

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Круподеров А.В., Щербаков С.С.

УО «Белорусский государственный университет», Минск

Моделирование напряженно-деформированного состояния механических систем в условиях ударного нагружения с целью оценки их прочности и долговечности имеет большое практическое значение для современного машиностроения. Применение аналитических решений для граничных элементов с распределенными по ним усилиями открывает новые возможности для эффективных решений динамических задач в упругой и вязкоупругой постановках.

При решении динамических задач теории упругости методом граничных интегральных уравнений (граничных элементов) удобно пользоваться сверткой двух функций f и g , определенных на интервале $t \in [0, \infty)$, которая при условии ее существования, определяется следующим образом:

$$y(t) = \int_0^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau, \quad (1)$$

В соответствии с [4] дискретном множестве точек может быть использовано следующее приближенное представление свертки:

$$y(n\Delta t) = \sum_{j=0}^n \omega_{n-j}(\Delta t)g(j\Delta t), n = 0, \dots, N, \quad (2)$$

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} f^L\left(\frac{\gamma(z)}{\Delta t}\right) z^{-n-1} dz \approx \frac{r^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} f^L\left(\frac{r e^{i\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t}\right) e^{inl\frac{2\pi}{L}},$$

где r – радиус некоторой окружности, в области аналитичности функции f , а верхний индекс L обозначает преобразование Лапласа [5] от соответствующей функции.

Учитывая, что решения задачи о действии массовых нагрузок $\vec{f}(\vec{x}, t)$, распределенных по некоторому контуру Γ , даются следующими выражениями:

$$u_i(x, t) = \int_{\Gamma} f(\vec{\xi}, t) * U_{ij}^G(\vec{x} - \vec{\xi}, t) ds_{\vec{\xi}}, \quad (3)$$

$$P_i(x, t) = \int_{\Gamma} f(\vec{\xi}, t) * P_{ij}^G(\vec{x} - \vec{\xi}, t) ds_{\vec{\xi}},$$

то в предположении, что нагрузка имеет кусочно-постоянное распределение по времени выражения (3) примут форму:

$$u_i(\vec{x}, n\Delta t) = \int_{\Gamma} f_1(\vec{\xi}, t) * U_{i1}^G(\vec{x} - \vec{\xi}, t) + f_2(\vec{\xi}, t) * U_{i2}^G(\vec{x} - \vec{\xi}, t) ds_{\vec{\xi}} =$$

$$\sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} f_{1j}(t) * U_{i1}^G(\vec{x} - \vec{\xi}, t) + f_{2j}(t) * U_{i2}^G(\vec{x} - \vec{\xi}, t) ds_{\vec{\xi}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^{L-1} \frac{r^{-(n-m)}}{L} \int_{\Gamma_j} \left(f_{1j}^L(m\Delta t) U_{i1}^{GL}\left(\vec{x} - \vec{\xi}, \frac{r e^{i\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t}\right) + f_{2j}^L(m\Delta t) U_{i2}^{GL}\left(\vec{x} - \vec{\xi}, \frac{r e^{i\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t}\right) \right) e^{i(n-m)l\frac{2\pi}{L}} ds_{\vec{\xi}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^{L-1} \frac{r^{-n}}{L} \int_{\Gamma_j} \left(f_{1jm}^L U_{i1}^{GL}\left(\vec{x} - \vec{\xi}, \frac{r e^{i\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t}\right) + f_{2jm}^L U_{i2}^{GL}\left(\vec{x} - \vec{\xi}, \frac{r e^{i\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t}\right) \right) e^{inl\frac{2\pi}{L}} ds_{\vec{\xi}},$$

$$\begin{aligned}
P_i(\bar{x}, n\Delta t) &= \int_{\Gamma} f_1(\bar{\xi}, t) * P_{i1}^G(\bar{x} - \bar{\xi}, t) + f_2(\bar{\xi}, t) * P_{i2}^G(\bar{x} - \bar{\xi}, t) ds_{\bar{\xi}} = \\
&= \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} f_{1j}(t) * P_{i1}^G(\bar{x} - \bar{\xi}, t) + f_{2j}(t) * P_{i2}^G(\bar{x} - \bar{\xi}, t) ds_{\bar{\xi}} = \\
&= \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^{L-1} \frac{r^{-(n-m)}}{L} \int_{\Gamma_j} \left(f_{1j}^L(m\Delta t) P_{i1}^{GL} \left(\bar{x} - \bar{\xi}, \frac{r e^{il\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t} \right) + f_{2j}^L(m\Delta t) P_{i2}^{GL} \left(\bar{x} - \bar{\xi}, \frac{r e^{il\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t} \right) \right) e^{i(n-m)l\frac{2\pi}{L}} ds_{\bar{\xi}} = \\
&= \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{m=0}^{N_t} \sum_{l=0}^{L-1} \frac{r^{-(n-m)}}{L} \int_{\Gamma_j} \left(f_{1jm}^L P_{i1}^{GL} \left(\bar{x} - \bar{\xi}, \frac{r e^{il\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t} \right) + f_{2jm}^L P_{i2}^{GL} \left(\bar{x} - \bar{\xi}, \frac{r e^{il\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t} \right) \right) e^{i(n-m)l\frac{2\pi}{L}} ds_{\bar{\xi}} = \\
&= \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{m=0}^{N_t} \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{k=1}^3 \frac{r^{-(n-m)}}{L} \int_{\Gamma_j} \left(f_{1jm}^L \sigma_{ik1}^{GL} \left(\bar{x} - \bar{\xi}, \frac{r e^{il\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t} \right) n_k + f_{2jm}^L \sigma_{ik2}^{GL} \left(\bar{x} - \bar{\xi}, \frac{r e^{il\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t} \right) \right) e^{i(n-m)l\frac{2\pi}{L}} ds_{\bar{\xi}}, \quad (4)
\end{aligned}$$

где f_{pjm} – p -ая компонента фиктивной нагрузки на элементе j , действующая на интервале времени $(m\Delta t, (m+1)\Delta t)$, u_i, P_i – i -ые компоненты усилий и перемещений, U_{ik}^G, σ_{ijk}^G – соответственно компоненты тензоров напряжений и перемещений Грина [5], которые имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
U_{ik}^{GL}(x_1, x_2, s) &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\delta_{ik}}{c_2^2} K_0\left(\frac{rs}{c_2}\right) + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^j}{c_j} \left(\frac{\delta_{ik}}{s} K_1\left(\frac{rs}{c_j}\right) - \frac{x_k x_i}{c_j r} K_2\left(\frac{rs}{c_j}\right) \right) \right), \\
\sigma_{ijk}^{GL}(x_1, x_2, s) &= \mu \left(\frac{U_{ik}^{GL}(x_1, x_2, s)}{\partial x_j} + \frac{U_{jk}^{GL}(x_1, x_2, s)}{\partial x_i} \right) + \lambda \sum_{i=1}^3 \frac{U_{ik}^{GL}(x_1, x_2, s)}{\partial x_i}, \quad (5) \\
r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.
\end{aligned}$$

Рассматривая задачу для области ограниченной контуром Γ , можем записать систему линейных уравнений гранично-элементной постановки задачи теории упругости относительно неизвестных f_{pjm} следующим образом (в предположении, что нагрузка имеет кусочно-постоянное распределение по элементам, а также кусочно-постоянное распределение по времени):

$$\begin{aligned}
(1 - q_{si}) \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{m=0}^{N_t} \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{k=1}^3 f_{1jm}^L \frac{r^{-(n-m)}}{L} \int_{\Gamma_j} \sigma_{ik1}^{GL} \left(\bar{x}_s - \bar{\xi}, \frac{r e^{il\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t} \right) n_k e^{i(n-m)l\frac{2\pi}{L}} ds_{\bar{\xi}} + \\
+ f_{2jm}^L \frac{r^{-(n-m)}}{L} \int_{\Gamma_j} \sigma_{ik2}^{GL} \left(\bar{x}_s - \bar{\xi}, \frac{r e^{il\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t} \right) n_k e^{i(n-m)l\frac{2\pi}{L}} ds_{\bar{\xi}} + \\
+ q_{si} \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{m=0}^{N_t} \sum_{l=0}^{L-1} f_{1jm}^L \frac{r^{-(n-m)}}{L} \int_{\Gamma_j} U_{i1}^{GL} \left(\bar{x}_s - \bar{\xi}, \frac{r e^{il\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t} \right) e^{inl\frac{2\pi}{L}} ds_{\bar{\xi}} + \\
+ f_{2jm}^L \frac{r^{-(n-m)}}{L} \int_{\Gamma_j} U_{i2}^{GL} \left(\bar{x}_s - \bar{\xi}, \frac{r e^{il\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t} \right) e^{i(n-m)l\frac{2\pi}{L}} ds_{\bar{\xi}} = \quad , \quad (6) \\
= q_{si} u_{is}^B + (1 - q_{si}) T_{is}^B,
\end{aligned}$$

где в качестве x_s взяты центры соответствующих элементов, q_s – принимает значения 0 или 1 в соответствии задано ли граничное условие на s -м элементе в i -м направлении в усилиях или в перемещениях.

Следует отметить, что при составлении системы уравнений используются не сами компоненты тензоров Грина, а их образы по Лапласу. Таким образом, используя принцип соответствия упругой и вязкоупругой задач [6], можно легко осуществить переход от упругой к вязкоупругой постановке задачи.

В качестве тестового примера рассмотрим одномерную задачу о воздействии динамической нагрузки на один из концов стержня, второй конец которого жестко закреплен, а боковые поверхности закреплены по нормали (см. рис. 1).

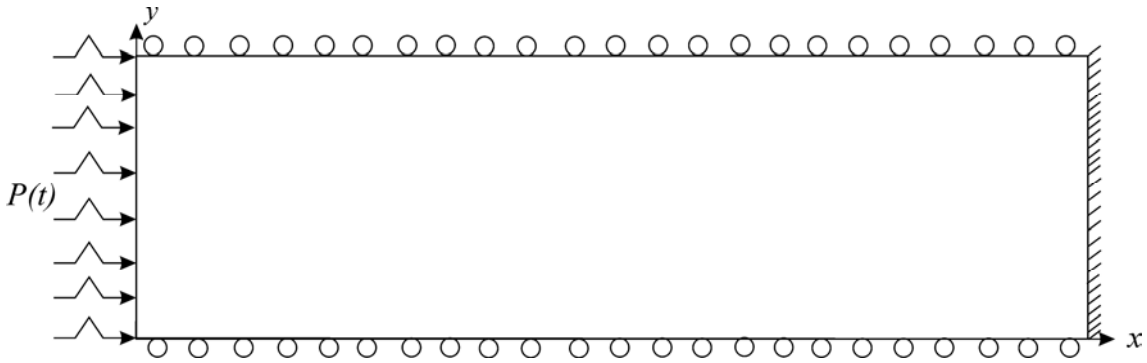


Рисунок 1 – Схема для тестовой задачи

Если поместить начало координат в левый нижний угол стержня, то граничные условия примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} |_{x=0} = P(t), \sigma_{xy} |_{x=0} = 0, u_x |_{x=l} = u_y |_{x=l} = 0, \\ u_y |_{y=0} = u_y |_{y=h} = 0, \sigma_{xy} |_{y=0} = \sigma_{xy} |_{y=h} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где l, h – соответственно длина и высота стержня.

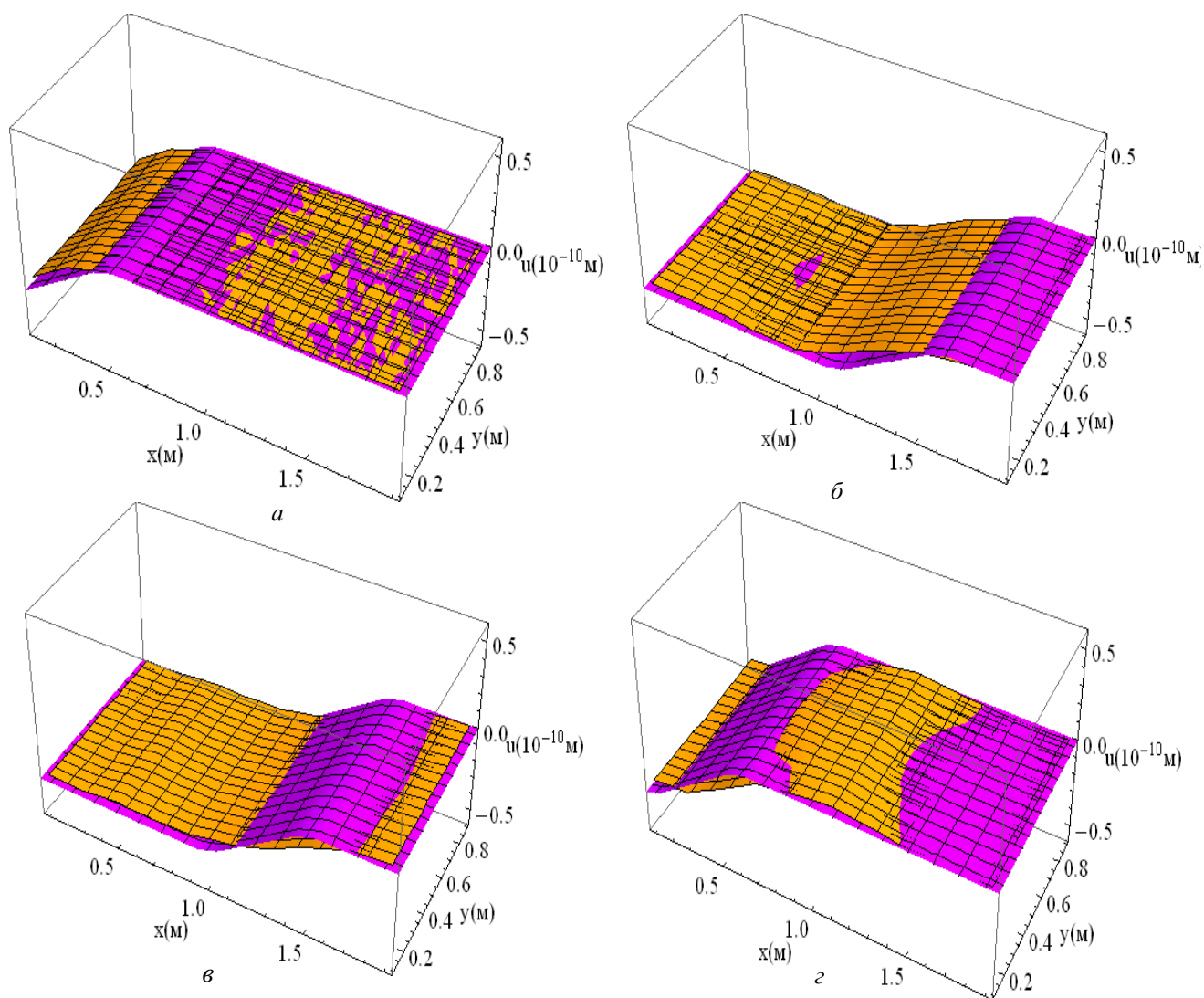
Задача с такими граничными условиями является по сути одномерной, поскольку все компоненты тензора напряжений и вектора деформаций зависят только от одной координаты x и $\sigma_{xy} = u_y = 0$. Для данной задачи существует аналитическое решение [6], имеющее следующий вид:

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= -lu(1 - x/l, tc_1/l), \\ \sigma_{xx} &= \frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\nu}{1 - \nu} \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ u(x) &= \sum_{i=0}^1 N_i(x, \tau) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+i} H(\tau - k_{in}(x)) \int_0^{\tau - k_{in}(x)} P(\tau - t - k_{in}(x)) dt, \\ N_i(x, \tau) &= \left[\frac{\tau - (-1)^i (x - (-1)^{i+1})}{2} \right], \quad k_{in}(x) = 2n + 1 + (-1)^i x. \end{aligned} \quad (8)$$

В качестве нагрузки на стержень возьмем равномерно распределенные единичные усилия, постоянно действующие на отрезке времени $[0, l/4c_1]$.

При расчетах были выбраны следующие физико-механические свойства стержня: модуль Юнга $E = 10^{10}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, плотность $\rho = 2200$ кг/м³.

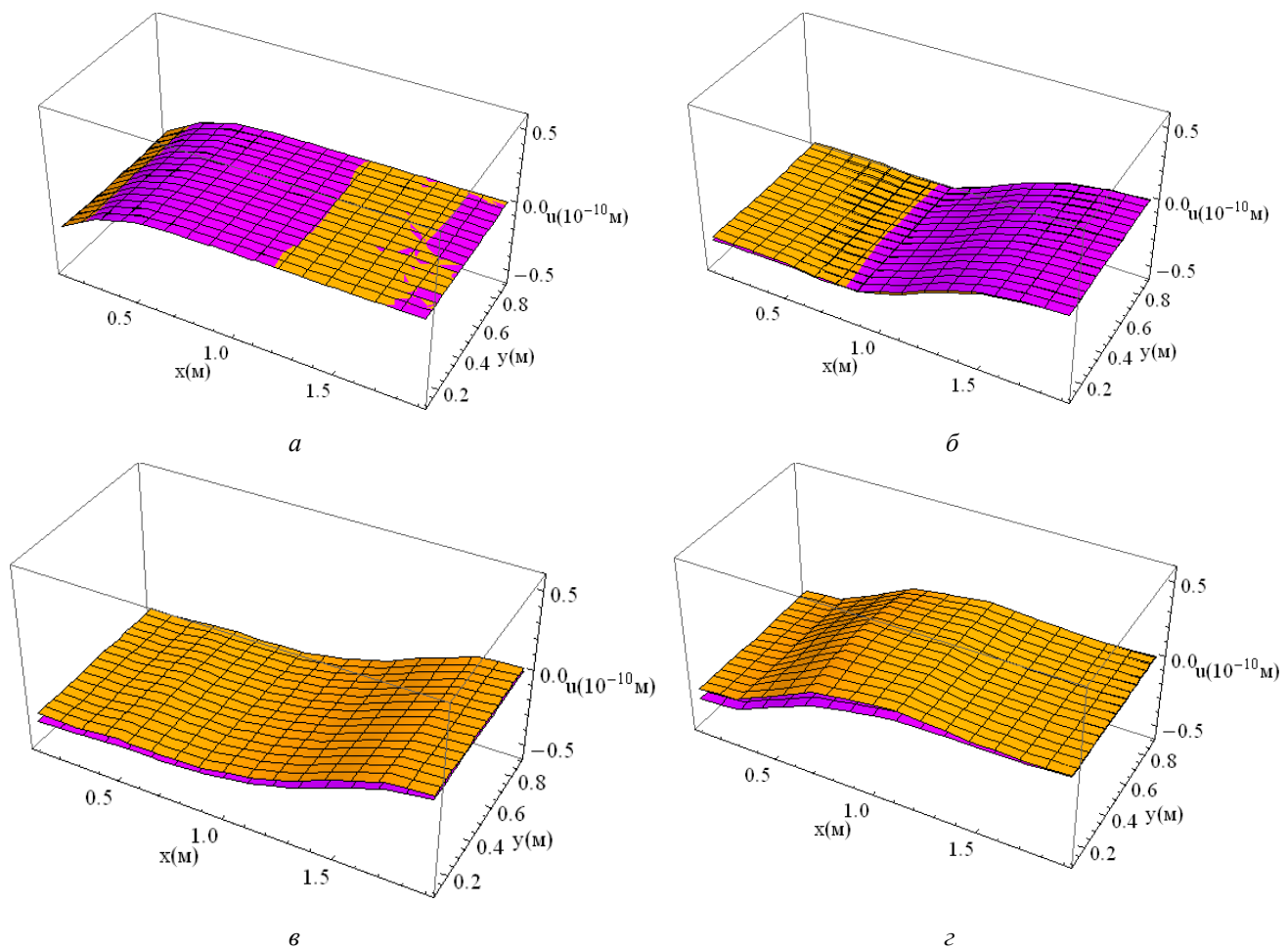
На рис. 2 приведены решения для упругого поведения материала, полученные методом граничных элементов и аналитические. Из сравнения графиков для распространяющихся волн перемещений и видно хорошее соответствие данных решений.



а) $t = 0,3l / c_1$, б) $t = 0,75l / c_1$ до и
 в) $t = 1,5l / c_1$, г) $t = 1,95l / c_1$ после отражения волны
 Рисунок 2 – Графики перемещений в моменты времени

Отметим, что описанный метод использует не сами фундаментальные решения, а их преобразование по Лапласу, что не составляет большой трудности на основании принципа соответствия [6] перейти к решению задач вязкоупругости. Приведем здесь пример решения вышеописанной задачи с учетом вязкости. Для моделирования вязкоупругого поведения будем использовалось ядро релаксации вида $\frac{A'c_1^{-\alpha}}{t^{1-\alpha}}e^{-c_1\beta't}$ для $A' = 300, \beta' = 0.05, \alpha = 0.5$ [5]. На следующих рисунках представлены графики решения с учетом и без ее учета в различные моменты времени.

На рис. 3 приведены решения для чисто упругого поведения материала и с учетом вязкости (на графиках сверху), полученные методом граничных элементов. Анализ данного рисунка показывает характерное уменьшение со временем величины перемещений (амплитуды колебаний) на фронте волны в вязкоупругом случае по сравнению с упругим.



а) $t = 0,3l / c_1$, б) $t = 0,75l / c_1$ до и
 в) $t = 1,5l / c_1$, г) $t = 1,95l / c_1$ после отражения волны
 Рисунок 3 – Графики перемещений в моменты времени

Рассмотрим далее пример решения прикладной задачи об ударе лезвия ножа кормоуборочного комбайна в вязкоупругой постановке (см. рис. 4). Ударная нагрузка q действует на отрезке времени $[0 \dots 0,8l_1 / 3c_1]$, где l_1 – длина режущей кромки.

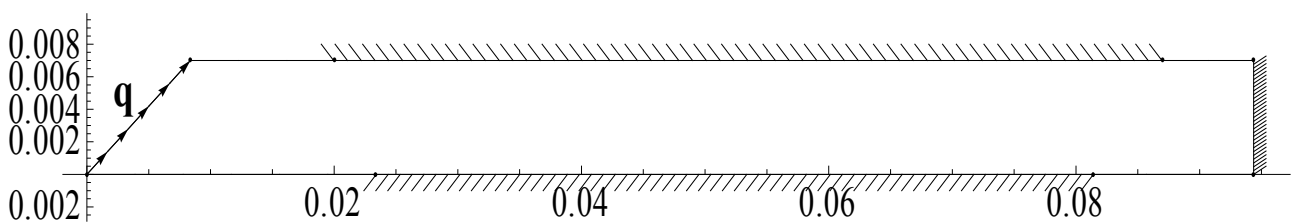


Рисунок 4 – Схема задачи об ударе лезвия ножа

Из рис. 5 и 6 видно, характерное при ударе с изгибом распределение вертикальных и горизонтальных перемещений в ноже в различные моменты времени.

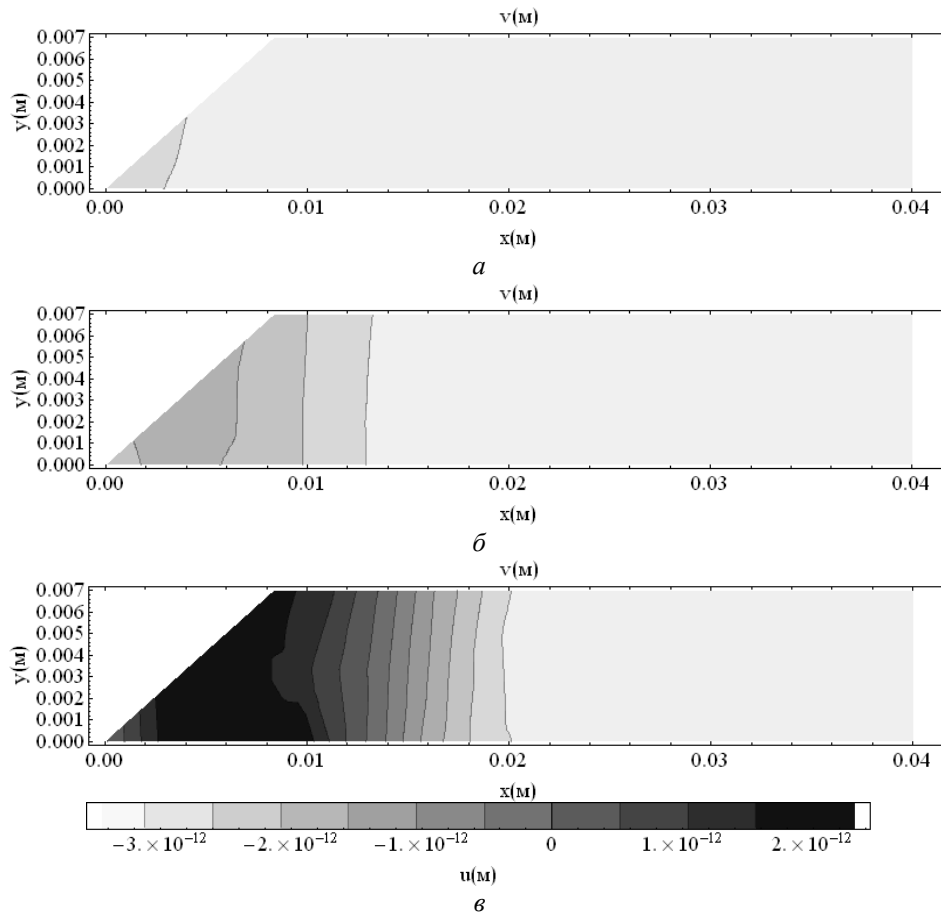


Рисунок 5 – Вертикальные перемещения при а) $t = 0,8l_1 / c_1$, б) $t = 10,4l_1 / c_1$, в) $t = 16l_1 / c_1$

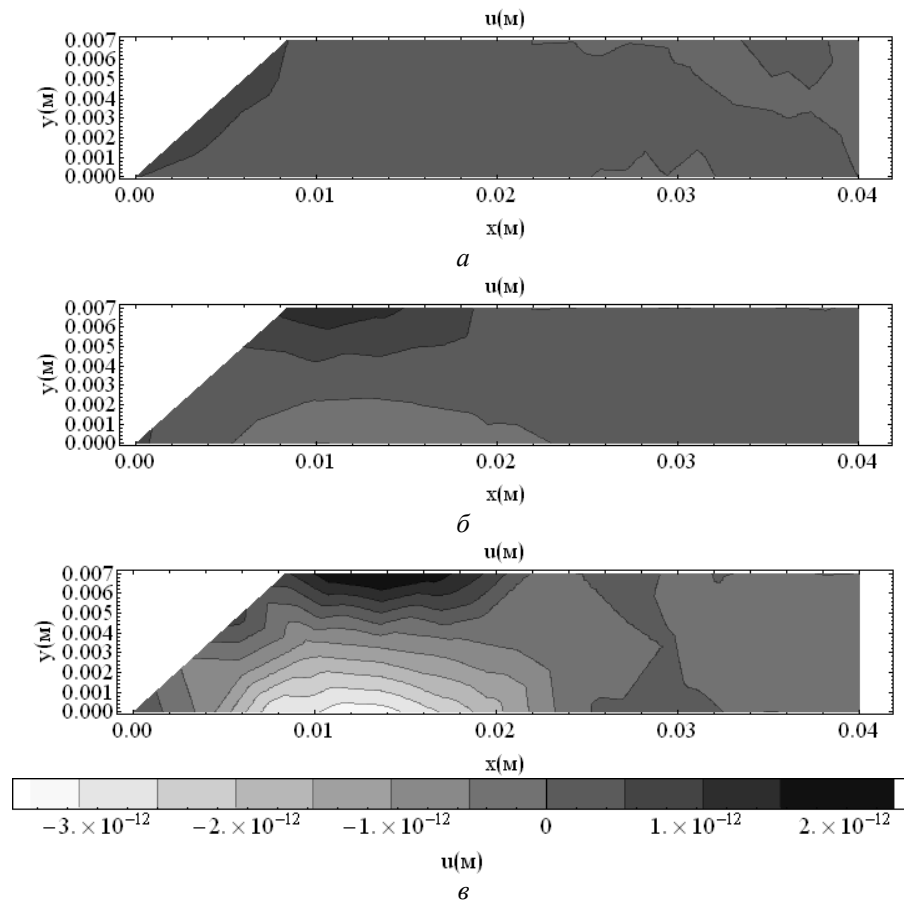


Рисунок 6 – Горизонтальные перемещения при $t = 0,8l_1 / c_1$, б) $t = 10,4l_1 / c_1$, в) $t = 16l_1 / c_1$

Резюме

В статье приводятся решения динамических задач теории упругости методом граничных элементов. Представлены примеры расчетов и их сравнение с аналитическими решениями. Построены решения с учетом вязкоупругого поведения среды. Представлено прикладное решение задачи для удара по лезвию ножа комбайна.

Литература

1. Lubich, C. Convolution quadrature and discretized operational calculus / C.Lubich // Numerische Mathematik. – 52. – 1988. – P.129–145.
2. Lubich, C. Convolution quadrature and discretized operational calculus II / C. Lubich // Numerische Mathematik. – 52. – 1988. – P. 413–425.
3. Schanz, M. H. Antes, Application of operational quadrature thods in time domain boundary element methods / M. Schanz, H. Antes // Meccanica. – 32 (3). – 1997. – P.179–186.
4. Gaul, L. A comparative study of three boundary element approaches to calculate the transient response of viscoelastic solids with unbounded domains / L. Gaul, M.Schanz // Computer methods in Applied Mechanics and Engineering. – V.179. – 1999. – P.111–123.
5. Горшков А. Г. Волны в сплошных средах: Учеб. пособ.: Для вузов./ ., А.Г. Горшков [и др.]. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
6. Мэйз, Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / Дж.Мэйз. – М.: URSS, 2007. – 318 с.

Summary

The paper considers the solutions of dynamic problems of the elasticity theory using boundary element method. Examples of calculations and their comparison with analytic solutions are represented. Solutions for viscoelastic behavior of body are given. Solution of the applied problem for the harvester knife blade under impact loading is given.

Поступила в редакцию 26.10.2012