

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КРУГЛЫХ И КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН

Немировский Ю. В., Романова Т. П.

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск

Изучение динамического поведения элементов конструкций при воздействии взрывных нагрузок имеет большое значение для оценки степени их повреждаемости. В работе предложена общая методика, которая на основе модели жесткопластического тела позволяет рассчитывать динамическое поведение железобетонных кольцевых и круглых пластин при различных структурах армирования. Методика может быть применена в различных инженерных расчетах.

1. Рассмотрим динамическое поведение круглых железобетонных пластин радиуса R с жесткой шайбой или отверстием радиуса R_0 при различных условиях закрепления и воздействии нагрузок взрывного типа. "Взрывные" нагрузки $P(\tau, y)$ характеризуются тем, что мгновенно достигают

максимального значения, а затем убывают, и удовлетворяют условию $\int_{\tau_n}^{\tau} P(s, y) ds \geq (\tau - \tau_n) P(\tau, y)$,

где τ – текущее время, τ_n – время начала действия нагрузки, y – пространственная координата [1]. Предполагается, что пластина содержит по толщине большое количество армированных слоев и связующих их изотропных прослоек из бетона. Связующий материал (бетон) описывается моделью идеального жесткопластического материала с условием пластичности типа модифицированного условия Треска для материала, разнo сопротивляющегося на растяжение и сжатие. Считается, что волокна арматуры деформируются, как одномерные элементы. Волокна арматуры в общем случае располагаются в виде двух семейств криволинейных траекторий, симметричных относительно радиуса (угловое армирование), в радиальном и окружном направлении. Тогда условие пластичности и закон пластического течения для таких армированных пластин (рис. 1) в безразмерном виде описываются соотношениями [2, 3]:

$$\begin{aligned} AB: m_2 = a_2, \dot{\kappa}_1 = 0, \dot{\kappa}_2 > 0; \quad BC: m_2 = km_1 + a_3, \dot{\kappa}_1 < 0, \dot{\kappa}_2 = -\dot{\kappa}_1 / k > 0; \quad (1) \\ CD: m_2 = m_1 / k + a_4, \dot{\kappa}_1 < 0, \dot{\kappa}_2 = -k\dot{\kappa}_1 > 0; \quad DE: m_1 = -a_1, \dot{\kappa}_1 < 0, \dot{\kappa}_2 = 0; \\ EF: m_2 = -a_2, \dot{\kappa}_1 = 0, \dot{\kappa}_2 < 0; \quad FG: m_2 = km_1 - a_3, \dot{\kappa}_1 > 0, \dot{\kappa}_2 = -\dot{\kappa}_1 / k < 0; \\ GK: m_2 = m_1 / k - a_4, \dot{\kappa}_1 > 0, \dot{\kappa}_2 = -k\dot{\kappa}_1 < 0; \quad AK: m_1 = a_1, \dot{\kappa}_1 > 0, \dot{\kappa}_2 = 0; \end{aligned}$$

$$a_i = \frac{2h^2(s\Omega + \omega_i s_i + \omega_i^y s_3)(ks\Omega + \omega_i s_i + \omega_i^y s_3)}{(k+1)s\Omega + 2\omega_i s_i + 2\omega_i^y s_3}, \quad (i=1, 2),$$

$$a_j = 2h^2 \Sigma_{j-2} \left[1 - \frac{1}{2 + \Omega s(k-1) / \Sigma_{j-2}} \right], \quad (j=3, 4), \quad \Sigma_1 = s\Omega + \omega_2 s_2 + \omega_2^y s_3 s_{g1} + k(\omega_1 s_1 - \omega_1^y s_3 s_{g1}),$$

$$\Sigma_2 = s\Omega + \omega_1 s_1 - \omega_1^y s_3 s_{g2} + k(\omega_2 s_2 + \omega_2^y s_3 s_{g2}), \quad s_{gi} = \text{sign}(-k^{-2i+3} + \text{tg}^2 \mu) \quad (i=1, 2),$$

где

$$\begin{aligned} m_i &= \bar{M}_i / M_0^0, \quad M_0^0 = \sigma_0^0 H_0^2 / 4, \quad s = \sigma_0 / \sigma_0^0, \quad s_i = \sigma_{0i} / \sigma_0^0, \quad s_3 = \sigma_{03} / \sigma_0^0, \\ \Omega &= 1 - \omega_1 - \omega_2 - 2\omega_3, \quad \omega_1^y = 2\omega_3 \cos^2 \mu, \quad \omega_2^y = 2\omega_3 \sin^2 \mu, \quad h = H / H_0, \\ \dot{\kappa}_1 &= -\dot{v}'', \quad \dot{\kappa}_2 = -\dot{v}' / x, \quad x = r / R, \quad x_0 = R_0 / R, \quad v = (H_0 / R)^2 w, \quad w = \bar{w} / H_0, \end{aligned}$$

$$(*)' = \partial(*) / \partial x, \quad (\dot{*}) = \partial(*) / \partial t, \quad t = \bar{t} / t_0,$$

\bar{M}_1, \bar{M}_2 – радиальный и окружной изгибные моменты; m_1, m_2 – их безразмерные значения; $k\sigma_0$ и σ_0 – пределы текучести связующего материала на растяжение и сжатие ($0 < k < 1$), $\sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{03}$ –

пределы текучести материалов радиальных, окружных и угловых волокон; μ – угол армирования угловых волокон (рис. 2); $\mu_0 = \mu(x_0)$; \bar{w} – прогиб; \bar{t} – время; r – радиальная координата; $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}$ – интенсивности упаковки радиальных, окружных и угловых волокон и их значения при $x = x_0$; H – толщина пластины; σ_0^0, H_0, t_0 – величины обезразмеривания.

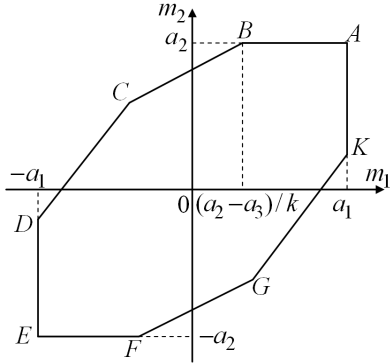


Рисунок 1

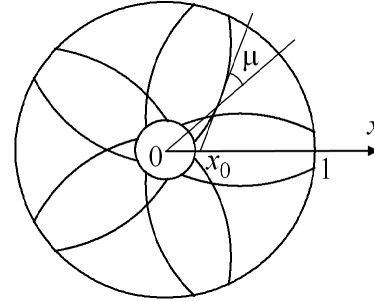


Рисунок 2

При армировании волокнами постоянного сечения для радиальных и окружных волокон имеем выражения:

$$\omega_1(x) = \omega_{01}x_0 / x, \quad \omega_2 = \omega_2(x). \quad (2)$$

Для различных структур углового армирования известны соотношения [4]:

а) структура в форме спирали Архимеда:

$$\omega_3(x) = \frac{\omega_{03} \sqrt{x_0^2 + (xtg\mu)^2}}{x\sqrt{1 + tg^2\mu}}, \quad tg\mu = \frac{xtg\mu_0}{x_0}; \quad (3)$$

б) структура в форме логарифмические спирали:

$$\omega_3(x) = \omega_{03}x_0 / x, \quad \mu(x) = \mu_0 = const; \quad (4)$$

в) структура в форме “спицы велосипеда”:

$$\omega_3(x) = \frac{\omega_{03}x_0 \cos \mu_0}{\sqrt{x^2 - (x_0 \sin \mu_0)^2}}, \quad \sin \mu = \frac{x_0}{x} \sin \mu_0. \quad (5)$$

Безразмерная плотность армированной пластины будет равна

$$\rho(x) = \rho_0\Omega + \rho_1\omega_1 + \rho_2\omega_2 + 2\rho_3\omega_3 \quad (6)$$

и уравнения движения имеют вид:

$$(xm_1)' - m_2 = xQ, \quad (7)$$

$$(xQ)' + xp_n(x,t) = \alpha\rho(x)x\ddot{v}, \quad (8)$$

$$\rho_i = \bar{\rho}_i / \rho_0^0, \quad Q = \bar{Q}R / M_0^0, \quad p_n = \bar{P}R^2 / M_0^0, \quad \alpha = h\rho_0^0 R^4 / (t_0^2 M_0^0),$$

где $\bar{\rho}_i$ ($i = 0, \dots, 3$) – плотности связующего материала и материалов радиальных, окружных и угловых волокон, ρ_0^0 – обезразмеривающий параметр плотности, \bar{Q} – перерезывающая сила, \bar{P} – нагрузка, распределенная по поверхности пластины, зависящая в общем случае от времени и от радиальной координаты. Для нагрузки примем зависимость

$$p_n(x,t) = p\varphi_1(x)\varphi_2(t), \quad (9)$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(t)$ – заданные функции и $\varphi_2(t)$ – невозрастающая, p – амплитуда нагрузки.

Соотношения (1) – (9) представляют собой замкнутую систему уравнений, позволяющую в принципе решать задачи динамического изгиба армированных на отрезке $x_0 \leq x \leq 1$ кольцевых пластин при любых осесимметричных структурах армирования, условиях закрепления краев и произ-

вольных заданных функциях $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(t)$. При этом следует иметь в виду, что в пределах отрезка $x_0 \leq x \leq 1$ могут быть реализованы различные режимы, определяемые законами (1). Для каждого из них на соответствующем отрезке $x_0 \leq x_j \leq x \leq x_{j+1} \leq 1$ можно построить аналитическое решение.

Границы участков могут быть определены при выполнении на них условий сопряжения функций m_1 , Q , v , \dot{v} . Учитывая, что в динамических задачах эти границы участков меняются во времени, выписать общее решение, описывающее все возможные ситуации нагружения и закрепления пластин, технически сложно. Поэтому решение на основе соотношений (1) – (9) для каждого конкретного случая удобнее получать отдельно.

В качестве примера рассмотрим шарнирно закрепленную на внешнем контуре, армированную на отрезке $x_0 \leq x \leq 1$ кольцевую пластину при воздействии нагрузки взрывного типа и при наличии на участке $0 \leq x \leq x_0$ жесткой недеформированной шайбы с безразмерной удельной плотностью ρ_c . В этом случае на отрезке $x_0 \leq x \leq 1$ реализуется пластическое состояние AB на рис. 1, описываемое уравнениями:

$$m_2(x, t) = a_2(x), \quad \dot{v}'' = 0, \quad [a_2(x) - a_3(x)] / k \leq m_1(x, t) \leq a_1(x). \quad (10)$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} v(x, t) &= V(t)(1-x)/(1-x_0), \quad xQ(x, t) = x_0Q(x_0, t) + \ddot{V}J_1(x) - p\varphi_2(t)J_2(x), \\ x_0Q(x_0, t) &= \alpha \ddot{V} \rho_c x_0^2 / 2 - p\varphi_2(t) \int_0^{x_0} x\varphi_1(x) dx, \quad (xm_1)' = a_2 + \ddot{V}(t)J_1(x) - p\varphi_2(t)J_2(x), \\ xm_1 &= x_0a_1(x_0) + J_3(x) + \ddot{V}(t)J_4(x) - p\varphi_2(t)J_5(x). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \alpha \left[\rho_c \frac{x_0^2}{2} + \frac{1}{1-x_0} \int_{x_0}^x \rho(y)y(1-y) dy \right], \quad J_2(x) = \int_0^x \varphi_1(y) y dy, \\ J_3(x) &= \int_{x_0}^x a_2(y) dy, \quad J_4(x) = \int_{x_0}^x J_1(y) dy, \quad J_5(x) = \int_{x_0}^x J_2(y) dy, \end{aligned}$$

$V(t)$ – безразмерный прогиб шайбы.

Из выражения (11) и граничного условия $m_1(1, t) = 0$ имеем уравнение

$$\begin{aligned} \ddot{V}(t) &= p\varphi_2(t)d_1 - d_2, \\ d_1 &= J_5(1) / J_4(1), \quad d_2 = [J_3(1) + x_0a_1(x_0)] / J_4(1). \end{aligned} \quad (12)$$

В момент начала движения $t = 0$ из равенства (12) и условия $\dot{V}(0) = 0$ определяется минимальное значение p :

$$p \geq p_0 = d_2 / [\varphi_2(0)d_1]. \quad (13)$$

Решение уравнения (12) при начальных условиях $\dot{V}(0) = V(0) = 0$ дает соотношения:

$$\dot{V}(t) = pd_1I_1 - d_2t, \quad V(t) = pd_1I_2 - d_2 \frac{t^2}{2}, \quad (I_1(t) = \int_0^t \varphi_2(\tau) d\tau, \quad I_2(t) = \int_0^t I_1(\tau) d\tau).$$

Движение пластины прекратится в момент времени t_f , когда $\dot{V}(t_f) = 0$. Тогда максимальный остаточный прогиб пластины будет равен

$$V_f = V(t_f) = pd_1I_2(t_f) - d_2t_f^2 / 2. \quad (14)$$

В соответствии с неравенством (10) данное решение будет справедливо при выполнении неравенства

$$a_2(x) - a_3(x) \leq 0 \quad (x_0 \leq x \leq 1). \quad (15)$$

Для структур армирования, у которых нарушается неравенство (15), на отрезке $x_0 \leq x \leq 1$ будут существовать два пластических режима. Это будет уже другая задача, которая также несложно решается аналитически; но ее решение здесь не приводится в виду ограниченного объема статьи.

Для рассмотренного здесь решения из (11), (12) получим, что распределение изгибающего момента описывается соотношением

$$xm_1(x,t) = x_0 a_1(x_0) + J_3(x) + p\varphi_2(t)[d_1 J_4(x) - J_5(x)] - d_2 J_4(x),$$

и в соответствии с (10) на всем отрезке $x_0 \leq x \leq 1$ в течение всего рассматриваемого периода $0 \leq t \leq t_f$ должно быть $m_1(x,t) \leq a_1(x)$. Для нагрузок взрывного типа, когда $\varphi_2(t)$ – невозрастающая функция, данное требование будет выполняться, если $m_1(x,0)$ будет невозрастающей функцией от координаты x , то есть $m_1'(x,0) \leq 0$. Если справедливо $m_1'(x_0,0) = 0$, то при этом должно выполняться неравенство $m_1''(x_0,0) < 0$. Таким образом, из условия $m_1(x_0,0) = \min_{x_0 \leq x \leq 1} m_1(x,0)|_{p=p_1}$ опреде-

ляется величина p_1 – максимальное значение p для рассматриваемой задачи. Это означает, что при учете (13), данное решение реализуется при амплитудах нагрузок

$$p_0 \leq p \leq p_1.$$

Нагрузки с амплитудой в интервале $p_0 \leq p \leq p_1$ назовем “средними” нагрузками, а при $p > p_1$ – “высокими”. При “высоких” нагрузках в пластине будут развиваться во времени режимы A и AB (рис. 1). Для каждого из них можно выписать решение в аналитической форме и провести соответствующий анализ развития деформирования во времени. Но ввиду громоздкости получающихся соотношений мы их здесь не приводим.

На рис. 3, 4 изображена зависимость предельной амплитуды p_0 (13) от безразмерного размера шайбы x_0 в случае углового армирования по законам (4) – кривая 1 и (5) – кривая 2, при условии

$$\text{одинакового расхода арматуры: } \int_{x_0}^1 \omega_3(x) dx = \text{const}.$$

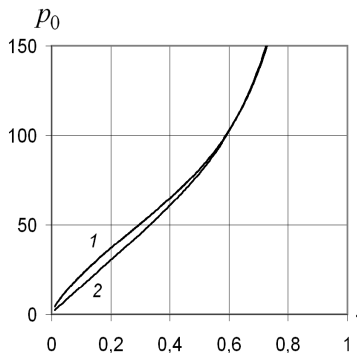


Рисунок 3

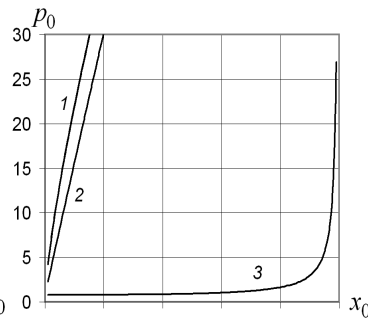


Рисунок 4

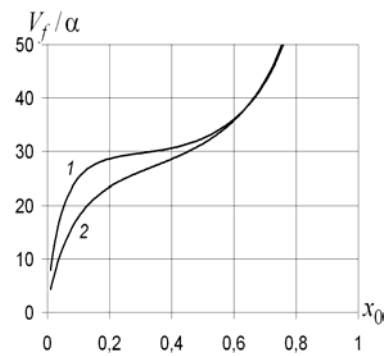


Рисунок 5

Поскольку для бетона предел текучести на растяжение намного меньше, чем на сжатие, то при расчете было принято $k = 1/14$ ([5]). Также считалось $s = 1$, $s_3 = 50$, $\omega_{03} = 0,25$ (для случая армирования (4)), $\mu_0 = \pi/6$, $\rho_0 = 1$, $\rho_3 = \rho_c = 4$. Пластина нагружена равномерно распределенной по поверхности взрывной нагрузкой с прямоугольным импульсом: $\varphi_1(x) \equiv 1$; $\varphi_2(t) = 1$ при $0 \leq t \leq 1$ и $\varphi_2(t) = 0$ при $t > 1$. Кривая 3 на рис. 4 получена для пластины без армирования. На рис. 5 изображена зависимость безразмерного максимального остаточного прогиба пластины V_f / α (14) от величины x_0 при амплитуде нагрузки $p = 2p_0$ (“средние” нагрузки); здесь кривая 1 относится к закону армирования (4), кривая 2 – к закону (5).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00121-а).

Резюме

Разработан общий метод расчета динамической повреждаемости армированных железобетонных круглых и кольцевых пластин в рамках модели жесткопластического материала, учитывающий разные свойства бетона на растяжение и сжатие. В качестве примера построено точное решение динамической задачи по определению предельной нагрузки и остаточных прогибов шарнирно опертой по внешнему контуру кольцевой пластины с центральной жесткой вставкой, под действием распределенной по поверхности нагрузки. Расчеты показывают, что при одинаковом расходе арматуры изменение структуры армирования влияет как на несущую способность таких пластин, так и на степень их остаточной повреждаемости.

Литература

1. Perzyna P. Dynamic load carrying capacity of circular plate // *Archiwum Mechaniki Stosowanej*. – 1958. – V. 10, No 5. – P. 635-647.
2. Nemirovsky Ju.V. Yield surfaces for reinforced concrete axi-symmetrical plates and shells // *Archiwum Inzynierii Ladowej*. – 1974. – Т. XX. – No 4 – P. 575 – 590.
3. Nemirovsky Ju.V., Resnikoff B.S. On limit equilibrium of reinforced slabs and effectiveness of their reinforcement // *Archiwum Inzynierii Ladowej*. – 1975. – Т. XXI. – No 1. – P. 57 – 67.
4. Вохмянин И.Т., Немировский Ю.В. Особенности продольно-поперечного изгиба трехслойных кольцевых пластинок с несимметричными структурами армирования // Краевые задачи и математическое моделирование. Сб. трудов 8-й Всерос. научной конференции. 1 – 3 декабря 2006 г., Новокузнецк, т. 1 / НФИ Кем. ГУ; под общ. ред. В.О. Каледина / – Новокузнецк, 2006, с. 25 – 31.
5. Сахновский К.В. Железобетонные конструкции. М.: Гос. из-во литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1959. – 840 с.

Summary

A general method of calculation of the dynamic damageability of reinforced concrete circular and annular plates in the framework of the model of rigid-plastic material, taking into account the different properties of concrete in tension and compression, is developed. As an example, the exact solution for the dynamic problem of the definition of limit load and final deflections of the hingedly supported annular plate with central rigid insert, under the influence of the load distributed on the surface of plate, is built. Calculations show that changing the structure of reinforcement with the same amount of reinforcement affect the carrying capacity of such plates, and on the degree of their final damage.

Поступила в редакцию 09.10.2012