УДК 539.3

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНОГО ТЕРМО-ВЛАГО-ВЯЗКОУПРУГОГО ПОВЕДЕНИЯ ПРОСАДОЧНЫХ И НАБУХАЮЩИХ ГРУНТОВ, АРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ГЕОРЕШЕТКОЙ

Янковский А.П.

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

Настоящая работа продолжает исследование, опубликованное в [1], где была предложена методика вычисления эффективных термо-влаго-упругих характеристик набухающих и просадочных грунтов, армированных пространственной георешеткой. Однако известно, что грунты, а также георешетки, изготавливаемые из полимерных материалов [2], проявляют не только упругие, но и ярко выраженные вязкие и наследственные свойства [2–4], поэтому актуальной является проблема построения определяющих уравнений армированных георешетками грунтов с учетом их вязкого и линейно-наследственного поведения. В связи с этим настоящее исследование посвящено численно-аналитическому моделированию термо-влаго-вязкоупругого поведения грунтов, армированных пространственной георешеткой.

Пусть имеется термо-влаго-вязкоупругий слой грунта единичной толщины h, армированный регулярно в плоскости (x_1, x_2) объемной георешеткой (координата x_3 прямоугольной декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 направлена по толщине слоя). Выделим из такого геокомпозита простейший представительный элемент (ячейку) объемом $V = 2a \times 2b \times h$ (рисунок) так, чтобы любой другой элемент композита можно было получить параллельным переносом по направлению x_1 на расстояние $2an$, по направлению x_2 – на расстояние $2bm$, а по направлению x_3 – на расстояние hl (n, m, $l = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$).

На рисунке изображена ячейка с наиболее общим типом криволинейного армирования двумя усиливающими элементами *1*, *2*, представляющими собой цилиндрические оболочечные элементы, направляющие которых параллельны оси x_3, перпендикулярной плоскости рисунка. Из такой структуры заданием геометрии армирующих элементов можно получить георешетки всех видов, используемых на сегодняшний день на практике [2]. С каждым k-м армирующим элементом свяжем свою локальную прямоугольную декартову систему координат $x^{(k)}$, $y^{(k)}$, $z^{(k)} \equiv x_3$ (как показано на рисунке), которая получается поворотом глобальной системы координат x_1, x_2, x_3 на угол φ_k вокруг вертикальной оси x_3.

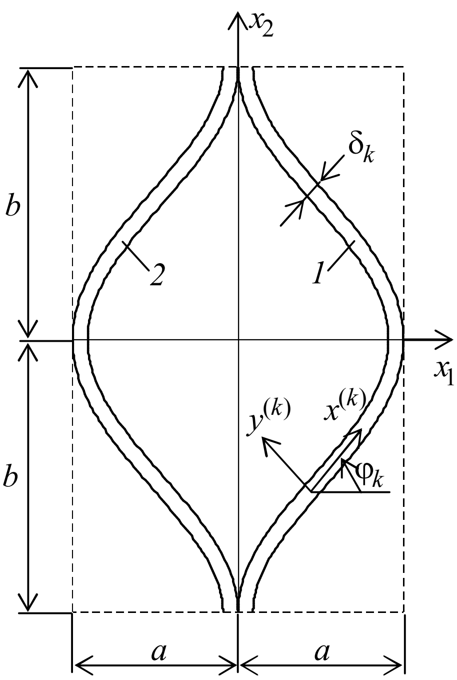

Рисунок 1 – Представительный элемент (ячейка) геокомпозита, армированного пространственной георешеткой (вид сверху)

Для удобства дальнейшего изложения, как и в [1], напряженно-деформированное состояние компонент композиции и геокомпозита в целом будем описывать не тензорами напряжений и деформаций, а шестикомпонентными векторами напряжений и деформаций, что позволяет записывать определяющие соотношения в компактной матричной форме.

Все компоненты (фазы) композиции предполагаются материалами с общей анизотропией, механическое поведение которых описывается моделью обобщенного тела Максвелла – Томсона [5]. Согласно этой модели, с учетом принципа Неймана [4] и возможности набухания или проседания грунта [3] (а в самом общем случае и армирующих элементов) определяющие уравнения для компонент композиции, материалы которых предполагаются стабильными, можно записать так [4, 5]:

$$\sigma_i^{(k)}(t) = A_{ij}^{(k)}\left(\varepsilon_j^{(k)}(t) - \alpha_j^{(k)}T_k(t) - \beta_j^{(k)}w_k(t)\right) + \int\limits_0^t \left[\sum_{m=1}^{M_k} B_{ij,m}^{(k)} \exp\left(-\frac{t-\tau}{n_m^{(k)}}\right)\dot{\varepsilon}_j^{(k)}(\tau) -\right.$$

$$\left. -\sum_{s=1}^{N_k} \mathrm{A}_{i,s}^{(k)} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_s^{(k)}}\right)\dot{T}_k(\tau) - \sum_{r=1}^{L_k} \mathrm{B}_{i,r}^{(k)} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\gamma_r^{(k)}}\right)\dot{w}_k(\tau)\right] d\tau + C_{ij}^{(k)}\dot{\varepsilon}_j^{(k)}(t) - \qquad (1)$$

$$-D_i^{(k)}\dot{T}_k(t) - F_i^{(k)}\dot{w}_k(t), \quad i = 1, 2, ..., 6, \quad k = 0, 1, 2, ..., K,$$

где

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_k^* &= \left\{\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{33}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}, \sigma_{23}^{(k)}, \sigma_{31}^{(k)}\right\} = \left\{\sigma_1^{(k)}, \sigma_2^{(k)}, \sigma_3^{(k)}, \sigma_4^{(k)}, \sigma_5^{(k)}, \sigma_6^{(k)}\right\}, \\
\boldsymbol{\varepsilon}_k^* &= \left\{\varepsilon_{11}^{(k)}, \varepsilon_{22}^{(k)}, \varepsilon_{33}^{(k)}, \varepsilon_{12}^{(k)}, \varepsilon_{23}^{(k)}, \varepsilon_{31}^{(k)}\right\} = \left\{\varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, \varepsilon_3^{(k)}, \varepsilon_4^{(k)}, \varepsilon_5^{(k)}, \varepsilon_6^{(k)}\right\}, \\
\boldsymbol{\alpha}_k^* &= \left\{\alpha_{11}^{(k)}, \alpha_{22}^{(k)}, \alpha_{33}^{(k)}, \alpha_{12}^{(k)}, \alpha_{23}^{(k)}, \alpha_{31}^{(k)}\right\} = \left\{\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \alpha_3^{(k)}, \alpha_4^{(k)}, \alpha_5^{(k)}, \alpha_6^{(k)}\right\}, \\
\boldsymbol{\beta}_k^* &= \left\{\beta_{11}^{(k)}, \beta_{22}^{(k)}, \beta_{33}^{(k)}, \beta_{12}^{(k)}, \beta_{23}^{(k)}, \beta_{31}^{(k)}\right\} = \left\{\beta_1^{(k)}, \beta_2^{(k)}, \beta_3^{(k)}, \beta_4^{(k)}, \beta_5^{(k)}, \beta_6^{(k)}\right\};
\end{aligned} \qquad (2)$$

$\sigma_i^{(k)}$ – компоненты вектора $\boldsymbol{\sigma}_k$ напряжений в *k*-й фазе композиции; $\varepsilon_i^{(k)}$ – компоненты вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ деформаций в *k*-й компоненте композиции; $\alpha_i^{(k)}$ – компоненты вектора $\boldsymbol{\alpha}_k$ коэффициентов теплового расширения материала *k*-й фазы композиции; $\beta_i^{(k)}$ – компоненты вектора $\boldsymbol{\beta}_k$ коэффициентов линейного расширения набухающего (если компоненты $\beta_i^{(k)}$ положительны) или просадочного (если компоненты $\beta_i^{(k)}$ отрицательны) материала *k*-й компоненты композиции; T_k – отклонение температуры *k*-й фазы композиции от температуры естественного состояния; w_k – приращение влажности в *k*-й компоненте композиции по сравнению с естественным состоянием; $A_{ij}^{(k)}$ – компоненты матрицы жесткости A_k материала *k*-й фазы композиции; $C_{ij}^{(k)}$ – компоненты матрицы C_k линейных вязкостей материала *k*-й компоненты композиции; $D_i^{(k)}$ – элементы шестикомпонентного вектора линейных температурных вязкостей материала *k*-й фазы композиции; $F_i^{(k)}$ – элементы шестикомпонентного вектора линейных «влажностных» вязкостей материала *k*-й компоненты композиции; $B_{ij,m}^{(k)}$, $n_m^{(k)}$, M_k – характеристики материала *k*-й фазы композиции, определяющие его механические линейно-наследственные свойства; $\mathrm{A}_{i,s}^{(k)}$, $\theta_s^{(k)}$, N_k – характеристики материала *k*-й компоненты композиции, определяющие его тепловые линейно-наследственные свойства; $\mathrm{B}_{i,r}^{(k)}$, $\gamma_r^{(k)}$, L_k – характеристики материала *k*-й фазы композиции, определяющие его «влажностные» линейно-наследственные свойства (постоянные $n_m^{(k)}$, $\theta_s^{(k)}$, $\gamma_r^{(k)}$ имеют смысл характерного времени релаксации); *K* – количество армирующих элементов георешетки в ячейке (на рисунке изображена георешетка с двумя ($K = 2$) криволинейными армирующими элементами; возможен расчет и более сложных георешеток, в рамках настоящего исследования это не принципиально); звездочка означает операцию транспонирования; точка над функцией – производная по времени *t*. В соотношениях (1) и далее: по нижнему повторяющемуся индексу *j* производится суммирование от 1 до 6; при $k = 0$ эти соотношения относятся к связующему (грунту) и записаны в глобальной системе координат x_1, x_2, x_3, при $1 \le k \le K$ соотношения (1) относятся к *k*-му армирующему элементу и записаны в локальной системе $x^{(k)}$, $y^{(k)}$, $z^{(k)} \equiv x_3$, связанной с этим элементом.

Соотношения (1) выписаны для самого общего случая, когда предполагается, что и армирующие элементы могут набухать или проседать от увеличения влажности; если же армирующие элементы не обладают этими свойствами, то в (1) следует формально принять $\beta_j^{(k)} = 0$, $\mathrm{B}_{i,r}^{(k)} = 0$, $F_i^{(k)} = 0$

($k \neq 0$). Представление ядер интегральных операторов в (1) в виде линейных комбинаций экспоненциальных функций с числом слагаемых M_k, N_k, L_k позволяет аппроксимировать ядра более сложной структуры, в том числе и некоторые виды слабосингулярных ядер [6]. Равенства (2) задают соответствия между шестью компонентами f_i ($i = \overline{1,\,6}$) некоторого вектора $\mathbf{f}$ и компонентами соответствующего симметричного тензора второго ранга f_{ij} ($i,\ j = 1,\,2,\,3;\ \ 0 \le k \le K$). В соотношениях (1) и далее будем в явном виде указывать зависимость функций $\sigma_i^{(k)}$, $\varepsilon_i^{(k)}$, T_k, w_k и их производных только от времени *t*, а зависимости этих функций от пространственных координат x_1, x_2, x_3 для сокращения записи указывать не будем, но будем их неявно учитывать.

Традиционно для решения задач о механическом поведении конструкций из линейно-наследственных материалов применяют преобразование Лапласа [4, 5]. Однако это преобразование оказывается эффективным лишь в тех случаях, для которых известны аналитические решения соответствующих линейно-упругих задач [4]. В связи с этим и исходя из того, что механическое поведение современных весьма сложных дорожных конструкций, как правило, слоистой структуры [2], целесообразно определять численными методами, в настоящем исследовании разработаем численный подход к моделированию термо-влаго-вязкоупругого поведения геокомпозита из линейно-наследственных фазовых материалов без привлечения преобразования Лапласа и функций комплексного переменного. С этой целью предварительно вычислим интегралы в (1) по частям, тогда после элементарных преобразований получим

$$\begin{gathered}
\sigma_i(t) = \left(A_{ij} + \sum_m B_{ij,m}\right)\varepsilon_j(t) - \left(A_{ij}\alpha_j + \sum_s \mathrm{A}_{i,s}\right)T(t) - \left(A_{ij}\beta_j + \sum_r \mathrm{B}_{i,r}\right)w(t) - \\
-\int_0^t \left[\sum_m \frac{B_{ij,m}}{n_m}\exp\left(-\frac{t-\tau}{n_m}\right)\varepsilon_j(\tau) - \sum_s \frac{\mathrm{A}_{i,s}}{\theta_s}\exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_s}\right)T(\tau) - \sum_r \frac{\mathrm{B}_{i,r}}{\gamma_r}\times\right. \\
\left.\times\exp\left(-\frac{t-\tau}{\gamma_r}\right)w(\tau)\right]d\tau + C_{ij}\dot{\varepsilon}_j(t) - D_i\dot{T}(t) - F_i\dot{w}(t),\quad i = 1,\,2,\,...,\,6,
\end{gathered} \tag{3}$$

где, как обычно [4], предполагается, что до начального момента времени $t_0 = 0$ геокомпозит находился в естественном состоянии, т. е. $\varepsilon_j(t) = 0$, $T(t) = 0$, $w(t) = 0$ при $t \le t_0$. Здесь и далее для упрощения записи в промежуточных выкладках будем опускать индекс *k*, определяющий номер фазы композиции; суммирование производится по указанным индексам *m*, *s*, *r* от 1 до *M*, *N*, *L* соответственно (точнее до M_k, N_k, L_k).

Введем в рассмотрение интегралы вида:

$$E_{j,m}(t) \equiv \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{n_m}\right)\varepsilon_j(\tau)\,d\tau,\ \ \Theta_s(t) \equiv \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_s}\right)T(\tau)\,d\tau,\ \ W_r(t) \equiv \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\gamma_r}\right)w(\tau)\,d\tau. \tag{4}$$

Соотношения (3) с учетом (4) примут вид

$$\begin{gathered}
\sigma_i(t) = \left(A_{ij} + \sum_m B_{ij,m}\right)\varepsilon_j(t) - \left(A_{ij}\alpha_j + \sum_s \mathrm{A}_{i,s}\right)T(t) - \left(A_{ij}\beta_j + \sum_r \mathrm{B}_{i,r}\right)w(t) - \\
-\sum_m \frac{B_{ij,m}}{n_m}E_{j,m}(t) + \sum_s \frac{\mathrm{A}_{i,s}}{\theta_s}\Theta_s(t) + \sum_r \frac{\mathrm{B}_{i,r}}{\gamma_r}W_r(t) + C_{ij}\dot{\varepsilon}_j(t) - D_i\dot{T}(t) - F_i\dot{w}(t),\quad i = \overline{1,\,6}.
\end{gathered} \tag{5}$$

Дискретизируем задачу по времени *t*, т. е. будем рассматривать ее решения в моменты времени t_n ($n = 0,\,1,\,2\,...$). Предполагаем, что в момент времени t_n решение задачи уже известно, т. е. известны функции, зависящие от пространственных переменных:

$$\begin{gathered}
\overset{n}{\dot{\varepsilon}}_j \equiv \dot{\varepsilon}_j(t_n),\ \ \overset{n}{\varepsilon}_j \equiv \varepsilon_j(t_n),\ \ \overset{n}{\dot{T}} \equiv \dot{T}(t_n),\ \ \overset{n}{T} \equiv T(t_n),\ \ \overset{n}{\dot{w}} \equiv \dot{w}(t_n),\ \ \overset{n}{w} \equiv w(t_n), \\
\overset{n}{E}_{j,m} \equiv E_{j,m}(t_n),\ \ \overset{n}{\Theta}_s \equiv \Theta_s(t_n),\ \ \overset{n}{W}_r \equiv W_r(t_n),\ \ \overset{n}{\sigma}_i \equiv \sigma_i(t_n).
\end{gathered} \tag{6}$$

Построим соотношения (5) для момента времени

$$t_{n+1} = t_n + \tau_n, \quad n = 0,\, 1,\, 2\, ..., \tag{7}$$

где τ_n – шаг по времени (возможно, переменный). Из соотношений (5) с учетом обозначений типа (6) следует:

$$\begin{gathered}\overset{n+1}{\sigma}_i = \left(A_{ij}+\sum_m B_{ij,m}\right)\overset{n+1}{\varepsilon}_j - \left(A_{ij}\alpha_j+\sum_s \mathrm{A}_{i,s}\right)\overset{n+1}{T} - \left(A_{ij}\beta_j+\sum_r \mathrm{B}_{i,r}\right)\overset{n+1}{w} - \\ -\sum_m \frac{B_{ij,m}}{n_m}\overset{n+1}{E}_{j,m} + \sum_s \frac{\mathrm{A}_{i,s}}{\theta_s}\overset{n+1}{\Theta}_s + \sum_r \frac{\mathrm{B}_{i,r}}{\gamma_r}\overset{n+1}{W}_r + C_{ij}\overset{n+1}{\dot{\varepsilon}}_j - D_i\overset{n+1}{\dot{T}} - F_i\overset{n+1}{\dot{w}}, \quad i=\overline{1,\,6}.\end{gathered} \tag{8}$$

Используя равенства (4), с учетом соотношений (6), (7) преобразуем в (8) величины

$$\begin{gathered}\overset{n+1}{E}_{j,m} \equiv \int_0^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{n_m}\right)\varepsilon_j(\tau)\,d\tau = \int_0^{t_n} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{n_m}\right)\varepsilon_j(\tau)\,d\tau + \\ + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{n_m}\right)\varepsilon_j(\tau)\,d\tau = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{n_m}\right)\varepsilon_j(\tau)\,d\tau + \int_0^{t_n} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-t_n}{n_m}\right)\times \\ \times\exp\left(-\frac{t_n-\tau}{n_m}\right)\varepsilon_j(\tau)\,d\tau = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{n_m}\right)\varepsilon_j(\tau)\,d\tau + \exp\left(-\frac{\tau_n}{n_m}\right)\overset{n}{E}_{j,m}, \\ \overset{n+1}{\Theta}_s \equiv \int_0^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{\theta_s}\right)T(\tau)\,d\tau = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{\theta_s}\right)T(\tau)\,d\tau + \exp\left(-\frac{\tau_n}{\theta_s}\right)\overset{n}{\Theta}_s, \\ \overset{n+1}{W}_r \equiv \int_0^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{\gamma_r}\right)w(\tau)\,d\tau = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{\gamma_r}\right)w(\tau)\,d\tau + \exp\left(-\frac{\tau_n}{\gamma_r}\right)\overset{n}{W}_r.\end{gathered} \tag{9}$$

Для приближенного вычисления первых интегралов в правых частях равенств (9) используем формулу трапеций, имеющую второй порядок точности по τ_n, т.е.

$$\begin{gathered}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{n_m}\right)\varepsilon_j(\tau)\,d\tau \approx \frac{\tau_n}{2}\left(\exp\left(-\frac{t_{n+1}-t_{n+1}}{n_m}\right)\overset{n+1}{\varepsilon}_j + \exp\left(-\frac{t_{n+1}-t_n}{n_m}\right)\overset{n}{\varepsilon}_j\right) = \\ = \frac{\tau_n}{2}\left(\overset{n+1}{\varepsilon}_j + \exp\left(-\frac{\tau_n}{n_m}\right)\overset{n}{\varepsilon}_j\right), \qquad \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{\theta_s}\right)T(\tau)\,d\tau \approx \frac{\tau_n}{2}\left(\overset{n+1}{T} + \exp\left(-\frac{\tau_n}{\theta_s}\right)\overset{n}{T}\right), \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{\gamma_r}\right)w(\tau)\,d\tau \approx \frac{\tau_n}{2}\left(\overset{n+1}{w} + \exp\left(-\frac{\tau_n}{\gamma_r}\right)\overset{n}{w}\right).\end{gathered} \tag{10}$$

Подставим (10) в соотношения (9), тогда получим приближенные формулы

$$\begin{gathered}\overset{n+1}{E}_{j,m} \approx \frac{\tau_n}{2}\left(\overset{n+1}{\varepsilon}_j + \exp\left(-\frac{\tau_n}{n_m}\right)\overset{n}{\varepsilon}_j\right) + \exp\left(-\frac{\tau_n}{n_m}\right)\overset{n}{E}_{j,m} = \frac{\tau_n}{2}\overset{n+1}{\varepsilon}_j + \exp\left(-\frac{\tau_n}{n_m}\right)\left(\frac{\tau_n}{2}\overset{n}{\varepsilon}_j + \overset{n}{E}_{j,m}\right), \\ \overset{n+1}{\Theta}_s \approx \frac{\tau_n}{2}\overset{n+1}{T} + \exp\left(-\frac{\tau_n}{\theta_s}\right)\left(\frac{\tau_n}{2}\overset{n}{T} + \overset{n}{\Theta}_s\right), \quad \overset{n+1}{W}_r \approx \frac{\tau_n}{2}\overset{n+1}{w} + \exp\left(-\frac{\tau_n}{\gamma_r}\right)\left(\frac{\tau_n}{2}\overset{n}{w} + \overset{n}{W}_r\right), \quad j=\overline{1,\,6}.\end{gathered} \tag{11}$$

Используя формулу трапеций, запишем следующие приближенные равенства:

$$\overset{n+1}{\varepsilon}_j - \overset{n}{\varepsilon}_j = \frac{\tau_n}{2}\left(\overset{n+1}{\dot{\varepsilon}}_j + \overset{n}{\dot{\varepsilon}}_j\right), \qquad \overset{n+1}{T} - \overset{n}{T} = \frac{\tau_n}{2}\left(\overset{n+1}{\dot{T}} + \overset{n}{\dot{T}}\right), \qquad \overset{n+1}{w} - \overset{n}{w} = \frac{\tau_n}{2}\left(\overset{n+1}{\dot{w}} + \overset{n}{\dot{w}}\right),$$

из которых следует

$$\overset{n+1}{\dot{\varepsilon}}_j = \frac{2}{\tau_n}\left(\overset{n+1}{\varepsilon}_j - \overset{n}{\varepsilon}_j\right) - \overset{n}{\dot{\varepsilon}}_j, \qquad \overset{n+1}{\dot{T}} = \frac{2}{\tau_n}\left(\overset{n+1}{T} - \overset{n}{T}\right) - \overset{n}{\dot{T}}, \qquad \overset{n+1}{\dot{w}} = \frac{2}{\tau_n}\left(\overset{n+1}{w} - \overset{n}{w}\right) - \overset{n}{\dot{w}}. \tag{12}$$

Подставим выражения (11), (12) в соотношения (8) и восстановим индекс k, тогда после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned}
\overset{n+1}{\sigma}{}_i^{(k)} ={}& \left(A_{ij}^{(k)} + \sum_{m=1}^{M_k} B_{ij,m}^{(k)}\left(1-\frac{\tau_n}{2n_m^{(k)}}\right) + \frac{2}{\tau_n} C_{ij}^{(k)} \right) \overset{n+1}{\varepsilon}{}_j^{(k)} - \left(A_{ij}^{(k)}\alpha_j^{(k)} + \sum_{s=1}^{N_k} \mathrm{A}_{i,s}^{(k)}\left(1-\frac{\tau_n}{2\theta_s^{(k)}}\right) + \right.\\
&\left. + \frac{2}{\tau_n} D_i^{(k)}\right)\overset{n+1}{T}_k - \left(A_{ij}^{(k)}\beta_j^{(k)} + \sum_{r=1}^{L_k}\mathrm{B}_{i,r}^{(k)}\left(1-\frac{\tau_n}{2\gamma_r^{(k)}}\right)+\frac{2}{\tau_n}F_i^{(k)}\right)\overset{n+1}{w}_k - \sum_{m=1}^{M_k}\frac{B_{ij,m}^{(k)}}{n_m^{(k)}}\exp\left(-\frac{\tau_n}{n_m^{(k)}}\right)\times\\
&\times \left(\frac{\tau_n}{2}\overset{n}{\varepsilon}{}_j^{(k)} + \overset{n}{E}{}_{j,m}^{(k)}\right) + \sum_{s=1}^{N_k}\frac{\mathrm{A}_{i,s}^{(k)}}{\theta_s^{(k)}}\exp\left(-\frac{\tau_n}{\theta_s^{(k)}}\right)\left(\frac{\tau_n}{2}\overset{n}{T}_k + \overset{n}{\Theta}{}_s^{(k)}\right) + \sum_{r=1}^{L_k}\frac{\mathrm{B}_{i,r}^{(k)}}{\gamma_r^{(k)}}\exp\left(-\frac{\tau_n}{\gamma_r^{(k)}}\right)\left(\frac{\tau_n}{2}\overset{n}{w}_k+\overset{n}{W}{}_r^{(k)}\right) -\\
&- C_{ij}^{(k)}\left(\frac{2}{\tau_n}\overset{n}{\varepsilon}{}_j^{(k)} + \overset{n}{\dot\varepsilon}{}_j^{(k)}\right) + D_i^{(k)}\left(\frac{2}{\tau_n}\overset{n}{T}_k+\overset{n}{\dot T}_k\right) + F_i^{(k)}\left(\frac{2}{\tau_n}\overset{n}{w}_k + \overset{n}{\dot w}_k\right), \quad i=1, 2, ..., 6, \quad 0\le k\le K.
\end{aligned} \tag{13}$$

Равенства (13) можно записать в матричной форме

$$\overset{n+1}{\boldsymbol{\sigma}}_k = \overset{n}{\overline{A}}_k \overset{n+1}{\boldsymbol{\varepsilon}}_k - \overset{n}{\mathbf{B}}_k \overset{n+1}{T}_k - \overset{n}{\mathbf{V}}_k \overset{n+1}{w}_k + \overset{n}{\overline{\mathbf{p}}}_k, \quad 0\le k\le K, \quad n=0, 1, 2, ... \tag{14}$$

где $\overset{n}{\overline{A}}_k = \left(\overset{n}{\overline{A}}{}_{ij}^{(k)}\right)$ – 6×6 матрица, $\overset{n}{\mathbf{B}}_k = \left\{\overset{n}{B}{}_i^{(k)}\right\}$, $\overset{n}{\mathbf{V}}_k = \left\{\overset{n}{V}{}_i^{(k)}\right\}$, $\overset{n}{\overline{\mathbf{p}}}_k = \left\{\overset{n}{\overline{p}}{}_i^{(k)}\right\}$ – шестикомпонентные векторы, элементы которых согласно (13) имеют выражения

$$\begin{aligned}
&\overset{n}{\overline{A}}{}_{ij}^{(k)} \equiv A_{ij}^{(k)} + \sum_{m=1}^{M_k} B_{ij,m}^{(k)}\left(1-\frac{\tau_n}{2n_m^{(k)}}\right) + \frac{2}{\tau_n} C_{ij}^{(k)} \quad (j=\overline{1,6}), \quad \overset{n}{B}{}_i^{(k)} \equiv A_{ij}^{(k)}\alpha_j^{(k)} + \sum_{s=1}^{N_k} \mathrm{A}_{i,s}^{(k)}\left(1-\frac{\tau_n}{2\theta_s^{(k)}}\right) +\\
&+\frac{2}{\tau_n}D_i^{(k)}, \quad \overset{n}{V}{}_i^{(k)} \equiv A_{ij}^{(k)}\beta_j^{(k)} + \sum_{r=1}^{L_k}\mathrm{B}_{i,r}^{(k)}\left(1-\frac{\tau_n}{2\gamma_r^{(k)}}\right)+\frac{2}{\tau_n}F_i^{(k)}, \quad \overset{n}{\overline{p}}{}_i^{(k)} \equiv -\sum_{m=1}^{M_k}\frac{B_{ij,m}^{(k)}}{n_m^{(k)}}\exp\left(-\frac{\tau_n}{n_m^{(k)}}\right)\times\\
&\times \left(\frac{\tau_n}{2}\overset{n}{\varepsilon}{}_j^{(k)} + \overset{n}{E}{}_{j,m}^{(k)}\right) + \sum_{s=1}^{N_k}\frac{\mathrm{A}_{i,s}^{(k)}}{\theta_s^{(k)}}\exp\left(-\frac{\tau_n}{\theta_s^{(k)}}\right)\left(\frac{\tau_n}{2}\overset{n}{T}_k + \overset{n}{\Theta}{}_s^{(k)}\right) + \sum_{r=1}^{L_k}\frac{\mathrm{B}_{i,r}^{(k)}}{\gamma_r^{(k)}}\exp\left(-\frac{\tau_n}{\gamma_r^{(k)}}\right)\left(\frac{\tau_n}{2}\overset{n}{w}_k+\overset{n}{W}{}_r^{(k)}\right) -\\
&- C_{ij}^{(k)}\left(\frac{2}{\tau_n}\overset{n}{\varepsilon}{}_j^{(k)} + \overset{n}{\dot\varepsilon}{}_j^{(k)}\right) + D_i^{(k)}\left(\frac{2}{\tau_n}\overset{n}{T}_k+\overset{n}{\dot T}_k\right) + F_i^{(k)}\left(\frac{2}{\tau_n}\overset{n}{w}_k + \overset{n}{\dot w}_k\right) \quad (i=\overline{1,6}).
\end{aligned} \tag{15}$$

Так как функции (6) в момент времени t_n предполагаются уже известными, то компоненты матрицы $\overset{n}{\overline{A}}_k$ и векторов $\overset{n}{\mathbf{B}}_k$, $\overset{n}{\mathbf{V}}_k$, $\overset{n}{\overline{\mathbf{p}}}_k$ в (14) согласно равенствам (15) также известны. Кроме того, соотношения (14) формально совпадают с определяющими уравнениями термо-влаго-упругого материала, записанными в матричной форме.

Перепишем равенство (14) в следующем виде:

$$\overset{n+1}{\boldsymbol{\sigma}}_k = \overset{n}{\overline{A}}_k \left(\overset{n+1}{\boldsymbol{\varepsilon}}_k - \overset{n}{\boldsymbol{\alpha}}_k \overset{n+1}{T}_k - \overset{n}{\boldsymbol{\beta}}_k \overset{n+1}{w}_k\right) + \overset{n}{\overline{\mathbf{p}}}_k, \quad 0\le k\le K, \quad n=0, 1, 2, ..., \tag{16}$$

где

$$\overset{n}{\boldsymbol{\alpha}}_k = \overset{n}{\overline{A}}{}_k^{-1}\overset{n}{\mathbf{B}}_k, \quad \overset{n}{\boldsymbol{\beta}}_k = \overset{n}{\overline{A}}{}_k^{-1}\overset{n}{\mathbf{V}}_k; \tag{17}$$

$\overset{n}{\overline{A}}{}_k^{-1}$ – 6×6 -матрица, обратная $\overset{n}{\overline{A}}_k$.

Если вектор $\overset{n}{\overline{\mathbf{p}}}_k$ трактовать как вектор начальных напряжений, матрицу $\overset{n}{\overline{A}}_k$ – как матрицу упругих жесткостей k-й фазы композиции, а шестикомпонентные векторы $\overset{n}{\boldsymbol{\alpha}}_k$, $\overset{n}{\boldsymbol{\beta}}_k$ – как векторы коэффициентов теплового расширения и линейного расширения набухающего или проседающего материала k-й компоненты композиции соответственно, то соотношения (16) с учетом (15), (17) полностью совпадают с равенствами (1) в [1]. Поэтому, применяя к геокомпозиту в момент времени t_{n+1} допущения, использованные в [1] и почти дословно повторяя все рассуждения из [1], получим, что определяющие уравнения для геокомпозита в момент времени t_{n+1} в матричной форме будут иметь следующий вид:

$$\overset{n+1}{\boldsymbol{\sigma}} = \overset{n}{\bar{A}}\left(\overset{n+1}{\boldsymbol{\varepsilon}} - \overset{n}{\boldsymbol{\alpha}}\overset{n+1}{T} - \overset{n}{\boldsymbol{\beta}}\overset{n+1}{w_0}\right) + \overset{n}{\bar{\mathbf{p}}}, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{18}$$

где

$$\overset{n}{\bar{A}} = \left(\frac{V_0}{V}\overset{n}{A_0} + \frac{h}{V}\sum_{k=1}^{K}\int_0^{l_k}\delta_k D_k \overset{n}{A_k} B_k dl\right)E, \quad \overset{n}{\boldsymbol{\beta}} = \overset{n}{\bar{A}}{}^{-1}\left[\frac{V_0}{V}\overset{n}{A_0}\left(\overset{n}{\boldsymbol{\beta}_0} - \mathbf{H}\right) + \frac{h}{V}\sum_{k=1}^{K}\int_0^{l_k}\delta_k D_k \overset{n}{A_k}\left(\mathbf{F}_k - B_k\mathbf{H}\right)dl\right],$$

$$\overset{n}{\boldsymbol{\alpha}} = \overset{n}{\bar{A}}{}^{-1}\left[\frac{V_0}{V}\overset{n}{A_0}\left(\overset{n}{\boldsymbol{\alpha}_0} + \mathbf{G}\right) + \frac{h}{V}\sum_{k=1}^{K}\int_0^{l_k}\delta_k D_k \overset{n}{A_k}\left(\overset{n}{\boldsymbol{\alpha}_k} - \mathbf{C}_k + B_k\mathbf{G}\right)dl\right]; \tag{19}$$

$$\overset{n}{\bar{\mathbf{p}}} = \frac{V_0}{V}\overset{n}{\bar{\mathbf{p}}_0} + \frac{h}{V}\sum_{k=1}^{K}\int_0^{l_k}\delta_k D_k \overset{n}{\bar{\mathbf{p}}_k}dl + \frac{h}{V}\sum_{k=1}^{K}\int_0^{l_k}\delta_k D_k \overset{n}{A_k}\overset{n}{\mathbf{P}_k}dl - \left(\frac{V_0}{V}\overset{n}{A_0} + \frac{h}{V}\sum_{k=1}^{K}\int_0^{l_k}\delta_k D_k \overset{n}{A_k} B_k dl\right)\overset{n}{\mathbf{P}}; \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{n}{\mathbf{P}} \equiv E\left(\frac{h}{V}\sum_{k=1}^{K}\int_0^{l_k}\delta_k D_k \overset{n}{\mathbf{P}_k}dl\right), \quad \overset{n}{\mathbf{P}}{}_k^* = \left\{0, \overset{n}{P}{}_2^{(k)}, 0, \overset{n}{P}{}_4^{(k)}, \overset{n}{P}{}_5^{(k)}, 0\right\},\\
&\overset{n}{P}{}_2^{(k)} \equiv \left(\overset{n}{\bar{p}}{}_1^{(0)}\sin^2\varphi_k + \overset{n}{\bar{p}}{}_2^{(0)}\cos^2\varphi_k - \overset{n}{\bar{p}}{}_4^{(0)}\sin 2\varphi_k - \overset{n}{\bar{p}}{}_2^{(k)}\right)\Big/\overset{n}{\bar{A}}{}_{22}^{(k)},\\
&\overset{n}{P}{}_4^{(k)} \equiv \left[\frac{1}{2}\left(\overset{n}{\bar{p}}{}_2^{(0)} - \overset{n}{\bar{p}}{}_1^{(0)}\right)\sin 2\varphi_k + \overset{n}{\bar{p}}{}_4^{(0)}\cos 2\varphi_k - \overset{n}{\bar{p}}{}_4^{(k)}\right]\Big/\overset{n}{\bar{A}}{}_{44}^{(k)},\\
&\overset{n}{P}{}_5^{(k)} \equiv \left(-\overset{n}{\bar{p}}{}_6^{(0)}\sin\varphi_k + \overset{n}{\bar{p}}{}_5^{(0)}\cos\varphi_k - \overset{n}{\bar{p}}{}_5^{(k)}\right)\Big/\overset{n}{\bar{A}}{}_{55}^{(k)};
\end{aligned} \tag{21}$$

$\overset{n}{\bar{A}}{}^{-1}$ – 6×6-матрица, обратная $\overset{n}{\bar{A}}$; остальные 6×6-матрицы D_k, B_k, E, шестикомпонентные векторы $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{C}_k$, $\mathbf{F}_k$, функции и величины определены в [1, 7].

Соотношения (18), (19), как и в [1], записаны для случая, когда свойствами набухания или проседания обладает только связующее – грунт (армирующие элементы этими свойствами не обладают, что и имеет место на практике, т. е. $\beta_j^{(k)} = 0$, $\mathrm{B}_{i,r}^{(k)} = 0$, $F_i^{(k)} = 0$, $1 \le k \le K$, см. (1)).

Выражения (19) формально полностью совпадают с аналогичными равенствами, полученными в [1] (см. там (17), (18)). Соотношения же (20), которые можно трактовать как осредненные начальные напряжения в геокомпозите, отличаются от полученных в [1]. Это объясняется тем, что в [1] рассматривались реальные начальные напряжения в компонентах композиции, для которых выполняются условия сопряжения этих напряжений на границах контакта армирующих элементов и связующего – грунта (см. (5) в [1]). В настоящем же исследовании $\overset{n}{\bar{p}}{}_i^{(k)}$ (см. (15)) – условные начальные напряжения, для которых условия сопряжения на границах контакта армирующих элементов и связующего не выполняются, что и привело к появлению двух последних слагаемых в правой части выражения (20).

Таким образом, если в момент времени t_n известны функции (6), то согласно (19)–(21) в соотношениях (18) известны компоненты 6×6-матрицы $\overset{n}{\bar{A}}$ и шестикомпонентных векторов $\overset{n}{\boldsymbol{\alpha}}$, $\overset{n}{\boldsymbol{\beta}}$, $\overset{n}{\bar{\mathbf{p}}}$. Решая для момента времени t_{n+1} соответствующую граничную задачу о термо-влаго-упругом поведении геокомпозита (или дорожной конструкции в целом) с использованием определяющего соотношения (18), получим поля осредненных напряжений $\overset{n+1}{\boldsymbol{\sigma}}$ и деформаций $\overset{n+1}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ в композиции. Зная эти поля, по формулам (см. (8), (14) в [1] и (11) в [7])

$$\begin{aligned}
&\overset{n+1}{\boldsymbol{\varepsilon}_0} = E \overset{n+1}{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{G} \overset{n+1}{T} + \mathbf{H} \overset{n+1}{w_0} - \overset{n}{\mathbf{P}}, \quad \overset{n+1}{T_k} = \overset{n+1}{T} \quad (0 \le k \le K),\\
&\overset{n+1}{\boldsymbol{\varepsilon}_k} = B_k \overset{n+1}{\boldsymbol{\varepsilon}_0} + \mathbf{C}_k \overset{n+1}{T} - \mathbf{F}_k \overset{n+1}{w_0} + \overset{n}{\mathbf{P}_k} \quad (1 \le k \le K)
\end{aligned} \tag{22}$$

можем последовательно определить поля деформаций $\overset{n+1}{\boldsymbol{\varepsilon}_k}$ и температур $\overset{n+1}{T_k}$ во всех компонентах композиции. При известных функциях $\overset{n+1}{\varepsilon_j^{(k)}}$, $\overset{n+1}{T_k}$, $\overset{n+1}{w_k}$ с учетом (6) по формулам (11)–(13) можем определить $\overset{n+1}{E_{j,m}^{(k)}}$, $\overset{n+1}{\Theta_s^{(k)}}$, $\overset{n+1}{W_r^{(k)}}$, $\overset{n+1}{\dot{\varepsilon}_j^{(k)}}$, $\overset{n+1}{\dot{T}_k}$, $\overset{n+1}{\dot{w}_k}$, $\overset{n+1}{\sigma_i^{(k)}}$ ($0 \le k \le K$). Следовательно, все функции, указанные в (6), становятся известными в момент времени t_{n+1}, поэтому, повторяя рассуждения (6)–(22) для следующего момента времени (заменив n на $n+1$), можем рассчитать механическое поведение геокомпозита при $t = t_{n+2}$ и т. д. Так как в начальный момент времени $t = t_0 = 0$ функции (6) при $n = 0$ предполагаются известными и равными нулю, то по описанной выше схеме можем последовательно получить решения задачи о термо-влаго-вязкоупругом поведении армированного грунта в дискретные моменты времени (7).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-90405-Укр_а).

Литература

1. Немировский, Ю.В. Построение определяющих уравнений просадочных и набухающих грунтов, армированных пространственной георешеткой, с учетом предварительного напряженного состояния / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Изв. вузов. Строительство. – 2009. – № 6. – С. 3–10.
2. Матвеев, С.А. Армированные дорожные конструкции: моделирование и расчет / С.А. Матвеев, Ю.В. Немировский. – Новосибирск: Наука, 2006. – 348 с.
3. Тер-Мартиросян, З.С. Механика грунтов / Учебное пособие / З.С. Тер-Мартиросян. – М: Изд-во Ассоциации строит. вузов, 2005. – 488 с.
4. Ильюшин, А.А. Труды. Т. 3. Теория термовязкоупругости / Составители: Е.А. Ильюшина, В.Г. Тунгускова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 288 с.
5. Малмейстер, А.К. Сопротивление жестких полимерных материалов / А.К. Малмейстер, В.П. Тамуж, Г.А. Тетерс. – Рига: Зинатне, 1972. – 500 с.
6. Абросимов, Н.А. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций / Н.А. Абросимов, В.Г. Баженов. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
7. Немировский, Ю.В. Кинематический метод определения эффективных термоупругих характеристик грунта, армированного пространственной георешеткой / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Изв. вузов. Строительство. – 2007. – № 6. – С. 18–26.

Summary

The numerically-analytical model of linear thermo-moisture-viscoelastic behaviour the subsidence and moisture soils reinforced by the space geolattice with structure of a general view is developed, allowing during the discrete moments of a time to reduce an observed problem to thermo-moisture-elastic within the limits of which procedure of construction of the governing equations is already known.

Поступила в редакцию 19.11.2012