

## НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ НАДАВЛИВАНИЯ ВОЛОКОН ДРУГ НА ДРУГА

Дудяк А.И., Хмелев А.А., Сахнович Т.А., Гурковская О.И.

ОУ «Белорусский национальный технический университет», Минск

В данной статье приводится доказательство, что в продольных сечениях бруса при поперечном изгибе, вызванном действием сосредоточенной силы, возникают нормальные напряжения в результате надавливания волокон друг на друга.

Из курсов «Сопротивление материалов» и «Теории упругости» известно, что при таком изгибе в поперечных сечениях бруса возникают только нормальные напряжения в поперечном направлении, а перпендикулярном поперечному направлению они отсутствуют.

Рассмотрим двух опорную балку прямоугольного сечения, нагруженную сосредоточенной силой на середине пролета, рис. 1.

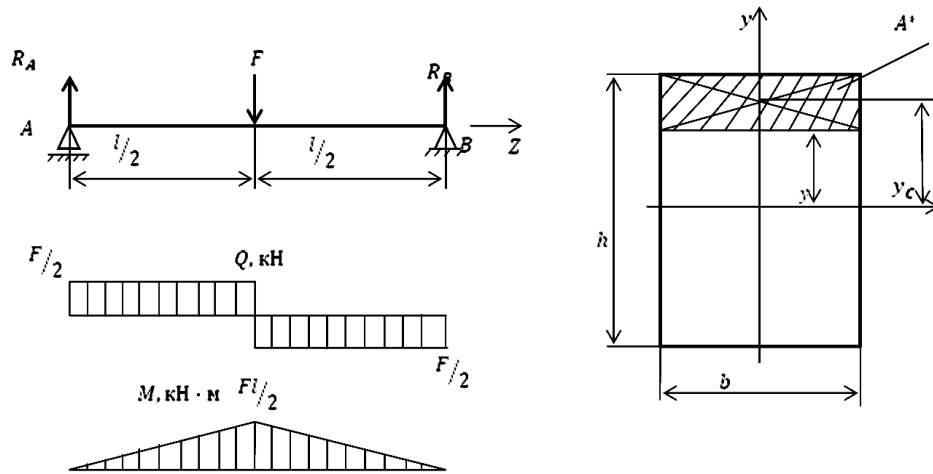


Рисунок 1 – Схема нагружения и форма сечения балки.

Из курса «Сопротивления материалов» расчетные формулы для определения нормальных и касательных напряжений в сечениях балки, без учета гипотезы о надавливании волокон друг на друга, имеют вид (1):

$$\sigma_z = \frac{M_z}{J_x} \cdot y \quad (1)$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_z S_x^{\text{отс}}}{J_x \cdot b} \quad (2)$$

где 
$$S_x^{\text{отс}} = A^* \cdot y_c = b \left( \frac{h}{2} - y \right) \left( \frac{h}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} - y \right) \right) = \frac{bh^2}{8} \left( 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right) = \frac{b}{8} (h^2 - 4y^2)$$

Подставив значение  $S_x^{\text{отс}}$  в (2) получаем:

$$\tau_{zy} = \frac{Q_z \frac{b}{8} (h^2 - 4y^2)}{J_x \cdot b} = \frac{Q_z (h^2 - 4y^2)}{8J_x} \quad (3)$$

Уравнения равновесия для плоской задачи без учёта компонент объёмных сил имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Из первого уравнения системы уравнений (4) следует, что:

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = -\int \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dy + c_1 \quad (5)$$

тогда используя уравнение (1), получаем:

$$\frac{\sigma_z}{\partial z} = \frac{\partial M_z}{\partial z} \cdot \frac{y}{J_x} = \frac{Q_z}{J_x} \cdot y \quad (6)$$

Решая совместно уравнения (5) и (6) получаем:

$$\tau_{zy} = -\int \frac{Q_z}{J_x} y dy + c_1 \quad (7)$$

Постоянную интегрирования определяем из следующих граничных условий при  $y = \pm \frac{h}{2}$ ,  $\tau_{zy} = 0$  тогда:

$$\begin{aligned} -\frac{Q_z}{2J_x} \cdot \frac{h^2}{4} + c_1 \\ c_1 = \frac{Q_z h^2}{8J_x} \end{aligned} \quad (8)$$

Совместное решение (7) и (8) дает:

$$\tau_{zy} = \frac{Q_z}{8J_x} (h^2 - 4y^2)$$

Полученное выражение для  $\tau_{zy}$  полностью совпадает с уравнением (3), полученное решением методами сопротивления материалов.

Из второго уравнения системы уравнений (4) следует, что:

$$\sigma_y = -\int \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dy + c_2 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \frac{Q_z}{\partial z} \cdot \frac{1}{8J_x} (h^2 - 4y^2) = \frac{q_z}{8J_x} (h^2 - 4y^2) \quad (10)$$

где  $q_z$  – интенсивность распределительной нагрузки в рассматриваемом слое изгибаемой балки, значение которой можно рассматривать как величину эквивалентную касательным напряжениям  $\tau_{zy}$  в рассматриваемом слое, рис.2.

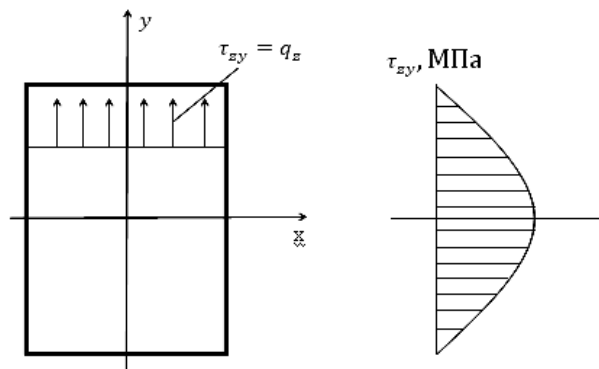


Рисунок 2– Вариант эквивалентности  $\tau_{zy}$  и  $q_z$ .

Решая совместно уравнения (9) и (10) получаем:

$$\sigma_y = -\int \frac{q_z}{8J_x} (h^2 - 4y^2) dy + c_2 \quad (11)$$

$$\sigma_y = -\frac{q_z}{8J_x} \left( h^2 y - \frac{4}{3} y^3 \right) + c_2 \quad (12)$$

С учетом того, что в рассматриваемом слое  $q_z = \tau_{zy}$ , получаем:

$$\sigma_y = -\frac{Q_z}{8J_x}(h^2 - 4y^2) \cdot \frac{1}{8J_x}\left(h^2y - \frac{4}{3}y^3\right) + c_2 \quad (13)$$

После ряда преобразований получаем:

$$\sigma_y = -\frac{Q_z}{64J_x^2}(h^2 - 4y^2) \cdot \left(h^2y - \frac{4}{3}y^3\right) + c_2 \quad (14)$$

Значение постоянной  $c_2$  определяем из граничного условия:

при  $y = \pm \frac{h}{2}$  и  $\sigma_y = 0$ , получаем, что  $c_2 = 0$ .

В итоге получаем окончательное уравнение для определения нормальных напряжений в сечениях балки, вызванных надавливанием горизонтальных слоев балки при плоском поперечном изгибе:

$$\sigma_y = \frac{Q_z}{64J_x^2}(h^2 - 4y^2) \cdot \left(\frac{4}{3}y^3 + h^2y\right) \quad (15)$$

Эпюры распределения нормальных и касательных напряжений по высоте сечения балки, полученные с использованием формул (10) и (15) приведены на рис.3 для положительного значения поперечной силы  $Q$ .

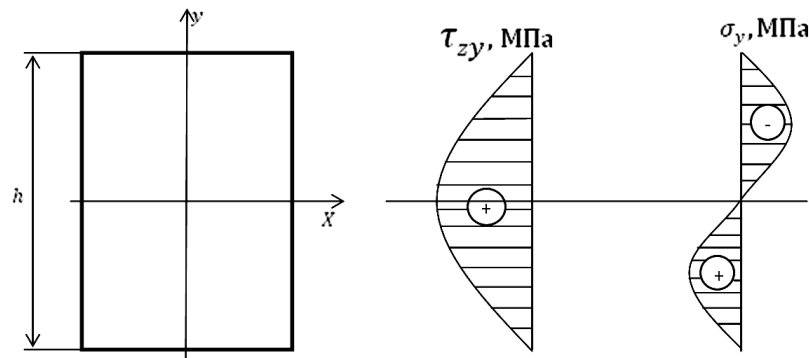


Рисунок 3 – Распределение касательных и нормальных напряжений по высоте сечения балки.

Из приведенных на рис. 3 эпюр следует, что при  $y = 0$  и при  $y = \pm \frac{h}{2}$  нормальные напряжения в продольных волокнах стержня  $\sigma_y$  будут равны нулю и достигают своего максимального значения при  $y = \pm \frac{h}{4}$ . Изменения этих напряжений по высоте бруса описывается кубической параболой в соответствии с формулой (15).

### Резюме

В данной статье представлено доказательство о возникновении нормальных напряжений в продольных сечениях бруса в результате надавливания волокон друг на друга при поперечном изгибе.

Доказательство приводится на примере рассмотрения двухопорной балки прямоугольного сечения, нагруженной сосредоточенной силой в середине пролета.

### Литература

1. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Издательство «Наука», 1972. – 541с.
2. Писаренко Г.С., Агарёв В.А., Квитка А.Л. и др. Сопротивление материалов. – Издательство «Техника», Киев, 1967. – 783с.
3. Тимошенко С.П., Дж. Гудьер. Теория упругости. – М.: Издательство «Наука», 1972 – 559с.

### Summary

*This article provide the evidence of the origin of the normal stresses in the longitudinal sections of a timber by pressing the fibers to each other in transverse bending. The proof is provided as consideration of double-seat rectangular beam loaded with a concentrated force at mid-span.*

Поступила в редакцию 21.08.2012