функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной на некотором промежутке числовой оси (конечном или бесконечном), если она определена на этом промежутке и для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется положительное число $\delta_\varepsilon > 0$, обладающее тем свойством, что при всех x_1, x_2 из данного промежутка, удовлетворяющих неравенству*

$$|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon$$

для соответствующих значений функции выполняется неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Покажем что *равномерная непрерывность является более сильным свойством функции, чем ее непрерывность на промежутке.* Действительно, если функция равномерно непрерывна на некотором промежутке, то, зафиксировав произвольную точку x_0 этого промежутка, мы получим, что для любого $\varepsilon > 0$ отыщется $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ как только $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, что и означает непрерывность функции на данном промежутке. Убедимся теперь на примере в том, что *из непрерывности функции на промежутке еще не следует, вообще говоря, равномерная непрерывность.*

Контрпример. *Показать, что функция* $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ *не является равномерно непрерывной на промежутке* $[0,\,1)$.

Решение. Возьмем на промежутке $[0,\,1)$ две последовательности $x_n^{(1)} = 1 - \dfrac{1}{n}$ и $x_n^{(2)} = 1 - \dfrac{1}{n^2}$. Для этих последовательностей

$$\lim_{n\to\infty} \left| x_n^{(1)} - x_n^{(2)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = 0, \ \lim_{n\to\infty} \left| f\left(x_n^{(1)}\right) - f\left(x_n^{(2)}\right) \right| = \lim_{n\to\infty} (n^2 - n) = +\infty,$$

откуда и следует, что данная функция не может быть равномерно непрерывной на данном промежутке, так как элементы этих двух последовательностей сколь угодно близки, а разность соответствующих значений функции сколь угодно велика.

Сформулируем в заключение этого параграфа теорему, которая утверждает, что для промежутка, содержащего свои граничные точки, т. е. отрезка, свойства непрерывности и равномерной непрерывности равносильны.

Теорема Кантора. *Если функция непрерывна на отрезке, то она и равномерно непрерывна на нем.*

С доказательством теоремы Кантора можно ознакомиться в первом томе трехтомника *Фихтенгольца Г.М.*, имеющегося в списке литературы.

ГЛАВА V. ПРОИЗВОДНАЯ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

В этой главе мы изучим такую важнейшую характеристику функции, как ее *производная* и научимся ее использовать для исследования функции. Важность производной невозможно переоценить, так как она характеризует *скорость изменения* любого процесса.

§1. Определение производной и дифференциала и их основные свойства

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную в некотором интервале, содержащем точку x_0.

Определение 1. *Если существует конечный предел*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

то он называется производной функции $f(x)$ *в точке* x_0 *и обозначается через* $f'(x_0)$.

Переформулируем определение производной на языке приращений. Пусть

$$\Delta f(x_0,\Delta x)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

– приращение функции в точке x_0, соответствующее приращению аргумента Δx. Тогда приведенное выше *определение производной равносильно существованию конечного предела*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0,\Delta x)}{\Delta x},$$

т. е. производная представляет собой предел отношения приращения функции в данной точке к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента бесконечно мало.

Пример 1. *Найти производные функций:* a) $y=C$, $C\in\mathbf{R}$; b) $y=x$; c) $y=\sqrt[3]{x}$.

Решение. a) Здесь $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y(x,\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{C-C}{\Delta x}=0$ и, таким образом, $(C)'=0$.

b) В этом случае

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y(x,\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}=1,$$

следовательно, $(x)'=1$, $x\in\mathbf{R}$.

c) Для этой функции

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y(x,\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{(x+\Delta x)}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{\Delta x(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{(x+\Delta x)}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{(x+\Delta x)}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

и, стало быть, $(\sqrt[3]{x})'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $x\neq 0$. Покажем, что в точке $x=0$ производная этой функции не существует. В самом деле,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y(0,\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}=+\infty.$$

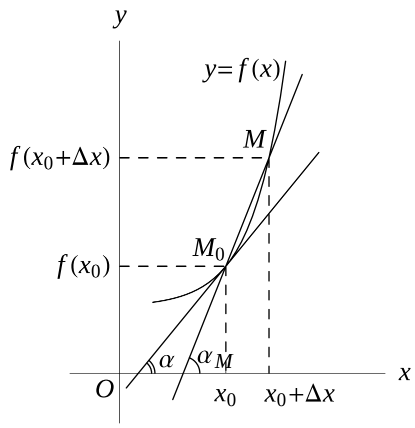
По аналогии с односторонними пределами можно ввести также определение *односторонних производных.* Конечный предел (если он существует)

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta f(x_0,\Delta x)}{\Delta x},\ \text{соответственно,}\ \lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta f(x_0,\Delta x)}{\Delta x}$$

называется *левосторонней*, соответственно, *правосторонней производной функции* $f(x)$ *в точке* x_0 и обозначается через $f'_-(x_0)$, соответственно, $f'_+(x_0)$. Очевидно, *для существования производной* $f'(x_0)$ *необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны обе односторонние производные* $f'_-(x_0)$ *и* $f'_+(x_0)$.

Разностное отношение $\dfrac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$ представляет собой *среднюю скорость изменения функции* на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$, следовательно, производная характеризует *скорость изменения функции в точке* x_0. Например, если точка двигается по прямой и известна зависимость $s(t)$ пройденного пути от времени, то скорость этой точки в момент времени t равна $v(t) = s'(t)$, соответственно, ускорение равно производной от скорости по времени, т. е. $a(t) = v'(t)$.

Выясним теперь *геометрический смысл* производной.



Угловой коэффициент k_M секущей M_0M равен

$$k_M = \operatorname{tg} \alpha_M = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x},$$

поэтому, если производная $f'(x_0)$ существует, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} k_M = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

и, таким образом, секущая M_0M стремится занять некоторое *предельное положение*, которое естественно считать *касательной к графику функции в точке* M_0. Угловой коэффициент касательной равен

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0).$$

Следовательно, геометрически, *производная* $f'(x_0)$ *представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции в точке* $M_0(x_0,\, f(x_0))$. Уравнение касательной имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{1}$$

В приложениях иногда используется *нормальная прямая* или *нормаль*, т. е. прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной. Поскольку вектор $\bar{n}(f'(x_0),\, -1)$ является нормальным для касательной, то для нормальной прямой он является направляющим и, следовательно, мы можем записать каноническое уравнение нормальной прямой:

$$\frac{x - x_0}{f'(x_0)} = \frac{y - f(x_0)}{-1}.$$

Пример 2. *Найти уравнение касательной, параллельной вектору* $\bar{l}(12,\, 1)$ *к графику функции* $y = \sqrt[3]{x}$ *в первой четверти.*

Решение. Найдем точку на графике, через которую проходит касательная. Так как угловой коэффициент касательной равен $k = \frac{1}{12}$ и $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ (пример 1, с)), то

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{12} \Longrightarrow x_0 = 8,\; y(x_0) = 2.$$

Таким образом, касательная проходит через точку $M_0(8,\,2)$ графика функции и ее уравнение имеет вид:

$$y-2=\frac{1}{12}(x-8)\Longleftrightarrow y=\frac{1}{12}x+\frac{4}{3}.$$

Рассмотрим теперь неразрывно связанные с производной понятия *дифференцируемости функции и ее дифференциала.*

Функция $f(x)$, *определенная в некотором интервале, содержащем точку* x_0 *называется дифференцируемой в точке* x_0, *если ее приращение в этой точке представляется в виде*:

$$\Delta f(x_0,\Delta x)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+\mathrm{o}(\Delta x), \tag{2}$$

где A *– некоторое действительное число,* $\mathrm{o}(\Delta x)$ *– бесконечно малая более высокого порядка, чем* Δx, *т. е.* $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\mathrm{o}(\Delta x)}{\Delta x}=0$.

Разделив обе части равенства (2) на приращение аргумента Δx, в пределе получим:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0,\Delta x)}{\Delta x}=f'(x_0)=A+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{o}(\Delta x)}{\Delta x}=A+0=A,\ \text{т. е. } A=f'(x_0).$$

Таким образом, если функция дифференцируема в точке x_0, то существует производная $f'(x_0)$ и приращение этой функции мы можем записать в виде:

$$\Delta f(x_0,\Delta x)=f'(x_0)\Delta x+\mathrm{o}(\Delta x). \tag{3}$$

Покажем, что верно и обратное, т. е. из существования производной следует дифференцируемость функции в данной точке. Действительно, пусть в точке x_0 существует производная $f'(x_0)$. Так как функция

$$\varphi(\Delta x)=\frac{\Delta f(x_0,\Delta x)}{\Delta x}-f'(x_0),$$

доопределенная в нуле нулем, является, очевидно, бесконечно малой при $\Delta x\to 0$, то

$$\Delta f(x_0,\Delta x)=f'(x_0)\Delta x+\mathrm{o}(\Delta x),\ \text{где } \mathrm{o}(\Delta x)=\varphi(\Delta x)\Delta x, \tag{4}$$

что и означает дифференцируемость функции $f(x)$ в точке x_0.

Таким образом, мы доказали, что *существование производной функции эквивалентно ее дифференцируемости.* В связи с этим, часто в дальнейшем процесс нахождения производной мы будем называть коротко *дифференцированием функции.*

Определение 2. *Линейная часть* $f'(x_0)\Delta x$ *приращения дифференцируемой в точке* x_0 *функции* $f(x)$ *называется дифференциалом функции в этой точке и обозначается через* $\mathrm{d}f(x_0)$, *т. е.* $\mathrm{d}f(x_0)=f'(x_0)\Delta x$.

Перепишем, учитывая это определение, формулу (3) для приращения функции:

$$\Delta f(x_0,\Delta x)=\mathrm{d}f(x_0)+\mathrm{o}(\Delta x).$$

Эту формулу мы можем использовать, в частности, для *приближенного вычисления значений функции с помощью дифференциала*, так как при малых значениях приращения Δx из нее следует, что

$$\Delta f(x_0,\Delta x)\approx\mathrm{d}f(x_0)\Longleftrightarrow f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+\mathrm{d}f(x_0)$$

с погрешностью $\mathrm{o}(\Delta x)$.

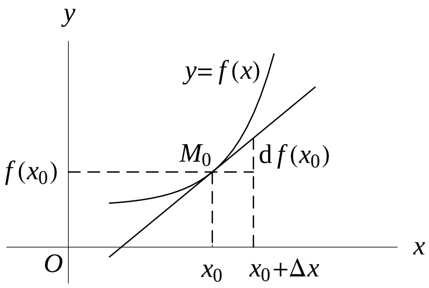
Предполагая, что функция $y=f(x)$ дифференцируема в интервале $(a,\,b)$, т. е. в любой точке этого интервала, и считая по определению, что[1] $\mathrm{d}x=\Delta x$, мы можем записать выражение для дифференциала функции в произвольной точке интервала в следующей *симметричной форме*:

$$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x.$$

Этой формулой оправдывается еще одно *обозначение для производной*: $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Как следует из уравнения (1) касательной к графику функции, *дифференциал* $\mathrm{d}f(x_0)=f'(x_0)\Delta x$ *равен приращению ординаты касательной, которое соответствует приращению аргумента* Δx.

[1]Это соотношение можно формально обосновать тем, что, так как $(x)'=1$ (пример 1, b)), то дифференциал функции $y=x$ равен $\mathrm{d}y=\mathrm{d}x=(x)'\Delta x=\Delta x$.



Изучим теперь *основные свойства производной и дифференциала.*

1) *Если функция* $f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0, *то она и непрерывна в этой точке.* Действительно, из формулы (3) следует, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0,\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}f'(x_0)\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\mathrm{o}(\Delta x)=0,$$

что и доказывает непрерывность функции в точке x_0 (глава IV, §5, пункт 1).

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Примером может служить функция $y=\sqrt[3]{x}$ из примера 1, c), которая *непрерывна в любой точке как элементарная, но не является дифференцируемой в нуле.*

2) *Если функция* $y=f(x)$ *монотонна и непрерывна на отрезке* $[a,\,b]$ *и дифференцируема в некоторой точке* $x_0\in(a,\,b)$, *причем* $f'(x_0)\neq 0$, *то обратная функция* $x=f^{-1}(y)$ *дифференцируема в точке* $y_0=f(x_0)$ *и*

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}. \tag{5}$$

Доказательство. По теореме о непрерывности обратной функции (глава IV, §5, пункт 3) обратная функция $x=f^{-1}(y)$ существует, монотонна в том же смысле, что и функция $y=f(x)$ и непрерывна в своей области определения. Заметим далее, что приращение аргумента Δx функции $y=f(x)$ в точке x_0 является приращением обратной функции $x=f^{-1}(y)$ в точке y_0 и наоборот, приращение аргумента Δy функции $x=f^{-1}(y)$ в точке y_0 является приращением функции $y=f(x)$ в точке x_0, причем, ввиду монотонности этих функций, если $\Delta x\neq 0$, то и $\Delta y\neq 0$ и наоборот. Кроме того, из непрерывности данной функции и обратной к ней следует, что приращения Δx и Δy бесконечно малы одновременно, т. е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,\ \lim_{\Delta y\to 0}\Delta x=0.$$

Следовательно,

$$(f^{-1})'(y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Формуле (5) мы можем придать более симметричный вид, если будем использовать следующие обозначения для производных: $y'_x=f'(x)$, $x'_y=(f^{-1})'(y)$. Тогда

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}\Longleftrightarrow y'_x x'_y=1.$$

Сформулируем теперь свойства производной, связанные с арифметическими операциями над функциями (*правила дифференцирования*).

3) *Если функции* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *дифференцируемы в точке* x, *то функции* $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$, *где* c_1, c_2 *– действительные числа, и* $f_1(x)f_2(x)$ *также дифференцируемы в этой точке и*

$$(c_1f_1(x)+c_2f_2(x))'=c_1f_1'(x)+c_2f_2'(x),$$
$$(f_1(x)f_2(x))'=f_1'(x)f_2(x)+f_1(x)f_2'(x).$$

Если, вдобавок, функция $f_2(x)$ *отлична от нуля в некотором интервале, содержащем точку* x, *то дифференцируемой является и функция* $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, *причем*

$$\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)' = \frac{f_1'(x)f_2(x) - f_1(x)f_2'(x)}{(f_2(x))^2}.$$

Первая из этих формул немедленно следует из определения производной и соответствующих свойств пределов функций (глава IV, §4, пункт 2).

Убедимся в справедливости формулы дифференцирования произведения. Прежде всего заметим, что по свойству 1) функция $f_2(x)$ непрерывна в точке x и, значит,

$$\lim_{\Delta x\to 0} f_2(x+\Delta x) = f_2(x).$$

Преобразуем приращение функции $f_1(x)f_2(x)$ в точке x :

$$\Delta(f_1f_2)(x,\Delta x) = f_1(x+\Delta x)f_2(x+\Delta x) - f_1(x)f_2(x) =$$
$$= (f_1(x+\Delta x) - f_1(x))f_2(x+\Delta x) + f_1(x)(f_2(x+\Delta x) - f_2(x)) =$$
$$= \Delta f_1(x,\Delta x)f_2(x+\Delta x) + f_1(x)\Delta f_2(x,\Delta x).$$

Отсюда, использовав свойства 7), a) и b) пределов функций (глава IV, §4, пункт 2) получим:

$$(f_1(x)f_2(x))' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(f_1f_2)(x,\Delta x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f_1(x,\Delta x)}{\Delta x}f_2(x+\Delta x) + f_1(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f_2(x,\Delta x)}{\Delta x} = f_1'(x)f_2(x) + f_1(x)f_2'(x).$$

Формула дифференцирования частного двух функций доказывается аналогично.

Установим, наконец, *правило дифференцирования композиции функций.*

4) *Если функция* $f_1(x)$ *дифференцируема в точке* x, *а функция* $f_2(y)$ *дифференцируема в точке* $f_1(x)$, *то композиция функций* $f_2(f_1(x))$ *дифференцируема в точке* x *и*

$$(f_2(f_1(x))' = f_2'(f_1(x))f_1'(x).$$

Для доказательства запишем приращение композиции в точке x, воспользовавшись формулой (4) для функции $f_2(y)$ в точке $f_1(x)$:

$$\Delta(f_2\circ f_1)(x,\,\Delta x) = f_2'(f_1(x))\Delta f_1(x,\,\Delta x) + \varphi_2(\Delta f_1(x,\,\Delta x))\Delta f_1(x,\,\Delta x),$$

где $\varphi_2(\Delta y)$ – бесконечно малая при $\Delta y\to 0$ функция. Отсюда, учитывая непрерывность функции $f_1(x)$ в точке x, получим:

$$(f_2(f_1(x))' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(f_2\circ f_1)(x,\,\Delta x)}{\Delta x} =$$
$$= f_2'(f_1(x))\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f_1(x,\,\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\varphi_2(\Delta f_1(x,\,\Delta x))\frac{\Delta f_1(x,\,\Delta x)}{\Delta x} =$$
$$= f_2'(f_1(x))f_1'(x) + 0\cdot f_1'(x) = f_2'(f_1(x))f_1'(x).$$

Поскольку дифференциал функции пропорционален дифференциалу аргумента с коэффициентом пропорциональности, равным производной, то *правила дифференцирования* 3) *переносятся и на дифференциал*:

$$\mathrm{d}(c_1f_1 + c_2f_2) = c_1\mathrm{d}f_1 + c_2\mathrm{d}f_2,$$
$$\mathrm{d}(f_1\cdot f_2) = \mathrm{d}f_1\cdot f_2 + f_1\cdot\mathrm{d}f_2,$$
$$\mathrm{d}\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \frac{\mathrm{d}f_1\cdot f_2 - f_1\cdot\mathrm{d}f_2}{(f_2)^2}.$$

Правило дифференцирования композиции функций позволяет установить *свойство инвариантности дифференциала.* Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некотором интервале. Дифференциал этой функции равен:

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x. \tag{6}$$

Предположим теперь, что аргумент x является, в свою очередь, дифференцируемой функцией $x = \varphi(z)$ переменной z. Найдем дифференциал композиции функций $f(\varphi(z))$, пользуясь свойством 4) производной:

$$\mathrm{d}f(\varphi(z)) = (f(\varphi(z)))'\mathrm{d}z = f'(\varphi(z))\varphi'(z)\mathrm{d}z = f'(\varphi(z))\mathrm{d}\varphi(z),$$

т. е.

$$\mathrm{d}f(\varphi(z)) = f'(\varphi(z))\mathrm{d}\varphi(z). \tag{7}$$

Сравнивая формулы (6) и (7), мы можем утверждать, что *вид дифференциала функции не зависит от того, является ли ее аргумент независимым или функцией другой переменной.* В этом и заключается *свойство инвариантности дифференциала*, которое мы будем активно использовать при *интегрировании функций.*

§2. Дифференцирование элементарных функций. Производные функций, заданных неявно и параметрически. Производные и дифференциалы высших порядков

1. Таблица производных основных элементарных функций

Найдем, пользуясь известными из §4, пункт 3 предыдущей главы пределами и правилами дифференцирования из предшествующего параграфа, производные основных элементарных функций.

Сначала найдем производную *натурального логарифма*, воспользовавшись определением производной, числом e (глава IV, §4, пункт 3, формула (5)) и непрерывностью логарифмической функции (глава IV, §5, пункт 4):

$$(\ln x)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}.$$

Таким образом, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Отсюда сразу же следует, что при любом $0 < a \neq 1$

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Теперь, использовав производную логарифма и правило дифференцирования композиции функций, мы найдем производные степенной и показательной функций. Рассмотрим сначала при $x > 0$ и $\alpha \in \mathbf{R}$ *степенную функцию* $y = x^\alpha$. Последовательно прологарифмируем и продифференцируем обе части последнего равенства:

$$\ln y = \ln x^\alpha = \alpha \ln x \Longrightarrow (\ln y)' = (\alpha \ln x)' \Longleftrightarrow \frac{1}{y}\cdot y' = \alpha\frac{1}{x} \Longleftrightarrow y' = \alpha\frac{y}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Стало быть, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. В частности, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Совершенно аналогично найдем производную *показательной функции* $y = a^x$, $0 < a \neq 1$:

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a \Longrightarrow (\ln y)' = (x\ln a)' \Longleftrightarrow \frac{1}{y}\cdot y' = \ln a \Longleftrightarrow y' = y\ln a = a^x \ln a,$$

т. е. $(a^x)' = a^x \ln a$. Отсюда, в частности, следует, что $(e^x)' = e^x$.

Займемся теперь производными *тригонометрических функций.* Принимая во внимание тригонометрический предел (глава IV, §4, пункт 3, формулы (4)) и непрерывность функции $\cos x$, получим:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1\cdot\cos x = \cos x.$$

Отсюда, воспользовавшись правилом дифференцирования композиции функций, найдем:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) = -\sin x.$$

Найдем, используя правило дифференцирования частного, производные функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Аналогично,

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Осталось отыскать формулы для производных *обратных тригонометрических функций.* Для функции $y = \arcsin x$ мы имеем $\sin y = x$. Дифференцируя обе части последнего равенства, получим:

$$(\sin y)' = (x)' \Longrightarrow \cos y \cdot y' = 1.$$

Отсюда,

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ т. е. } (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Учитывая далее, что при всех $x \in [-1,\, 1]$ $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, находим:

$$(\arccos x)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Совершенно аналогично мы можем проверить, что

$$(\operatorname{arctg} x)' = -(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Приведем здесь еще формулы дифференцирования *гиперболических функций*, определенных в §4, пункт 1 главы IV.

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)' = \frac{1}{2}((e^x)' - e^{-x}(-x)') = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x.$$

Аналогично мы можем убедиться в том, что

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)' = \operatorname{sh} x;$$

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Сведем теперь все найденные производные в таблицу.

Таблица производных

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},\ \alpha \in \mathbf{R};\quad (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}};$

2) $(a^x)' = a^x \ln a,\ 0 < a \neq 1;\quad (e^x)' = e^x;$

3) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a},\ 0 < a \neq 1;\quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x};$

4) $(\sin x)' = \cos x;$

5) $(\cos x)' = -\sin x;$

6) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

7) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x};$

$$
\begin{aligned}
&8)\quad (\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\\
&9)\quad (\operatorname{arctg} x)' = -(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};\\
&10)\quad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;\\
&11)\quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;\\
&12)\quad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};\\
&13)\quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.
\end{aligned}
$$

Используя эту таблицу и доказанные в предыдущем параграфе правила дифференцирования, *мы можем найти производную любой элементарной функции, причем эта производная также будет элементарной функцией.*

Пример 1. *Найти производную функции* $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

Решение. Воспользовавшись таблицей и правилом дифференцирования композиции функций, получим:

$$
y' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(1+x^2)'\right) =
$$
$$
= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x\right) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.
$$

Таким образом, $\left(\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Замечание. При вычислении производной степенного выражения $y = (f_1(x))^{f_2(x)}$, где $f_1(x)$, $f_2(x)$ – дифференцируемые в некотором интервале функции, причем в этом интервале $f_1(x) > 0$, удобно предварительно прологарифмировать обе части данного равенства.

Пример 2. *Найти производную функции* $y = (\sin x)^{2^{\sqrt{x}}}$, $x \in (0,\,\pi)$.

Решение. Так как $\ln y = \ln(\sin x)^{2^{\sqrt{x}}} = 2^{\sqrt{x}} \ln\sin x$, то

$$
(\ln y)' = (2^{\sqrt{x}} \ln\sin x)'
$$

или

$$
\frac{1}{y}\cdot y' = (2^{\sqrt{x}})'\ln\sin x + 2^{\sqrt{x}}(\ln\sin x)' = 2^{\sqrt{x}}\ln 2\cdot(\sqrt{x})'\ln\sin x + 2^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' =
$$
$$
= 2^{\sqrt{x}}\ln 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln\sin x + 2^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x = 2^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln 2}{2\sqrt{x}}\cdot\ln\sin x + \operatorname{ctg} x\right).
$$

Отсюда

$$
y' = y(\ln y)' = (\sin x)^{2^{\sqrt{x}}}2^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln 2}{2\sqrt{x}}\cdot\ln\sin x + \operatorname{ctg} x\right).
$$

2. Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически

а) ***Производная неявно заданной функции.***

Иногда бывает трудно или невозможно установить явную, т. е. прямую зависимость между переменными x и y, однако сравнительно несложно найти связь между ними в виде уравнения

$$
F(x,y) = 0, \tag{1}
$$

где $F(x,y)$ – известная функция своих аргументов.

Функция $y = y(x)$ *(или* $x = x(y)$*), для которой в некотором интервале*

$$
F(x, y(x)) = 0 \quad (\textit{или } F(x(y), y) = 0)
$$

называется неявной функцией, определяемой уравнением (1).

В общем случае неявная функция определяется из уравнения (1) *неоднозначно*, так как график неявной функции представляет собой, вообще говоря, лишь часть кривой, заданной уравнением (1). Например, из уравнения гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

мы находим:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Таким образом, это уравнение определяет две неявные функции, определенные при $|x| \geq a$.

Предположим теперь, что неявная функция $y = y(x)$, определяемая уравнением (1) *дифференцируема* в интервале, где она определена. Поскольку при всех x из интервала определения неявной функции $F(x, y(x)) = 0$, то формально ее производная может быть найдена из уравнения

$$(F(x, y))'_x = 0, \tag{2}$$

в котором $F(x, y)$ рассматривается как сложная дифференцируемая функция аргумента x. Выполнив дифференцирование в уравнении (2), мы получим линейное относительно искомой производной y' уравнение, из которого она и определяется.

Пример 1. *Найти производную функции, заданной неявно уравнением* $x + \sin(xy) = y$.

Решение. Найдем производную по переменной x от обеих частей данного уравнения:

$$(x + \sin(xy))' = y' \Longleftrightarrow 1 + \cos(xy)(xy)' = y' \Longleftrightarrow 1 + \cos(xy)(y + xy') = y'.$$

Следовательно,

$$y' = \frac{1 + y\cos(xy)}{1 - x\cos(xy)}.$$

Пример 2. *Найти уравнение касательной в любой точке эллипса*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Решение. Воспользуемся уравнением касательной (1) из предыдущего параграфа. Найдем сначала производную неявной функции, определяемой уравнением эллипса:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)' = (1)' \Longrightarrow \frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0 \Longrightarrow y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}.$$

Запишем теперь уравнение касательной в точке эллипса с координатами $M_0(x_0, y_0)$, учитывая, что угловой коэффициент этой касательной равен $k = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}$:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \Longleftrightarrow y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}(x - x_0) \Longleftrightarrow \frac{x_0(x - x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

и, таким образом, искомое уравнение касательной имеет вид:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

b) ***Производная функции, заданной параметрически.***

Предположим, что переменные x и y являются функциями аргумента t, который мы будем называть *параметром*, т. е.

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in (t_1,\, t_2), \tag{3}$$

причем функцию $x(t)$ мы будем считать монотонной и дифференцируемой с ненулевой производной в указанном интервале, а функцию $y(t)$ мы будем предполагать дифференцируемой в интервале $(t_1,\, t_2)$. Благодаря свойству 2) предыдущего параграфа в некотором интервале $(a,\, b)$ существует дифференцируемая обратная для $x(t)$ функция $t = t(x)$ и, стало быть, в интервале $(a,\, b)$ определена функция $y = y(t(x))$ аргумента x, которую мы будем называть *функцией, заданной параметрически уравнениями* (3). Найдем выражение для производной этой функции в любой точке x интервала $(a,\,b)$ через параметр t, воспользовавшись правилом дифференцирования композиции функций и связью между производными взаимно обратных функций (свойство 4) и формула (5) предыдущего параграфа):

$$y'_x = (y(t(x)))'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

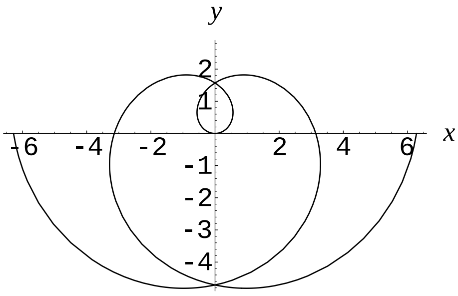
Следовательно, производная параметрически заданной функции может быть найдена по формуле:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пример 3. *Найти уравнения касательных в точке $M_0(0, \frac{\pi}{2})$ линии, которая задана параметрически уравнениями*

$$x = t\cos t,\; y = t\sin t.$$

Решение. Так как для этой линии $x(-t) = -x(t)$, $y(-t) = y(t)$ и $x^2 + y^2 = t^2$, то она представляет собой совокупность двух симметричных относительно оси Oy спиралей.



Через точку M_0 эти спирали проходят при $t = \pm\frac{\pi}{2}$. Найдем угловые коэффициенты касательных, соответствующих этим значениям параметра. Так как

$$x'_t = \cos t - t\sin t,\; y'_t = \sin t + t\cos t,$$

то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t + t\cos t}{\cos t - t\sin t}$$

и, следовательно,

$$k_{1,2} = y'_x\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \mp\frac{2}{\pi}.$$

Осталось записать уравнения двух касательных в данной точке:

$$y - \frac{\pi}{2} = \pm\frac{2}{\pi}x \Longleftrightarrow y = \pm\frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2}.$$

3. Производные и дифференциалы высших порядков

Определим в заключение этого параграфа понятия *производной и дифференциала высших порядков.*

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в интервале $(a,\,b)$ и, таким образом, в этом интервале определена функция $f'(x)$. Если в точке $x \in (a,\,b)$ существует производная функции $f'(x)$, то она называется *второй производной функции* $f(x)$ (*производной второго порядка*) и обозначается через $f''(x)$ или y''. Таким образом,

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

В этом случае функцию $f(x)$ будем называть *дважды дифференцируемой* в точке x.

Вторым дифференциалом (*дифференциалом второго порядка*) в точке $x \in (a,\,b)$, в которой существует вторая производная $f''(x)$, называется дифференциал от первого дифференциала. Для второго дифференциала используется обозначение $\mathrm{d}^2 f(x)$. Учитывая, что $\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x$ и дифференциал аргумента $\mathrm{d}x = \Delta x$ не зависит от x, получим:

$$\mathrm{d}^2 f(x) = \mathrm{d}(\mathrm{d}f(x)) = \mathrm{d}(f'(x)\mathrm{d}x) = \mathrm{d}f'(x)\cdot\mathrm{d}x = f''(x)\mathrm{d}x^2.$$

Следовательно,

$$\mathrm{d}^2 f(x) = f''(x)\mathrm{d}x^2 \quad \text{или} \quad \mathrm{d}^2 f(x) = f''(x)\Delta x^2.$$

Аналогично находятся *производные и дифференциалы более высоких порядков*:

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'; \ \mathrm{d}^n f(x) = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1} f(x)) \Longrightarrow \mathrm{d}^n f(x) = f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n = f^{(n)}(x)\Delta x^n, \ n \geq 2.$$

Из последней формулы следует, в частности, что для производной n-го порядка функции $y = f(x)$ можно использовать обозначение

$$y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}.$$

Если требуется явно указать переменную, по которой ведется дифференцирование, то производную n-го порядка функции $y = y(x)$ мы будем обозначать через

$$y^{(n)} = y^{(n)}_{x^n}.$$

Пример 1. *Найти производную n-го порядка функции $y = \sin^2 x$.*

Решение. Чтобы заметить общую закономерность, найдем несколько первых производных данной функции:

$$\begin{aligned} &y' = (\sin^2 x)' = 2\sin x(\sin x)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x; \\ &y'' = (\sin 2x)' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2\cos 2x; \\ &y''' = (2\cos 2x)' = -2\sin 2x \cdot (2x)' = -4\sin 2x. \end{aligned}$$

Исходя из структуры этих производных мы можем предположить, что производная n-го порядка данной функции имеет вид:

$$y^{(n)} = 2^{n-1}\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}(n-1)\right).$$

Проверим эту гипотезу по индукции. При $n = 1$ утверждение справедливо. Предположим, что оно верно для номера n и докажем, что оно имеет место также и для следующего номера $n+1$. Действительно,

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= \left(2^{n-1}\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}(n-1)\right)\right)' = 2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}(n-1)\right)\left(2x + \frac{\pi}{2}(n-1)\right)' = \\ &= 2^n\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}(n-1)\right) = 2^n\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}n\right), \end{aligned}$$

в чем и требовалось убедиться.

По индукции несложно убедиться в том, что *производную n-го порядка произведения n раз* дифференцируемых функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ мы можем найти по *формуле Лейбница*:

$$(f_1(x)f_2(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f_1^{(n-k)}(x) f_2^{(k)}(x) = f_1^{(n)}(x)f_2(x) + nf_1^{(n-1)}(x)f_2'(x) + \ldots + f_1(x)f_2^{(n)}(x),$$

где

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}, \ k = \overline{1, n}$$

и по определению считается, что $C_n^0 = 1$, $f_1^{(0)}(x) = f_1(x)$, $f_2^{(0)}(x) = f_2(x)$.

Если функция задана *неявно* или *параметрически* (пункт 2), то повторным дифференцированием мы также можем находить производные высших порядков этой функции. Остановимся чуть подробнее на повторном дифференцировании параметрически заданной функции. Пусть функция задана параметрически уравнениями

$$x = x(t), \ y = y(t), \ t \in (t_1, \, t_2),$$

причем функции $x(t)$, $y(t)$ удовлетворяют всем условиям, перечисленным в пункте 2, b) и, сверх того, они дважды дифференцируемы в интервале $(t_1, \, t_2)$. Тогда

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x = (y'_x)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

и, таким образом,

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Аналогично мы можем найти и производные более высоких порядков параметрически заданной функции.

Пример 2. *Найти вторые производные функций*:

$$\text{a) } \sqrt{x^2+y^2} = e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}; \ \text{b) } x = t(\ln t - 1), \ y = t(\ln^2 t - 2\ln t + 2).$$

Решение. a) Найдем первую производную данной неявно заданной функции. Так как

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{(x^2+y^2)'}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2x+2yy'}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\left(e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\right)'_x = e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)' = e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)' = e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\frac{\frac{y'x-y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\frac{y'x-y}{x^2+y^2},$$

то

$$\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} = e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\frac{y'x-y}{x^2+y^2}$$

и, следовательно,

$$x+yy' = y'x - y \Longrightarrow y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

Дифференцируя повторно, получим:

$$y'' = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)' = \frac{(x+y)'(x-y)-(x+y)(x-y)'}{(x-y)^2} = \frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2} =$$

$$= \frac{(1+\frac{x+y}{x-y})(x-y)-(x+y)(1-\frac{x+y}{x-y})}{(x-y)^2} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

b) Для этой параметрически заданной функции

$$x' = (t(\ln t-1))' = t'(\ln t - 1) + t(\ln t - 1)' = \ln t - 1 + t\cdot\frac{1}{t} = \ln t,$$

$$y' = (t(\ln^2 t - 2\ln t + 2))' = t'(\ln^2 t - 2\ln t + 2) + t(\ln^2 t - 2\ln t + 2)' =$$

$$= \ln^2 t - 2\ln t + 2 + t\left(2\ln t\cdot\frac{1}{t} - \frac{2}{t}\right) = \ln^2 t.$$

Следовательно,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\ln^2 t}{\ln t} = \ln t.$$

Тогда

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(\ln t)'}{\ln t} = \frac{1}{t\ln t}.$$

§3. Теоремы о среднем для дифференцируемых функций

В математическом анализе большое значение имеет группа теорем о существовании внутри интервала, где функция дифференцируема, точки, в которой производная обладает определенными свойствами.

Теорема Ролля. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(a,\, b)$, непрерывна на отрезке $[a,\, b]$ и на концах этого отрезка принимает равные значения. Тогда внутри отрезка существует точка $c \in (a,\, b)$, для которой $f'(c) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме Вейерштрасса (глава IV, §5, пункт 3) функция достигает на отрезке $[a,\, b]$ своих наименьшего m и наибольшего M значений. Если $m = M$, то $f(x) \equiv C \in \mathbf{R}$ и в качестве точки c мы можем взять любое число интервала $(a,\, b)$, так как $f'(x) = 0, \ x \in (a,\, b)$. Если же $m < M$, то по крайней мере одно из этих значений достигается внутри отрезка. Для определенности предположим, что $f(c) = m, \ c \in (a,\, b)$ и докажем, что точка c—искомая. Действительно, при малых приращениях аргумента Δx в точке c имеет место неравенство $f(c+\Delta x) \geq f(c)$, следовательно, $\Delta f(c,\, \Delta x) = f(c+\Delta x) - f(c) \geq 0$ и

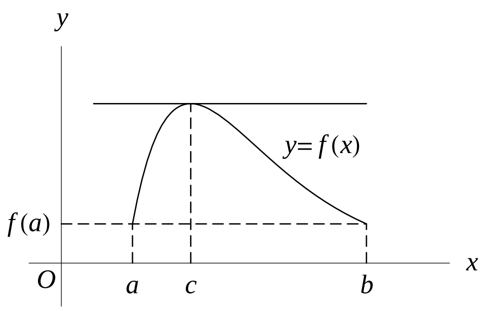
$$\frac{\Delta f(c,\, \Delta x)}{\Delta x} \leq 0,\ \Delta x < 0; \quad \frac{\Delta f(c,\, \Delta x)}{\Delta x} \geq 0,\ \Delta x > 0.$$

Отсюда, использовав дифференцируемость функции в точке c и свойство 5) предела функции (глава IV, §4, пункт 2), получим:

$$f'(c) = f'_-(c) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} \leq 0,\ f'(c) = f'_+(c) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Таким образом, $f'(c) = 0$, что и требовалось доказать.

Геометрически доказанное утверждение означает, что *на графике дифференцируемой функции между граничными точками, имеющими равные ординаты, найдется точка, в которой касательная параллельна оси абсцисс.*



Теорема Лагранжа. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\, b]$ и дифференцируема в интервале $(a,\, b)$. Тогда найдется точка $c \in (a,\, b)$, для которой*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Для доказательства этой теоремы рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = (f(b) - f(a))x - f(x)(b-a),$$

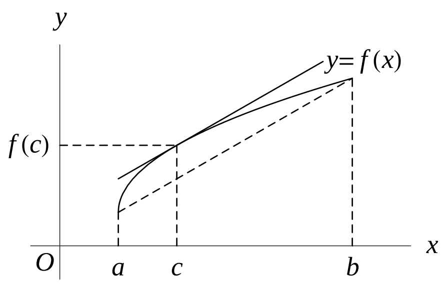
которая удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, так как она, очевидно, непрерывна на отрезке $[a,\, b]$, дифференцируема внутри его и $\varphi(a) = \varphi(b) = af(b) - bf(a)$. Тогда существует точка $c \in (a,\, b)$, для которой $\varphi'(c) = 0$. Так как

$$\varphi'(x) = f(b) - f(a) - f'(x)(b-a),$$

то

$$\varphi'(c) = f(b) - f(a) - f'(c)(b-a) = 0 \Longrightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа заключается в том, что *между граничными точками графика дифференцируемой в интервале функции всегда можно найти точку, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей граничные точки графика.*



Теорема Коши. *Предположим, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a,\, b]$ и дифференцируемы в интервале $(a,\, b)$, причем $f'_2(x) \neq 0,\ x \in (a,\, b)$. Тогда существует точка $c \in (a,\, b)$, для которой*

$$\frac{f_1(b) - f_1(a)}{f_2(b) - f_2(a)} = \frac{f'_1(c)}{f'_2(c)}.$$

Теорема Коши может быть доказана совершенно аналогично предыдущей теореме, если ввести в рассмотрение функцию

$$\varphi(x) = (f_1(b) - f_1(a))f_2(x) - (f_2(b) - f_2(a))f_1(x).$$

Теорема Коши имеет тот же геометрический смысл, что и теорема Лагранжа, если мы рассмотрим параметрически заданную функцию

$$y = f_1(x),\ z = f_2(x),\ x \in [a,\, b]$$

аргумента z. Графиком этой функции является линия в плоскости Oyz. Хорда, соединяющая точки $A(f_1(a),\, f_2(a))$, $B(f_1(b),\, f_2(b))$ имеет угловой коэффициент $\frac{f_1(b)-f_1(a)}{f_2(b)-f_2(a)}$, а угловой коэффициент касательной к графику этой функции в точке $C(f_1(c),\, f_2(c))$ равен $\frac{f_1'(c)}{f_2'(c)}$ (§2, пункт 2). Тогда теорема Коши утверждает, что *касательная к графику этой параметрически заданной функции в точке C параллельна хорде, соединяющей точки графика A и B.*

Пример. *Убедиться в том, что для функции $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, где $x_1,\, x_2,\, x_3$ – попарно различные действительные числа, уравнение $f'(x) = 0$ имеет два различных действительных корня.*

Решение. Для определенности будем считать, что $x_1 < x_2 < x_3$. Так как $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$, то по теореме Ролля в интервалах $(x_1,\, x_2)$ и $(x_2,\, x_3)$ существуют различные корни уравнения $f'(x) = 0$. Так как это уравнение является квадратным, то других корней оно иметь не может.

§4. Правило Лопиталя

В этом параграфе мы докажем утверждение, которое может оказаться полезным при вычислении пределов функций, которые приводят к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема. *Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определены и дифференцируемы в некотором интервале, содержащем точку x_0, кроме, может быть, самой этой точки, и $f_2'(x) \neq 0$ в этом интервале. Предположим также, что*

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \lim_{x\to x_0} f_2(x) = 0 \quad \Big(\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \lim_{x\to x_0} f_2(x) = \infty\Big).$$

Тогда, если существует предел (конечный или бесконечный)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)},$$

то существует также предел

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

и

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}. \quad \textit{(правило Лопиталя)}$$

Доказательство проведем для неопределенности $\frac{0}{0}$. Доопределим функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в точке x_0 нулевыми значениями и применим теорему Коши к отрезку $[x_0,\, x]$:

$$\frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{f_2(x) - f_2(x_0)} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1'(c)}{f_2'(c)},\ c \in (x_0,\, x).$$

Из последнего равенства и следует утверждение теоремы, так как при $x \to x_0$ также и $c \to x_0$.

Замечание 1. Правило Лопиталя сохраняет также свою силу и в случае неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ при $x \to \infty$.

Замечание 2. В некоторых случаях правило Лопиталя целесообразно применять повторно. При нахождении сложных пределов имеет смысл комбинировать свойства пределов (глава IV, §4, пункты 2 – 4) и правило Лопиталя.

Пример 1. *Вычислить пределы*:

$$\text{a) } L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\arcsin x^3}; \quad \text{b) } L_2 = \lim_{x\to \pi+0} \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln(x-\pi)}.$$

Решение. a) Здесь мы имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Так как $\arcsin x^3 \sim x^3$ при $x \to 0$ (глава IV, §4, пункт 4, формула 2)), то

$$L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}.$$

К последнему пределу применим правило Лопиталя:

$$L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{tg} x - x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot 1^2 = \frac{1}{3}.$$

b) В этом случае возникает неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, которую мы раскроем с помощью правила Лопиталя:

$$L_2 = \lim_{x\to\pi+0} \frac{(\operatorname{ctg} x)'}{(\ln(x-\pi))'} = \lim_{x\to\pi+0} \frac{-\frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x-\pi}} = -\lim_{x\to\pi+0} \frac{x-\pi}{\sin^2 x}.$$

Мы пришли к неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Используем правило Лопиталя повторно:

$$L_2 = -\lim_{x\to\pi+0} \frac{(x-\pi)'}{(\sin^2 x)'} = -\lim_{x\to\pi+0} \frac{1}{2\sin x \cos x} = -\infty.$$

Замечание 3. Если при вычислении предела возникает неопределенность другого вида, то ее следует предварительно преобразовать к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ и вслед за этим уже применить правило Лопиталя. В случае одной из степенных неопределенностей 0^0, ∞^0, 1^∞, воспользовавшись непрерывностью логарифма, мы можем сначала вычислить предел логарифма функции, а затем найти экспоненту от этого предела.

Пример 2. *Найти предел*:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

Решение. В этом случае возникает неопределенность вида 0^0. Найдем предел логарифма этой функции. Так как

$$\ln\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)^{\frac{1}{\ln x}} = \frac{\ln\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)}{\ln x},$$

то появившуюся здесь неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ мы можем раскрыть по правилу Лопиталя:

$$\ln L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\right)'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)'}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{\frac{1}{x}} - 1} \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}} - 1},$$

так как $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$. В последнем пределе имеется неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которую мы также раскрываем по правилу Лопиталя:

$$\ln L = -\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)'} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = -\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = -1.$$

Следовательно, $L = e^{-1}$.

Замечание 4. Использовать правило Лопиталя необходимо с известной осторожностью, так как предел

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

может существовать, в то время как предела

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$$

может и не быть. Например, предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$$

с неопределенностью $\frac{\infty}{\infty}$ существует и равен

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1,$$

так как функция $\frac{\sin x}{x}$ является бесконечно малой на бесконечности, как произведение бесконечно малой $\frac{1}{x}$ и ограниченной функции $\sin x$ (глава IV, §4, пункт 4). В то же время воспользоваться правилом Лопиталя мы здесь не можем, так как

$$\frac{(x+\sin x)'}{x'}=1+\cos x,$$

а предел $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$ не существует. Действительно, на бесконечно большой последовательности $x_n^{(1)}=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{N}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\cos x_n^{(1)}\right)=1,$$

а на другой бесконечно большой последовательности $x_n^{(2)}=2\pi n,\ n\in\mathbf{N}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\cos x_n^{(2)}\right)=2,$$

следовательно, ввиду свойства единственности предела (глава IV, §4, пункт 2, свойство 3)) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$ не существует.

§5. Формула Тейлора

Сравнительно простыми и хорошо изученными функциями являются полиномы. Найдем формулу, которая позволяет приближенно представить дифференцируемую вблизи некоторой точки x_0 функцию в виде полинома по степеням $x-x_0$.

1. Полином Тейлора. Формулы Тейлора и Маклорена

Пусть функция $f(x)$ определена и $n+1$ раз дифференцируема в некотором интервале, содержащем точку x_0. Найдем *полином степени n, который вместе со своими производными до n−ой включительно, совпадает с соответствующими значениями функции и ее производных в точке x_0* (*полином Тейлора в точке x_0*). Этот полином нам удобно искать в виде:

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}+a_n(x-x_0)^n,\ a_0,\,a_1,\,\ldots,\,a_n\in\mathbf{R}.$$

Вычислим коэффициенты полинома Тейлора. С одной стороны, $P_n(x_0)=a_0$, с другой – $P_n(x_0)=f(x_0)$, поэтому $a_0=f(x_0)$. Далее будем последовательно дифференцировать полином $P_n(x)$ и приравнивать его производные в точке x_0 соответствующим производным функции $f(x)$.

$$P_n'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\ldots+na_n(x-x_0)^{n-1},\ P_n'(x_0)=a_1=f'(x_0);$$
$$P_n''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)+\ldots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2},\ P_n''(x_0)=2a_2=f''(x_0);$$
$$P_n'''(x)=3!a_3+4!a_4(x-x_0)+\ldots+n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3},\ P_n'''(x_0)=3!a_3=f'''(x_0);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_n^{(n)}(x)=n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2a_n,\ P_n^{(n)}(x_0)=n!a_n=f^{(n)}(x_0).$$

Таким образом,

$$a_0=f(x_0),\ a_1=\frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\ \ldots,\ a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

и, следовательно,

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

– *полином Тейлора в точке x_0*.

Найдем разность $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$, т.е. величину ошибки, которую мы совершаем, заменив функцию ее полиномом Тейлора. Рассмотрим функции

$$f_1(x) = R_n(x) \text{ и } f_2(x) = (x - x_0)^{n+1}.$$

Заметим, прежде всего, что для них

$$f_1(x_0) = f_2(x_0) = f_1'(x_0) = f_2'(x_0) = f_1''(x_0) = f_2''(x_0) = \ldots = f_1^{(n)}(x_0) = f_2^{(n)}(x_0) = 0.$$

Применим последовательно теорему Коши (§3) к функциям $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и их производным до $n-$ой включительно на соответствующих отрезках:

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{f_2(x) - f_2(x_0)} = \frac{f_1'(c_1)}{f_2'(c_1)} = \frac{f_1'(c_1) - f_1'(x_0)}{f_2'(c_1) - f_2'(x_0)} = \frac{f_1''(c_2)}{f_2''(c_2)} = \ldots$$
$$= \frac{f_1^{(n)}(c_n)}{f_2^{(n)}(c_n)} = \frac{f_1^{(n)}(c_n) - f_1^{(n)}(x_0)}{f_2^{(n)}(c_n) - f_2^{(n)}(x_0)} = \frac{f_1^{(n+1)}(c)}{f_2^{(n+1)}(c)},$$

где $c_1 \in (x_0,\, x), c_2 \in (x_0,\, c_1), \ldots, c_n \in (x_0,\, c_{n-1}), c \in (x_0,\, c_n)$. Отсюда, учитывая, что

$$f_1^{(n+1)}(x) = R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - P_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - 0 = f^{(n+1)}(x),$$
$$f_2^{(n+1)}(x) = \left((x-x_0)^{n+1}\right)^{(n+1)} = (n+1)!,$$

получим:

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \Longrightarrow R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ c \in (x_0,\, x).$$

Таким образом,

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

т.е. *данная $n+1$ раз дифференцируемая в интервале, содержащем точку x_0, функция $f(x)$ представляется в этом интервале в виде суммы своего полинома Тейлора $P_n(x)$ и погрешности $R_n(x)$:*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x), \qquad (1)$$

где

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ c \in (x_0,\, x).$$

Найденное представление называется *формулой Тейлора порядка n для функции $f(x)$ в точке x_0 с остатком $R_n(x)$ в форме Лагранжа.* В частном случае при $x_0 = 0$ из (1) следует *формула Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),\ R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},\ c \in (0,\, x). \quad (2)$$

Если потребовать, чтобы функция $f(x)$ была $n-1$ раз дифференцируема в некотором интервале, содержащем точку x_0 и n раз дифференцируема в точке x_0, то для этой функции имеет место *формула Тейлора с остатком в форме Пеано*:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x), \qquad (3)$$

в которой

$$R_n(x) = \mathrm{o}((x-x_0)^n),\ x \to x_0,\ \text{т.е.}\ \lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Замечание 1. Из определения полинома Тейлора следует, что он для функции находится однозначно и полином Тейлора для суммы (разности) функций равен сумме (разности) их полиномов Тейлора.

Замечание 2. Подстановка $y = x - x_0$ сводит задачу разложения функции $f(x)$ по формуле Тейлора к задаче представления функции $f(y + x_0)$ с помощью формулы Маклорена.

Так как величина $\Delta x = x - x_0$ представляет собой приращение аргумента в точке x_0, то мы можем переписать формулу Тейлора (3) в *дифференциалах* (§2, пункт 3):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{1!} + \frac{\mathrm{d}^2 f(x_0)}{2!} + \ldots + \frac{\mathrm{d}^n f(x_0)}{n!} + \mathrm{o}(\Delta x^n).$$

Из многочисленных приложений формулы Тейлора отметим здесь возможность *приближенного вычисления значений функции с любой точностью.* Действительно, если задана точность вычисления $\varepsilon > 0$, то в качестве приближенного значения функции мы можем взять значение ее полинома Тейлора, подобрав n таким, чтобы остаток формулы Тейлора был меньше по абсолютной величине, чем точность ε. Более удобной в этом отношении является формула (1), так как мы можем оценить величину ее остатка.

2. Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций

Приведем примеры разложения некоторых элементарных функций по формуле Маклорена (2) предыдущего пункта.

1) $f(x) = e^x,\ x \in \mathbf{R}$.

Для этой функции $f^{(n)}(x) = e^x$ при любом натуральном n и, значит, $f^{(n)}(0) = 1$. Поэтому[1]

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ \ldots\ + \frac{x^n}{n!} + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x), \tag{1}$$

$$R_n(x) = e^c \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},\ c \in (0,\, x).$$

2) $f(x) = \sin x,\ x \in \mathbf{R}$.

Здесь

$$f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,\ \ldots,$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right) = \begin{cases} (-1)^{k+1}\cos x, & n = 2k-1, \\ (-1)^k \sin x, & n = 2k. \end{cases}$$

Поэтому,

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1,\ \ldots,\ f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^{k+1}, & n = 2k-1, \\ 0, & n = 2k. \end{cases}$$

Следовательно, формула Маклорена порядка $2n-1$, $n \in \mathbf{N}$ для этой функции имеет вид:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2n}(x), \tag{2}$$

$$R_{2n}(x) = (-1)^n \cos c \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ c \in (0,\, x).$$

3) $f(x) = \cos x,\ x \in \mathbf{R}$.

По аналогии с предыдущей функцией в этом случае при любом натуральном n

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right) = \begin{cases} (-1)^k \sin x, & n = 2k-1, \\ (-1)^k \cos x, & n = 2k. \end{cases}$$

Следовательно,

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n = 2k-1, \\ (-1)^k, & n = 2k \end{cases}$$

и, стало быть, формула Маклорена порядка $2n$, $n \in \mathbf{N}$ для данной функции выглядит следующим образом:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ \ldots\ + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+1}(x), \tag{3}$$

---

[1] Для удобства будем считать по определению, что $0! = 1$.

$$R_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1}\cos c \cdot \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!},\ c \in (0,\, x).$$

4) $f(x) = \ln(1+x),\ x > -1.$

Производные этой функции равны:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},\ f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},\ f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},\ \ldots,\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Значит, $f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = -1,\ f'''(0) = 2!,\ \ldots,\ f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$ и, стало быть,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + R_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + R_n(x), \tag{4}$$

$$R_n(x) = (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}},\ c \in (0,\, x).$$

5) $f(x) = (1+x)^\alpha,\ \alpha \in \mathbf{R},\ x > -1.$

Для данной функции

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1},\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},\ \ldots,$$
$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

Отсюда

$$f(0) = 1,\ f'(0) = \alpha,\ f''(0) = \alpha(\alpha-1),\ \ldots,\ f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1).$$

Запишем формулу Маклорена порядка n для этой функции:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x), \tag{5}$$

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)(1+c)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1},\ c \in (0,\, x).$$

В частности, при $\alpha = -1,\ x > -1$ получим:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ \ldots\ + (-1)^n x^n + R_n(x),\ R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(1+c)^{n+2}}x^{n+1},\ c \in (0,\, x). \tag{6}$$

Замечание. Если мы можем записать функцию $f(x)$ в некотором интервале, содержащем точку x_0, как алгебраическую сумму с действительными коэффициентами функций вида $\varphi(a(x-x_0)^k)$, где $a \in \mathbf{R},\ k \in \mathbf{N}$, а $\varphi(y)$ – одна из функций, рассмотренных в примерах 1) – 5), то, использовав разложения (1) – (5), мы получим представление функции $f(x)$ по формуле Тейлора в точке x_0.

Пример. *Записать формулу Тейлора (3), пункт 1 произвольного порядка в точке* $x_0 = 1$ *для функции*

$$f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6},\ x < 2.$$

Решение. Так как

$$f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{2-x} - \frac{1}{3-x},$$

то достаточно найти разложения по формуле Тейлора для каждой из дробей

$$\frac{1}{2-x} \quad \text{и} \quad \frac{1}{3-x}.$$

Выполнив подстановку $y = x - 1 \Longrightarrow x = 1 + y$, мы сведем тем самым задачу представления дробей по формуле Тейлора к задаче их разложения по формуле Маклорена. Для первой дроби

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-y},$$

поэтому, воспользовавшись формулой (6) при $x = -y$, получим:

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + \ldots + y^n + \mathrm{o}(y^n).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2-x} = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \ldots + (x-1)^n + \mathrm{o}((x-1)^n).$$

Аналогично,

$$\frac{1}{3-x} = \frac{1}{2-y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{y}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} + \ldots + \frac{y^n}{2^n}\right) + \mathrm{o}(y^n) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{4} + \ldots + \frac{(x-1)^n}{2^n}\right) + \mathrm{o}((x-1)^n).$$

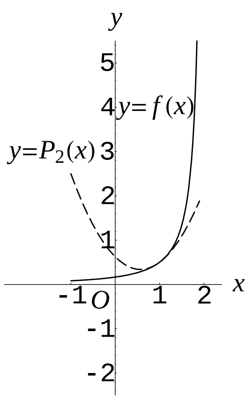
Воспользовавшись, наконец, предыдущим замечанием, получим:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{7}{4}(x-1)^2 + \ldots + \left(2 - \frac{1}{2^n}\right)(x-1)^n\right) + \mathrm{o}((x-1)^n).$$

Графики данной функции и ее полинома Тейлора

$$P_2(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{7}{4}(x-1)^2\right)$$

вблизи точки $x_0 = 1$ имеют вид:



§6. Исследование функции с помощью производной

В этом параграфе мы научимся использовать производную для исследования геометрических свойств функции, таких как монотонность и выпуклость, а также для нахождения экстремумов и точек перегиба функции.

1. Монотонность. Точки экстремума

Теорема 1 (признак монотонности). *Для того, чтобы функция $f(x)$, определенная и дифференцируемая в некотором интервале (a, b) была невозрастающей (неубывающей) в этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы ее производная была неположительной (неотрицательной) в этом интервале, т. е. $f'(x) \leq 0$ $(f'(x) \geq 0)$, $x \in (a, b)$. Если же $f'(x) < 0$ $(f'(x) > 0)$, $x \in (a, b)$, то функция убывает (возрастает) в интервале (a, b).*

Доказательство. Предположим, для определенности, что данная функция является невозрастающей. Тогда для любой точки $x \in (a, b)$ при малом приращении Δx аргумента в точке x

$$\frac{\Delta f(x, \Delta x)}{\Delta x} \leq 0.$$

Воспользовавшись теперь дифференцируемостью функции в точке x и свойством 5) предела функции (глава IV, §4, пункт 2), заключаем:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x, \Delta x)}{\Delta x} \leq 0.$$

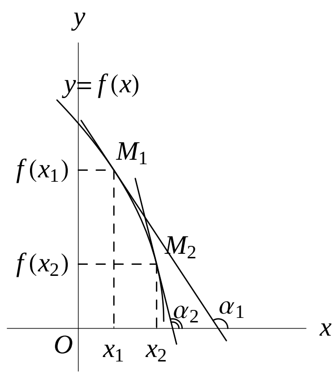
Наоборот, пусть $f'(x) \leq 0,\ x \in (a,\, b)$. Возьмем произвольные точки $x_1 < x_2,\ x_1,\, x_2 \in (a,\, b)$ и применим к отрезку $[x_1,\, x_2]$ теорему Лагранжа (§3). В результате получим:

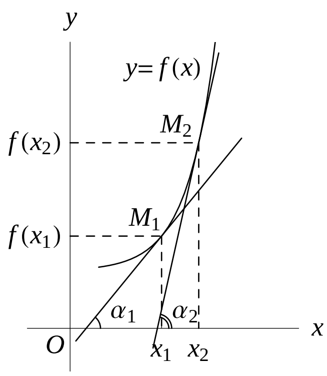
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),\ c \in (x_1,\, x_2),$$

откуда следует, что $f(x_2) - f(x_1) \leq 0 \Longleftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, т. е. функция $f(x)$ не возрастает.

Из рассуждений предыдущего абзаца при $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$), $x \in (a,\, b)$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$). Теорема доказана.

Геометрически последнее утверждение теоремы означает, что, если во всех точках графика функции касательная образует тупой (острый) угол с положительным направлением оси Ox, то эта функция является убывающей (возрастающей).





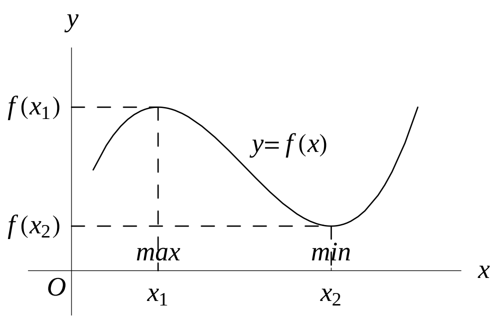
Всюду в дальнейшем в этом пункте мы будем предполагать, что функция $f(x)$ определена в некотором интервале, содержащем точку x_0.

Точка x_0 называется точкой *локального минимума* (*максимума*) данной функции, если при всех x из достаточно малого интервала, включающего точку x_0, выполняется неравенство

$$f(x) \geq f(x_0) \quad (f(x) \leq f(x_0)).$$

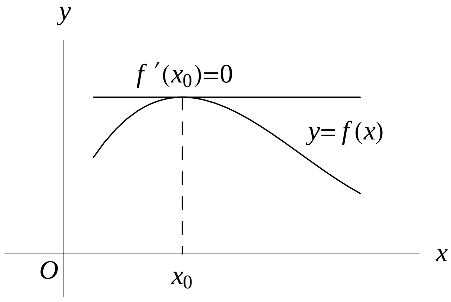
Если, кроме того, $f(x) \neq f(x_0)$ при $x \neq x_0$, то будем говорить, что в точке x_0 функция имеет *строгий локальный минимум* (*максимум*).

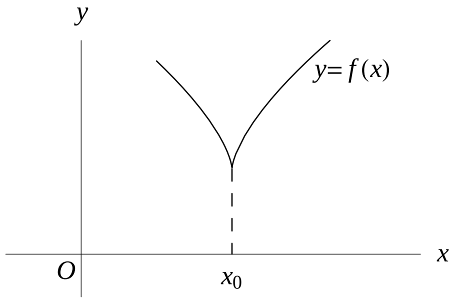
Точки локального минимума или максимума функции называются точками ее *локального экстремума*, соответственно, точками ее *строгого локального экстремума.*



Теорема 2 (необходимый признак экстремума). *В точке экстремума производная функции обращается в нуль или не существует.*

Действительно, если x_0 – точка экстремума функции $f(x)$, то в случае, когда производная $f'(x_0)$ существует, повторяя рассуждения, которые мы использовали при доказательстве теоремы Ролля (§3), получим, что $f'(x_0) = 0$.





Обратное, вообще говоря, неверно, т. е. из того, что производная $f'(x_0)$ не существует или равна нулю, еще не следует, что x_0 – точка экстремума функции $f(x)$, в чем мы убедимся на примерах. Рассмотрим функции

$$f_1(x) = x^3,\ f_2(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Для первой из них $f_1'(x) = 3x^2$ и, следовательно, $f_1'(0) = 0$, а производная $f_2'(0)$ не существует, так как не существует предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f_2(0,\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{1}{\Delta x}$$

(глава IV, §5, пункт 2, c)). В то же время точка $x_0 = 0$ не является точкой экстремума данных функций, так как первая из них возрастает, а вторая меняет знак в любом сколь угодно малом интервале, содержащем эту точку.

Точка, в которой производная данной функции равна нулю или не существует, называется *критической точкой* функции. Теорема 2 утверждает, что каждая точка экстремума является критической точкой, а приведенные выше примеры убеждают нас в том, что не всякая критическая точка является точкой экстремума. Сформулируем условия, при которых в критической точке функция будет иметь экстремум.

Теорема 3 (достаточный признак экстремума I). *Предположим, что функция $f(x)$ дифференцируема в некотором малом интервале, содержащем критическую точку x_0, кроме, возможно, самой этой точки. Тогда, если при $x < x_0$ $f'(x) \le 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) \ge 0$ или наоборот, то x_0 – точка локального минимума или, наоборот, локального максимума данной функции. Если указанные выше неравенства для производной строгие, то и соответствующий экстремум является строгим, иначе говоря, в критической точке функция имеет строгий экстремум, если при переходе через эту критическую точку производная функции меняет знак на противоположный.*

Доказательство этой теоремы очевидным образом следует из теоремы 1.

Замечание 1. Из теоремы 1 также следует, что, если при переходе через критическую точку производная функции не меняет знак на противоположный, то функция не имеет экстремума в этой точке.

Теорема 4 (достаточный признак экстремума II). *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некотором малом интервале, содержащем критическую точку x_0 и дважды дифференцируема в точке x_0. Тогда, если $f''(x_0) \neq 0$, то функция имеет строгий экстремум в точке x_0, а именно, если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка строгого локального минимума, если же $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка строгого локального максимума данной функции.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку функция дифференцируема в критической точке x_0, то $f'(x_0) = 0$. Запишем для данной функции формулу Тейлора второго порядка в точке x_0 с остатком в форме Пеано (§5, пункт 1):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \mathrm{o}((x - x_0)^2).$$

Отсюда

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}(x - x_0)^2\left(f''(x_0) + 2\cdot\frac{\mathrm{o}((x - x_0)^2)}{(x - x_0)^2}\right).$$

Выберем положительное число ε так, чтобы $\varepsilon < |f''(x_0)|$. Поскольку

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\mathrm{o}((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2} = 0,$$

то существует число $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что при всех x из интервала $(x_0 - \delta_\varepsilon,\, x_0 + \delta_\varepsilon)$, $x \neq x_0$ выполняется неравенство

$$-\varepsilon < 2\cdot\frac{\mathrm{o}((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2} < \varepsilon,$$

откуда,

$$f''(x_0) - \varepsilon < f''(x_0) + 2\cdot\frac{\mathrm{o}((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2} < f''(x_0) + \varepsilon.$$

Если $f''(x_0) > 0$, то $f''(x_0) - \varepsilon > 0$ за счет выбора ε и, следовательно,

$$f''(x_0) + 2\cdot\frac{\mathrm{o}((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2} > 0$$

при $x \in (x_0 - \delta_\varepsilon,\, x_0 + \delta_\varepsilon)$, $x \neq x_0$ и поэтому для всех таких x справедливо неравенство

$$f(x) - f(x_0) > 0 \Longrightarrow f(x) > f(x_0),$$

т. е. x_0 – точка строгого минимума функции $f(x)$. Аналогично, если $f''(x_0) < 0$, то $f''(x_0)+\varepsilon < 0$ и поэтому

$$f''(x_0) + 2\cdot\frac{\mathrm{o}((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2} < 0$$

для всех $x \in (x_0 - \delta_\varepsilon,\, x_0 + \delta_\varepsilon)$, $x \neq x_0$. Следовательно,

$$f(x) - f(x_0) < 0 \Longrightarrow f(x) < f(x_0)$$

и, значит, x_0 – точка строгого максимума данной функции. Т е о р е м а д о к а з а н а.

Замечание 2. Если $f''(x_0) = 0$, то экстремум в критической точке x_0 может как быть, так и отсутствовать. Рассмотрим, например, функции $f_1(x) = x^4$, $f_2(x) = x^5$. Здесь

$$f_1'(x) = 4x^3,\ f_1''(x) = 12x^2;\ f_2'(x) = 5x^4,\ f_2''(x) = 20x^3,$$

следовательно, для обеих этих функций точка $x_0 = 0$ является критической и в ней $f_1''(0) = f_2''(0) = 0$, однако первая функция имеет минимум в точке $x_0 = 0$, а вторая экстремума не имеет.

Из вышеизложенного следует, что *для исследования функции на экстремум необходимо найти критические точки этой функции и проверить каждую из них на экстремум с помощью одного из достаточных признаков.*

Пример 1. *Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции*

$$f(x) = \frac{x^3}{2(x-1)^2}.$$

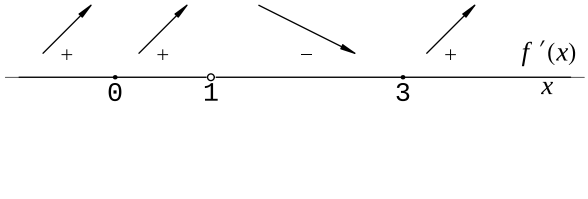
Решение. Функция определена на множестве $\mathbf{R} \setminus \{1\}$. Найдем ее производную:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^3)'(x-1)^2 - x^3((x-1)^2)'}{(x-1)^4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3x^2(x-1)^2 - 2x^3(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-3)}{2(x-1)^3}.$$

Определим критические точки функции:

$$f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{2(x-1)^3} = 0 \Longrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 3.$$

Производная сохраняет знак в интервалах, на которые область определения функции разбивается критическими точками и точкой $x = 1$.



Таким образом, в интервалах $(-\infty,\, 0)$ и $(0,\, 1)$ функция возрастает и, следовательно, в точке $x_1 = 0$ экстремума нет. В интервалах $(1,\, 3)$ и $(3,\, +\infty)$ функция убывает и возрастает соответственно, поэтому $x_2 = 3$ – точка строгого минимума данной функции и $y_{\min} = f(3) = \frac{27}{8}$.

В заключение этого пункта обсудим как находить с помощью производной так называемые *глобальные экстремумы* функции на отрезке, т. е. ее *наименьшее и наибольшее значения* на этом отрезке, которые мы будем обозначать через $\min\limits_{x\in[a,\, b]} f(x)$ и $\max\limits_{x\in[a,\, b]} f(x)$, соответственно. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\, b]$. По теореме Вейерштрасса (глава IV, §5, пункт 3) функция достигает на отрезке $[a,\, b]$ своих наименьшего и наибольшего значений. Если какое-то из них достигается внутри отрезка, то это происходит непременно в критической точке функции. Отсюда следует, что *для нахождения глобальных экстремумов непрерывной на отрезке функции необходимо найти ее критические точки, попадающие на отрезок, вычислить значения функции в этих точках и на концах отрезка и среди всех этих значений выбрать наименьшее и наибольшее.*

Пример 2. *Найти глобальные экстремумы функции*

$$f(x) = \frac{1}{1 + 12\,x - 9\,x^2 + 2\,x^3}$$

на отрезке $\left[0,\, \frac{3}{2}\right]$.

Решение. Решим сначала эту задачу для функции $g(x) = 1 + 12\,x - 9\,x^2 + 2\,x^3$. Так как $g'(x) = 12 - 18\,x + 6\,x^2$, то критическими точками функции $g(x)$ являются числа $x_1 = 1 \in \left[0,\, \frac{3}{2}\right]$ и $x_2 = 2 \notin \left[0,\, \frac{3}{2}\right]$. Поскольку $g(1) = 6,\ g(0) = 1,\ g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{11}{2}$, то

$$\min_{x\in\left[0,\, \frac{3}{2}\right]} g(x) = g(0) = 1, \quad \max_{x\in\left[0,\, \frac{3}{2}\right]} g(x) = g(1) = 6.$$

Отсюда, учитывая, что $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$, мы окончательно находим:

$$\min_{x\in\left[0,\, \frac{3}{2}\right]} f(x) = f(1) = \frac{1}{6}, \quad \max_{x\in\left[0,\, \frac{3}{2}\right]} f(x) = f(0) = 1.$$

2. Выпуклость функции. Точки перегиба

Важной геометрической характеристикой функции и кривой, являющейся графиком этой функции, служит выпуклость.

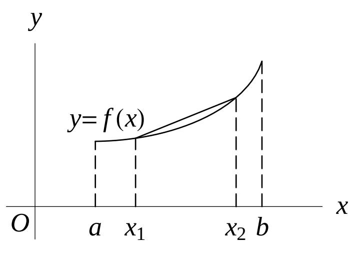
Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в некотором интервале $(a,\, b)$. Возьмем точки $x_1,\, x_2 \in (a,\, b)$ и обозначим через $y = l_{[x_1,\, x_2]}(x)$ уравнение прямой, проходящей через точки $A_1(x_1,\, f(x_1)),\ A_2(x_2,\, f(x_2))$ графика функции.

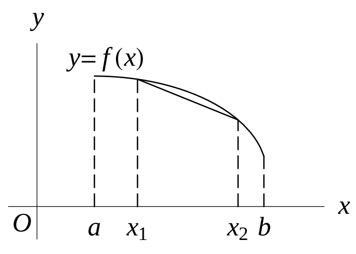
Функция $f(x)$ (соответственно, кривая $y = f(x)$) называется *выпуклой* (*вогнутой*) в интервале $(a,\, b)$, если для любых чисел $x_1,\, x_2 \in (a,\, b)$ выполняется неравенство

$$f(x) \le l_{[x_1,\, x_2]}(x) \quad (f(x) \ge l_{[x_1,\, x_2]}(x)),\ x \in [x_1,\, x_2].$$

Если последние неравенства строгие для всех $x \in (x_1,\, x_2)$, то и функция называется *строго выпуклой* (*строго вогнутой*).

Геометрически *выпуклость* (*вогнутость*) *означает, что любой фрагмент графика функции расположен не выше* (*не ниже*), *чем хорда соединяющая, граничные точки этого фрагмента.*





Найдем теперь условия, при которых функция является выпуклой (вогнутой).

Теорема 1 (критерий выпуклости I). *Если функция дифференцируема в интервале* $(a,\, b)$, *то для того, чтобы она была выпуклой (вогнутой), необходимо и достаточно, чтобы производная* $f'(x)$ *была неубывающей (невозрастающей). Если производная* $f'(x)$ *возрастает (убывает), то функция* $f(x)$ *строго выпукла (строго вогнута).*

Доказательство. Убедимся сначала в *необходимости* условия теоремы. Предположим для определенности, что функция является выпуклой. Возьмем произвольные точки $x_1,\, x_2 \in (a,\, b)$, $x_1 < x_2$. Так как уравнение хорды, соединяющей точки $A_1(x_1,\, f(x_1))$ и $A_2(x_2,\, f(x_2))$ мы можем записать в виде

$$y = l_{[x_1,\, x_2]}(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2),$$

то по определению выпуклости

$$f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2),\ x \in [x_1,\, x_2] \tag{1}$$

или

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},\ x \in (x_1,\, x_2). \tag{2}$$

Устремляя в последнем неравенстве переменную x сначала к x_1, а затем к x_2, получим:

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le f'(x_2) \Longrightarrow f'(x_1) \le f'(x_2),$$

т. е. производная $f'(x)$ не убывает.

Докажем теперь, наоборот, что неубывания производной и *достаточно* для выпуклости функции. Действительно, применив к обеим частям неравенства (2) теорему Лагранжа (§3), получим:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1),\ c_1 \in (x_1,\, x);\ \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2),\ c_2 \in (x,\, x_2).$$

Так как $x_1 < x < x_2$, то $c_1 < c_2$ и, следовательно, $f'(c_1) \le f'(c_2)$. Поэтому неравенство (2), а вслед за ним и неравенство (1) выполняются, т. е. функция $f(x)$ выпукла.

Если в рассуждениях предыдущего абзаца считать производную возрастающей, то неравенство (1) будет строгим и, таким образом, функция $f(x)$ будет строго выпуклой.

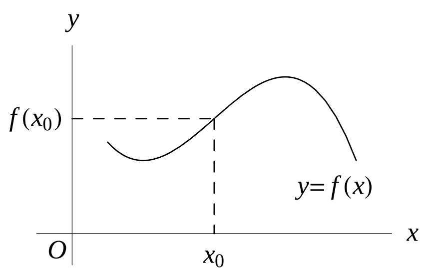
Теорема доказана.

Привлекая вторую производную, сформулируем еще один признак выпуклости.

Теорема 2 (критерий выпуклости II). *Для того, чтобы функция* $f(x)$, *определенная и дважды дифференцируемая в некотором интервале* $(a,\, b)$ *была выпуклой (вогнутой) в этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы ее вторая производная была неотрицательной (неположительной) в этом интервале, т. е.* $f''(x) \ge 0$ $(f'(x) \le 0)$, $x \in (a,\, b)$. *Если же* $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$, $x \in (a,\, b)$, *то функция строго выпукла (строго вогнута) в интервале* $(a,\, b)$.

Доказательство этой теоремы немедленно следует из предыдущей теоремы и признака монотонности, доказанного в пункте 1.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в интервале $(a,\, b)$. Точка $x_0 \in (a,\, b)$ называется *точкой (строгого) перегиба* данной функции, если в интервалах $(a,\, x_0)$ и $(x_0,\, b)$ эта функция имеет противоположный характер (строгой) выпуклости. Иначе говоря, *точка перегиба является границей двух интервалов, в одном из которых функция выпукла, а в другом – вогнута.*



Если функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(a,\, b)$, то, как следует из теоремы 1, в точке перегиба x_0 производная имеет экстремум. Следовательно, пользуясь признаками экстремума, мы можем сформулировать как необходимый, так и достаточный признаки точки перегиба.

Теорема 3 (необходимый признак точки перегиба). *В точке перегиба вторая производная $f''(x_0)$ не существует или равна нулю.*

Таким образом, *точка перегиба x_0 является критической точкой для производной $f'(x)$.*

Теорема 4 (достаточный признак точки перегиба). *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(a,\, b)$ и точка $x_0 \in (a,\, b)$ является критической для производной. Предположим также, что функция $f(x)$ дважды дифференцируема в интервале $(a,\, b)$ за исключением, возможно, точки x_0. Тогда, если в одном из интервалов $(a,\, x_0)$ и $(x_0,\, b)$ вторая производная неотрицательна (положительна), а в другом – неположительна (отрицательна), то x_0 – точка перегиба (строгого перегиба) функции $f(x)$.*

Из приведенных теорем следует, что *для нахождения точек перегиба функции необходимо найти сначала критические точки ее производной и затем исследовать на перегиб каждую из них с помощью достаточного признака.*

Пример. *Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции*

$$f(x) = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$$

из примера 1 *предыдущего пункта.*

Решение. Так как

$$f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{2(x-1)^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3},$$

то

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{(3x^2 - 6x)(x-1)^3 - (x^3 - 3x^2)3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{3x}{(x-1)^4}.$$

Производная имеет единственную критическую точку $x_0 = 0$. Очевидно, $f''(x) < 0$ при $x < 0$ и $f''(x) > 0$ при $x > 0$, $x \neq 1$. Следовательно, $x_0 = 0$ – точка перегиба функции, так как слева от нее функция вогнута, а справа – выпукла.

3. Асимптоты функции. Алгоритм полного исследования функции

Научимся разыскивать прямые, к которым в определенном смысле близок график функции. Такие прямые называются *асимптотами.*

a) *Вертикальные асимптоты.*

Пусть функция $f(x)$ определена в некотором интервале $(a,\, x_0)$, $a < x_0$ или $(x_0,\, b)$, $b > x_0$. Если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности, т. е.

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty \text{ или } f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty,$$

то прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* функции $f(x)$.

b) *Наклонные асимптоты.*

Пусть функция $f(x)$ определена на полуоси $(-\infty,\, a)$ или $(b,\, +\infty)$. Прямая

$$y = l(x),\ l(x) = kx + b$$

называется *левосторонней* (*правосторонней*) *наклонной асимптотой* функции $f(x)$, если существует предел

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - l(x)) = 0 \quad (\lim_{x \to +\infty} (f(x) - l(x)) = 0).$$

Если существует предел

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - l(x)) = 0,$$

то наклонная асимптота является *двусторонней.*

Предположим, что наклонная асимптота существует. Найдем ее угловой коэффициент k и величину b. Так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-l(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-k=0,$$

то

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}. \tag{1}$$

Тогда

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx). \tag{2}$$

Верно, очевидно, и обратное, а именно, если существуют пределы (1) и (2), то существует также и предел

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$$

и, таким образом, прямая $y=kx+b$ – наклонная асимптота функции $f(x)$.

Если хотя бы один из пределов (1) или (2) *не существует или равен бесконечности*, то функция *не имеет наклонной асимптоты.*

В качестве *примера* рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{x^3}{2(x-1)^2}$$

из предыдущего пункта. Для нее

$$\lim_{x\to1}f(x)=+\infty$$

и, следовательно, прямая $x=1$ – вертикальная асимптота данной функции. Выясним, обладает ли эта функция наклонной асимптотой. Для этого вычислим пределы (1) и (2).

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2(x-1)^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(1-1/x)^2}=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2(x-1)^2}-\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{(x-1)^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{2-1/x}{(1-1/x)^2}=\frac{1}{2}\cdot2=1.$$

Таким образом, данная функция имеет двустороннюю наклонную асимптоту

$$y=\frac{1}{2}x+1.$$

Сведем, наконец, воедино все наши изыскания этого параграфа и сформулируем

Алгоритм исследования функции

1) *Находим область определения функции, проверяем ее на четность (нечетность) и периодичность.*

2) *Исследуем функцию на непрерывность, находим ее точки разрыва и асимптоты.*

3) *Определяем интервалы монотонности функции и ее точки экстремума.*

4) *Находим интервалы выпуклости (вогнутости) функции и ее точки перегиба.*

Результаты этого исследования дают нам достаточно полное геометрическое представление о поведении данной функции, которое мы можем реализовать в ее графике. Однако строить график "вручную" при наличии таких превосходных программ компьютерной математики, как ***Mathematica, Maple, Mathcad***, было бы весьма архаично. Использование этих программ мы и рекомендуем для исследования функции и построения ее графика.

Завершим этот параграф построением графика функции

$$f(x)=\frac{x^3}{2(x-1)^2},$$

полное исследование которой мы провели в этом параграфе.

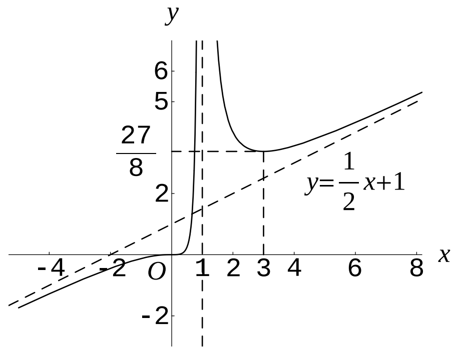


График функции построен в среде компьютерной алгебры ***Mathematica***.

§7. Векторная функция действительного аргумента

Зависимость, по которой каждому действительному числу t из некоторого интервала $(t_1,\, t_2)$ ставится в соответствие определенный вектор $\bar{r} = \bar{r}(t)$ на плоскости или в пространстве, называется *векторной функцией действительного аргумента.*

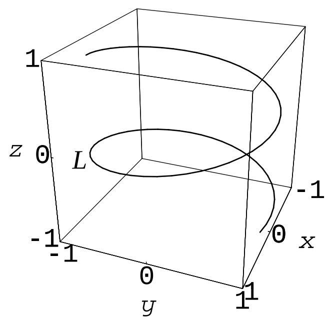
Для определенности всюду в этом параграфе векторную функцию мы будем рассматривать в пространстве. Пусть в нем выбрана декартова система координат $Oxyz$. Поскольку вектор $\bar{r}(t)$ в пространстве однозначно определяется своими координатами $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ в ортонормированном базисе $\{\bar{\imath},\, \bar{\jmath},\, \bar{k}\}$ и наоборот, то *задание векторной функции*

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{\imath} + y(t)\bar{\jmath} + z(t)\bar{k},\ t \in (t_1,\, t_2) \tag{1}$$

равносильно заданию трех ее функций-координат

$$x = x(t),\, y = y(t),\, z = z(t),\ t \in (t_1,\, t_2). \tag{2}$$

Если зафиксировать начало вектора $\bar{r}(t)$ в начале координат, то его конечная точка при изменении параметра t будет перемещаться по кривой L, имеющей параметрические уравнения (2). Эту кривую мы будем называть *траекторией векторной функции* $\bar{r}(t)$.



Замечание 1. В физике и механике уравнение $\bar{r} = \bar{r}(t)$ представляет собой векторное уравнение движения материальной точки, а траектория движения этой точки представляет собой линию в пространстве с параметрическими уравнениями (2).

Введем теперь определение *предельного вектора* для векторной функции $\bar{r}(t)$, определенной в интервале $(t_1,\, t_2)$, содержащем точку t_0 за исключением, возможно, этой точки.

Определение 1. *Вектор $\bar{s}$ называется предельным для векторной функции $\bar{r}(t)$ при t стремящемся к t_0, если для любого положительного числа ε найдется положительное число δ_ϵ такое, что*

$$|\bar{r}(t) - \bar{s}| < \varepsilon,\ \textit{как только}\ 0 < |t - t_0| < \delta_\epsilon.$$

Обозначается этот предельный вектор через $\lim\limits_{t\to t_0} \bar{r}(t) = \bar{s}$.

Пусть $\bar{s} = s_x\bar{\imath} + s_y\bar{\jmath} + s_z\bar{k}$.

Теорема. *Предельный вектор* $\lim\limits_{t\to t_0} \bar{r}(t) = \bar{s}$ *существует тогда и только тогда, когда существуют пределы координат* (2) *векторной функции* (1) *и*

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = s_x,\ \lim_{t\to t_0} y(t) = s_y,\ \lim_{t\to t_0} z(t) = s_z.$$

Для доказательства заметим прежде всего, что для любых действительных чисел

$$a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n,\ n \in \mathbf{N}$$

справедливо двойное неравенство

$$|a_k| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \le \sum_{i=1}^{n} |a_i|,\ k = \overline{1,n}, \tag{3}$$

которое мы можем доказать возведением в квадрат всех трех его частей. Теперь, чтобы убедиться в справедливости приведенного выше утверждения, достаточно воспользоваться определением предельного вектора векторной функции и неравенством (3), благодаря которому

$$\begin{gathered} |x(t) - s_x| \le |\bar{r}(t) - \bar{s}|,\ |y(t) - s_y| \le |\bar{r}(t) - \bar{s}|,\ |z(t) - s_z| \le |\bar{r}(t) - \bar{s}|; \\ |\bar{r}(t) - \bar{s}| \le |x(t) - s_x| + |y(t) - s_y| + |z(t) - s_z|. \end{gathered} \tag{4}$$

Действительно, из первых трех неравенств (4) следует, что как только

$$|\bar{r}(t) - \bar{s}| < \varepsilon \text{ при } 0 < |t - t_0| < \delta_\epsilon,$$

то и

$$|x(t) - s_x| < \varepsilon,\ |y(t) - s_y| < \varepsilon,\ |z(t) - s_z| < \varepsilon$$

для тех же значений t. Таким образом,

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = s_x,\ \lim_{t\to t_0} y(t) = s_y,\ \lim_{t\to t_0} z(t) = s_z.$$

Наоборот, если имеют место последние равенства, то, выбрав по заданному $\varepsilon > 0$ положительное число δ_ϵ так, чтобы

$$|x(t) - s_x| < \frac{\varepsilon}{3},\ |y(t) - s_y| < \frac{\varepsilon}{3},\ |z(t) - s_z| < \frac{\varepsilon}{3}$$

для $0 < |t - t_0| < \delta_\epsilon$, мы, воспользовавшись последним из неравенств (4), получим, что

$$|\bar{r}(t) - \bar{s}| < \varepsilon,\ 0 < |t - t_0| < \delta_\epsilon, \text{ т. е. } \lim_{t\to t_0} \bar{r}(t) = \bar{s}.$$

Т е о р е м а д о к а з а н а.

Из доказанной теоремы и свойств предела функции (глава IV, §4, пункт 2) следует, что, если существуют предельные векторы $\lim\limits_{t\to t_0} \bar{r}_1(t)$ и $\lim\limits_{t\to t_0} \bar{r}_2(t)$, то

$$\lim_{t\to t_0} (c_1\bar{r}_1(t) + c_2\bar{r}_2(t)) = c_1 \lim_{t\to t_0} \bar{r}_1(t) + c_2 \lim_{t\to t_0} \bar{r}_2(t),\ c_1,\, c_2 \in \mathbf{R}.$$

Использовав, кроме того, формулы для вычисления скалярного и векторного произведений (глава II, §§3, 4), получим:

$$\lim_{t\to t_0} (\bar{r}_1(t) \cdot \bar{r}_2(t)) = \lim_{t\to t_0} \bar{r}_1(t) \cdot \lim_{t\to t_0} \bar{r}_2(t),\ \lim_{t\to t_0} (\bar{r}_1(t) \times \bar{r}_2(t)) = \lim_{t\to t_0} \bar{r}_1(t) \times \lim_{t\to t_0} \bar{r}_2(t).$$

Если, вдобавок, существует еще и предельный вектор $\lim\limits_{t\to t_0} \bar{r}_3(t)$, то по формуле для представления смешанного произведения в координатах (глава II, §5) будем иметь:

$$\lim_{t\to t_0} (\bar{r}_1(t)\bar{r}_2(t)\bar{r}_3(t)) = \lim_{t\to t_0} \bar{r}_1(t) \lim_{t\to t_0} \bar{r}_2(t) \lim_{t\to t_0} \bar{r}_3(t).$$

Пример 1. *Найти предельный вектор*

$$\lim_{t\to 0} \left(t^t \bar{\imath} + \frac{\sin 2t}{\operatorname{arctg} t} \bar{\jmath} + \left(\frac{1+2t}{1+t} \right)^{\frac{3}{t}} \bar{k} \right).$$

Решение. Найдем пределы координат данной векторной функции.

$$\lim_{t\to0} t^t = \lim_{t\to0} e^{t\ln t} = \lim_{t\to0} e^{\frac{\ln t}{1/t}} = \lim_{t\to0} e^{\frac{1/t}{-(1/t^2)}} = \lim_{t\to0} e^{-t} = e^0 = 1.$$

Здесь мы использовали правило Лопиталя (§4 настоящей главы) и непрерывность элементарных функций (глава IV, §5, пункт 4). Для вычисления предела второй координаты векторной функции используем эквивалентные бесконечно малые в нуле функции $\sin 2t \sim 2t$ и $\operatorname{arctg} t \sim t$ (глава IV, §4, пункт 4):

$$\lim_{t\to0} \frac{\sin 2t}{\operatorname{arctg} t} = \lim_{t\to0} \frac{2t}{t} = 2.$$

Предел третьей координаты мы найдем с помощью пределов (5) и (3) (глава IV, §4, пункты 3 и 2 соответственно):

$$\lim_{t\to0} \left(\frac{1+2t}{1+t}\right)^{\frac{3}{t}} = \lim_{t\to0} \left(1+\frac{t}{1+t}\right)^{\frac{3}{t}} = \lim_{t\to0} \left(\left(1+\frac{t}{1+t}\right)^{\frac{1+t}{t}}\right)^{\frac{3}{1+t}} = e^3.$$

Применив теперь доказанную выше теорему, окончательно получим:

$$\lim_{t\to0} \left(t^t\bar\imath + \frac{\sin 2t}{\operatorname{arctg} t}\bar\jmath + \left(\frac{1+2t}{1+t}\right)^{\frac{3}{t}} \bar k\right) = \bar\imath + 2\bar\jmath + e^3\bar k,$$

т. е. предельным для данной векторной функции является вектор $\bar s(1,\, 2,\, e^3)$.

Как и для числовой функции, мы можем ввести понятие *непрерывности* для векторной функции. Пусть векторная функция $\bar r(t)$ определена в интервале $(t_1,\, t_2)$, содержащем точку t_0. Она называется *непрерывной в точке* t_0, если существует $\lim\limits_{t\to t_0} \bar r(t)$ и

$$\lim_{t\to t_0} \bar r(t) = \bar r(t_0).$$

Из доказанной выше теоремы следует, что *для непрерывности векторной функции необходимо и достаточно, чтобы были непрерывными ее координаты.*

Если векторная функция непрерывна в любой точке интервала $(t_1,\, t_2)$, то она называется *непрерывной в этом интервале.*

Если векторные функции $\bar r_1(t)$, $\bar r_2(t)$ и $\bar r_3(t)$ непрерывны, то, как следует из определения непрерывности и свойств предельного вектора, сформулированных выше, непрерывными являются векторные функции $c_1\bar r_1(t) + c_2\bar r_2(t)$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ и $\bar r_1(t) \times \bar r_2(t)$, а также числовые функции $\bar r_1(t)\cdot\bar r_2(t)$ и $\bar r_1(t)\bar r_2(t)\bar r_3(t)$.

Векторная функция считается *разрывной* в некоторой точке, если она *не является непрерывной* в ней.

Введем теперь определение *вектора производной* векторной функции. Предположим, что векторная функция $\bar r(t)$ определена в интервале $(t_1,\, t_2)$ и $t_0 \in (t_1,\, t_2)$. Обозначим через $\Delta\bar r(t_0, \Delta t) = \bar r(t_0+\Delta t) - \bar r(t_0)$ – приращение векторной функции в точке t_0, соответствующее приращению аргумента Δt.

Определение 2. *Если существует предельный вектор*

$$\lim_{t\to t_0} \frac{1}{\Delta t}\Delta\bar r(t_0, \Delta t),$$

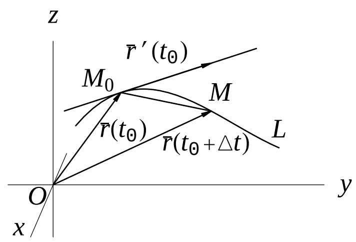
то он называется вектором производной векторной функции $\bar r(t)$ *в точке* t_0 *и обозначается через* $\bar r'(t_0)$.

Как и в случае числовой функции, если для векторной функции существует вектор производной в некоторой точке, то будем говорить, что векторная функция *дифференцируема* в этой точке.

Из доказанной в этом параграфе теоремы следует, что *векторная функция* (1) *дифференцируема тогда и только тогда, когда дифференцируемы ее координаты и координатами вектора производной являются производные координат векторной функции, т. е.*

$$\bar r'(t) = x'(t)\bar\imath + y'(t)\bar\jmath + z'(t)\bar k. \qquad (5)$$

Выясним *геометрический смысл* вектора производной дифференцируемой в точке t_0 векторной функции $\bar{r}(t)$.



Вектор $\frac{1}{\Delta t}\Delta\bar{r}(t_0,\Delta t)$ является направляющим для секущей M_0M и направлен он в сторону перемещения вдоль траектории L векторной функции. В пределе при $t\to t_0$ секущая будет занимать некоторое предельное положение, соответствующее касательной к траектории в точке M_0, и направляющим вектором касательной будет служить как раз вектор производной $\bar{r}'(t_0)$.

Таким образом, *вектор производной представляет собой направляющий вектор касательной к траектории векторной функции в соответствующей точке, направленный в сторону перемещения по траектории.*

Запишем, учитывая (5), *канонические уравнения касательной* к траектории дифференцируемой векторной функции (1) (или к кривой, заданной параметрическими уравнениями (2)) в точке $M_0(x(t_0),\, y(t_0),\, z(t_0))$:

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

Плоскость, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной, называется *нормальной плоскостью* к траектории дифференцируемой векторной функции (или к кривой, заданной параметрическими уравнениями). Поскольку вектор $\bar{n}=\bar{r}'(t_0)$ является нормальным для нормальной плоскости, то ее общее уравнение имеет вид:

$$x'(t_0)(x-x(t_0))+y'(t_0)(y-y(t_0))+z'(t_0)(z-z(t_0))=0.$$

Пример 2. *Найти уравнения касательной и нормальной плоскости к траектории векторной функции*

$$\bar{r}(t)=\sin^2 t\,\bar{\imath}+\cos^4 t\,\bar{\jmath}+\operatorname{tg}^6 t\,\bar{k},\ t\in\left(0,\,\frac{\pi}{2}\right)$$

в точке $M_0\left(\frac{1}{2},\,\frac{1}{4},\,1\right)$.

Решение. Найдем производную этой векторной функции:

$$\bar{r}'(t)=2\sin t\cos t\,\bar{\imath}+4\cos^3 t(-\sin t)\,\bar{\jmath}+6\operatorname{tg}^5 t\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,\bar{k}=\sin 2t\,\bar{\imath}-4\sin t\cos^3 t\,\bar{\jmath}+6\cdot\frac{\operatorname{tg}^5 t}{\cos^2 t}\,\bar{k}.$$

Точке M_0 соответствует значение параметра $t_0=\frac{\pi}{4}$, поэтому направляющим для касательной является вектор $\bar{r}'(t_0)=\bar{\imath}-\bar{\jmath}+12\bar{k}$. Следовательно, искомые уравнения касательной и нормальной плоскости имеют вид

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-\frac{1}{4}}{-1}=\frac{z-1}{12}$$

и

$$1\left(x-\frac{1}{2}\right)-1\left(y-\frac{1}{4}\right)+12(z-1)=0\iff 4x-4y+48z-49=0$$

соответственно.

Если векторные функции $\bar{r}_1(t)$, $\bar{r}_2(t)$ и $\bar{r}_3(t)$ определены в интервале $(t_1,\,t_2)$ и дифференцируемы в точке $t\in(t_1,\,t_2)$, то

$$(c_1\bar{r}_1(t)+c_2\bar{r}_2(t))'=c_1\bar{r}_1'(t)+c_2\bar{r}_2'(t),\ c_1,\,c_2\in\mathbf{R};$$

$$(\bar{r}_1(t)\cdot\bar{r}_2(t))'=\bar{r}_1'(t)\cdot\bar{r}_2(t)+\bar{r}_1(t)\cdot\bar{r}_2'(t);$$

$$(\bar{r}_1(t)\times\bar{r}_2(t))'=\bar{r}_1'(t)\times\bar{r}_2(t)+\bar{r}_1(t)\times\bar{r}_2'(t);$$

$$(\bar{r}_1(t)\bar{r}_2(t)\bar{r}_3(t))'=\bar{r}_1'(t)\bar{r}_2(t)\bar{r}_3(t)+\bar{r}_1(t)\bar{r}_2'(t)\bar{r}_3(t)+\bar{r}_1(t)\bar{r}_2(t)\bar{r}_3'(t).$$

Первая из этих формул очевидна, а остальные доказываются с помощью представления этих произведений векторных функций в координатах (глава II, §§3–5) и правил дифференцирования суммы и произведения функций (§1 настоящей главы). Например, если

$$\bar{r}_1(t) = x_1(t)\bar{\imath} + y_1(t)\bar{\jmath} + z_1(t)\bar{k},$$
$$\bar{r}_2(t) = x_2(t)\bar{\imath} + y_2(t)\bar{\jmath} + z_2(t)\bar{k},$$

то

$$(\bar{r}_1(t)\cdot\bar{r}_2(t))' = (x_1(t)x_2(t) + y_1(t)y_2(t) + z_1(t)z_2(t))' =$$
$$= x_1'(t)x_2(t) + x_1(t)x_2'(t) + y_1'(t)y_2(t) + y_1(t)y_2'(t) + z_1'(t)z_2(t) + z_1(t)z_2'(t) =$$
$$= (x_1'(t)x_2(t) + y_1'(t)y_2(t) + z_1'(t)z_2(t)) + (x_1(t)x_2'(t) + y_1(t)y_2'(t) + z_1(t)z_2'(t)) =$$
$$= \bar{r}_1'(t)\cdot\bar{r}_2(t) + \bar{r}_1(t)\cdot\bar{r}_2'(t).$$

Замечание 2. Аналогично мы можем определить векторную функцию действительного аргумента и линию в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$.

§8. Компле́ксные числа и операции над ними. Разложение полинома на множители

Для решения некоторых задач действительных чисел может оказаться недостаточно и поэтому возникает необходимость в расширении множества действительных чисел. Попробуем, например, решить уравнение

$$(z-1)^2 + 1 = 0.$$

Действительных решений оно не имеет, однако формально мы можем найти его корни, если введем в рассмотрение символ

$$i = \sqrt{-1},$$

который мы назовем *мнимой единицей.* Тогда из данного уравнения следует, что

$$(z-1)^2 = -1 \Longrightarrow z - 1 = \pm\sqrt{-1} \Longrightarrow z = 1 \pm i.$$

Введем теперь следующее важное

Определение 1. *Компле́ксным числом называется выражение вида*

$$x + yi,$$

где x, y – действительные числа, $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Множество всех комплексных чисел мы обозначим через $\mathbf{C}$.

Для комплексного числа $z = x + yi$ действительные числа x и y называются, соответственно, его *действительной и мнимой частями.* Обозначаются действительная и мнимая части, соответственно, через $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$. Комплексные числа $-z = -x - yi$ и $\bar{z} = x - yi$ называются, соответственно, *противоположным* и *сопряженным* к комплексному числу z. Используя эту терминологию можно сказать, что приведенное выше квадратное уравнение имеет пару комплексно-сопряженных корней $z_{1,2} = 1 \pm i$.

Комплексное число, мнимая часть которого равна нулю, т. е. число вида $x + 0i$, которое мы будем обозначать через x, отождествляется с действительным числом x и, таким образом, *множество действительных чисел* $\mathbf{R}$ *является подмножеством множества комплексных чисел* $\mathbf{C}$ или, иначе, *множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел.* Здесь уместно отметить, что сформулированная *идея расширения множества действительных чисел до комплексных оказалась чрезвычайно плодотворной как в самой математике, так и в ее приложениях, например, в физике, механике, электротехнике, где аппарат комплексных чисел очень активно используется.*

Комплексное число с нулевой действительной частью, а именно, число $0 + yi$, которое мы будем записывать как yi, называется *чисто мнимым.*

Два комплексных числа считаются *равными*, если действительная и мнимая части одного из них равны, соответственно, действительной и мнимой частям другого.

Чтобы иметь возможность использовать комплексные числа, следует определить *алгебраические* операции над ними. Этим мы сейчас и займемся.

Пусть $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ – два комплексных числа.

Суммой комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z_1+z_2, которое находится сложением соответствующих выражений:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i.$$

Тогда *разностью* этих комплексных чисел называется число $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$.

Произведением комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z_1 z_2$, которое мы можем найти, перемножив выражения для данных комплексных чисел и учитывая при этом, что $i^2 = -1$. В результате получим:

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i.$$

Прямой проверкой мы можем убедиться в том, что операции сложения и умножения комплексных чисел обладают свойствами *коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности*, сформулированными для действительных чисел (глава IV, §1, свойства 1), 2), 5)). Роль *комплексных единицы и нуля* выполняют действительные числа $1 = 1 + 0i$ и $0 = 0 + 0i$.

Чтобы определить операцию *деления* комплексных чисел, покажем сначала, что для любого $z = x + yi \neq 0$ существует единственное *обратное* комплексное число z^{-1}, т. е. число, для которого выполняется равенство $zz^{-1} = 1$. Для этого умножим обе части последнего равенства на сопряженное к z комплексное число $\bar{z}$. В результате получим:

$$\bar{z}zz^{-1} = \bar{z} \Longleftrightarrow (x - yi)(x + yi)z^{-1} = \bar{z} \Longleftrightarrow (x^2 - y^2 i^2)z^{-1} = \bar{z} \Longleftrightarrow (x^2 + y^2)z^{-1} = \bar{z}.$$

Так как $z \neq 0$, то и $x^2 + y^2 \neq 0$, следовательно,

$$z^{-1} = \frac{1}{(x^2 + y^2)}\bar{z}.$$

Частным от деления числа $z_1 \in \mathbf{C}$ на число $0 \neq z_2 \in \mathbf{C}$ называется комплексное число

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}.$$

Учитывая приведенное выше представление для обратного комплексного числа, мы можем записать также следующую формулу для вычисления частного:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}.$$

Целая степень комплексного числа определяется точно также, как и целая степень действительного числа.

Пример 1. *Вычислить сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = 3 + 4i$, а также степень z_1^{2007}.*

Решение. Воспользовавшись определением алгебраических операций, получим:

$$z_1 + z_2 = 1 - i + 3 + 4i = 4 + 3i,$$
$$z_1 - z_2 = 1 - i - (3 + 4i) = -2 - 5i,$$
$$z_1 z_2 = (1 - i)(3 + 4i) = 3 + 4i - 3i - 4i^2 = 3 + i - 4(-1) = 7 + i,$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 - i}{3 + 4i} = \frac{(1 - i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{3 - 4i - 3i + 4i^2}{9 - 16i^2} = \frac{-1 - 7i}{25} = -\frac{1}{25} - \frac{7}{25}i.$$

Для вычисления степени, заметим сначала, что

$$z_1^2 = (1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1.$$

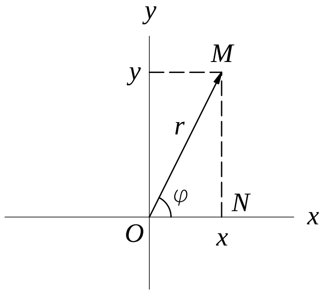
Тогда

$$\begin{aligned} z_1^{2007} &= (z_1^2)^{1003} z_1 = (-2i)^{1003} z_1 = -2^{1003} i^{1003} z_1 = \\ &= -2^{1003}(i^4)^{250} i^3 z_1 = 2^{1003} i z_1 = 2^{1003} i(1 - i) = 2^{1003}(1 + i). \end{aligned}$$

Рассмотрим *геометрическую иллюстрацию* комплексного числа, которая даст нам возможность представить комплексное число в так называемой *тригонометрической форме.*

Выберем на плоскости декартову систему координат Oxy. Тогда на этой плоскости комплексное число $z = x + yi$ мы можем представлять себе как точку $M(x, y)$ или радиус-вектор

$\overline{OM}(x,\, y)$ и, наоборот, точку или ее радиус-вектор считать соответствующим комплексным числом.



Таким образом заполненную комплексными числами плоскость мы будем называть *комплексной плоскостью.* Действительные числа располагаются на оси Ox, поэтому ее называют *действительной осью комплексной плоскости*, чисто мнимые – на оси Oy, которая называется *мнимой осью комплексной плоскости.*

На комплексной плоскости сложение и вычитание комплексных чисел равносильно этим же операциям над соответствующими радиусами-векторами.

Длина r радиуса-вектора $\overline{OM}$ называется *модулем* комплексного числа z, угол φ, который образует этот радиус-вектор с положительным направлением оси Ox, называется *аргументом* данного комплексного числа (для модуля и аргумента иногда используются обозначения $|z|$ и $\arg z$ соответственно). Очевидно, что, если аргумент φ найден, то любой из углов $\varphi+2n\pi,\ n\in\mathbf{N}$ также является аргументом. Чтобы однозначно зафиксировать аргумент, будем выбирать его значение в пределах полного угла, например, из промежутка $[0,\, 2\pi)$.

Из прямоугольного треугольника OMN следует, что, с одной стороны,

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$$

а, с другой,

$$r = \sqrt{x^2+y^2};\ \cos\varphi = \frac{x}{r},\ \sin\varphi = \frac{y}{r} \tag{1}$$

(мы здесь, естественно, подразумеваем, что $z\neq 0$. Если $z=0$, то $r=0$, а аргумент φ не определен). Тогда

$$z = x+yi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Таким образом, комплексное число $z=x+yi$ мы можем записать в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где модуль r и аргумент φ находятся по формулам (1). Это представление называется *тригонометрической формой* комплексного числа.

Если складывать и вычитать комплексные числа удобно, когда они представлены в своей первоначальной, *алгебраической форме*, то при умножении, делении и возведении в степень гораздо удобнее использовать тригонометрическую форму. Действительно, пусть

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

– два комплексных числа, представленные в тригонометрической форме. Тогда

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)) = \\ &= r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),$$

т. е. *при умножении комплексных чисел их модули умножаются, а аргументы складываются.* Аналогично, если $z_2\neq 0$, то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

и, таким образом, *деление комплексных чисел приводит к делению их модулей и вычитанию аргументов.* Из последних двух формул следует, что, если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$, то для любого целого n

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

– *формула Муавра.*

Научимся теперь *извлекать корни* из комплексных чисел. По определению, для произвольного натурального $n > 1$ *корнем n-ой степени* из комплексного числа z называется комплексное число $\sqrt[n]{z}$, для которого $(\sqrt[n]{z})^n = z$. В отличие от степени корень из комплексного числа находится *неоднозначно.* Для вычисления корня также удобно использовать тригонометрическую форму. Пусть

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \ \sqrt[n]{z} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Воспользовавшись определением корня и формулой Муавра, получим:

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Отсюда, $\rho^n = r,\ n\psi = \varphi + 2m\pi$, $m \in \mathrm{Z}$ или

$$\rho = \sqrt[n]{r},\ \psi = \frac{\varphi + 2m\pi}{n},\ m \in \mathrm{Z}.$$

Полагая целое число m равным n последовательным значениям, например, $m = 1, 2, \ldots, n$, мы получим n различных значений аргумента, а, значит, и n различных значений корня. Все остальные аргументы будут отличаться от указанных на угол, кратный 2π и поэтому новых значений корня они не добавят.

Таким образом, *корень n-ой степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ имеет n различных значений и все они вычисляются по формуле*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2m\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2m\pi}{n}\right),\ m = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Заметим еще, что, как видно из формулы, переход от одного значения корня к соседнему происходит поворотом на один и тот же угол $\frac{\varphi}{n}$, поэтому все корни n-ой степени из комплексного числа z находятся на окружности радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат в вершинах правильного n-угольника.

Пример 2. *Решить уравнение* $z^3 + 1 - \sqrt{3}i = 0$.

Решение. Из данного уравнения следует, что $z = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{3}i}$. Представим комплексное число $-1 + \sqrt{3}i$ в тригонометрической форме. По формулам (1)

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2;\ \cos\varphi = -\frac{1}{2},\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

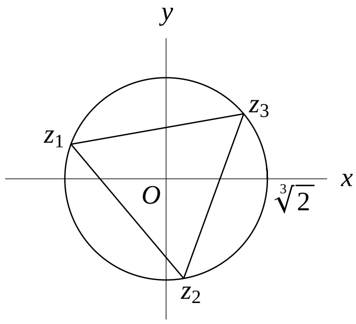
Тогда $-1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ и, следовательно, искомые корни могут быть вычислены по формуле (2):

$$z_m = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{3}i} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 2m\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3} + 2m\pi}{3}\right),\ m = 1, 2, 3.$$

Таким образом, данное уравнение имеет три различных комплексных корня

$$z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9}\right),\ z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{14\pi}{9}\right),\ z_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right),$$

которые располагаются на окружности радиуса $\sqrt[3]{2}$ с центром в начале координат в вершинах равностороннего треугольника.



Рассмотрим еще одну форму представления комплексного числа – *показательную.* Положим по определению
$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,\ \ \varphi \in \mathbf{R}. \tag{3}$$
Поясним (нестрого!) эту формулу, использовав разложение экспоненты по формуле Маклорена произвольного порядка для аргумента $x = i\varphi$ (§5, пункт 2, формула (1)):
$$e^{i\varphi} = 1 + \frac{i\varphi}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \ldots + \frac{(i\varphi)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{(i\varphi)^{2n}}{(2n)!} + \ldots =$$
$$= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\varphi^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots\right).$$
Отсюда формально и следует соотношение (3), так как выражения в скобках в последней формуле представляют собой разложения функций $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ по формуле Маклорена (§5, пункт 2, формулы (3) и (2) соответственно).

Использовав (3) и формулы умножения, деления и возведения в степень комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, мы можем убедиться в справедливости следующих свойств экспоненты $e^{i\varphi}$, которые повторяют соответствующие свойства показательной функции действительного аргумента:
$$e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2},\ e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}},\ (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi},\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi \in \mathbf{R},\ n \in \mathrm{Z}.$$
С учетом (3) тригонометрическая форма представления комплексного числа
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
превращается в *показательную*
$$z = re^{i\varphi}.$$
Показательная форма позволяет, учитывая приведенные выше свойства экспоненты $e^{i\varphi}$, *компактно* записать операции умножения, деления, а также возведения в степень и извлечения корня для комплексных чисел. Действительно, если $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$, $z = re^{i\varphi}$, то
$$\begin{gathered} z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)};\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}; \\ z^n = r^ne^{in\varphi},\ n \in \mathrm{Z};\ \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2m\pi}{n}},\ n \in \mathbf{N},\ m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \end{gathered} \tag{4}$$
Формула (3) дает возможность определить *комплексную экспоненту.* Действительно, для произвольного комплексного числа $z = x + yi$ положим по определению
$$e^z = e^{x+yi} = e^xe^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$
Свойства этой функции совершенно аналогичны приведенным выше соответствующим свойствам функции $e^{i\varphi}$.

Покажем, что *операция комплексного сопряжения над результатом любой алгебраической операции приводит к точно такой же операции над сопряженными комплексными числами.* Для сложения и вычитания это очевидным образом следует из определения этих операций, т. е.
$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2. \tag{5}$$

Далее, так как операция комплексного сопряжения не меняет модуля комплексного числа, но меняет знак его аргумента на противоположный, т. е. $\bar{z} = re^{-i\varphi}$, то, использовав формулы (4), мы можем записать:

$$\begin{gathered}\overline{z_1 z_2} = \overline{r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}} = r_1 r_2 e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)} = r_1 e^{-i\varphi_1} \cdot r_2 e^{-i\varphi_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2,\\ \overline{\frac{z_1}{z_2}} = \overline{\frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}} = \frac{r_1}{r_2} e^{-i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{r_1 e^{-i\varphi_1}}{r_2 e^{-i\varphi_2}} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},\\ \overline{z^n} = \overline{r^n e^{in\varphi}} = r^n e^{-in\varphi} = (re^{-i\varphi})^n = \bar{z}^n,\\ \overline{\sqrt[n]{z}} = \overline{\sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi+2m\pi}{n}}} = \sqrt[n]{r} e^{-i\frac{\varphi+2m\pi}{n}} = \sqrt[n]{\bar{z}},\ n \in \mathbf{N},\ m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.\end{gathered} \tag{6}$$

Если действительная и мнимая части комплексного числа зависят от некоторой действительной переменной, то мы вправе говорить о *комплексной функции* действительного аргумента.

Определение 2. *Закономерность, по которой каждому действительному числу t из некоторого интервала $(t_1,\ t_2)$ ставится в соответствие определенное комплексное число $z(t)$, называется комплексной функцией действительного аргумента.*

Пусть $x(t) = \operatorname{Re} z(t),\ y(t) = \operatorname{Im} z(t)$. Тогда

$$z(t) = x(t) + iy(t),\ t \in (t_1,\ t_2).$$

Значения комплексной функции заполняют на плоскости Oxy некоторую кривую L, которая является траекторией векторной функции

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{\imath} + y(t)\bar{\jmath},\ t \in (t_1,\ t_2).$$

Комплексным уравнением кривой L является уравнение

$$z = z(t).$$

Поскольку задание комплексной функции $z(t)$ равносильно заданию соответствующей векторной функции $\bar{r}(t)$, то введенные для векторной функции в предыдущем параграфе понятия предела, непрерывности и производной автоматически переносятся и на комплексную функцию. В частности, если функция $z(t)$ дифференцируема в точке $t \in (t_1,\ t_2)$, то ее действительная и мнимая части также дифференцируемы в этой точке и

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t).$$

Производная $z'(t_0)$ является *направляющим вектором касательной* к кривой L в точке $z(t_0)$. Использовав векторное уравнение прямой на плоскости (глава III, §3), мы можем записать комплексное уравнение касательной:

$$z = z(t_0) + z'(t_0)t,\ t \in \mathbf{R}.$$

Пример 3. *Построить кривую L, заданную комплексным уравнением*

$$z = \cos^3 t + i \sin^3 t,\ t \in [0,\ 2\pi)$$

и найти комплексное уравнение касательной к этой кривой в точке $z_0 = \frac{3\sqrt{3}+i}{8}$.

Решение. Кривая L задана параметрическими уравнениями

$$x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ t \in [0,\ 2\pi).$$

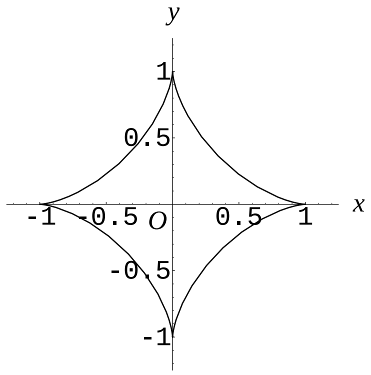
Из свойств функций $\sin t$ и $\cos t$ следует, что эта кривая симметрична относительно осей координат и биссектрис координатных углов, поэтому достаточно построить ее в первой четверти и затем отразить относительно координатных осей. Найдем первую и вторую производные функции

$$x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ t \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right),$$

заданной параметрически (§2, пункты 2 и 3). Так как

$$x'_t = (\cos^3 t)' = 3\cos^2 t(\cos t)' = -3\sin t \cos^2 t,\ y'_t = (\sin^3 t)' = 3\sin^2 t(\sin t)' = 3\sin^2 t \cos t,$$

то
$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3\sin^2 t\cos t}{-3\sin t\cos^2 t} = -\operatorname{tg} t.$$
Далее,
$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-\operatorname{tg} t)'}{-3\sin t\cos^2 t} = \frac{-1/\cos^2 t}{-3\sin t\cos^2 t} = \frac{1}{3\sin t\cos^4 t}.$$
Так как $y'_x < 0,\ y''_{xx} > 0,\ t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то в первой четверти кривая L является графиком убывающей выпуклой функции. Построим эту кривую.



Она называется *астроидой.*

Точке z_0 соответствует значение параметра $t_0 = \frac{\pi}{6}$. Направляющим вектором касательной к кривой L в точке z_0 является вектор $z'(t_0) = -\frac{9}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i$. Тогда комплексное уравнение касательной имеет вид:
$$z = \frac{3\sqrt{3}+i}{8} + \left(-\frac{9}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i\right)t \Longleftrightarrow z = \frac{3\sqrt{3} - 9t + (1+3\sqrt{3}\,t)i}{8},\ t \in \mathbf{R}.$$

В следующем семестре при изучении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами нам придется рассматривать *комплексную функцию*
$$z(x) = e^{\lambda x},\ \lambda \in C$$
действительного аргумента x. Покажем, что как и для действительной функции
$$z'(x) = \lambda e^{\lambda x}.$$
В самом деле, если $\lambda = \mu + \nu i$, то
$$z(x) = e^{\mu x}(\cos\nu x + i\sin\nu x)$$
и, следовательно,
$$z'(x) = (e^{\mu x}\cos\nu x)' + i(e^{\mu x}\sin\nu x)' = \mu e^{\mu x}\cos\nu x + e^{\mu x}(-\nu\sin\nu x) + i(\mu e^{\mu x}\sin\nu x + e^{\mu x}\nu\cos\nu x) =$$
$$= \mu e^{\mu x}(\cos\nu x + i\sin\nu x) + i\nu e^{\mu x}(\cos\nu x + i\sin\nu x) = (\mu + i\nu)e^{\mu x}(\cos\nu x + i\sin\nu x) = \lambda e^{\lambda x}.$$

Вернемся теперь к исходному пункту этого параграфа, а именно, к задаче *решения алгебраического уравнения.* Рассмотрим полином степени $n \in \mathbf{N}$ комплексной переменной z с комплексными коэффициентами
$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n,\ a_0 \neq 0.$$

На вопрос о *разрешимости* уравнения
$$P_n(z) = 0 \tag{7}$$
отвечает сформулированная ниже теорема, которую называют иногда *основной теоремой алгебры.*

Теорема Гаусса. *Уравнение* (7) *имеет комплексный корень*[1].

[1] Часто *корень уравнения* (7) называют *корнем полинома* $P_n(z)$.

Пусть z_1 – корень уравнения (7), существование которого гарантирует теорема Гаусса. Тогда, учитывая, что при любом натуральном k

$$z^k - z_1^k = (z - z_1)(z^{k-1} + z^{k-2}z_1 + \ldots + zz_1^{k-2} + z_1^{k-1}),$$

получим:

$$P_n(z) = P_n(z) - P_n(z_1) = a_0(z^n - z_1^n) + a_1(z^{n-1} - z_1^{n-1}) + \ldots + a_{n-1}(z - z_1) = (z - z_1)Q_{n-1}(z),$$

где $Q_{n-1}(z)$ – некоторый полином степени $n-1$. Если, далее, z_1 – корень уравнения $Q_{n-1}(z) = 0$, то

$$Q_{n-1}(z) = (z - z_1)R_{n-2}(z),$$

где $R_{n-2}(z)$ – полином степени $n - 2$, и, таким образом,

$$P_n(z) = (z - z_1)^2 R_{n-2}(z).$$

Продолжая этот процесс, мы через s_1 $(1 \le s_1 \le n)$ шагов придем к следующему представлению для полинома $P_n(z)$:

$$P_n(z) = (z - z_1)^{s_1} S_{n-s_1}(z), \tag{8}$$

где $S_{n-s_1}(z)$ – полином степени $n-s_1$, причем $S_{n-s_1}(z_1) \neq 0$. Число s_1 называется *кратностью* корня z_1. Если $s_1 < n$, то уравнение $S_{n-s_1}(z) = 0$ по теореме Гаусса имеет корень $z_2 \neq z_1$. Для этого корня мы по аналогии с (8) можем записать разложение

$$S_{n-s_1}(z) = (z - z_2)^{s_2} T_{n-s_1-s_2}(z),$$

в котором $T_{n-s_1-s_2}(z)$ – полином степени $n - s_1 - s_2$ и $T_{n-s_1-s_2}(z_2) \neq 0$. Следовательно,

$$P_n(z) = (z - z_1)^{s_1}(z - z_2)^{s_2} T_{n-s_1-s_2}(z).$$

Повторяя эту процедуру для всех оставшихся корней уравнения (7), мы придем к следующему разложению полинома $P_n(z)$ на множители:

$$P_n(z) = a_0(z - z_1)^{s_1}(z - z_2)^{s_2} \cdot \ldots \cdot (z - z_r)^{s_r}, \tag{9}$$

где все корни $z_1, z_2, \ldots, z_r$ $(1 \le r \le n)$ кратностей $s_1, s_2, \ldots, s_r$ $(s_1 + s_2 + \ldots + s_r = n)$, соответственно, различны. В частном случае уравнение может иметь n различных и, значит, *простых*, т. е. кратностей 1, корней. Тогда

$$P_n(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n).$$

Обсудим теперь один важный частный случай, когда *все коэффициенты полинома $P_n(x)$ действительного аргумента x действительны.* Для этого полинома также справедливо представление (9), однако в нем могут быть комплексные множители. Поставим себе целью найти *разложение этого полинома на действительные множители.* Для этого заметим, что в данном случае

$$\overline{P_n(z)} = P_n(\bar{z}) \tag{10}$$

для любого комплексного числа z. В самом деле, воспользовавшись свойствами (5) и (6) комплексного сопряжения и тем, что коэффициенты полинома $P_n(x)$ действительны, получим:

$$\overline{P_n(z)} = \overline{a_0 z^n} + \overline{a_1 z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_{n-1} z} + \bar{a}_n = a_0 \bar{z}^n + a_1 \bar{z}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\bar{z} + a_n = P_n(\bar{z}).$$

Из (10) сразу же следует, что, если уравнение

$$P_n(x) = 0 \tag{11}$$

имеет комплексный корень $z_0 = x_0 + y_0 i$, то и сопряженное к нему число $\bar{z}_0$ также является корнем этого уравнения. Так как квадратичное выражение

$$(x - z_0)(x - \bar{z}_0) = x^2 + px + q$$

имеет действительные коэффициенты $p = -(z_0 + \bar{z}_0) = -2x_0$ и $q = z_0\bar{z}_0 = x_0^2 + y_0^2$, то полином $P_n(x)$ мы можем представить в виде

$$P_n(x) = (x^2 + px + q)Q_{n-2}(x),$$

где полином $Q_{n-2}(x)$ степени $n - 2$ также имеет действительные коэффициенты. Если уравнение $Q_{n-2}(x) = 0$ также имеет пару комплексно сопряженных корней z_0, $\bar{z}_0$, то из полинома

$Q_{n-2}(x)$ мы, в свою очередь, можем выделить квадратичный множитель x^2+px+q и, следовательно,

$$P_n(x) = (x^2+px+q)^2 R_{n-4}(x),$$

где $R_{n-4}(x)$ – полином степени $n-4$ с действительными коэффициентами. Повторяя эту процедуру, мы через r шагов, где r – общая кратность пары комплексно сопряженных корней z_0, $\bar{z}_0$ уравнения (11), придем к равенству

$$P_n(x) = (x^2+px+q)^r S_{n-2r}(x).$$

Здесь полином $S_{n-2r}(x)$ степени $n-2r$ имеет действительные коэффициенты и $S_{n-2r}(z_0) \neq 0$.

Таким образом, мы можем утверждать, что, если уравнение (11) имеет k действительных корней $x_1, x_2, \ldots, x_k$ с кратностями $s_1, s_2, \ldots, s_k$, соответственно, и l пар комплексно сопряженных корней $z_1, \bar{z}_1$; $z_2, \bar{z}_2$; $\ldots$; $z_l, \bar{z}_l$ кратностей, соответственно, $r_1, r_2, \ldots, r_l$, то *полином* $P_n(x)$ *имеет следующее разложение по степеням действительных линейных и квадратичных множителей*:

$$\begin{gathered} P_n(x) = a_0(x-x_1)^{s_1}(x-x_2)^{s_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_k)^{s_k}\times \\ \times(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}(x^2+p_2x+q_2)^{r_2}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_lx+q_l)^{r_l}, \end{gathered} \tag{12}$$

где $p_m = -(z_m+\bar{z}_m)$, $q_m = z_m\bar{z}_m$, $m = 1, 2, \ldots, l$.

В заключение этого параграфа научимся находить кратность корня уравнения (11) с помощью производной.

Корень $x_0 \in \mathbf{R}$ *уравнения* (11) *имеет кратность* $s \geq 1$ *тогда и только тогда, когда*

$$P_n(x_0) = 0,\ P'_n(x_0) = 0,\ \ldots,\ P_n^{(s-1)}(x_0) = 0,\ P_n^{(s)}(x_0) \neq 0. \tag{13}$$

Действительно, предположим сначала, что x_0 – s-кратный корень уравнения (11). Тогда ввиду (8)

$$P_n(x) = (x-x_0)^s S_{n-s}(x),\ \ S_{n-s}(x_0) \neq 0.$$

Отсюда и следует утверждение, так как первые $s-1$ производных будут содержать множитель $x-x_0$ и, следовательно, они равны нулю в точке x_0, а

$$P_n^{(s)}(x) = s!S_{n-s}(x) + (x-x_0)Q_{n-s-1}(x),$$

где $Q_{n-s-1}(x)$ – полином степени $n-s-1$, и поэтому $P_n^{(s)}(x_0) \neq 0$.

Обратно, пусть имеют место соотношения (13). Запишем для полинома $P_n(x)$ формулу Тейлора порядка n в точке x_0 с остатком в форме Лагранжа (§5, пункт 1, формула (1)):

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P'_n(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{P''_n(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

так как здесь

$$R_n(x) = \frac{P_n^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0.$$

Из формулы Тейлора и соотношений (13) следует, что

$$P_n(x) = (x-x_0)^s S_{n-s}(x),$$

где

$$S_{n-s}(x) = \frac{P_n^{(s)}(x_0)}{s!} + \frac{P_n^{(s+1)}(x_0)}{(s+1)!}(x-x_0) + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n-s}.$$

Следовательно, $S_{n-s}(x_0) = \frac{P_n^{(s)}(x_0)}{s!} \neq 0$, что и означает, что x_0 – корень кратности s уравнения (11).

Замечание. Сформулированное утверждение справедливо и для кратных комплексных корней уравнения (11).

Пример 4. *Разложить на множители полином* $P_5(x) = -4 + 8\,x - x^2 - 5\,x^3 + x^4 + x^5$.

Решение. $P_5(1) = P_5(-2) = 0$. Найдем кратности корней $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$. Так как

$$P'_5(x) = 8 - 2\,x - 15\,x^2 + 4\,x^3 + 5\,x^4,$$

то $P_5'(1) = P_5'(-2) = 0$. Далее,

$$P_5''(x) = -2 - 30\,x + 12\,x^2 + 20\,x^3,$$

следовательно, $P_5''(1) = 0,\ P_5''(-2) = -54 \neq 0$. Отсюда следует, что x_1 – трехкратный, а x_2 – двукратный корень уравнения $P_5(x) = 0$ и, таким образом,

$$P_5(x) = -4 + 8\,x - x^2 - 5\,x^3 + x^4 + x^5 = (x-1)^3(x+2)^2.$$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бугров Я.С., Никольский С.М.
   Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М., Наука, 1980.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М.
   Дифференциальное и интегральное исчисление. – М., Наука, 1980.
3. Кудрявцев Л.Д.
   Краткий курс математического анализа. Т. 1. – Висагинас, Alfa, 1998.
4. Фихтенгольц Г.М.
   Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – М., Наука, 1969.
5. Пискунов Н.С.
   Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т. 1. – М., Наука, 1985.
6. *Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа.* (под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича) – М., Наука, 1986.