

**НЕЛИНЕЙНОЕ ВЯЗКОУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПЛАСТИН
ПРИ СТАЦИОНАРНОМ НАГРЕВЕ И ОБЛУЧЕНИИ
ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ ЧАСТИЦАМИ**

Костюк Д.М., Ширвель П.И.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Экспериментальному изучению воздействия высокоэнергетического излучения на металлические, бетонные, полимербетонные, железобетонные конструкции (например, защитные элементы реактора, емкости, резервуары для хранения радиоактивных отходов и т.д.) посвящено определенное количество работ [1-3]. В последнее время появились работы, посвященные математическому моделированию поведения этих конструкций в условиях радиационных сред. Однако работ по моделированию работы пластинчатых конструкций из полимерных материалов при неравномерном нагреве и облучении в условиях ползучести весьма мало, а используемые модели взаимодействия не всегда корректно описывают реальную работу таких элементов конструкций. Поэтому проблема математического моделирования поведения полимерных конструкций с учетом физически нелинейных температурных и радиационных полей является актуальной, так как прогнозирование прочности и долговечности конструкций, длительное время находящихся в радиационной среде, имеет первостепенное значение для нормальной безаварийной эксплуатации ответственных конструктивных элементов.

Рассмотрим задачу определения напряженно-деформированного состояния (НДС) пластин из нелинейного вязкоупругого материала при нестационарном одностороннем нагреве в условиях нейтронного облучения. При силовом действии нагрузки полагаем, что в материале развиваются упругие деформации, описываемые законом Гука в предположении гипотезы об объемном изменении материала Франца Неймана [4] и деформаций ползучести [5].

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \delta_{ij}\varepsilon_{ij}^v + \varepsilon_{ij}^c$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (1)$$

$i, j = 1, 2, 3$.

Таким образом, обобщенный закон Гука с учетом тепловых деформаций и радиационного расширения имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_x^{(z)} = \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{E(T, \Phi)} + \alpha(T, \Phi) \cdot T(x, y, z, t) + \frac{S(T, \Phi)}{3}, \\ \varepsilon_y^{(z)} = \frac{\sigma_y - \nu\sigma_x}{E(T, \Phi)} + \alpha(T, \Phi) \cdot T(x, y, z, t) + \frac{S(T, \Phi)}{3}, \\ \varepsilon_{xy}^{(z)} = \frac{(1 + \nu)\sigma_{xy}}{E(T, \Phi)}. \end{cases} \quad (2)$$

$i, j = x, y$.

Деформации ползучести будем описывать нелинейными уравнениями, обобщенными на случай сложного напряженного состояния.

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \frac{3}{2} \cdot \frac{S_{ij}}{\sigma_u} \left\{ C_0 e^{\eta\sigma_u + P\varepsilon_u} - g_0 e^{\alpha' \sigma_u \varepsilon_u} \right\} \quad (3)$$

где $\sigma_u = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}}$, $\varepsilon_u = \sqrt{\frac{3}{2} \varepsilon_{ij}^c \varepsilon_{ij}^c}$ – интенсивность напряжений и деформаций ползучести соответственно.

$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$ – девиатор напряжений.

$\sigma = \frac{\sigma_{ii}}{3}$ – среднее гидростатическое давление.

Данное выражение позволяет описывать область устойчивой и неустойчивой ползучести вплоть до разрушения, процесс развития деформации при ступенчатом нагружении и процесс упругого последействия.

Параметры $C_0(T)$, $P(T)$, $g_0(T)$, η , α – определяются исходя из исследований ползучести материалов на необлученном материале (как правило при одноосном напряженном состоянии).

Подставляя, получим для полных деформаций:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^{(z)} &= \frac{\sigma_x - \langle \nu \rangle \sigma_y}{E(T)} + \langle \alpha \rangle (T) + \frac{S(T, \Phi)}{3} + \varepsilon_x^{c(z)}, \\ \varepsilon_y^{(z)} &= \frac{\sigma_y - \langle \nu \rangle \sigma_x}{E(T)} + \langle \alpha \rangle (T) + \frac{S(T, \Phi)}{3} + \varepsilon_y^{c(z)}, \\ \varepsilon_{xy}^{(z)} &= \frac{(1 + \langle \nu \rangle) \sigma_{xy}}{E(T)} + \varepsilon_{xy}^{c(z)}.\end{aligned}\quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{1}{T - T_0} \cdot \frac{1}{\Phi_H - \Phi_0} \cdot \int_{\Phi_0}^{\Phi_H} \int_{T_0}^T \nu(\Phi, T) d\Phi dT \\ \alpha &= \frac{1}{T - T_0} \cdot \frac{1}{\Phi_H - \Phi_0} \cdot \int_{\Phi_0}^{\Phi_H} \int_{T_0}^T \alpha(\Phi, T) d\Phi dT\end{aligned}\quad (5)$$

– средние параметры для рассчитываемой области (считаем, что для данной модели облучение мало влияет на изменение теплофизических характеристик, а перепады температуры незначительные).

В силу гипотезы недеформируемых нормалей (Кирхгофа-Лява) получаем:

$$\varepsilon_x^{(z)} = -z \square \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y^{(z)} = -z \square \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \quad \varepsilon_{xy}^{(z)} = -z \square \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}.\quad (6)$$

Из (4) с учетом (6) находим σ_x , σ_y , σ_{xy} :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \left(-\alpha T - \frac{S}{3} - \varepsilon_x^c + \varepsilon_x \right) E + \nu \sigma_y \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y - \nu \left[\left(-\alpha T - \frac{S}{3} - \varepsilon_x^c + \varepsilon_x \right) E + \nu \sigma_y \right]}{E} + \alpha T + \frac{S}{3} + \varepsilon_y^c \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \nu \left(-\alpha T - \frac{S}{3} - \varepsilon_x^c + \varepsilon_x \right) - \frac{\nu^2 \sigma_y}{E} + \alpha T + \frac{S}{3} + \varepsilon_y^c \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y - \nu^2 \sigma_y}{E} + \alpha T + \nu \alpha T + \frac{S}{3} + \nu \frac{S}{3} + \nu \varepsilon_x^c + \varepsilon_y^c - \nu \varepsilon_x \\ \sigma_y &= \frac{\left(\alpha T + \nu \alpha T + \frac{S}{3} + \nu \frac{S}{3} + \nu \varepsilon_x^c + \varepsilon_y^c - \nu \varepsilon_x - \varepsilon_y \right) E}{1 - \nu^2} \\ \sigma_y &= \frac{\alpha T}{1 - \nu} E + \frac{S}{1 - \nu} E + \frac{\nu (\varepsilon_x^c - \varepsilon_x)}{1 - \nu^2} E + \frac{\varepsilon_y^c - \varepsilon_y}{1 - \nu^2} E \\ \sigma_y &= \frac{\alpha T}{1 - \nu} E + \frac{S}{1 - \nu} E + \frac{\nu \left(\varepsilon_x^c + z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)}{1 - \nu^2} E + \frac{\varepsilon_y^c + z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}}{1 - \nu^2} E \\ \sigma_y &= \frac{E}{1 - \nu} \left(\alpha T + \frac{S}{3} \right) + \frac{zE}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) + \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y^c + \nu \varepsilon_x^c)\end{aligned}$$

Аналогично

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu} \left(\alpha T + \frac{S}{3} \right) + \frac{zE}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x^c + \nu \varepsilon_y^c)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{-E(T)}{2(1+\nu)} \left(z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \varepsilon_{xy}^c(z) \right).$$

Выражения для моментов имеют вид:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) - M^{th} - M_x^c - M^s; \\ M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y dz = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) - M^{th} - M_y^c - M^s; \\ M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xy} dz = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} - M_{xy}^c. \\ D &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{z^2 E}{1-\nu^2} dz. \end{aligned} \quad (7)$$

$\nu = \text{const}$ (принимается независимо от $T(x, y, z, t)$ и $\Phi(\varphi, t)$).

Внося выражения M_x, M_y, M_{xy} в уравнение равновесия пластин в моментах, для прогиба получим следующее дифференциальное уравнение в частных производных (уравнение Софи-Жермен):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \\ &= \frac{q}{D} - \frac{1}{D} \left(\frac{\partial^2 M^{th}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_x^c}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^c}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M^{th}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_y^c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M^s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M^s}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Решение выражения (10) ищется для каждого момента времени, для которого известен закон распределения температуры, определяемый либо из решения уравнения теплопроводности, либо измеряемый экспериментально, а также деформации ползучести.

Вычисление деформации ползучести ищется численно. Исходя из уравнения закона ползучести при начальном условии $t = 0$ и $\varepsilon^c = 0$ или конечной величине. Для первого шага по времени Δt деформация ползучести определяется по формуле разложения в ряд Тейлора с удержанием первых трех членов.

$$\varepsilon_1^c = \varepsilon_{t=0}^c + \Delta t \dot{\varepsilon}_{t=0}^c + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\varepsilon}_{t=0}^c \quad (9)$$

Для последующих шагов по времени деформация ползучести определяется по формуле:

$$\varepsilon_{i+1}^c = \varepsilon_{i-1}^c + 2\Delta t \dot{\varepsilon}_i^c \quad (10)$$

Постоянные, входящие в решение (10), определяются из граничных условий.

По предложенной выше схеме, моделирование поведения пластины в условиях радиационного облучения можно проводить при разных программах и схемах нагружения. Здесь приняты следующие обозначения. Схема нагружения определяет закон распределения внешней нагрузки по верхней или нижней поверхности пластины, а также величину нормальных усилий на ее торцевых гранях. Программа нагружения определяет характер (кинетику) изменения нагрузки, действующей на пластину во времени.

Рассмотрим следующий вариант программы работы тонкой пластины:

1. Пластина нагружается распределенной статической нагрузкой по верхней поверхности до определенного уровня. Воздействие внешних усилий на торцевые грани пластины отсутствуют. Влияние радиационного поля отсутствует. В этом случае в пластине устанавливается определенное вполне конкретное (постоянное) НДС.

2. Пластина нагружается распределенной статической нагрузкой по верхней поверхности до определенного уровня. Воздействие внешних усилий на торцевые грани пластины отсутствуют. Влияние радиационного поля отсутствует. В этом случае в пластине устанавливается постоянное во времени НДС. Вдобавок присутствует температурная нагрузка по всей поверхности (неравномерная).

3. По всей поверхности пластины действует радиационное облучение, в результате с течением времени доза облучения в каждой точке пластины изменяется, приводя к появлению наведенной неоднородности механических свойств и радиационному распуханию материала пластины. Под влиянием этих факторов происходит перераспределение напряжений и деформаций по объему пластины.

4. При достижении напряжениями или деформациями опасного уровня (при наступлении предельного состояния какого-либо вида) считается, что пластина выходит из строя.

Предлагаемые схемы расчетов пластины:

1) однонаправленное действие нагрузки и радиационного облучения

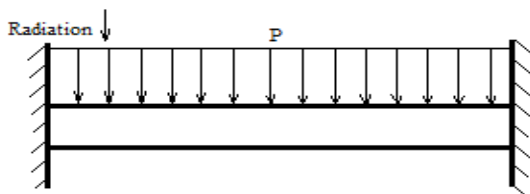


Рисунок 1. – Схема для исследования №1

2) разнонаправленное действие нагрузки и радиационного облучения

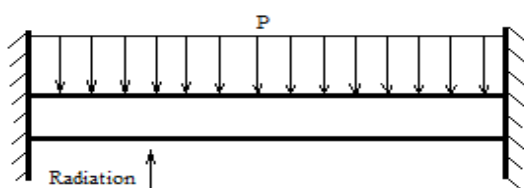


Рисунок 2. – Схема для исследования №2

3) пластина, лежащая на упругом основании под действием нагрузки и радиационного облучения

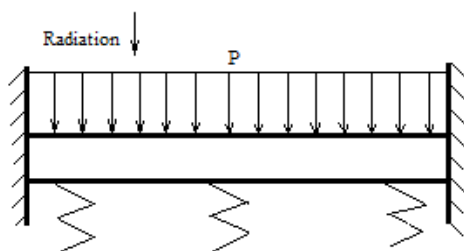


Рисунок 3. – Схема для исследования №3

4) пластина находится под действием неравномерной нагрузки и радиационной среды

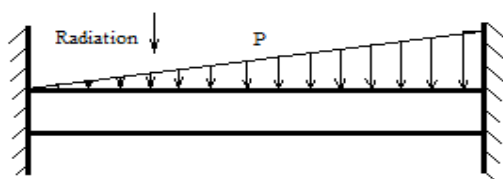


Рисунок 4. – Схема для исследования №4

5) однонаправленное действие нагрузки, радиационного облучения и неравномерный нагрев

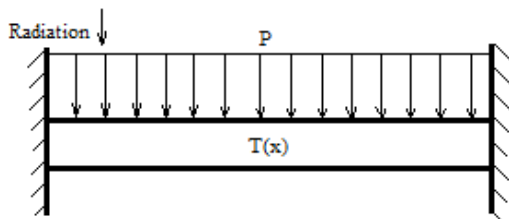


Рисунок 5. – Схема для исследования №5

6) разнонаправленное действие нагрузки и радиационного облучения, а также неравномерный нагрев

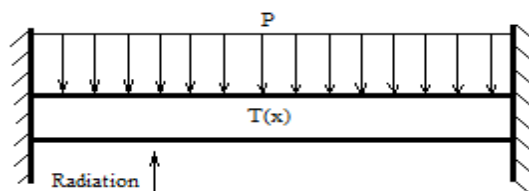


Рисунок 6. – Схема для исследования №6

7) пластина, лежащая на упругом основании под действием нагрузки и радиационного облучения и неравномерного нагрева

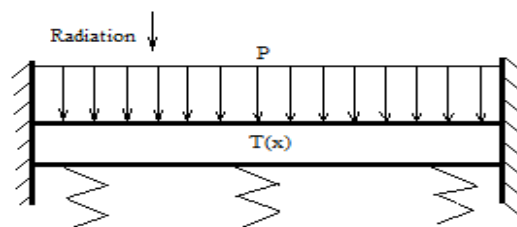


Рисунок 7. – Схема для исследования №7

8) пластина находится под действием неравномерной нагрузки, радиационной среды и неравномерного нагрева

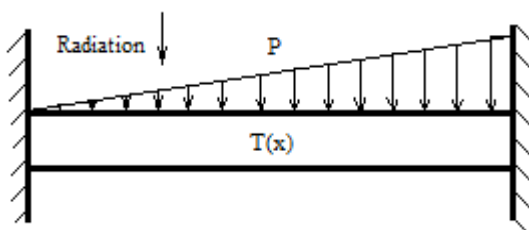


Рисунок 8. – Схема для исследования №8

Схемы воздействия радиационного поля, температурного воздействия и внешней приложенной нагрузки могут быть следующими: радиация и нагрузка действуют совместно на верхнюю сторону пластины; радиация действует на нижнюю сторону пластины, а нагрузка – на верхнюю; пластина лежит на упругом основании и находится под совместным действием нагрузки и радиационного облучения; пластина подвергается воздействию неравномерно распределенной нагрузки и радиационного облучения. Случаи 5, 6, 7, 8 дублируют случаи 1, 2, 3, 4 с добавлением неравномерного нагрева.

Алгоритм расчета пластины будет включать несколько блоков: блок задания исходных данных; блок силового расчета пластины на действие нагрузки без учета радиационного облучения; блок определения НДС и проверки прочности пластины; блок расчета пластины с учетом облучения и температурного воздействия; блок определения НДС при совместном действии нагрузки, температуры и облучения; блок проверки выполнения условий прочности и долговечности.

В предлагаемом алгоритме может быть заложена процедура итерационного уточнения, позволяющая получать достаточно точные результаты при ограниченном числе циклов. При определении закона распределения дозы по толщине (объему) пластины используется зависимость:

$$\Phi(x, y, z) = \Phi_0 \exp\left(-\frac{h-z}{L}\right),$$

которая отнесена к системе координат, связанной со срединной поверхностью пластины. В этой формуле значение дозы Φ_0 в поверхностных слоях пластины определяется в соответствии с зависимостью:

$$\Phi_0 = I_{(t)} \cdot t$$

где $I_{(t)}$ – интенсивность облучения, t – время.

С использованием данного алгоритма планируется разработать программный комплекс, реализованный на базе пакета математических и инженерных задач MatLab и предназначенный для выпол-

нения статических расчетов плоских элементов конструкций (расчетная схема которых сводится к прямоугольной пластине) на действие механических, температурных и радиационных нагрузок.

В качестве примера исследовано поведение тонкой пластины из полимерного материала при длительном действии растягивающей нагрузки в условиях нейтронного облучения потоком быстрых нейтронов ($E > 0,1 \text{ МэВ}$), когда температура стационарна и линейно изменяется по ширине пластины.

Уравнение, описывающее кривые ползучести данной композиции при одноосном растяжении с учетом численных значений параметров, записывается в следующем виде:

$$\frac{d\varepsilon^c}{dt} = 1,25 \cdot 10^{-21} \exp(0,10125T + 0,7\sigma + 16500e^{-0,48T} \varepsilon^c) - 4 \cdot 10^{-8} \exp(0,04T + 0,2\sigma) \varepsilon^c \quad (11)$$

Закон изменения температуры по ширине образца примем:

$$T(\xi) = 350 - 55 \cdot \xi \quad (12)$$

где $\xi = x/b$ – безразмерная величина (координата).

Изменение модуля упругости в связи с облучением незначительно [1], а с ростом температуры задается следующей эмпирической зависимостью:

$$E(T) = E_0 e^{-fT(\xi)} = 48,5 \cdot 10^2 \cdot 9,8 e^{-0,00925T(\xi)} \text{ МПа} \quad (13)$$

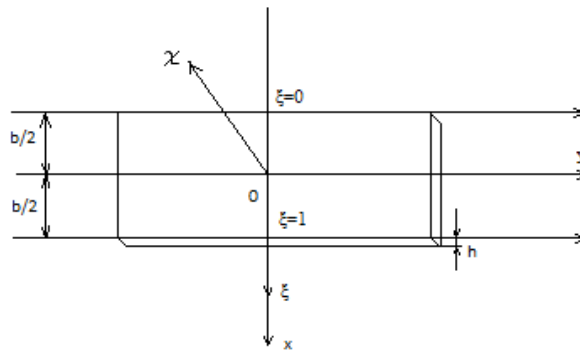


Рисунок 9. – Параметры пластины

Зависимость, описывающая изменение радиационного распухания задается соотношением:

$$S = \begin{cases} 0, & \Phi < \Phi_0 \\ 3\delta \cdot \frac{\varepsilon_{\max} [\exp(\nu(\Phi - \Phi_0)) - 1]}{[\varepsilon_{\max} + \delta \exp(\nu(\Phi - \Phi_0))]}, & \Phi > \Phi_0 \end{cases} \quad (14)$$

где Φ – текущий флюенс нейтронов (доза облучения),

Φ_0 – некоторая пороговая доза облучения,

ε_{\max} – максимальное значение радиационной деформации для материала,

S – радиационное распухание (объемное изменение),

δ, ν – эмпирические коэффициенты, зависящие от энергетического спектра нейтронов.

$\Phi_0 \approx 2 \cdot 10^{26}$ нейтрон/ м^2 ($E > 0,1 \text{ МэВ}$).

Кривые распределения напряжений по ширине пластины во времени представлены на рисунке 10. Кривые 1,2,3 соответствуют распределению напряжений при $t = 0, 15, 30$ ч. соответственно.

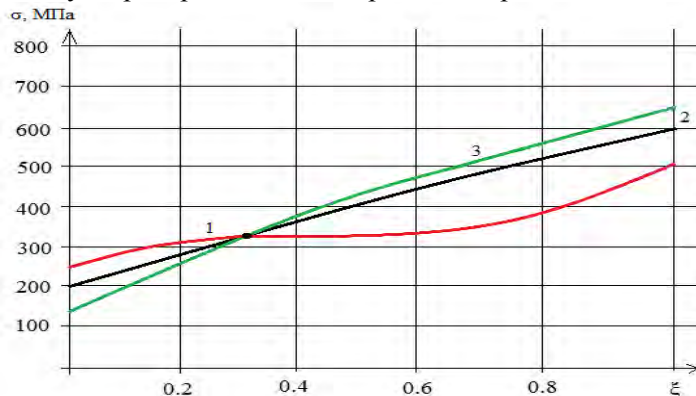


Рисунок 10. – Кривые распределения напряжений по ширине пластины во времени

Анализ кривых распределения напряжений по сечению образца показывает, что со временем происходит их «перетекание» с более нагретой стороны пластины на менее нагретую, а в последующем при возникновении области неустойчивой ползучести, в зоне менее нагретой стороны процесс протекания нагрузки возвращается в зону более нагретой стороны и повторяется несколько раз вплоть до разрушения образца. В ходе численных экспериментов, в целях иллюстрации эффективности метода решения системы нелинейных дифференциальных уравнений, определяющих деформирование модельных тел в зависимости от термомеханических и радиационных воздействий в условиях ползучести, проведена проверка достоверности полученных результатов. Последняя подтверждается на ряду с использованием классических соотношений и методов механики деформируемого твердого тела, вычислительной механики и математики; сравнением полученных численных решений ряда тестовых задач с их аналитическими решениями, частично результатами экспериментов, опубликованными в открытой печати, сопоставлением с решениями, полученными по независимой от предложенной методики других авторов, а также исследованием сходимости конечноразностных аппроксимаций с изменением (уменьшением) шага разбиения.

Резюме

Предложена математическая модель поведения тонких пластин с учетом влияния радиационного облучения на примере деформирования прямоугольной пластины из полимерного материала. В работе на основе нелинейного уравнения, описывающего область устойчивой и не устойчивой ползучести, записано уравнение тонких пластин с учетом вязко-упругих деформаций при нестационарном нагреве. Предложены модели НДС пластины различных схемах воздействия и приложенной нагрузки. Показано, что под влиянием радиационной среды происходит существенное изменение механических характеристик пластины. Определяющее уравнение позволяет описать процесс перераспределения напряжений по сечению материала при любом законе изменения температуры $T(\xi)$, флюенса нейтронов и нагрузки.

Благодарности

- Авторы работы считают приятным долгом выразить благодарность профессорам А.В. Чигареву и И.С. Куликову за плодотворные обсуждения и дискуссии в Белорусском национальном техническом университете на кафедре «Теоретическая механика».
- Работа выполнялась при финансовой поддержке БРФФИ и Минобразования РБ (проект №Т12МВ-038).

Литература

1. Куликов, И.С. Прочность элементов конструкций при облучении / И.С. Куликов, В.Б. Нестеренко, Б.Е. Тверковкин. – Минск: Наука и техника, 1990. – 144с.
2. Куликов, И.С. Прочность тепловыделяющих элементов быстрых газоохлаждаемых реакторов/И.С.Куликов, Б.Е. Тверковкин. – Минск: Наука и техника, 1984. – 104с.
3. Зайцев, В. Н. Напряженно-деформированное состояние железобетонных защитных оболочек АЭС с учетом трещинообразования : Автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. техн. наук : (05.23.11). - Л., 1984. - 20 с.
4. Шевченко, Ю. Н. Физические уравнения термовязкопластичности. - Киев : Наук. думка, 1982. - 238 с.
5. Писаренко, Г. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести : Справ. пособие. - Киев : Наук. думка, 1981. - 493 с.
6. Бойл, Д. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести / Пер. с англ. А. С. Кравчука. - М.: Мир, 1986. - 360 с.

Summary

A mathematical model of the behavior of thin plates with the influence of radiation exposure was propounded on the example of a rectangular polymer plate deformation. Based on a nonlinear equation describing the areas of stable and unstable creep was recorded the equation of thin plates considering the viscoelastic deformation under unsteady heating. The models of stress state of plate under the different impact schemes and the applied load was propounded. It is shown that under the influence of radiation the mechanical properties of the plate is change.

Поступила в редакцию 12.11.2012