УДК 539.3

ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ ИЗМЕНЕНИЯ ФОРМЫ ОДНОМЕРНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН, СОЗДАННЫХ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ОБЩЕГО ВИДА

[1]Рагозина В.Е., [1]Иванова Ю.Е., [2]Чигарев А.В., [2]Шукевич Т.В., [2]Ручан М.В.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, Владивосток

УО «Белорусский национальный технический университет, Минск»

Возникновение и движение ударных волн в твердом теле – процесс, нелинейный по своей сути, поэтому его достоверное математическое описание возможно только в рамках нелинейной модели. При этом даже для простейших моделей, таких как нелинейно упругий изотропный материал, необходимо учитывать взаимосвязь объемного и сдвигового деформирования, а также зависимость скоростей ударных волн от строящегося решения и поля предварительных деформаций [1-4]. Перечисленные факторы обуславливают необходимость применения приближенных методов решения, как численных, так и аналитических. Среди аналитических методов назовем такие, как метод лучевых рядов [5, 6], метод сращиваемых асимптотических разложений [7-9]. Применение последнего к одномерным задачам объемного ударного деформирования [7] приводит к эволюционному уравнению квазипростых волн (уравнение Хопфа) в прифронтовой области ударной волны. В данной статье основной интерес сосредоточен на описании закономерностей чисто поперечных волн, поэтому моделью среды выбран нелинейно упругий несжимаемый изотропный материал. Здесь также необходимо отметить, что изучение решений эволюционных уравнений волновых процессов в твердом теле обычно [7, 8] предполагало наиболее простой вид краевых условий: перемещения на границе считались квадратичными функциями времени, а для поперечных волн в решении эволюционного уравнения учитывались только линейные по времени слагаемые. В данной статье предлагается несколько вариантов решения краевых задач ударного деформирования, позволяющих использование эволюционных уравнений при краевых условиях для перемещений в виде общей функции времени.

Поскольку в прифронтовой области ударной волны основные изменения в решении связаны с производной в направлении нормали к волновому фронту, то для неодномерных задач в этой области также следует эволюционное уравнение. Его структура должна учитывать наличие переменной кривизны волнового фронта, также в основном приближении координата эйконала входит в него только как параметр. Дифференциальный оператор, соответствующий рассматриваемым в статье плоским волнам, переходит и в эволюционные уравнения неодномерных процессов. Это определяет возможность дальнейшего обобщения предлагаемых в статье методов на случай многомерного ударного деформирования.

Рассматривается нелинейно упругая несжимаемая изотропная среда, поведение которой в декартовой пространственной системе координат Эйлера $x_i\ (i = 1, 2, 3)$ задается общей системой уравнений

$$v_i = \dot{u}_i + u_{i,j} v_j, \quad 2\alpha_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j}, \quad \sigma_{ij,j} = \rho\left(\dot{v}_i + v_{i,j} v_j\right),$$
$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}}\left(\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}\right), \quad W\left(I_1, I_2\right) = \left(a - \mu\right) I_1 + a I_2 + b I_1^2 - \tag{1}$$
$$-\kappa I_1 I_2 - \theta I_1^3 + c I_1^4 + d I_2^2 + k I_1^2 I_2 + \cdots, \quad I_1 = \alpha_{ii}, \quad I_2 = \alpha_{ij}\alpha_{ji}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t},$$

где u_i и v_i – компоненты векторов перемещений и скорости соответственно, α_{ij} – компоненты тензора деформаций Альманси, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений Эйлера-Коши, $\rho = const$ – плотность среды, W – функция упругого потенциала, p – добавочное гидростатическое давление, $a, \mu, b, \kappa, \theta, c, d, k$ – упругие модули среды, δ_{ij} – символ Кронекера, латинские индексы принимают значения 1, 2, 3. В зависимости W от инвариантов I_1, I_2 учтены знаки инвариантов, поэтому перед некоторыми слагаемыми принят знак минус. Многоточием здесь и далее обозначены невыписанные слагаемые с более высокой малостью.

С момента времени $t=0$ на граничной плоскости $x_1=0$ предварительно недеформированного полупространства $x_1 \geq 0$ производится нагружение, результатом которого будет поле перемещений $u=u_2\left(x_1,t\right), \quad u_1=u_3=0$. Для такого поля из системы (1) получаем уравнения движения

$$\begin{aligned} &\left(1+3\alpha u_{,1}^2\right)u_{,11}+\ldots=\ddot{u}C^{-2}+\ldots, \\ &p_{,1}=2\left(\mu-a\right)u_{,1}u_{,11}+\ldots, \quad C^2=\mu\rho^{-1}, \quad \alpha=\left(a+b+\kappa+d\right)\mu^{-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Перемещения на границе $x_1=0$ считаем известными:

$$u\big|_{x_1=0}=\begin{cases} g\left(t\right), \ t\geq 0, \ g'\left(0\right)>0, \\ 0, \ t\leq 0. \end{cases} \tag{3}$$

Такое условие приводит к возникновению ударной волны с момента $t=0$. Требование $g'\left(0\right)>0$ не является обязательным, однако дальше рассматриваем такие функции $g\left(t\right)$, которые приводят к мгновенному образованию ударной волны. На поверхности ударной волны $\Sigma\left(t\right)$ должны быть выполнены геометрические, кинематические и динамические условия совместности [10-12]. Для поставленной краевой задачи на их основе определяется скорость ударной волны $\Sigma\left(t\right)$:

$$G\left(t\right)=C\sqrt{1+\alpha\left(\gamma^2-3u_{,1}^{+}\gamma+3\left(u_{,1}^{+}\right)^2\right)+\ldots}, \quad \gamma=\left[u_{,1}\right]=u_{,1}^{+}-u_{,1}^{-},$$

где γ – интенсивность сдвиговой волны, G – скорость движения $\Sigma\left(t\right)$ в направлении единичной внешней нормали, индексами «+» и «–» обозначены величины, вычисляемые непосредственно перед и за ударной волной, квадратными скобками обозначен разрыв величины, заключенной в них. Для нашей задачи $u_{,1}^{+}=0$. На поверхности ударной волны должны выполняться следующие краевые условия:

$$u\big|_{\mathrm{X}(t)}=0, \quad \gamma\big|_{\mathrm{X}(t)}=-u_{,1}^{-}\big|_{\mathrm{X}(t)}, \quad \left[\sigma_{11}\right]\big|_{\mathrm{X}(t)}=0, \quad \mathrm{X}\left(t\right)=\int_0^t G\left(\xi\right)d\xi, \tag{4}$$

причем $p=p_0=const$ в недеформированной области.

Отметим, что задачи о переходных волновых процессах, в которых ударная волна образуется впоследствии, а также учет поля предварительных деформаций также могут решаться на основе излагаемых далее методов.

Из системы нелинейных уравнений (2) для определения поля перемещений задачи будем рассматривать только первое уравнение, поскольку второе легко интегрируется при найденных перемещениях. Для решения этого уравнения определим следующие безразмерные переменные:

$$s=\frac{x_1}{CT}, \quad m=\frac{t}{T}, \quad w\left(s,m\right)=\varepsilon^{-1}\frac{u\left(x_1,t\right)}{CT}, \quad \varepsilon \ll 1, \tag{5}$$

для которых T – характерный масштаб времени, за которое возникающие на границе перемещения значительно меньше проходимого волной в линейном приближении расстояния. Это определяет появление малого параметра задачи ε, причем зачастую для него можно принять $\varepsilon=-\left[\dot{u}\left(0,0\right)\right]C^{-1}$. В переменных (5) для перемещений из системы (2) получим уравнение

$$w_{,ss}\left(1+3\alpha\varepsilon^2 w_{,s}^2\right)+\ldots=w_{,mm}, \tag{6}$$

а от условия (3) перейдем к условию

$$w\big|_{s=0}=\begin{cases} f\left(m\right), \quad m\geq 0 \\ 0, \quad m\leq 0. \end{cases} \tag{7}$$

Поскольку уравнение (6) содержит только четные степени малого параметра, искомую функцию $w\left(s,m\right)$ представим асимптотической последовательностью:

$$w(s,m)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k}w_{2k}\left(s,m\right)\approx w_0+\varepsilon^2 w_2+\varepsilon^4 w_4+\ldots$$

Интегрируя уравнение (6), методом последовательных линейных приближений получим

$$\begin{gathered} w\left(s,m\right)=f\left(\xi\right)+\frac{\alpha}{2}\varepsilon^2\left(f'\left(\xi\right)\right)^3 s+\frac{9}{8}\alpha^2\varepsilon^4\left\{\left(f'\left(\xi\right)\right)^4 f''\left(\xi\right)\left(s^2+\xi s-s\right)-\right. \\ \left.-\frac{39}{45}\left(f'\left(\xi\right)\right)^5 s\right\}+\ldots,\quad \xi=m-s. \end{gathered} \tag{8}$$

Отметим, что к решению (8) можно прийти двумя способами. В первом из них «теряется» краевое условие (4) и выполняется только условие (6). Во втором принимаем в расчет все условия и снова получаем ряд (8). В любом случае ударная волна $\Sigma\left(t\right)$ имеет скорость, большую чем C, поэтому в области от $\xi=0$ до ударной волны из (8) получаем $w\left(s,m\right)=0$, а на самой поверхности $\xi=0$ $w\left(s,m\right)$ имеет разрыв (за счет $\left[f'\left(\xi\right)\right]\neq 0$), что недопустимо. Таким образом, одним рядом (8) невозможно выполнить все краевые условия и определить гладкое решение, мы приходим к сингулярной задаче метода малого параметра. Ряд (8) назовем, следуя терминологии метода сращиваемых асимптотических разложений [13], внешним решением. Для выполнения условий на ударной волне надо построить дополнительное решение, называемое внутренним.

Для определения новых переменных внутренней области есть несколько возможностей, связанных с потерей равномерности исходного ряда (8). Здесь рассмотрим неравномерность, возникающую на больших расстояниях. Очевидно, что при $s\sim\varepsilon^{-2}$ ряд (8) становится неравномерным. Для построения внутреннего решения примем новые переменные

$$n=\varepsilon^2 s,\quad p=s-m,\quad w^i=w\left(n,p\right). \tag{9}$$

В переменных (9) от уравнения (6) переходим к уравнению

$$\left(2w_{,pn}+\varepsilon^2 w_{,nn}\right)\left\{1+3\alpha^2\varepsilon^2\left(w_{,p}+\varepsilon^2 w_{,n}\right)^2\right\}+3\alpha w_{,pp}\left(w_{,p}+\varepsilon^2 w_{,n}\right)^3+\ldots=0. \tag{10}$$

На основании вида уравнения (10) в представлении $w\left(n,p\right)$ асимптотической последовательностью также сохраним только четные степени ε. При этом на нулевом шаге метода получим уравнение

$$v_{0,n}+\frac{3\alpha}{2}v_0^2 v_{0,p}=0,\quad v_0=w_{0,p}, \tag{11}$$

которое по своему типу относится к нелинейным волновым уравнениям первого порядка и может быть названо эволюционным, поскольку структура его решения определяет как движение ударной волны, так и ее возникновение в результате «опрокидывания» исходного непрерывного профиля. В [7] показано, что прифронтовая область одномерной продольной ударной волны, движущейся в нелинейно упругом полупространстве, описывается решениями известного уравнения Хопфа. Его отличие от уравнения (11) заключается в зависимости угла наклона характеристик от функции v_0 во второй степени. Это простое математическое обстоятельство отличает процесс сдвигового деформирования и приводит к качественным отличиям его от объемного. Непрерывное решение уравнения (11) вдоль характеристик имеет вид

$$v_0=F\left(p-\beta v_0^2 n\right),\quad \beta=\frac{3\alpha}{2} \tag{12}$$

где F – произвольная функция, определяемая краевыми условиями. В нашей задаче такими краевыми условиями необходимо считать вид поля перемещений и его производных в области, пограничной по отношению ко внутреннему и внешнему решению. Эта область определяется новой переменной $l=\varepsilon^k s,\quad 0<k<2$. В данной области на выбор функции F влияет только выбор $f'\left(\xi\right)$ с учетом $\xi=-p$. Следующая часть статьи посвящена подробному построению решений этой краевой задачи при достаточно общем виде $f\left(\xi\right)$ и $f'\left(\xi\right)$.

Так как полное решение поставленной краевой задачи включает определение поля перемещений (на нулевом шаге – по функции $w_0(n,p)$), необходимо указать способ восстановления перемещений по функции $v_0(n,p)$ при условии произвольности функции $f(\xi)$.

Первая из возможностей – явное выражение функции $v_0(n,p)$ из уравнения (12) с последующим интегрированием по переменной p. Это относится прежде всего к некоторым алгебраическим функциям $f(\xi)$, особенно к тем, которые приводят к квадратным либо биквадратным уравнениям относительно функции $v_0(n,p)$. В качестве одного из примеров рассмотрим краевое условие (3) вида

$$u\big|_{x_1=0}=\frac{4A}{5}t^{5/4},\quad \dot{u}\big|_{x_1=0}=At^{1/4},\quad A>0,$$

или в безразмерных переменных: $w\big|_{s=0}=\frac{4}{5}\varepsilon m^{5/4},\quad \varepsilon=\frac{AT^{1/4}}{C}$.

Эта задача интересна, в частности, как пример ситуации, где нет разрыва в скоростях в момент $t=0$. При этом график $(\dot{u})^2$ имеет вертикальную касательную в нуле, что определяет мгновенное возникновение ударной волны, у которой интенсивность изменяется, начиная от нулевого значения. Приведем схематично основные результаты решения. Для внешней области получим:

$$w(s,m)\approx\frac{4}{5}(m-s)^{5/4}+\ldots$$

Тогда во внутреннем решении достаточно выбрать: $v_0(n,p)=-\left(p+\beta n v_0^2\right)^{1/4}$,

что приводит к представлению

$$\begin{gathered}
v_0(n,p)=-\sqrt{\frac{\beta n}{2}+\sqrt{-p+\frac{\beta^2n^2}{4}}},\\
w_0(n,p)=\frac{4}{5}\left(\sqrt{\frac{\beta n}{2}+\sqrt{-p+\frac{\beta^2n^2}{4}}}\right)^5-\frac{2\beta n}{3}\left(\sqrt{\frac{\beta n}{2}+\sqrt{-p+\frac{\beta^2n^2}{4}}}\right)^3+\varphi(n),
\end{gathered}\tag{13}$$

из которого также следует, что форма начального воздействия в переменных $n,\,p$ терпит серьезные преобразования. Для определения положения волнового фронта необходимо проинтегрировать уравнение

$$\frac{dp_0}{dn}=\frac{\beta}{3}\left(\frac{\beta n}{2}+\sqrt{-p_0+\frac{\beta^2n^2}{4}}\right).$$

Для него в переменных $g=\sqrt{-p_0+\frac{\beta^2n^2}{4}},\ n$ приходим к одному из вариантов уравнения Дарбу. При этом оказывается, что интересующее нас решение (с условием $p_0(0)=0$) совпадает с одним из особых решений. Из него в исходных переменных получаем

$$p_0(n)=\frac{5}{36}\beta^2n^2,\tag{14}$$

то есть в переменных p,n положение ударной волны задается ветвью параболы. Подстановка уравнений (14), (13) в условие

$$w_0(n,p)\big|_{p=p_0(n)}=0$$

приводит к простому результату $\varphi(n)=0$, что и заканчивает решение в нулевом приближении. Кроме приведенного здесь примера, есть еще ряд краевых условий, допускающих явное представление функции v_0 с последующим интегрированием. Преимущество такого подхода состоит в работе с исходными переменными, основной недостаток – ограниченность вида краевых условий, приводящих к удобным в работе функциям $v_0(n,p)$. Рассмотрим далее еще один метод, позволяющий использовать решения эволюционных уравнений для практически произвольных краевых условий.

Обратим внимание на то, что уравнение (12) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial w_0}{\partial p}=F\left(p-\beta n\left(\frac{\partial w_0}{\partial p}\right)^2\right). \tag{15}$$

По типу уравнение (15) можно отнести к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно w_0 с независимой переменной p, а n играет роль параметра. Это уравнение не содержит явно саму искомую функцию $w_0(n,p)$, поэтому для него можно использовать параметрический подход к решению. Для этого представим:

$$p=\varphi(\sigma,n),\quad \frac{\partial w_0}{\partial p}=\psi(\sigma), \tag{16}$$

где σ – параметр, область изменения которого определяется краевой задачей. Вдоль линий $n=const$ в пространстве σ, n из формул (16) следует

$$dw_0=\psi(\sigma)\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}d\sigma, \tag{17}$$

причем $\varphi(\sigma,n)$ и $\psi(\sigma)$ – функции, связанные между собой исходным уравнением (15). В результате интегрирования уравнения (17) получим решение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} w_0(n,p)=w_0(n,p(\sigma,n))=W_0(\sigma,n) \\ p=p(\sigma,n) \end{cases}$$

Для каждой краевой задачи параметр σ может выбираться в зависимости от удобства представления краевых условий. В общем случае наиболее целесообразным будет выбор

$$\begin{gathered} \sigma=\beta n v_0^2-p,\quad v_0=\Phi(\sigma)=-f'(\sigma), \\ p=\varphi(\sigma,n)=\beta n\Phi^2(\sigma)-\sigma,\quad \sigma\ge 0. \end{gathered} \tag{18}$$

Из уравнений (18) и (17) с учетом условия (7) получим

$$\begin{cases} W_0(n,\sigma)=-\dfrac{2\beta n}{3}\left(f'(\sigma)\right)^3+f(\sigma)+\varphi_0(n) \\ p(n,\sigma)=\beta n\left(f'(\sigma)\right)^2-\sigma, \end{cases}$$

где $\varphi_0(n)$ – неизвестная функция, позволяющая выполнить условие на ударной волне $\Sigma(t)$, которое теперь представим так:
$$W_0(n,\sigma)\Big|_{n=n_0(\sigma)}=0,$$

то есть в нулевом приближении положение ударной волны в параметрическом решении задается системой уравнений

$$\begin{cases} p_0=p(\sigma,n_0(\sigma))=\beta n_0(\sigma)\left(f'(\sigma)\right)^2-\sigma \\ n=n_0(\sigma). \end{cases}$$

Функция $n_0(\sigma)$ задает волновой фронт только на рассматриваемом нулевом шаге, далее, как обычно, надо уточнить представление, полагая $n=n_0(\sigma)+\varepsilon^2 n_2(\sigma)+\ldots$ Обычно на ударной волне считали, что $p=p_0(n)$ и вычисляли $p_0'(n)$ с подстановкой в уравнение $\dfrac{dp_0}{dn}=\dfrac{\alpha}{2}v_0^2\left(p_0(n),n\right)$.

Теперь для этой производной можно использовать представление

$$\frac{dp_0}{dn}=\frac{\partial\varphi(n,\sigma(n))}{\partial n}+\frac{\partial\varphi(n,\sigma(n))}{\partial\sigma}\frac{d\sigma(n)}{dn},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}=\beta\left(f'\right)^2,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}=2\beta n f'f''-1,$$

откуда имеем
$$\frac{dn_0}{d\sigma} = -3\frac{f''(\sigma)}{f'(\sigma)}n_0 + \frac{3}{2\beta\left(f'(\sigma)\right)^2}.$$

Интегрирование этого уравнения при условии возникновения ударной волны с момента $t = 0$ приводит к таким результатам:

$$\begin{cases} n_0(\sigma) = \dfrac{3}{2\beta}\dfrac{f(\sigma)}{\left(f'(\sigma)\right)^3} \\ p_0(\sigma) = \dfrac{3}{2}\dfrac{f(\sigma)}{f'(\sigma)} - \sigma. \end{cases}$$

Найденные формулы определяют $\varphi_0(n) = 0$. Решение в такой форме удобно при численных расчетах, также оно легко сопоставляется с внешним рядом (на нулевом шаге это было сделано исходно за счет выбора связи $\Phi(\sigma) = -f'(\sigma)$). Использование этого приема достаточно просто перенести на уточнение внутреннего ряда последующими шагами.

В качестве одного из примеров параметрических решений рассмотрим подробнее задачу, в которой перемещения и скорости граничных точек изменяются по экспоненциальным законам:

$$\dot{u}\big|_{x_1=0} = Ae^{\gamma t}, \quad u\big|_{x_1=0} = -\frac{A}{\gamma}\left(1 - e^{\gamma t}\right), \quad A > 0, \quad \gamma < 0. \tag{19}$$

Решение этой задачи во внутреннем приближении проведем до второго шага включительно. Для условия (19) в безразмерных переменных внешней области:

$$w(s,m)\big|_{s=0} = \frac{1}{B}\left(1 - e^{-Bm}\right), \quad B = -\gamma T = const > 0, \quad \varepsilon = \frac{A}{C}.$$

Решение внешней области очевидно и строится на основе формулы (8). Для внутреннего решения можно выбрать

$$v_0 = w_{0,p} = \psi(\sigma) = -e^{\sigma}, \quad -\infty < \sigma \le 0,$$

где область изменения σ задает затухающую ветвь экспоненты. Тогда

$$\sigma = B\left(p - \beta n e^{2\sigma}\right), \quad p = \varphi(n,\sigma) = \frac{\sigma}{B} + \beta n e^{2\sigma},$$

откуда
$$\begin{cases} W_0(n,\sigma) = -\dfrac{e^{\sigma}}{B} - \dfrac{2\beta n}{3}e^{3\sigma} + \varphi_0(n) \\ p(n,\sigma) = \dfrac{e^{\sigma}}{B} + \beta n e^{2\sigma}. \end{cases}$$

Из уравнения эйконала определяем положение волнового фронта $\Sigma(t)$:

$$\begin{cases} n_0(\sigma) = \dfrac{3}{2\beta B}\left(e^{-3\sigma} - e^{-2\sigma}\right) \\ p_0(\sigma) = \dfrac{\sigma}{B} + \dfrac{3}{2B}\left(e^{-\sigma} - 1\right), \end{cases}$$

которое дает формулу $\varphi_0(n) = B^{-1} = const$.

Приведенный метод легко распространяется на другие краевые условия. В частности, авторами рассматривались краевые условия логарифмического, синусоидального вида, а также полиномиальное представление граничных перемещений.

Подводя итог, можно сделать заключение, что применение метода возмущений с выделением эволюционного уравнения является эффективным способом решения краевых задач ударного деформирования. Параметрическое построение решений эволюционных уравнений позволяет существенно расширить класс изучаемых краевых условий. Приведенный метод может быть перенесен как на одномерные плоские задачи объемного деформирования, так и на краевые задачи с ненулевой кривизной фронта ударной волны. Полученные решения можно использовать как самостоятельный теоретический результат, либо в практических целях, включая их в задачи численных расчетов, в которых необходимо четко выделить поверхность ударной волны. Отметим также вопрос об образовании ударной волны в переходном волновом процессе, не вошедший в круг задач этой статьи. Его решение также может строиться исходя из анализа эволюционного волнового уравнения. Также следует ожидать, что полученные закономерности должны в определенной степени сохраняться и для многомерных задач, либо для случая присутствия нескольких плоских волновых фронтов.

- *Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, гранты 12-01-90004-Бел_а, 11-01-00360-а, 11-01-98514-р_восток_а.*

Резюме

На примере одномерной задачи об ударном деформировании нелинейно упругого несжимаемого полупространства показан метод решения, в котором основные механизмы деформирования в прифронтовой области отражаются эволюционными уравнениями. Для несжимаемой среды эволюционное уравнение принципиально отличается от уравнения Хопфа. Приведен ряд примеров решения этого уравнения для различных краевых условий.

Литература

1. Бленд Д.Р. Нелинейная динамическая теория упругости / Д.Р. Бленд – М.: Мир, 1972. – 183с.
2. Куликовский А.Г. Нелинейные волны в упругих средах / А.Г. Куликовский, Е.И. Свешникова – М.: Московский лицей, 1998. – 412с.
3. Куликовский А.Г. Об ударных волнах, распространяющихся по напряженному состоянию в изотропных нелинейно-упругих средах / А.Г. Куликовский, Е.И. Свешникова // ПММ, 1982. Т. 44. Вып. 3. С. 523-534.
4. Буренин А.А. Ударные волны в изотропном упругом пространстве / А.А. Буренин, А.Д. Чернышов // ПММ. – 1978. – Т. 42. – Вып. 4. – С. 711-717.
5. Rossikhin Y.A. Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities / Y.A. Rossikhin, M.V. Shitikova // Appl. Mech. Rev. – 1995. – V. 48. – № 1. – P. l-39.
6. Бабичева Л.А. Лучевой метод решения динамических задач в упруго-вязко-пластических средах / Л.А. Бабичева, Г.И. Быковцев, Н.Д. Вервейко // ПММ. – 1973. – Т. 37. – № 1. – С. 145-155.
7. Буренин А.А. К решению одномерной задачи нелинейной динамической теории упругости со структурной ударной волной / А.А. Буренин, Ю.А. Россихин // Прикл. механика. – 1990. – Т. 26. – № 1. – С. 103 – 108.
8. Буренин А.А. О прифронтовых асимптотиках в нелинейной динамической теории упругости / А.А. Буренин, В.Е. Рагозина // Проблемы механики сплошных сред и элементов конструкций. Владивосток: «Дальнаука», 1988. – С. 225-240.
9. Иванова Ю.Е. Об ударных осесимметрических движениях несжимаемой упругой среды при ударных воздействиях / Ю.Е. Иванова, В.Е. Рагозина // Прикладная механика и техническая физика. – 2006. – Т. 47. – № 6. – С. 144-151.
10. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1,2. Изд-ие 2-ое испр. и дополн./ Л.И. Седов – М.: Наука, 1973. – Т.1. 536с. Т.2. 584с.
11. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах / Т. Томас – М.: Мир, – 1964. – 308с.
12. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности / Г.И. Быковцев, Д.Д. Ивлев – Владивосток: Дальнаука, 1998. – 528с.
13. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости / М. Ван-Дайк – М.: «Мир», – 1967. – 239с.

Summary

The solution method, in which the basic mechanisms of deformation in the frontal area reflects by the evolution equations, is shown in the one-dimensional problem of shock deformation nonlinear elastic incompressible half space. The evolution equation for incompressible medium is fundamentally different from the Hopf equation. Several examples of solutions of this equation for different boundary conditions are given.

Поступила в редакцию 15.10.2012