

## ВЕРИФИКАЦИЯ СТРУКТУРНЫХ МОДЕЛЕЙ ПРОСТРАНСТВЕННО-АРМИРОВАННЫХ ПЕНОПЛАСТМАСС И СОТОВЫХ ЗАПОЛНИТЕЛЕЙ СЭНДВИЧ-ПАНЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ ПРОВЕДЕНИЯ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

<sup>1</sup>Щербатюк Д.А., <sup>2</sup>Янковский А.П.

<sup>1</sup>Сибирский государственный университет путей сообщения, Новосибирск

<sup>2</sup>Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,  
Новосибирск

В авиа- и ракетостроении и в некоторых других областях техники в последние десятилетия широко применяются слоистые конструкции с наполнителем. В качестве наполнителей используются пенопластические массы – неармированные и армированные пластинками или проволокой, а также разного рода ребристые конструкции (сотовые, складчатые, типа гофра и др.).

Возможности пенопластмасс как легких наполнителей значительно расширяются, если использовать их в виде армированных слоистых структур, представляющих собой пенопласты с прослойками конструкционных материалов (металл, фанера, жесткие полимеры и др.), чаще всего в виде полос [1]. В этом случае при приложении нагрузки вдоль усиливающего материала прочность и жесткость армированного пенопласта значительно выше, чем неармированного с такой же плотностью.

Использование современных пенопластмасс (например, вспенивающихся) позволяет создавать такие типы наполнителей, в которых полости в ребристых конструкциях (сотовых, складчатых и др.) заполнены пенопластической массой [2]. Подобные наполнители, благодаря наличию в них пенопластмассы, обладают хорошими вибрационными характеристиками, так как пенопластическая масса

работает как демпфер и обеспечивает высокий градиент затухания колебаний. Кроме того, пенопластмасса, заполняющая полости ребристой конструкции, обеспечивает лучшую совместную работу элементов этой конструкции, поддерживает их и препятствует их потере устойчивости при сжатии и сдвиге, что во многом определяет жесткостные и прочностные характеристики наполнителей типа сотовых, складчатых и т. п. [2–4 и др.]. Подобные конструкции наполнителей можно рассматривать как пенопластмассы со сложными (ребристо-пространственными) структурами армирования, позволяющими локализовать в пределах одной ячейки распространение трещин в пенопластической массе. Этим резко повышается несущая способность материала в слоистых конструкциях с наполнителем, особенно в зонах приложения локализованных нагрузок и концентраторов напряжений при нестационарных термодинамических воздействиях, характерных для современных технических устройств [2].

Эффективные характеристики наполнителей, входящих в состав трехслойных панелей и представляющих собой ребристо-пространственные конструкции (типа сотовых, гофрированных и др.), в силу актуальности этой проблемы определялись многими авторами на основе различных структурных подходов [4, 5 и др.], детальный анализ которых содержится, в частности, в обзорной статье [6].

Моделирование же механического поведения криволинейно-армированных ребристыми элементами композитных сред в настоящее время находится в зачаточном состоянии. Так, в [2] на базе конечно-элементного моделирования (КЭМ) исследуется упругопластическое поведение трехслойных консольных пластин под действием локализованных и распределенных поперечных нагрузок при цилиндрическом изгибе, когда средний слой

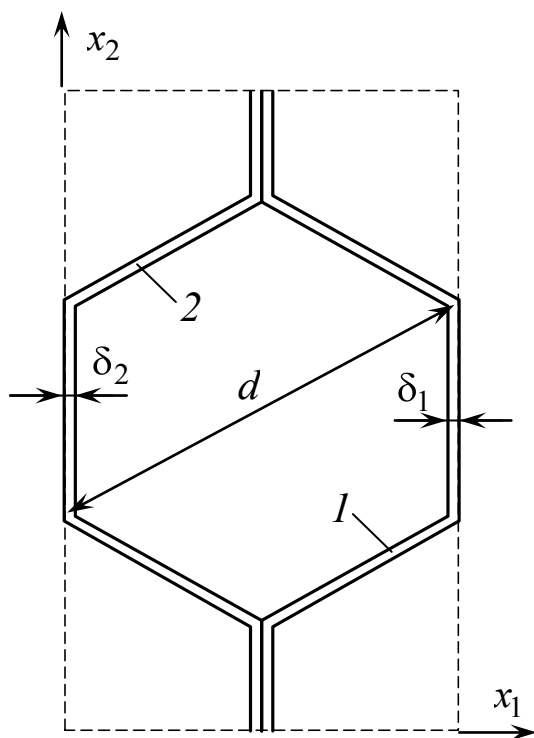


Рисунок 1 – Представительный элемент (ячейка) сотового наполнителя (вид сверху)

представляет собой ребристо-армированный полимер. КЭМ является идеальным при решении подобных задач, однако современный уровень вычислительной техники не позволяет рассчитать механическое поведение такой ячеистой конструкции при большом количестве ячеек. Например, в [2] исследование конструкции сведено к представительному элементу балочного типа, содержащему всего 10 ячеек, причем простейшей формы, когда ребристые элементы являются плоскими (не криволинейными) и образуют ортогональную структуру армирования. В реальных же заполнителях (например, сотовых) характерный размер одной ячейки может иметь порядок 1 см [3], поэтому тонкостенный сэндвич-элемент, содержащий заполнитель всего из 10 ячеек таких размеров, малоинтересен с практической точки зрения.

Следовательно, для решения реальных задач о деформировании конструкций периодической структуры с большим количеством ячеек на сегодняшний день целесообразно использовать структурные модели их механического поведения, базирующиеся на использовании тех или иных упрощающих гипотез, позволяющих резко сократить вычислительные затраты по сравнению с прямым использованием КЭМ. Так, в работах [7, 8] на основе упрощающих допущений с привлечением энергетических критериев эквивалентности разработаны две структурные модели, позволяющие определить нижние [7] и верхние [8] оценки эффективных жесткостей пенопластмассы, криволинейно-армированной ребристыми элементами (вилка Хашина – Штрикмана [9]). В работе [10] предложена аналогичная структурная модель без привлечения энергетических критериев эквивалентности.

Отсутствие в открытой печати экспериментальных данных по упругому деформированию пенопластмасс, криволинейно-армированных ребристыми элементами, не позволяет оценить точность этих структурных теорий и их практическую применимость.

На данный момент времени реальная возможность верификации структурных моделей из [7, 8, 10] заключается в сравнении значений эффективных жесткостей композиции, предсказываемых ими, со значениями, полученными на основе КЭМ, так как в последнем случае не используются никакие упрощающие гипотезы и расчет по КЭМ можно рассматривать как эталонный. (Методика определения эффективных характеристик 3D-периодических сред на основе КЭМ достаточно подробно изложена во многих публикациях [11 и др.], поэтому не будем останавливаться более подробно на обсуждении этого вопроса.)

Верификацию моделей из [7, 8, 10] проведем на примере сотовой ячейки, наиболее часто используемой на практике, полости в которой заполнены пенопластмассой.

Представительная ячейка сотовой ребристой конструкции изображена на рис. 1 и характеризуется наличием лишь двух криволинейных армирующих элементов (1 и 2) постоянной толщины  $\delta_1 = \delta_2 = 0,05$  мм (см. рис. 1), а диаметр соты  $d = 8$  мм [3]. Армирующие элементы изготовлены из дуралюмина Д16АТВ с упругими характеристиками [3]:  $E^{(k)} = 67,7$  ГПа,  $\nu^{(k)} = 0,41$  ( $k = 1, 2$ ). Пустоты в сотах предполагаются заполненными пенопластической массой ПЭ-1 с упругими константами [1]:  $E^{(0)} = 40$  МПа,  $\nu^{(0)} = 0,25$ . (Здесь:  $E^{(n)}$ ,  $\nu^{(n)}$  ( $n = 0, 1, 2$ ) – модуль Юнга и коэффициент Пуассона  $n$ -го фазового материала.)

Так как фиктивный однородный материал, эквивалентный рассматриваемой армированной среде, является ортотропным, то закон Гука для него имеет вид:

$$\sigma_{ii} = \sum_{j=1}^3 A_{ij} \varepsilon_{jj}, \quad \sigma_{il} = 2G_{il} \varepsilon_{il} \quad (i \neq l, \quad i, l = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  – усредненные напряжения и деформации в композиции;  $A_{ij}$ ,  $G_{il}$  – эффективные жесткости композиции.

В табл. 1 приведены расчетные значения эффективных жесткостей  $A_{ij}$ ,  $G_{il}$  рассматриваемой композитной среды, определенные по структурным моделям, предложенным ранее в [7, 8, 10], а также на основе КЭМ.

Таблица 1 – Расчетные значения эффективных жесткостей пенопластмассы ПЭ-1, армированной в виде сот ребристыми элементами из сплава Д16АТВ

Характеристики жесткости	Значения эффективных жесткостей, МПа			
	Модель из [8]	Модель из [10]	Модель из [7]	КЭМ
$A_{11}$	502,5	495,3	488,3	405,2
$A_{12} = A_{21}$	171,0	167,0	163,0	364,7
$A_{13} = A_{31}$	266,4	261,8	257,3	306,7
$A_{22}$	898,7	889,1	879,7	405,2
$A_{23} = A_{32}$	429,0	423,4	417,9	307,1
$A_{33}$	1621,7	1617,5	1613,4	1568,6
$2G_{12} = 2G_{21}$	634,9	329,3	170,8	48,2
$2G_{23} = 2G_{32}$	617,0	612,8	608,6	549,1
$2G_{13} = 2G_{31}$	386,4	383,2	378,0	380,4

В рамках КЭМ для определения значений эффективных жесткостей  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$ ,  $A_{22}$ ,  $G_{12}$  использовались плоские КЭ (при задании условий плоского деформирования), причем ячейка (см. рис. 1) разбивалась на 47558 элементов с 24100 узлами. Для определения остальных эффективных постоянных использовалось пространственное КЭМ ячейки, причем в силу условий симметрии оказалось достаточным рассмотреть четверть ячейки. При этом по направлению  $x_3$  (перпендикулярному плоскости рис. 1) был задан размер ячейки  $h = 4$  мм; количество пространственных КЭ равно 56498 с 29523 узлами. Таким образом, при КЭМ использовалась достаточно мелкая разбивка ячейки на КЭ, что позволяет адекватно учесть неоднородность напряженно-деформированного состояния (НДС) во всех компонентах композиции и дает основание считать результаты расчета на базе КЭМ достаточно надежными – достоверными (см. последний столбец в табл. 1).

В работах же [7, 8, 10] при построении структурных моделей использовались упрощающие гипотезы, в частности НДС в компонентах композиции в пределах представительной ячейки предполагалось постоянным. Эти допущения позволили существенно упростить методику определения эффективных жесткостей композиции (при этом все вычисления сводятся к алгебре  $6 \times 6$ -матриц). Однако, как видно из табл. 1, использование в [7, 8, 10] упрощающих гипотез приводит для некоторых характеристик (например,  $A_{12}$ ,  $A_{22}$ ) к занижению или завышению значений в 2 раза, а для модуля сдвига  $G_{12}$  в плоскости  $x_1x_2$  – в 3,5–13,2 раза. Удовлетворительно согласуются с КЭМ лишь жесткости  $A_{33}$ ,  $G_{32}$ ,  $G_{31}$ .

Если задать  $E^{(0)} = 0$ ,  $\nu^{(0)} = 0$ , то получим эффективные упругие характеристики для ребристой конструкции, полости в которой не заполнены пенопластмассой. Ранее, на основе принципиально других подходов (методами строительной механики [12]), эффективные упругие характеристики таких конструкций были получены, например, в [4–6 и др.]. Поэтому представляется целесообразным сравнить эффективные характеристики, например сотового заполнителя, рассчитанные по методикам, предложенным в [4, 5, 7, 8, 10], а также на базе КЭМ, и сопоставить их с известными экспериментальными данными [3].

Рассматривается сотовый заполнитель с ячейкой прежних размеров [3], выполненный из сплава Д16АТВ. В табл. 2 приведены расчетные (в расчетах по моделям из [7, 8, 10] и при КЭМ принималось  $\nu^{(0)} = 0$ ,  $E^{(0)} = 4$  кПа, чтобы обеспечить устойчивый счет и отсутствие деления на ноль) и экспериментальные значения эффективных упругих технических констант рассматриваемой сотовой конструкции. При этом закон Гука (1) предполагается записанным в следующей форме [13]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma_{33}, & \varepsilon_{22} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{1}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{32}}{E_3} \sigma_{33}, \\ \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_{22} + \frac{1}{E_3} \sigma_{33}, & 2\varepsilon_{il} &= \sigma_{il} / G_{il} \quad (i \neq l, \quad i, l = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $E_i$ ,  $G_{il}$ ,  $\nu_{il}$  – модули упругости первого и второго рода и коэффициенты Пуассона для ортотропного эквивалентного материала.

Таблица 2 – Эффективные упругие технические константы сотового заполнителя

Технические константы	Метод расчета (модели)				Экспериментальные данные [3]
	Модель из [5, стр. 109]	Модель из [4]	Модели из [7, 8, 10]	КЭМ	
$E_1$ , МПа	410,6 / 408,0*	—	404,4 / 399,0 / 393,6**	1,383	—
$E_2$ , МПа	768,6 / 759,6	—	723,9 / 717,6 / 711,4	1,359	—
$E_3$ , МПа	1278,2	1566,8	1302,9 / 1302,9 / 1302,9	1282,1	—
$G_{12}$ , МПа	—	—	301,6 / 148,8 / 73,5	0,804	—
$G_{23}$ , МПа	263,6	288,7	292,9 / 290,8 / 288,7	258,1	216–246
$G_{31}$ , МПа	173,2	173,2	177,5 / 175,3 / 173,2	173,9	83,5–131,0
$\nu_{21}$	0,346 / 0,354	—	0,215 / 0,213 / 0,211	0,989	—
$\nu_{12}$	0,185 / 0,190	—	0,120 / 0,118 / 0,117	1,007	—

\*) В числителе: расчет при толщине заполнителя  $h = 8$  мм; в знаменателе: расчет при  $h = 13$  мм. (Расчетные значения  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{21}$ ,  $\nu_{12}$ , определенные по методике из [5], зависят от толщины заполнителя  $h$  в направлении  $x_3$ . Значения толщины  $h$  заполнителя при этом выбраны такими, какие использовались в [3] при проведении экспериментов.)  
 \*\*) Первое число – расчет по модели из [8], второе – из [10], третье – из [7].

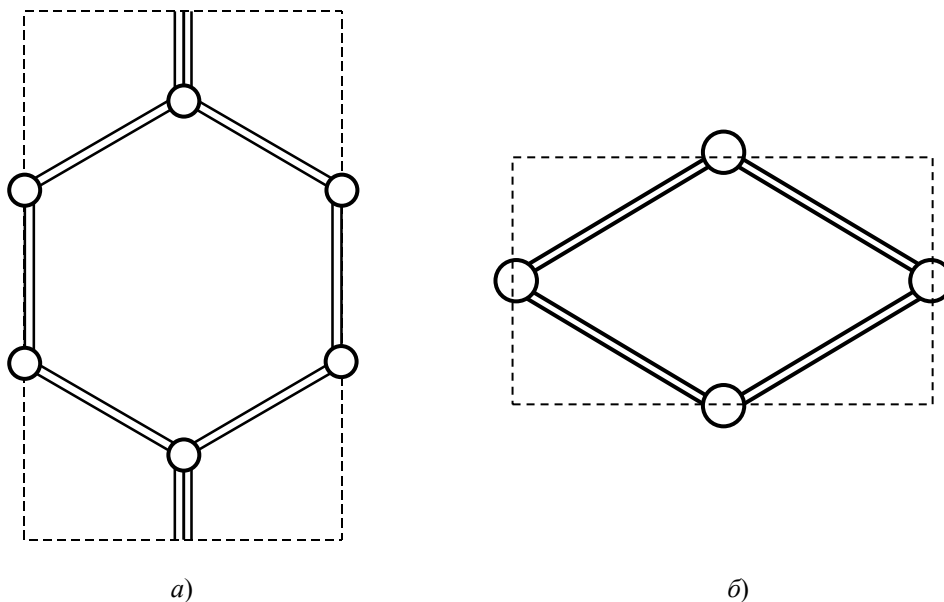


Рисунок 2 – Ячейки с абсолютно жесткими армирующими элементами: а) – сотовая, б) – ромбическая

Из сравнения чисел, приведенных в табл. 2, следует хорошее совпадение расчетных значений  $G_{23}$ ,  $G_{31}$ , определенных по всем обсуждаемым методикам, и их удовлетворительное согласование с экспериментом, причем наиболее близки к эксперименту значения, определенные на базе КЭМ. Из табл. 2 видно: экспериментальные данные получаются меньше расчетных. В [3] авторы объясняют это тем, что в расчетах используется идеально правильная форма соты, а в реальности (в эксперименте) наблюдается наличие начальной погиби ребристых элементов соты. Последнее обстоятельство

сказывается на понижении жесткости реального сотового заполнителя. (В [4] теоретически показано, что после потери устойчивости элементов соты при их сжатии или сдвиге значения модулей упругости  $E_3$ ,  $G_{23}$ ,  $G_{31}$  становятся меньше значений, приведенных в третьем столбце табл. 2. Исследование этих вопросов выходит за рамки настоящей работы.)

Общеизвестен следующий экспериментальный факт [6]: для сотового заполнителя значения модулей упругости  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$  пренебрежимо малы по сравнению с  $E_3$ ,  $G_{23}$ ,  $G_{31}$ . Поэтому в [4] значения  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$  вообще не определены, а в [5] не вычислено значение  $G_{12}$ , что нашло отражение во втором и третьем столбцах табл. 2. Согласно же структурным моделям из [7, 8, 10] (см. четвертый столбец в табл. 2), расчетные значения  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$  имеют тот же порядок, что и  $G_{23}$ ,  $G_{31}$ ; аналогично, значения модулей  $E_1$ ,  $E_2$ , определенных по модели из [5] (см. второй столбец в табл. 2), также имеют порядок  $G_{23}$ ,  $G_{31}$ , что противоречит экспериментальным фактам. Напротив, согласно КЭМ, значения  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$  составляют менее 1 % от значений  $E_3$ ,  $G_{23}$ ,  $G_{31}$  (см. пятый столбец в табл. 2), т. е. пренебрежимо малы по сравнению с последними, что согласуется с известными экспериментальными данными.

У некоторых специалистов в области механики композиционных материалов сложилось мнение [14], что коэффициенты Пуассона армированного материала  $\nu_{ij}$  (см. (2)) теоретически могут принимать значения лишь в интервале  $(-1, 1/2)$ . Согласно же пятому столбцу табл. 2, коэффициенты  $\nu_{21}$ ,  $\nu_{12}$  в случае сотовой ячейки имеют значения, равные примерно единице, т. е.  $\nu_{21} > 1/2$ ,  $\nu_{12} > 1/2$ . Несложными выкладками можно показать, что в случае, когда элементы соты являются абсолютно жесткими и в точках изломов траекторий армирования соединены шарнирно (рис. 2, а), коэффициенты Пуассона  $\nu_{21} = \nu_{12} = 1$ . Более того, можно построить ячейку, например с ромбовидным армированием (рис. 2, б), для которой  $\nu_{21} = \nu_{12} = 3$  и т. д. Следовательно, значения  $\nu_{21}$ ,  $\nu_{12}$ , приведенные в пятом столбце табл. 2, не являются абсурдными, а мнение, что коэффициенты Пуассона не могут превышать значения  $1/2$ , является ошибочным. (Утверждение, что  $\nu < 1/2$ , справедливо, по-видимому, лишь для изотропных материалов.)

Значения  $\nu_{21}$ ,  $\nu_{12}$ , приведенные в других столбцах табл. 2, существенно отличаются от единицы, поэтому можно утверждать, что структурные модели из [5, 7, 8, 10] неверно предсказывают значения коэффициентов Пуассона для сотового заполнителя.

Проведенный сравнительный анализ структурных моделей для ребристо-армированных композитных сред, предложенных (моделей) в [7, 8, 10], показывает, что эти модели требуют дальнейшего усовершенствования, так как плохо согласуются с эталонными расчетами, проведенными на базе КЭМ.

Расчеты, проведенные в рамках КЭМ, показали, что концентрация напряжений в ячейке наблюдается лишь в малой окрестности точек излома траекторий армирования (см. рис. 1), причем эта область имеет диаметр порядка удвоенной толщины армирующего элемента ( $2\delta_1$ ), т. е. пренебрежимо мала по сравнению с размерами ячейки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-90405-Укр\_а).

### Литература

1. Александров, А.Я. Конструкции с заполнителями из пенопластов / А.Я. Александров, М.Я. Бородин, В.В. Павлов. – М.: Машиностроение, 1972. – 212 с.
2. Vaziri, A. Metal sandwich plates with polymer foam-filled cores / A. Vaziri, Z. Xue and J.W. Hutchinson // Journal of Mechanics of Materials and Structures. – 2006. – V. 1, No 1. – P. 97–127.
3. Брюккер, Л.Э. Испытания трехслойных стержней при нормальных и повышенных температурах / Л.Э. Брюккер, А.С. Ракин // Динамика и прочность авиационных конструкций: Межвуз. сб. научн. трудов. – Новосибирск: Изд-во НГУ, НЭТИ, 1978. – Вып. 4. – С. 73–79.
4. Акишев, Н.И. Теоретико-экспериментальный метод определения усредненных упругих и пространственных характеристик сотового заполнителя трехслойных конструкций / Н.И. Акишев, И.И. Закиров, В.Н. Паймушин, М.А. Шишов // Механика композитных материалов. – 2011. – Т. 47, № 4. – С. 543–556.

5. Александров, А.Я. Расчет трехслойных панелей / А.Я. Александров, Л.Э. Брюккер, Л.М. Куршин, А.П. Прусаков. – М.: Оборонгиз, 1960. – 271 с.
6. Noor, A.K. Computational models for sandwich panels and shells / A.K. Noor, W.S. Burton, and Ch.W. Bert // Appl. Mech. Rev. – 1996. – Vol. 49, No 3. – P. 155–199.
7. Немировский, Ю.В. Статический метод определения эффективных термомеханических характеристик сложно армированных пенопластмасс / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Научный вестник НГТУ. – 2009. – № 4 (37). – С. 101–114.
8. Немировский, Ю.В. Кинематический метод определения эффективных термомеханических характеристик сложно армированных пенопластмасс [Текст] / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Конструкции из композиционных материалов. – 2010. – № 4. – С. 36–48.
9. Кристенсен, Р. Введение в механику композитов / Р. Кристенсен. – М.: Мир, 1982. – 334 с.
10. Янковский, А.П. Построение определяющих уравнений термоупругого поведения сложно армированных пенопластмасс / А.П. Янковский // Техническая механика. – 2010. – № 1. – С. 71–82.
11. Олегин, И.П. Определение эффективных характеристик композиционных материалов методом конечно-элементного моделирования / И.П. Олегин, Ю.Б. Нигирич, С.Г. Расторгуев // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тр. XXI Всерос. конф., Кемерово, 30 июня – 2 июля 2009 г. / Под ред. В.М. Фомина. – Новосибирск: «Параллель», 2009. – С. 183–189.
12. Александров, А.В. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы: Учебник для вузов / А.В. Александров, Б.Я. Лашеников, Н.Н. Шапошников. – М.: Стройиздат, 1983. – 488 с.
13. Малмейстер, А.К. Сопротивление полимерных и композитных материалов / А.К. Малмейстер, В.П. Тамуж, Г.А. Тетерс. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.
14. Колпаков, А.Г. Композиционные материалы и элементы конструкций с начальными напряжениями / А.Г. Колпаков. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2007. – 254 с.

### Summary

*It is performed the comparison of the effective elastic constants of the plastic foam medium, reinforced in the form of honeycomb cell, and honeycomb filler of sandwich panels, defined on the basis of different structural models, with the results of the reference calculations on the basis of the finite-element modeling. It is shown unsatisfactory correspondence of these structural models with the results of a numerical experiment.*

Поступила в редакцию 12.10.2012