

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СИСТЕМЫ N ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Щербаков С.С.

УО «Белорусский государственный университет», Минск

**Введение.** Среди современных задач механики деформируемого твердого тела одной из важных является построение механико-математических моделей напряженно-деформированного состояния систем, в которых одновременно реализуется контактное взаимодействие с трением (качения, скольжения) между твердыми деформируемыми телами и неконтактное (объемное) деформирование по крайней мере одного из элементов системы [1-5].

Характерными примерами подобных трибофатических систем являются системы ролик/вал, ролик/кольцо, труба/поток вязкой жидкости. Эти системы представляют собой модели таких практически важных систем как зубчатые зацепления, колесо/рельс, участок магистрального трубопровода и мн. др.

Исследование данных систем в рамках теории упругости имеет ряд особенностей. Поскольку, как правило, реализуется трехмерное контактное взаимодействие, постановка задачи определения объединенного напряженно-деформированного состояния также является трехмерной.

В теории упругости принимается положение о независимости различных приложенных к твердому телу граничных условий. Однако в результате экспериментальных исследований установлено, что при упругом деформировании элементов сложных механических систем наблюдается изменение характеристик трения (момента, силы коэффициента трения) вследствие изгиба одного из контактирующих элементов, что свидетельствует об изменении условий контактного взаимодействия. Таким образом, при механико-математическом моделировании таких систем следует учитывать изменение контактных граничных условий в результате действия неконтактных нагрузок. Особую сложность представляют задачи моделирования взаимодействия во многоэлементных системах.

**Постановка задачи.** Рассмотрим механико-математическую модель взаимодействия системы  $n$  тел с различными механическими свойствами, деформируемых в том числе нелинейно.

Для некоторой конфигурации  $k$ -го тела, заданной его положением в пространстве  $\mathbf{r}^k$  в некоторый момент времени  $t$ , выполняются соотношения, определяющие механическое состояние частицы (элементарного объема) тела: уравнение неразрывности, уравнения движения частиц тела, зависимость между перемещениями и деформациями и закон Гука.

К данным уравнениям добавляются граничные условия первого типа, если на поверхности  $S_u$  упругого тела заданы перемещения  $\bar{u}_i^{k*}(\mathbf{r}^k)$ :

$$u_i^k = \bar{u}_i^{k*}(\mathbf{r}^k, t) \quad (1)$$

и/или второго типа, если на поверхности тела  $S_\sigma$  задано распределение усилий  $\bar{p}_i$

$$\sigma_{ij}^k l_j^k = \bar{p}_i(\mathbf{r}^k, t) \quad (2)$$

где  $l_j^k$  – направляющие косинусы.

Помимо этого могут быть определены начальные условия

$$u_i^k \Big|_{t=0} = u_i^{k0}, \dot{u}_i^k \Big|_{t=0} = \dot{u}_i^{k0}. \quad (3)$$

Взаимодействие  $n$  деформируемых тел можно описать с помощью контактных граничных условий, определяемых следующими соотношениями:

$$\bar{\mathbf{u}}_l \Big|_{S_u^{(lm)}} - \bar{\mathbf{u}}_m \Big|_{S_u^{(lm)}} = \mathbf{D}_{lm}^{(u)}(\mathbf{r}^l, \mathbf{r}^m, t) \Big|_{S_u^{(lm)}}, \quad (4)$$

$$\mathbf{L}_\sigma \left( \bar{\mathbf{u}}_l \Big|_{S_\sigma^{(lm)}} \right) - \mathbf{L}_\sigma \left( \bar{\mathbf{u}}_m \Big|_{S_\sigma^{(lm)}} \right) = \bar{\mathbf{p}}_l \Big|_{S_\sigma^{(lm)}} - \bar{\mathbf{p}}_m \Big|_{S_\sigma^{(lm)}} = \mathbf{D}_{lm}^{(\sigma)}(\mathbf{r}^l, \mathbf{r}^m, t) \Big|_{S_\sigma^{(lm)}}, \quad (5)$$

где  $S^{(lm)}$  – поверхность контакта тел  $l$  и  $m$ ,  $S_\sigma^{(lm)} \subset S^{(lm)}$ ,  $S_u^{(lm)} \subset S^{(lm)}$ ,  $\bar{\mathbf{p}}_k = \{\bar{p}_1^k, \bar{p}_2^k, \bar{p}_3^k\} = \{p_n^k, p_\tau^k\}$  и

$\bar{\mathbf{u}}_k = \{\bar{u}_1^k, \bar{u}_2^k, \bar{u}_3^k\}$  – векторы усилий и перемещений на поверхности  $k$ -го тела,  $p_n^k$  и  $p_\tau^k$  – нормальная

и касательная компоненты вектора усилий,  $\mathbf{d}_{lm}^{(u)} = \{\partial_{lm}^{(n,u)}, \partial_{lm}^{(\tau,u)}\}$ ,  $\mathbf{d}_{lm}^{(\sigma)} = \{\partial_{lm}^{(n,\sigma)}, \partial_{lm}^{(\tau,\sigma)}\}$  – векторы перемещений и усилий на поверхности контакта,  $\bar{\mathbf{L}}_\sigma = \{L_{11}, L_{12}, L_{13}\}$  – вектор, компонентами которого являются интегральные операторы, определяющие поверхностные усилия. Так, в упругой постановке данные операторы имеют следующий вид:

$$L_{ij}(\mathbf{u}) = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{q,q} \delta_{ij}. \quad (6)$$

где  $\delta_{ij}$  – дельта Кронекера,  $\mu$  и  $\lambda$  – постоянные Ламе.

Контактные граничные условия (4), (5) позволяют описать как взаимодействие компонент одного тела с разными механическими свойствами (зонально-однородная среда):

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{lm}^{(u)}(\mathbf{r}^l, \mathbf{r}^m, t) \Big|_{S_u^{(lm)}} &= \bar{\mathbf{u}}_l \Big|_{S_u^{(lm)}} - \bar{\mathbf{u}}_m \Big|_{S_u^{(lm)}} = 0, \\ \mathbf{d}_{lm}^{(\sigma)}(\mathbf{r}^l, \mathbf{r}^m, t) \Big|_{S_\sigma^{(lm)}} &= \bar{\mathbf{p}}_l \Big|_{S_\sigma^{(lm)}} - \bar{\mathbf{p}}_m \Big|_{S_\sigma^{(lm)}} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

так и взаимодействие элементов системы тел. В последнем случае величина касательных поверхностных усилий в соответствии с законом Кулона является ограниченной и граничные условия (4), (5) примут вид

$$\begin{aligned} \delta_{lm}^{(n,\sigma)}(\mathbf{r}^l, \mathbf{r}^m, t) \Big|_{S_u^{(lm)}} &= \bar{p}_n \Big|_{S_\sigma^{(lm)}} - \bar{p}_n^m \Big|_{S_\sigma^{(lm)}} = \bar{p}_n^{lm} - \bar{p}_n^{lm} = 0, \\ \delta_{lm}^{(\tau,\sigma)}(\mathbf{r}^l, \mathbf{r}^m, t) \Big|_{S_u^{(lm)}} &= \bar{p}_\tau \Big|_{S_\sigma^{(lm)}} - \bar{p}_\tau^m \Big|_{S_\sigma^{(lm)}} = \bar{p}_\tau^{lm} - \bar{p}_\tau^{lm} = 0, \quad \bar{p}_\tau^{lm} \leq f \bar{p}_n^{lm}, \\ \delta_{lm}^{(n,u)}(\mathbf{r}^l, \mathbf{r}^m, t) \Big|_{S_u^{(lm)}} &= \bar{u}_n \Big|_{S_u^{(lm)}} - \bar{u}_n^m \Big|_{S_u^{(lm)}} = \bar{u}_n^{lm} - \bar{u}_n^{lm} = 0, \\ \delta_{lm}^{(\tau,u)}(\mathbf{r}^l, \mathbf{r}^m, t) \Big|_{S_u^{(lm)}} &= \bar{u}_\tau \Big|_{S_u^{(lm)}} - \bar{u}_\tau^m \Big|_{S_u^{(lm)}} = \begin{cases} \bar{u}_\tau^{lm} - \bar{u}_\tau^{lm} = 0, \quad \bar{p}_\tau^{lm} < f \bar{p}_n^{lm}, \\ \Delta \bar{u}_\tau^{lm} = var, \quad \bar{p}_\tau^{lm} = f \bar{p}_n^{lm}, \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

где  $f$  – коэффициент трения,  $\Delta \bar{u}_\tau^{lm}$  – переменная величина, подлежащая определению.

Если между телами  $l$  и  $m$  реализуется случай несогласованного контактного взаимодействия, то контактная поверхность  $S^{(lm)}$  является изначально неизвестной. В этом случае размеры и формы областей контакта, а также распределение контактных усилий можно найти, воспользовавшись вариационными методами или итерационным методом обращения матрицы.

С учетом контактного взаимодействия между  $l$ -м и  $m$ -м телами (компонентами зонально-однородного тела), система разрешающих интегральных уравнений для поверхностей двух тел примет вид:

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{p}}_l^{(S)} \\ \bar{\mathbf{u}}_l^{(S)} \\ \mathbf{d}_{lm}^{(\sigma)} \\ \mathbf{d}_{lm}^{(u)} \\ \bar{\mathbf{p}}_m^{(S)} \\ \bar{\mathbf{u}}_m^{(S)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{L}}_\sigma(\mathbf{L}_u^{(S)}) & 0 \\ \bar{\mathbf{L}}_u^{(S)} & 0 \\ \bar{\mathbf{L}}_\sigma(\mathbf{L}_u^{(S)}) & -\bar{\mathbf{L}}_\sigma(\mathbf{L}_u^{(S)}) \\ \bar{\mathbf{L}}_u^{(S)} & -\bar{\mathbf{L}}_u^{(S)} \\ 0 & \bar{\mathbf{L}}_\sigma(\mathbf{L}_u^{(S)}) \\ 0 & \bar{\mathbf{L}}_u^{(S)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_l \\ \bar{\mathbf{p}}_m \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{L}}_\sigma(\mathbf{L}_u^{(V)}) & 0 \\ \bar{\mathbf{L}}_u^{(V)} & 0 \\ \bar{\mathbf{L}}_\sigma(\mathbf{L}_u^{(V)}) & -\bar{\mathbf{L}}_\sigma(\mathbf{L}_u^{(V)}) \\ \bar{\mathbf{L}}_u^{(V)} & -\bar{\mathbf{L}}_u^{(V)} \\ 0 & \bar{\mathbf{L}}_\sigma(\mathbf{L}_u^{(V)}) \\ 0 & \bar{\mathbf{L}}_u^{(V)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_l \\ \mathbf{q}_m \end{Bmatrix} \quad (9)$$

где  $\mathbf{q}$  – вектор объемных сил во внутренней точке тела,  $\mathbf{L}_u^{(S)} = \{L_1^{(S,u)}, L_2^{(S,u)}, L_3^{(S,u)}\}$  и  $\mathbf{L}_u^{(V)} = \{L_1^{(V,u)}, L_2^{(V,u)}, L_3^{(V,u)}\}$  – векторы, компонентами которых являются интегральные операторы для действия поверхностных и объемных сил:

$$L_i^{(S,j)}(p_\varphi) = \int_{S(\mathbf{o})} p_\varphi(\mathbf{o}) G_i^{(\varphi,j)}(\mathbf{x} - \mathbf{o}) dS(\mathbf{o}), \quad L_i^{(V,j)}(q_\varphi) = \int_{V(\mathbf{o})} q_\varphi(\mathbf{o}) G_i^{(\varphi,j)}(\mathbf{x} - \mathbf{o}) dV(\mathbf{o}). \quad (10)$$

где  $j = u, \sigma$ ;  $\varphi = n, \tau$ ,  $G_i^{(n,u)}$ ,  $G_i^{(\tau,u)}$  – функции влияния из фундаментальных решений (например, Кельвина, Буссинеска, Черрути) [6,7].

Решение системы (9) заключается в определении, так называемых, неизвестных «фиктивных» граничных условий в напряжениях  $\bar{\mathbf{p}}_i$  соответствующих совокупности приложенных граничных условий в напряжениях  $\bar{\mathbf{p}}_i^{(S)}$ ,  $\mathbf{d}_{lm}^{(\sigma)}$  и перемещениях  $\bar{\mathbf{u}}_i^{(S)}$ ,  $\mathbf{d}_{lm}^{(u)}$ . Система уравнений для взаимодействия  $n$  строится аналогично системе (9).

После расчета  $\bar{\mathbf{p}}_i$  напряженно-деформированное состояние в точке  $M(x_1, x_2, x_3)$  тела  $l$  может быть определено из следующих соотношений для поверхностных и объемных сил

$$\mathbf{u}_i^l = L_i^{(S,u)}(\bar{\mathbf{p}}_i) + L_i^{(V,u)}(\mathbf{q}_i), \sigma_{ij}^l = L_{ij}(\mathbf{u}_i^l). \quad (11)$$

В модели взаимодействия тел (1)–(11) в отличие от моделей зонально-однородных тел, дополнительно рассматриваются касательные поверхностные усилия  $p_\tau$  для областей проскальзывания и сцепления. Это позволяет учитывать вклад силы трения в формирование механического состояния взаимодействующих тел.

Решение системы (9) проводится в предположении, что взаимодействующие тела могут иметь разные упругие характеристики. Воспользуемся этой особенностью системы (9) для того, чтобы на ее основе провести моделирование нелинейного деформирования твердого тела путем последовательного выделения в нем подобластей с измененными упругими характеристиками при достижении эквивалентными напряжениями предельных значений в этих подобластях.

Пусть зависимость между напряжениями и деформациями представима в кусочно-линейной функции с участками I, II, III, IV, V ..., определяющими различное нелинейное поведение материала. Тогда изменение механических свойств материала при возрастающей нагрузке может происходить при достижении эквивалентными напряжениями (деформациями) предельных  $\sigma_l(\varepsilon)$  в точках  $l = a, b, c, d, \dots$ , разделяющих участки с различным характером деформирования, в соответствии с критерием предельного состояния

$$\varphi(\sigma_{eqv}, \varepsilon_{eqv}, \sigma_l, \varepsilon_l) = 0. \quad (12)$$

Рассмотрим внешнюю нагрузку (заданную усилиями или перемещениями), увеличивающуюся в зависимости от некоторого параметра  $\theta$  (например, времени) до номинального значения  $\bar{\mathbf{p}}^{(S)}$ ,  $\bar{\mathbf{u}}^{(S)}$ :

$$0 \leq \bar{\mathbf{p}}^{(*S)}(\theta) \leq \bar{\mathbf{p}}^{(S)}, 0 \leq \bar{\mathbf{u}}^{(*S)}(\theta) \leq \bar{\mathbf{u}}^{(S)}. \quad (13)$$

В этом случае выделение подобластей с измененными упругими характеристиками начинается в точках тела с максимальными напряжениями, рассчитанными для текущих упругих характеристик при действии  $\bar{\mathbf{p}}^{(*S)}(\theta)$  или  $\bar{\mathbf{u}}^{(*S)}(\theta)$ . Например, если для некоторого  $\theta$  на поверхности (кривой)  $S_a(\theta)$  внутри тела, выполняется условие (12) для точки  $a$  (которая может трактоваться как предел пропорциональности), разделяющей участки I и II зависимости между напряжениями и деформациями, то на этой поверхности задаются контактные граничные условия типа (7)

$$\bar{\mathbf{u}}_I \Big|_{S_a^{(I,II)}(\theta)} - \bar{\mathbf{u}}_{II} \Big|_{S_a^{(I,II)}(\theta)} = 0, \quad (14)$$

$$\mathbf{L}_\sigma \left( \bar{\mathbf{u}}_I \Big|_{S_a^{(I,II)}(\theta)} \right) - \mathbf{L}_\sigma \left( \bar{\mathbf{u}}_{II} \Big|_{S_a^{(I,II)}(\theta)} \right) = \bar{\mathbf{p}}_I \Big|_{S_a^{(I,II)}(\theta)} - \bar{\mathbf{p}}_{II} \Big|_{S_a^{(I,II)}(\theta)} = 0. \quad (15)$$

Тогда система разрешающих уравнений для тела с двумя подобластями, моделирующими нелинейное поведение материала, при отсутствии объемных сил будет иметь вид

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{C}_I(\theta) \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{C}_{II}(\theta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_I & 0 \\ \mathbf{A}_{I,II} & -\mathbf{A}_{I,II} \\ \bar{\mathbf{L}}_u^{(S)} & -\bar{\mathbf{L}}_u^{(S)} \\ 0 & \mathbf{A}_{II} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_I(\theta) \\ \bar{\mathbf{p}}_{II}(\theta) \end{Bmatrix}. \quad (16)$$

где  $\mathbf{A}_{lm}$ ,  $\mathbf{B}_{lm}$  – краткие обозначения операторов  $\bar{\mathbf{L}}_\sigma(\bar{\mathbf{L}}_u^{(S)})$  и  $\bar{\mathbf{L}}_\sigma(\bar{\mathbf{L}}_u^{(V)})$ .

Решение (16) относительно неизвестных  $\bar{\mathbf{p}}_I(\theta)$  и  $\bar{\mathbf{p}}_{II}(\theta)$ , позволяет рассчитать напряженно-деформированное состояние подобластей I и II нелинейно деформируемого тела в соответствии с (11)

Если продолжить итерационный процесс до точки  $d$  диаграммы, в которой нагрузка  $\bar{\mathbf{p}}^{(*S)}(\theta)$  достигает номинального значения  $\bar{\mathbf{p}}^{(S)}$ , то система разрешающих уравнений для данного участка

диаграммы будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} C_I \\ 0 \\ 0 \\ C_{II} \\ \vdots \\ C_{IV} \\ 0 \\ 0 \\ C_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_{I,II} & -A_{II,I} & & 0 & 0 \\ \overline{L}_u^{(S)} & -\overline{L}_u^{(S)} & & 0 & 0 \\ 0 & A_{II} & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & A_{IV} & 0 \\ 0 & 0 & & A_{IV,V} & -A_{V,IV} \\ 0 & 0 & & \overline{L}_u^{(S)} & -\overline{L}_u^{(S)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{p}_I \\ \overline{p}_{II} \\ \vdots \\ \overline{p}_{IV} \\ \overline{p}_V \end{pmatrix} \quad (17)$$

Система (17) является диагональной, поскольку каждая новая подобласть, моделирующая измененное поведение материала, находится внутри подобласти, описывающей поведение на предыдущем участке.

Разгрузка системы на участке V происходит параллельно линейной зависимости, заданной на участке I. Остаточные деформации получаются вычитанием упругих деформаций на участке V из деформаций, рассчитанных в соответствии с (11), (17).

Запишем систему уравнений для взаимодействия  $n$  тел при действии поверхностных усилий с учетом (17), предполагая, что, по крайней мере, один из элементов системы (например, первый) деформируется нелинейно:

$$\begin{pmatrix} C_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ C_{II}^1 \\ \vdots \\ C_{(Q-1)}^1 \\ 0 \\ 0 \\ C_Q^1 \\ \overline{D}_{12}^{(\sigma)} \\ \overline{D}_{12}^{(u)} \\ C_2 \\ \overline{D}_{13}^{(\sigma)} \\ \overline{D}_{13}^{(u)} \\ C_3 \\ \vdots \\ \overline{D}_{2n}^{(\sigma)} \\ \overline{D}_{2n}^{(u)} \\ \overline{D}_{3n}^{(\sigma)} \\ \overline{D}_{3n}^{(u)} \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_I^1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{I,II}^1 & -A_{II,I}^1 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \overline{L}_u^{(S)} & -\overline{L}_u^{(S)} & & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & A_{II}^1 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & A_{(Q-1)}^1 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & A_{Q(Q-1)}^1 & -A_{(Q-1)Q}^1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & \overline{L}_u^{(S)} & -\overline{L}_u^{(S)} & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & A_Q^1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & A_{12} & -A_{21} & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \overline{L}_u^{(S)} & -\overline{L}_u^{(S)} & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & A_2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & A_{13} & 0 & -A_{31} & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \overline{L}_u^{(S)} & 0 & -\overline{L}_u^{(S)} & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 0 & 0 & A_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & A_{2n} & 0 & 0 & & -A_{n2} \\ 0 & 0 & & 0 & \overline{L}_u^{(S)} & 0 & 0 & & -\overline{L}_u^{(S)} \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & A_{3n} & & -A_{n3} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \overline{L}_u^{(S)} & & -\overline{L}_u^{(S)} \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{p}_I \\ \overline{p}_{II} \\ \vdots \\ \overline{p}_{(Q-1)} \\ \overline{p}_Q \\ \overline{p}_2 \\ \overline{p}_3 \\ \vdots \\ \overline{p}_n \end{pmatrix} \quad (18)$$

Разрешающая система (18) описывает взаимодействия, по крайней мере, тел (компонент тела) 1 с 2, 1 с 3, 2 и 3 с  $n$ . При этом, по крайней мере, тело 1 (выделено в (18) прямоугольниками) деформируется нелинейно. Нелинейное деформирование тела 1 моделируется участками упругого нагружения I – Q.

Рассмотрим теперь построение системы разрешающих уравнений с учетом волновых эффектов на основе, например, фундаментальных решений задачи Кельвина в динамической постановке.

В этом случае операторы аналогичные (10) примут вид

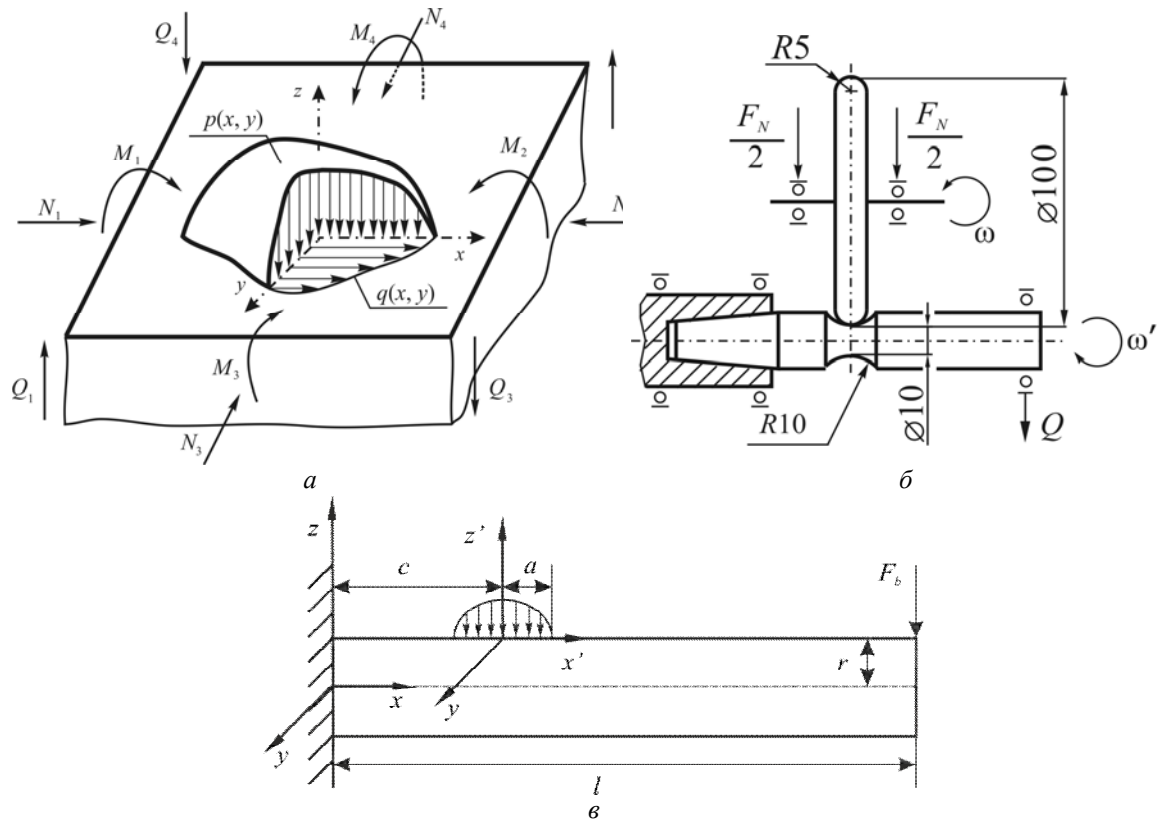
$$L_i^{(S,t,j)}(p_\varphi(t)) = \int_0^t \int_{S(\mathbf{o},\tau)} p_\varphi(\mathbf{o},\tau) G_i^{(\varphi,j)}(\mathbf{x}-\mathbf{o},t,\tau) dS(\mathbf{o},\tau) dt \quad (19)$$

$$L_i^{(V,t,j)}(q_\varphi(t)) = \int_0^t \int_{V(\mathbf{o},\tau)} q_\varphi(\mathbf{o},\tau) G_i^{(\varphi,j)}(\mathbf{x}-\mathbf{o},t,\tau) dV(\mathbf{o},\tau) dt \quad (20)$$

С учетом операторов (19) и (20) система (18) будет следующей

$$\left( \begin{array}{c} C_1^1(t) \\ 0 \\ 0 \\ C_{II}^1(t) \\ \vdots \\ C_{(Q-1)}^1(t) \\ 0 \\ 0 \\ C_Q^1(t) \\ \hline D_{12}^{(\sigma)}(t) \\ D_{12}^{(u)}(t) \\ C_2(t) \\ D_{13}^{(\sigma)}(t) \\ D_{13}^{(u)}(t) \\ C_3(t) \\ \vdots \\ D_{2n}^{(\sigma)}(t) \\ D_{2n}^{(u)}(t) \\ D_{3n}^{(\sigma)}(t) \\ D_{3n}^{(u)}(t) \\ C_n(t) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cccccccc} \mathbf{A}_I^{(1,t)} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{A}_{I,II}^{(1,t)} & -\mathbf{A}_{II,I}^{(1,t)} & & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \bar{\mathbf{L}}_u^{(S,t)} & -\bar{\mathbf{L}}_u^{(S,t)} & & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \mathbf{A}_{II}^{(1,t)} & & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \mathbf{A}_{(Q-1)}^{(1,t)} & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & \mathbf{A}_{Q(Q-1)}^{(1,t)} & -\mathbf{A}_{(Q-1)Q}^{(1,t)} & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & \bar{\mathbf{L}}_u^{(S,t)} & -\bar{\mathbf{L}}_u^{(S,t)} & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \mathbf{A}_Q^{(1,t)} & 0 & 0 & & 0 \\ \hline 0 & 0 & & 0 & \mathbf{A}_{12}^t & -\mathbf{A}_{21}^t & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \bar{\mathbf{L}}_u^{(S,t)} & -\bar{\mathbf{L}}_u^{(S,t)} & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & \mathbf{A}_2^t & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \mathbf{A}_{13}^t & 0 & -\mathbf{A}_{31}^t & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \bar{\mathbf{L}}_u^{(S,t)} & 0 & -\bar{\mathbf{L}}_u^{(S,t)} & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}_3^t & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & \mathbf{A}_{2n}^t & 0 & 0 & & -\mathbf{A}_{n2}^t \\ 0 & 0 & & 0 & \bar{\mathbf{L}}_u^{(S,t)} & 0 & 0 & & -\bar{\mathbf{L}}_u^{(S,t)} \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}_{3n}^t & & -\mathbf{A}_{n3}^t \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \bar{\mathbf{L}}_u^{(S,t)} & & -\bar{\mathbf{L}}_u^{(S,t)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{A}_n^t \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \bar{\mathbf{p}}_I^1(t) \\ \bar{\mathbf{p}}_{II}^1(t) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{p}}_{(Q-1)}^1(t) \\ \bar{\mathbf{p}}_Q^1(t) \\ \hline \bar{\mathbf{p}}_2(t) \\ \bar{\mathbf{p}}_3(t) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{p}}_n(t) \end{array} \right) \quad (21)$$

Рассмотрим пример реализации системы (9) для двух тел применительно к исследованию обратного эффекта в трибофатике (влияние неконтактной нагрузки на изменение контактного давления). В качестве объекта исследования возьмем систему ролик/вал, на которую действуют контактная  $F_N$  и неконтактная  $F_b$  силы (рис. 1б). Данная модель используется, в частности при износоусталостных испытаниях на контактно-механическую усталость.



а) нагружения силовой системы, б) износоусталостных испытаний, в) нагружения вала  
Рисунок 1 – Схемы нагружения

Из рис. 1б видно, что поверхности контактирующих тел ограничены поверхностями второго порядка, поэтому для определения контактного давления можно было бы ограничиться теорией Герца. Однако, поскольку при решении системы (9) возможны случаи контакта тел с поверхностями произвольной формы, предпочтительнее пользоваться при расчете контактного давления более общими методами численного моделирования. В расчете использовался метод обращения матрицы.

Упругие перемещения соответствующих точек двух поверхностей удовлетворяют соотношению

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z1} + [z_1(x, y) - z_2(x, y)] - \delta = \bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z1} + h(x, y) - \delta \begin{cases} = 0, (x, y) \in S, \\ > 0, (x, y) \notin S, \end{cases} \quad (22)$$

где  $\delta$  – сближение контактирующих тел,  $z_1(x, y)$  и  $z_2(x, y)$  – уравнения поверхностей тел,  $S$  – область контакта.

Численное моделирование контактного взаимодействия двух тел проводилось при следующих параметрах:  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ,  $E_1 = E_2 = 2,01 \cdot 10^{11}$  Па,  $R_{11} = 0,005$  м,  $R_{12} = 0,05$  м,  $R_{21} = 0,01$  м,  $R_{22} = -0,01$  м (см. рисунок 1,б).

Контактная нагрузка задавалась сближением  $\delta = 2,723 \cdot 10^{-5}$  м, соответствующим по теории Герца значению  $F_N = 2000$  Н. Соотношение полуосей эллипса контакта  $a/b = 0.89$ . Размеры расчетной области:  $-1,5a \leq x, y \leq 1,5a$ , где  $a = 5,296 \cdot 10^{-4}$  м. Область разбивалась на  $21 \times 21$  квадратных элементов.

Полученное в результате итерационного решения распределение контактного давления сравнивалось с аналитическим решением для распределения эллиптического вида.

В соответствии со следующими формулами

$$\varepsilon_i = \frac{p_i^H - p_i}{p_0^H}, \varepsilon_{\max} = \max_i |\varepsilon_i|, \varepsilon_{\text{avg}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i|, \quad (23)$$

погрешности составили  $\varepsilon_{\max} = 5,9 \cdot 10^{-2}$  и  $\varepsilon_{\text{avg}} = 4 \cdot 10^{-3}$ .

Вертикальные перемещения области контакта при неконтактном растяжении-сжатии или изгибе силой  $F_b$  составляют соответственно

$$\bar{u}_z^{(b1)} = -\frac{\nu_2}{E_2} \sigma_{xx}^{(b1)} R_2, \text{ и } \bar{u}_z^{(b2)} = -\frac{\nu_2}{2E_2} \sigma_{xx}^{(b2)} R_2. \quad (24)$$

Из рис. 2,а следует, что контактная сила  $F_N$ , отнесенная к  $F_N^{(c)} = 2000$  Н, в зависимости от неконтактных напряжений в центре области контакта  $\sigma_a$ , отнесенных к  $\sigma_a^{(\max)} = 6,4 \cdot 10^8$  Па, изменяется примерно от +60% до -50% при растяжении-сжатии и примерно от +27% до -25% при изгибе.

Из рисунка 2,б видно, что при испытаниях на контактно-механическую усталость изменение коэффициента сопротивления качению несколько больше в зоне сжатия, чем в зоне растяжения. Это в качественном отношении соответствует результатам приведенных расчетов (см. рис. 2).

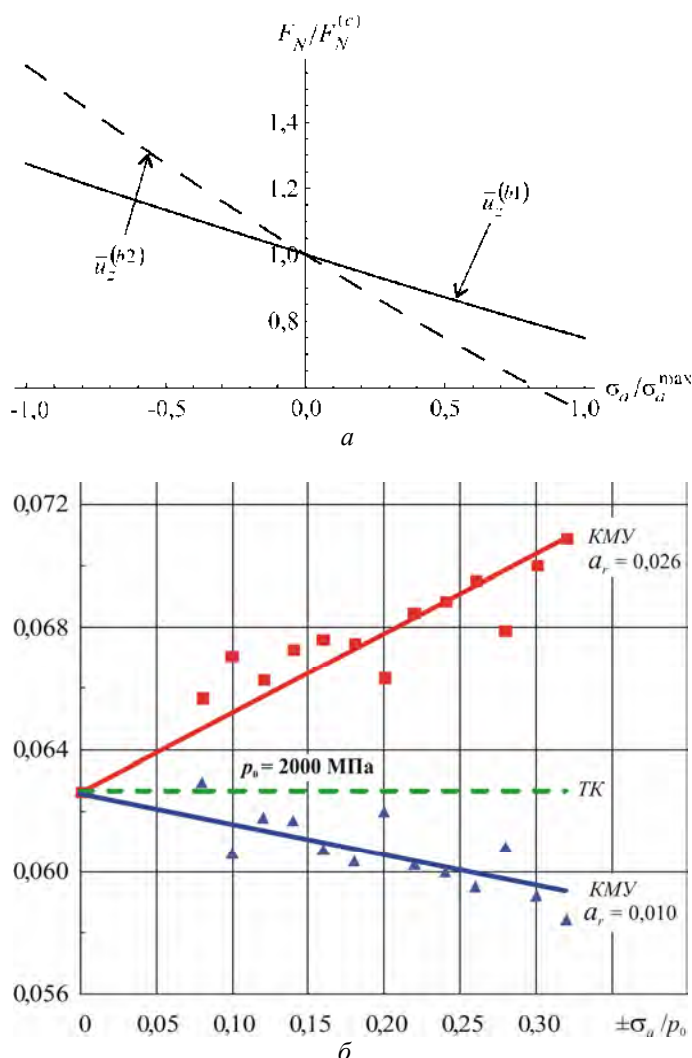


Рисунок 2 – Зависимость контактной нагрузки от уровня неконтактных напряжений (а), экспериментальная зависимость между трением качения в системе ролик/вал и неконтактными напряжениями в области контакта (б)

**Заключение.** Построена система интегральных уравнений (18) для статического взаимодействия системы твердых тел, к которым приложены смешанные граничные условия, и в которой, по крайней мере, один элемент деформируется нелинейно. Решение уравнений (17), (18) для поверхностей, взаимодействующих тел (т.е. определение граничных условий) позволяют применительно к трибофатическим системам [1], моделировать обратный эффект, а решение для внутренней области тела – прямой. Граничные условия в напряжениях задаются как нормальными к поверхности тела, так и касательными усилиями. Обобщение система уравнений (18) на случай динамического нагружения получено в виде системы (21).

Пример численного моделирования в системе ролик/вал контактного давления методом обращения матрицы продемонстрировал значительный вклад неконтактных нагрузок в изменение характеристик контактного взаимодействия. Приведено подтверждение этого эффекта результатами эксперимента.

## Резюме

Рассматривается задача определения механического состояния системы  $n$  взаимодействующих тел с различными механическими свойствами. Набор граничных условий для каждого из тел системы определяется характером их взаимодействия. Для многоэлементной системы твердых тел предложена система разрешающих интегральных уравнений, которые могут быть применены для определения нормальных и касательных усилий на поверхности каждого тела, а также напряженно-деформированного состояния его внутренней области. Такая система может быть также применена для моделирования нелинейного поведения тела путем выделения подобластей тела с разными упругими свойствами. Решение данной системы позволяет исследовать прямой и обратный эффект для трибофатической системы, состоящей из более чем двух элементов. Пример расчета изменения контактного давления под влиянием неконтактной нагрузки в силовой системе ролик / вал.

## Литература

1. Sosnovskiy, L.A. Tribo-Fatigue. Wear-fatigue damage and its prediction (Foundations of engineering mechanics) / L.A. Sosnovskiy– Springer, 2004. – P. 424.
2. Сосновский, Л.А. Механика износоусталостного повреждения / Л.А. Сосновский – Гомель: БелГУТ, 2007. – 434 с.
3. Сосновский, Л.А. Фундаментальные и прикладные задачи трибофатики : курс лекций / Л. А. Сосновский, М. А. Журавков, С. С. Щербаков. – Минск: БГУ, 2011. – 488 с.
4. Журавков, М.А. Исследование сопряженного напряженного состояния в условиях контактного нагружения и объемного деформирования / М. А. Журавков, С.С. Щербаков // Вести НАНБ, сер. физ.-тех. н., – 2008. № 1. – С. 48-57.
5. Щербаков, С.С. Механика трибофатических систем / С.С. Щербаков, Л.А. Сосновский. – Минск: БГУ, 2011. – 407 с.
6. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон– М.: Мир, 1989. – 510 с.
7. Бенерджи, П. Методы граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд – М.: Мир, 1984. – 494 с.

## Summary

*Problem of determining mechanical state of the system of  $n$  interacting solids of various mechanical properties is considered. Set of boundary conditions for each of the solids of the system is defined by character of their interaction. System of the resolving integrated equations is offered for the multielement system of solids which may be applied for determination of normal and tangential tractions on surface of each body and also stress-strain state of its interior. Such system may be also applied for simulation of non-linear behavior of a body by definition of body's subvolumes with different elastic properties. Solution of given system allows to investigate of direct and back effects for tribo-fatigue system consisting of more than two elements. The example of calculation of contact pressure change under the influence of non-contact loading in roller/shaft tribo-fatigue system is given.*

Поступила в редакцию 26.10.2012