УДК 539.3

МЕТОД РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕГО ЭЛЕМЕНТА ЯДЕРНОГО РЕАКТОРА

Куликов И.С., [1]Глембоцкий А.В.

[1]ГНУ «Объединенный институт энергетических и ядерных исследований – Сосны» НАНБ, Минск

Развитие атомной энергетики на нынешнем этапе ее развития предполагает развитие как уже хорошо отработанных технологий действующих реакторов, так и разработку принципиально новых. В данном контексте можно считать достаточно перспективным направлением развития технологию высокотемпературных гелиевых реакторов со сферическими тепловыделяющими элементами (твэлами).

Первыми уровнями концепции глубокоэшелонированной защиты, которая лежит в основе всех современных технологий безопасности АЭС, являются уровни топливного сердечника (керна) и оболочки твэла, которые составляют главную часть тепловыделяющего элемента. Однако, вопросы прочности и надежности сферических тепловыделяющих элементов по сравнению с цилиндрическими элементами исследованы недостаточно. В данной статье предлагается трехмерная математическая модель сферического тепловыделяющего элемента с учетом деформаций термического расширения, радиационного распухания, ползучести, а также , мгновенной пластической деформации.

Для вывода системы уравнений в сферических координатах запишем систему уравнений описывающие напряжено-деформированное состояние тела в декартовой системе(x_1, x_2, x_3) координат. Данная система уравнений включает в себя:

1.уравнение равновесия;

2.соотношения Коши;

3.граничные условия

4.физические уравнения.

Соответственно имеем:

$$\frac{\partial \sigma_{\mathrm{ij}}}{\partial \mathrm{x}_{\mathrm{j}}} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{1}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{2}$$

$$\sigma_{ij} l_j = P_i \tag{3}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ij} - 3\nu\delta_{ij}\sigma\right] + \varepsilon_{ij}^{н} \tag{4}$$

где *i,j=1, 2, 3*, F_i – объемные силы, ρ – плотность материала, в общем случае зависящая от температуры и облучения, P_i – поверхностные силы, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, ε_{ij} – компоненты тензора деформаций, u_i – перемещения, $\varepsilon_{ij}^{(н)} = \delta_{ij}\left(\varepsilon_{ij}^{(T)} + \varepsilon_{ij}^{(s)}\right) + \varepsilon_{ij}^{(p)} + \varepsilon_{ij}^{(c)}$, $\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$, l_j – направляющие косинусы внешней нормали, δ_{ij} – символ Кронекера, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ – деформация термического расширения, $\varepsilon_{ij}^{(c)}$ – деформация ползучести, $\varepsilon_{ij}^{(s)}$ – деформация радиационного распухания, $\varepsilon_{ij}^{(p)}$ – мгновенная пластическая деформация, t – время[1].

Выразив из физических уравнений (4) напряжения через деформации и использовав связь перемещений и деформаций (2), а затем подставив полученные выражения в уравнения равновесия (1), получим систему уравнений равновесия в перемещениях, аналогичных уравнениям Ламе в теории упругости:

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\Theta}{\partial x_1}+\mu\nabla^2 u_1-\lambda\dfrac{\partial\Theta^{(н)}}{\partial x_1}-2\mu\left(\dfrac{\partial\varepsilon_{11}^{(н)}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\varepsilon_{12}^{(н)}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\varepsilon_{13}^{(н)}}{\partial x_3}\right)+F_1=\rho\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\Theta}{\partial x_2}+\mu\nabla^2 u_2-\lambda\dfrac{\partial\Theta^{(н)}}{\partial x_2}-2\mu\left(\dfrac{\partial\varepsilon_{12}^{(н)}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\varepsilon_{22}^{(н)}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\varepsilon_{23}^{(н)}}{\partial x_3}\right)+F_2=\rho\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\Theta}{\partial x_3}+\mu\nabla^2 u_3-\lambda\dfrac{\partial\Theta^{(н)}}{\partial x_3}-2\mu\left(\dfrac{\partial\varepsilon_{13}^{(н)}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\varepsilon_{23}^{(н)}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\varepsilon_{33}^{(н)}}{\partial x_3}\right)+F_3=\rho\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \end{cases} \tag{5}$$

где $\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial^2 x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial^2 x_2^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial^2 x_3^2}$, $\lambda=\dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$, $\Theta=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}$, $\Theta^{(н)}=\varepsilon_{11}^{(н)}+\varepsilon_{22}^{(н)}+\varepsilon_{33}^{(н)}$.

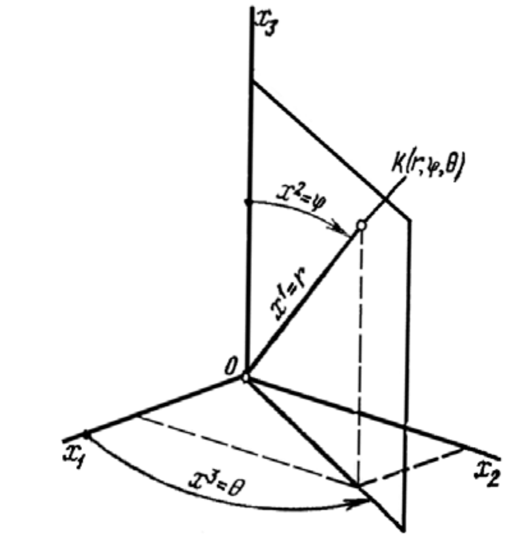


Рисунок 1.–- Сферическая система координат

Общий вид уравнений схож с хорошо известными уравнениями Ламе, однако главное отличительной особенностью полученных уравнений является учет дополнительных обратимых и необратимых деформация, которые возникают в результате воздействия температуры и нейтронного облучения.

Для перехода от декартовой системы координат к сферической, используем тензорное преобразования, где соотношение между двумя базисами декартовой системы координат (x_1,x_2,x_3) и сферической (x^1,x^2,x^3) представлено на рисунке 1. Запишем дифференциальные операторы в криволинейных координатах.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}=\frac{1}{H_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x^i} \tag{6}$$

где H_i– коэффициенты Ламе, которые для сферической системы координат имеют вид $(H_1=1, H_2=r, H_3=r\sin(\varphi))$, Φ – скалярная функция.

Оператор Лапласа, как известно, в сферической системе координат можно записать

$$\Delta=\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin(\varphi)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{1}{r^2\sin^2(\varphi)}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}. \tag{7}$$

Однако для определения проекции вектора $\Delta\vec{A}$ на оси криволинейной системы координат необходимо использовать выражение, которое является инвариантом [2]:

$$\Delta\vec{A}=grad\cdot div\vec{A}-rot\cdot rot\vec{A} \tag{8}$$

Указанные в выражении (8) операторыв сферической системе координат имеют вид

$$div\vec{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right)+\frac{1}{r\sin(\varphi)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(A_\varphi\sin(\varphi)\right)+\frac{1}{r\sin(\varphi)}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} \tag{9}$$

$$rot_r\vec{A}=\frac{1}{r\sin(\varphi)}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(A_\theta\sin(\varphi)\right)-\frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta}\right) \tag{10}$$

$$rot_\varphi\vec{A}=\frac{1}{r\sin(\varphi)}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(A_\theta r\right) \tag{11}$$

$$rot_\theta\vec{A}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(A_\varphi r\right)-\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right) \tag{12}$$

Соответственно получаем выражения для проекции на оси координат:

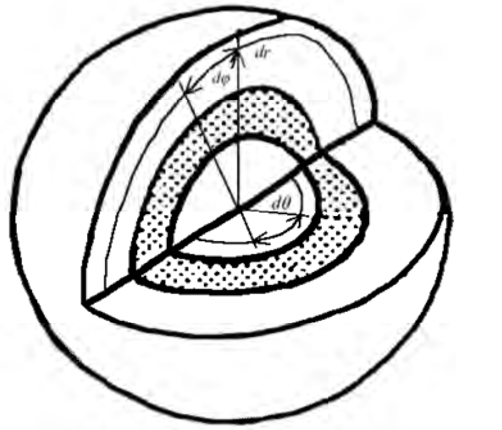
$$\left(\Delta\vec{A}\right)_r = \Delta A_r - \frac{2}{r^2}A_r - \frac{2}{r^2}\left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + A_\varphi ctg(\varphi)\right) - \frac{2}{r^2\sin(\varphi)}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} \tag{13}$$

$$\left(\Delta\vec{A}\right)_\varphi = \Delta A_\varphi + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{A_\varphi}{r^2\sin^2(\varphi)} - \frac{2\cos(\varphi)}{r^2\sin(\varphi)}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} \tag{14}$$

$$\left(\Delta\vec{A}\right)_\theta = \Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2\sin^2(\varphi)} + \frac{2}{r^2\sin(\varphi)}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} + \frac{2\cos(\varphi)}{r^2\sin^2(\varphi)}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta} \tag{15}$$

Используя записанные соотношения,получаем систему уравнений равновесия в перемещениях с учетом неупругих деформаций (термического расширения, радиационного распухания, пластичности и ползучести) в сферической системе координат.

$$\begin{cases}
(\lambda+\mu)\dfrac{\partial\Theta}{\partial r} + \mu\left(\nabla^2 u_r + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial r} + \dfrac{2u_r}{r^2} - \dfrac{2}{r}\Theta\right) - \lambda\dfrac{\partial\Theta^{(н)}}{\partial r} - 2\mu\left(\dfrac{\partial\varepsilon_{rr}^{(н)}}{\partial r} + \dfrac{\partial\varepsilon_{r\varphi}^{(н)}}{\partial\varphi} + \dfrac{\partial\varepsilon_{r\theta}^{(н)}}{\partial\theta}\right) + F_r = \rho\dfrac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\
(\lambda+\mu)\dfrac{\partial\Theta}{\partial\varphi} + \mu\left(\nabla^2 u_\varphi - \dfrac{u_\varphi}{r^2\sin^2(\varphi)} + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial u_r}{\partial\varphi} - \dfrac{2\cos(\varphi)}{r^2\sin^2(\varphi)}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right) - \lambda\dfrac{\partial\Theta^{(н)}}{\partial\varphi} \\
-2\mu\left(\dfrac{\partial\varepsilon_{r\varphi}^{(н)}}{\partial r} + \dfrac{\partial\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(н)}}{\partial\varphi} + \dfrac{\partial\varepsilon_{\varphi\theta}^{(н)}}{\partial\theta}\right) + F_\varphi = \rho\dfrac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} \\
(\lambda+\mu)\dfrac{\partial\Theta}{\partial\theta} + \mu\left(\nabla^2 u_\theta - \dfrac{u_\theta}{r^2\sin^2(\varphi)} + \dfrac{2}{r^2\sin(\varphi)}\dfrac{\partial u_r}{\partial\varphi} + \dfrac{2\cos(\varphi)}{r^2\sin^2(\varphi)}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}\right) - \lambda\dfrac{\partial\Theta^{(н)}}{\partial\theta} \\
-2\mu\left(\dfrac{\partial\varepsilon_{r\theta}^{(н)}}{\partial r} + \dfrac{\partial\varepsilon_{\varphi\theta}^{(н)}}{\partial\varphi} + \dfrac{\partial\varepsilon_{\theta\theta}^{(н)}}{\partial\theta}\right) + F_\theta = \rho\dfrac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}
\end{cases} \tag{16}$$



1 – внешняя оболочка; 2 – пироуглеродный слой;
3 – топливный керн,
Рисунок 2. –Расчетная схема сферическоготвэла:

где $\Theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{\partial u_r}{\partial r} + 2\dfrac{u_r}{r} +$,

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{u_\varphi}{r}ctg(\varphi) + \frac{1}{r\sin(\varphi)}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta},$$

$$\Theta^{(н)} = \varepsilon_{rr}^{(н)} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(н)} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(н)}.$$

Используя полученные выражения, составимтрехмерную математическую модель для расчета трехслойного сферического твэла. При построении модели сделаем следующие предположения: топливный керн имеет форму шара и окружен сферически-симметричными покрытиями; материал топлива и оболочек, жестко контактирующих друг с другом (рис. 2).

Для построения расчетной математической модели необходимо записать систему уравнений (16) для трех слоев, обозначенных на рис. 2: внешней оболочки, пироуглеродного слоя и топливного керна. Соответственно получим:

$$
\begin{cases}
(\lambda^{(\kappa)}+\mu^{(\kappa)})\dfrac{\partial\Theta^{(\kappa)}}{\partial r}+\mu^{(\kappa)}\left(\nabla^2 u_r^{(\kappa)}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u_r^{(\kappa)}}{\partial r}+\dfrac{2u_r^{(\kappa)}}{r^2}-\dfrac{2}{r}\Theta^{(\kappa)}\right)-\lambda^{(\kappa)}\dfrac{\partial\Theta^{(\kappa н)}}{\partial r}-2\mu^{(\kappa)}\left(\dfrac{\partial\varepsilon_{rr}^{(\kappa н)}}{\partial r}+\dfrac{\partial\varepsilon_{r\varphi}^{(\kappa н)}}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial\varepsilon_{r\theta}^{(\kappa н)}}{\partial\theta}\right)=0\\
(\lambda^{(\kappa)}+\mu^{(\kappa)})\dfrac{\partial\Theta^{(\kappa)}}{\partial\varphi}+\mu^{(\kappa)}\left(\nabla^2 u_\varphi^{(\kappa)}-\dfrac{u_\varphi^{(\kappa)}}{r^2\sin^2(\varphi)}+\dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial u_r^{(\kappa)}}{\partial\varphi}-\dfrac{2\cos(\varphi)}{r^2\sin^2(\varphi)}\dfrac{\partial u_\theta^{(\kappa)}}{\partial\theta}\right)-\lambda^{\kappa}\dfrac{\partial\Theta^{(\kappa н)}}{\partial\varphi}\\
-2\mu^{(\kappa)}\left(\dfrac{\partial\varepsilon_{r\varphi}^{(\kappa н)}}{\partial r}+\dfrac{\partial\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(\kappa н)}}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial\varepsilon_{\varphi\theta}^{(\kappa н)}}{\partial\theta}\right)=0\\
(\lambda^{(\kappa)}+\mu^{(\kappa)})\dfrac{\partial\Theta^{(\kappa)}}{\partial\theta}+\mu^{(\kappa)}\left(\nabla^2 u_\theta^{(\kappa)}-\dfrac{u_\theta^{(\kappa)}}{r^2\sin^2(\varphi)}+\dfrac{2}{r^2\sin(\varphi)}\dfrac{\partial u_r^{(\kappa)}}{\partial\varphi}+\dfrac{2\cos(\varphi)}{r^2\sin^2(\varphi)}\dfrac{\partial u_\varphi^{(\kappa)}}{\partial\theta}\right)-\lambda^{\kappa}\dfrac{\partial\Theta^{(\kappa н)}}{\partial\theta}\\
-2\mu^{(\kappa)}\left(\dfrac{\partial\varepsilon_{r\theta}^{(\kappa н)}}{\partial r}+\dfrac{\partial\varepsilon_{\varphi\theta}^{(\kappa н)}}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial\varepsilon_{\theta\theta}^{(\kappa н)}}{\partial\theta}\right)=0
\end{cases}
\tag{17}
$$

где $k=1,2,3$ (1 – внешняя оболочка, 2 – пироуглеродный слой, 3 – топливный керн), $\lambda^{(\kappa)}=\dfrac{\nu^{(\kappa)}E^{(\kappa)}}{(1+\nu^{(\kappa)})(1-2\nu^{(\kappa)})}$, $\mu^{(\kappa)}=\dfrac{E^{(\kappa)}}{2(1+\nu^{(\kappa)})}$, $\Theta^{(\kappa)}=\varepsilon_{rr}^{(\kappa)}+\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(\kappa)}+\varepsilon_{\theta\theta}^{(\kappa)}=\dfrac{\partial u_r^{(\kappa)}}{\partial r}+\dfrac{2u_r^{(\kappa)}}{r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\varphi^{(\kappa)}}{\partial\varphi}+$, $+\dfrac{u_\varphi^{(\kappa)}}{r}ctg(\varphi)+\dfrac{1}{r\sin(\varphi)}\dfrac{\partial u\binom{\kappa}{\theta}}{\partial\theta}$, $\Theta^{(\kappa н)}=\varepsilon_{rr}^{(\kappa н)}+\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(\kappa н)}+\varepsilon_{\theta\theta}^{(\kappa н)}$, $\varepsilon_{rr}^{(\kappa н)}=\alpha^{(\kappa)}T^{(\kappa)}$, $\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(\kappa н)}=\alpha^{(\kappa)}T^{(\kappa)}$, $\varepsilon_{\theta\theta}^{(\kappa н)}=\alpha^{(\kappa)}T^{(\kappa)}, \Delta=\nabla^2=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}r^2\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2\sin(\varphi)}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\sin(\varphi)\dfrac{\partial}{\partial\varphi}+\dfrac{1}{r^2\sin^2(\varphi)}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}=\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+$ $+\dfrac{1}{r^2\sin^2(\varphi)}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\dfrac{1}{r}\left(2\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{ctg(\varphi)}{r}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\right)$, $\alpha^{(\kappa)}$ – коэффициент теплопроводности материала.

Температурные поля в сферическом тепловыделяющем элементе можно задать либо в виде некоторой функции, установленной эмпирическим путем, либо путем решения задачи теплопроводности для трехслойной сферы с внутренними источниками тепловыделения.В последнем случае температурное поле сферическоготвэла будет описываться тремя уравнениями теплопроводности:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial T^1}{\partial t}=\alpha_1\Delta T^1\\
\dfrac{\partial T^2}{\partial t}=\alpha_2\Delta T^2\\
\dfrac{\partial T^3}{\partial t}=\alpha_3\Delta T^3+q(r,\varphi,\theta)
\end{cases}
\tag{18}
$$

где $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ – коэффициентытемпературопроводности материалов, $q(r,\varphi,\theta)$ – объемное тепловыделение.

Данные уравнения теплопроводности дополняются условиями равенства температур и тепловых потоков на границах слоев и граничными условиями 3-го рода на поверхности внешнейоболочки и охлаждающей среды.

В такой постановкетермоупругуюзадачу можно решить аналитически, как это показано в работе[3]. Однако, если учитывать деформации ползучести, радиационного распухания или мгновенные пластические деформации, то ее решение в аналитическом виде не представляется возможным ввиду нелинейности уравнений (17). Решение подобного рода задач возможно только с помощью численных методов. Для численного решения наиболее подходящими являются методы релаксации и расщепления с несогласованным стабилизирующим оператором[4].

Для дальнейшего решения будет более удобна несколько другая форма записи уравнений (17):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_r^{2(\kappa)}}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial u_r^{2(\kappa)}}{\partial \varphi^2}+\left(\dfrac{1}{r^2\sin^2(\varphi)}+\dfrac{1+\lambda^{(\kappa)}/\mu^{(\kappa)}}{r\sin(\varphi)}\right)\dfrac{\partial u_r^{2(\kappa)}}{\partial \theta^2}+F_1^{(\kappa)}(r,\varphi,\theta)=0\\ \dfrac{\partial u_\varphi^{2(\kappa)}}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial u_\varphi^{2(\kappa)}}{\partial \varphi^2}+\left(\dfrac{1}{r^2\sin^2(\varphi)}+\dfrac{1+\lambda^{(\kappa)}/\mu^{(\kappa)}}{r\sin(\varphi)}\right)\dfrac{\partial u_\varphi^{2(\kappa)}}{\partial \theta^2}+F_2^{(\kappa)}(r,\varphi,\theta)=0\\ \dfrac{\partial u_\theta^{2(\kappa)}}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial u_\theta^{2(\kappa)}}{\partial \varphi^2}+\left(\dfrac{1}{r^2\sin^2(\varphi)}+\dfrac{1+\lambda^{(\kappa)}/\mu^{(\kappa)}}{r\sin(\varphi)}\right)\dfrac{\partial u_\theta^{2(\kappa)}}{\partial \theta^2}+F_3^{(\kappa)}(r,\varphi,\theta)=0\end{cases}\qquad(19)$$

где $F_1^{(k)}=\left(1+\lambda^{(\kappa)}/\mu^{(\kappa)}\right)\left(\dfrac{\partial\Theta^{(\kappa)}}{\partial r}-\dfrac{\partial^2u_r^{(\kappa)}}{\partial r^2}\right)+\dfrac{4}{r}\dfrac{\partial u_r^{(\kappa)}}{\partial r}+\dfrac{ctg(\varphi)}{r^2}\dfrac{\partial u_r^{(\kappa)}}{\partial\varphi}-\dfrac{u_r^{(\kappa)}}{r^2}-\dfrac{2}{r}\Theta^{(\kappa)}-\lambda^{(\kappa)}/\mu^{(\kappa)}\dfrac{\partial\Theta^{(\kappa н)}}{\partial r}-$

$2\left(\dfrac{\partial\varepsilon_{rr}^{(\kappa н)}}{\partial r}+\dfrac{\partial\varepsilon_{r\varphi}^{(\kappa н)}}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial\varepsilon_{r\theta}^{(\kappa н)}}{\partial\theta}\right),$

$F_2^{(k)}=\left(1+\lambda^{(\kappa)}/\mu^{(\kappa)}\right)\left(\dfrac{\partial\Theta^{(\kappa)}}{\partial r}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2u_\varphi^{(\kappa)}}{\partial\varphi^2}\right)+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u_\varphi^{(\kappa)}}{\partial r}+\dfrac{ctg(\varphi)}{r^2}\dfrac{\partial u_\varphi^{(\kappa)}}{\partial\varphi}-$

$-\lambda^{(\kappa)}/\mu^{(\kappa)}\dfrac{\partial\Theta^{(\kappa н)}}{\partial r}-2\left(\dfrac{\partial\varepsilon_{r\varphi}^{(\kappa н)}}{\partial r}+\dfrac{\partial\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(\kappa н)}}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial\varepsilon_{\varphi\theta}^{(\kappa н)}}{\partial\theta}\right),$

$F_3^{(k)}=\left(1+\lambda^{(\kappa)}/\mu^{(\kappa)}\right)\left(\dfrac{\partial\Theta^{(\kappa)}}{\partial r}-\dfrac{1}{r\sin(\varphi)}\dfrac{\partial^2u_\theta^{(\kappa)}}{\partial\theta^2}\right)+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u_\theta^{(\kappa)}}{\partial r}+$

$+\dfrac{ctg(\varphi)}{r^2}\dfrac{\partial u_\theta^{(\kappa)}}{\partial\varphi}-\dfrac{u_\theta^{(\kappa)}}{r^2\sin^2(\varphi)}\dfrac{2}{r^2\sin(\varphi)}\dfrac{\partial u_r^{(\kappa)}}{\partial\varphi}-\dfrac{2\cos(\varphi)}{r^2\sin^2(\varphi)}\dfrac{\partial u_\varphi^{(\kappa)}}{\partial\theta}-\lambda^{(\kappa)}/\mu^{(\kappa)}\dfrac{\partial\Theta^{(\kappa н)}}{\partial r}-2\left(\dfrac{\partial\varepsilon_{r\theta}^{(\kappa н)}}{\partial r}+\dfrac{\partial\varepsilon_{\varphi\theta}^{(\kappa н)}}{\partial\varphi}+\right.$

$\left.+\dfrac{\partial\varepsilon_{\theta\theta}^{(\kappa н)}}{\partial\theta}\right).$

Построим разностные соотношения для системы уравнений (19).Вторые производные по пространственным координатам аппроксимируем разностными выражениями, воспользовавшись следующими разностными операторами:

$$\begin{aligned}\Lambda_r A_{nms}&=\frac{A_{n+1ms}-2A_{nms}+A_{n-1ms}}{h_r^2}\\ \Lambda_\varphi A_{nms}&=\frac{A_{nm+1s}-2A_{nms}+A_{nm-1s}}{h_\varphi^2}\\ \Lambda_\theta A_{nms}&=\frac{A_{nms+1}-2A_{nms}+A_{nms-1}}{h_\theta^2}\end{aligned}\qquad(20)$$

где $n=1,2,...N;m=1,2,...M;s=1,2,...S$.

Очевидно, что

$$\Lambda_r A_{nms} = \frac{\partial^2 A(r_n, \varphi_m, \theta_s)}{\partial r^2} + O(h_r^2)$$

$$\Lambda_\varphi A_{nms} = \frac{\partial^2 A(r_n, \varphi_m, \theta_s)}{\partial \varphi^2} + O(h_\varphi^2) \tag{21}$$

$$\Lambda_\theta A_{nms} = \frac{\partial^2 A(r_n, \varphi_m, \theta_s)}{\partial \theta^2} + O(h_\theta^2)$$

Для смешанных производных второго порядка соответственно имеем:

$$\frac{\partial^2 A(r,\varphi,\theta)}{\partial r \partial \varphi} = \frac{A_{n+1m+1s} - A_{nm+1s} - A_{n+1ms} + A_{nms}}{h_r h_\varphi}$$

$$\frac{\partial^2 A(r,\varphi,\theta)}{\partial r \partial \theta} = \frac{A_{n+1ms+1} - A_{nms+1} - A_{n+1ms} + A_{nms}}{h_r h_\theta} \tag{22}$$

$$\frac{\partial^2 A(r,\varphi,\theta)}{\partial \varphi \partial \theta} = \frac{A_{nm+1s+1} - A_{nms+1} - A_{nm+1s} + A_{nms}}{h_\varphi h_\theta}$$

Производных первого порядка аппроксимируются «левой» разностной схемой.

Слагаемые $F_1^{(*k)}, F_2^{(*k)}, F_3^{(*k)}$ соответствуют $F_1^{(k)}, F_2^{(k)}, F_3^{(k)}$, в которых производные заменены на разностные выражения соответствующего порядка.

В итоге получает разностную схему:

$$\begin{cases} \left(\Lambda_r^{(\kappa)} + \frac{1}{r_n^2}\Lambda_\varphi^{(\kappa)} + \left(\frac{1}{r_n^2 \sin^2(\varphi_m)} + \frac{1+\lambda^{(\kappa)}/\mu^{(\kappa)}}{r_n \sin(\varphi_m)} \right) \Lambda_\theta^{(\kappa)} \right) u_r^{(\kappa)} + F_1^{(*\kappa)}(r_n, \varphi_m, \theta_s) = 0 \\ \left(\Lambda_r^{(\kappa)} + \frac{1}{r_n^2}\Lambda_\varphi^{(\kappa)} + \left(\frac{1}{r_n^2 \sin^2(\varphi_m)} + \frac{1+\lambda^{(\kappa)}/\mu^{(\kappa)}}{r_n \sin(\varphi_m)} \right) \Lambda_\theta^{(\kappa)} \right) u_\varphi^{(\kappa)} + F_2^{(*\kappa)}(r_n, \varphi_m, \theta_s) = 0 \\ \left(\Lambda_r^{(\kappa)} + \frac{1}{r_n^2}\Lambda_\varphi^{(\kappa)} + \left(\frac{1}{r_n^2 \sin^2(\varphi_m)} + \frac{1+\lambda^{(\kappa)}/\mu^{(\kappa)}}{r_n \sin(\varphi_m)} \right) \Lambda_\theta^{(\kappa)} \right) u_\theta^{(\kappa)} + F_3^{(*\kappa)}(r_n, \varphi_m, \theta_s) = 0 \end{cases} \tag{23}$$

Граничные условия задаются равенством значений и производных на границе слоев. Если их записать, то получаем замкнутую систему уравнений. Эти уравнения нелинейные и поэтому для их решения применим итерационный процесс, на каждом этапе которого нелинейные члены вычисляются по значениям переменных, найденным на предыдущем шаге. Использую метод факторизации и введя промежуточные сеточные функции решение трехмерной задачи распадается на 3 этапа. На первом этапе одномерная задача решается по одной из переменных, на втором –по другой переменной и, соответственно, на третьем –по третьей переменной.

Перепишем уравнения системы (23) как гиперболические. Причем итерации по переменной времени будем продолжать до выхода решения полученной системы на стационарный режим. Построим экономичную факторизованную схему $\Lambda = \Lambda_r + \Lambda_\varphi + \Lambda_\theta$, $B = I + \beta h_\tau^2 \Lambda = I + \beta h_\tau^2 (\Lambda_r + \Lambda_\varphi + \Lambda_\theta)$. Заменим оператор B факторизованным оператором $\overline{B} = (I + \beta h_\tau^2 \Lambda_r)(I + \beta h_\tau^2 \Lambda_\varphi)(I + \beta h_\tau^2 \Lambda_\theta)$, где I – единичный оператор. Полученная неявная схема будет устойчивой при значениях параметра $\beta \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{h_\tau^2 \|\Lambda\|}$.

Таким образом, получаем 3 системы уравнений:

$$\begin{cases} \left(I-\beta h_{\tau}^{2}\Lambda_{r}^{(\kappa)}\right)u_{r}^{\left(n+\frac{1}{2},\kappa\right)}+\overline{F}_{1}^{*\kappa}\left(r_{n},\varphi_{m},\theta_{s}\right)=0 \\ \left(I-\beta h_{\tau}^{2}\Lambda_{r}^{(\kappa)}\right)u_{r}^{\left(n+\frac{1}{2},\kappa\right)}+\overline{F}_{2}^{*\kappa}\left(r_{n},\varphi_{m},\theta_{s}\right)=0 \\ \left(I-\beta h_{\tau}^{2}\Lambda_{r}^{(\kappa)}\right)u_{r}^{\left(n+\frac{1}{2},\kappa\right)}+\overline{F}_{3}^{*\kappa}\left(r_{n},\varphi_{m},\theta_{s}\right)=0 \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} \left(I-\frac{\beta h_{\tau}^{2}\Lambda_{\varphi}^{(\kappa)}}{r_{n}^{2}}\right)u_{\varphi}^{\left(n+\frac{1}{2},\kappa\right)}+\overline{F}_{1}^{(*\kappa)}\left(r_{n},\varphi_{m},\theta_{s}\right)=0 \\ \left(I-\frac{\beta h_{\tau}^{2}\Lambda_{\varphi}^{(\kappa)}}{r_{n}^{2}}\right)u_{\varphi}^{\left(n+\frac{1}{2},\kappa\right)}+\overline{F}_{2}^{(*\kappa)}\left(r_{n},\varphi_{m},\theta_{s}\right)=0 \\ \left(I-\frac{\beta h_{\tau}^{2}\Lambda_{\varphi}^{(\kappa)}}{r_{n}^{2}}\right)u_{\varphi}^{\left(n+\frac{1}{2},\kappa\right)}+\overline{F}_{3}^{(*\kappa)}\left(r_{n},\varphi_{m},\theta_{s}\right)=0 \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} \left(I-\left(\frac{1}{r_{n}^{2}\sin^{2}(\varphi_{m})}+\frac{1+\lambda^{(\kappa)}/\mu^{(\kappa)}}{r_{n}\sin(\varphi_{m})}\right)\beta h_{\tau}^{2}\Lambda_{\theta}^{(\kappa)}\right)u_{\theta}^{(n+1,\kappa)}+\overline{F}_{1}^{(*\kappa)}\left(r_{n},\varphi_{m},\theta_{s}\right)=0 \\ \left(I-\left(\frac{1}{r_{n}^{2}\sin^{2}(\varphi_{m})}+\frac{1+\lambda^{(\kappa)}/\mu^{(\kappa)}}{r_{n}\sin(\varphi_{m})}\right)\beta h_{\tau}^{2}\Lambda_{\theta}^{(\kappa)}\right)u_{\theta}^{(n+1,\kappa)}1+\overline{F}_{2}^{(*\kappa)}\left(r_{n},\varphi_{m},\theta_{s}\right)=0 \\ \left(I-\left(\frac{1}{r_{n}^{2}\sin^{2}(\varphi_{m})}+\frac{1+\lambda^{(\kappa)}/\mu^{(\kappa)}}{r_{n}\sin(\varphi_{m})}\right)\beta h_{\tau}^{2}\Lambda_{\theta}^{(\kappa)}\right)u_{\theta}^{(n+1,\kappa)}+\overline{F}_{3}^{(*\kappa)}\left(r_{n},\varphi_{m},\theta_{s}\right)=0 \end{cases} \quad (26)$$

Значения $\overline{F}_{1}^{(*\kappa)},\overline{F}_{2}^{(*\kappa)},\overline{F}_{3}^{(*\kappa)}$ вытекают из сопоставления(24) и (23).

Как видим, задача свелась к решению локально одномерных краевых задач. Решение данной системы может быть построено по методу прогонки. Подобные схемы расчета ранее были использованы в [5] при решении динамических задач для оболочек.

Резюме

Приводится вывод системы уравнений напряженно-деформированного состояния с учетом обратимых и не обратимых деформаций в сферической системе координат. В качестве примера приводится численная схема расчета термоупругого задачи для сферического тепловыделяющего элемента.

Литература

1. Куликов И.С., Прочность элементов конструкций при облучении /И.С. Куликов, В. Б. Нестеренко, Б.Е. Тверковкин.– Минск: Наука и техника, 1990.– 144с.
2. Готман А.Ш. Тензорное исчисление: учеб. Пособие/ А.Ш. Готман.–Новосибирск: Изд-во Новосибирской гос. акад. вод.трансп. , 2007.– 129 с.
3. Гурьянов Н.Г. Краевые задачи теории упругости для шара и цилиндра / Н.Г. Гурьянов, О.Н. Тюленева – Казань: Изд-во Казанского университета, 2008. – 207 с.
4. ПетрусёвА.С.Разностные схемы и их анализ / А.С.Петрусёв– Москва: Изд-во МФТИ, 2004. – 89 с.
5. ВольмирА.С.Оболочки в потоке жидкости и газа/ А.С.Вольмир– Москва: Изд-во «Наука», 1976. – 416 с.

Summary

The deduction of the equations of the stress-strain state with reversible and irreversible deformations in spherical coordinates is presented. As an example, the numerical scheme for the calculation of the thermoelastic problem for a spherical fuel element is given.

Поступила в редакцию 10.12.2012