

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Минск 2013

28

ISSN 0134-9635

Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Международный
научно-технический сборник

Основан в 1975 году

Выпуск 28

Минск
БНТУ
2013

УДК [531+621.01:531.8](082)
ББК 22.21я43
30.12я43
Т 33

Редакция сборника

Президиум редакции:

П.А. Витязь, М.С. Высоцкий, Л.Г. Красневский,
Ю.М. Плескачевский, Б.М. Хрусталеv

Международный совет редакции:

J. Awrejcewicz (Польша), Г.Я. Беляев (Беларусь), J. Grabski (Польша), G. Gudehus (Германия), Д.Д. Ивлев (Россия), В.В. Лобода (Украина),
Н.Ф. Морозов (Россия), Ж.А. Мрочек (Беларусь), Н.К. Мышкин (Беларусь),
Ф.А. Романюк (Беларусь), К. Циммерман (Германия), А.И. Шашкин (Россия),
Г.П. Черепанов (США), А.М. Якимович (Беларусь)

Редакционная коллегия:

Ю.В. Василевич (зам. председателя), В.С. Вихренко,
М.А. Журавков, М.Г. Ботогова, И.С. Куликов, А.Т. Скойбеда,
А.В. Чигарев (председатель, главный редактор), А.М. Якимович, П.И. Ширвель (уч. секретарь, технический редактор), А.Р. Трухильо-Липская (компьютерная верстка)
Теоретическая и прикладная механика: А.В. Чигарев, Г.И. Михасев, М.А. Журавков
Механика материалов и структур: Ю.В. Василевич, М.И. Кулак, Н.В. Спиридонов
Мехатроника и интеллектуальные системы: В.М. Колешко, Л.Г. Красневский
Механика машин: В.Б. Альгин, А.Т. Скойбеда, В.К. Шелег
Приборы точной механики: И.Е. Зуйков, М.Г. Киселев, В.Л. Соломахо
Механика конструкций: А.Н. Борисевич, С.В. Босаков, Т.М. Пецольд, Э.И. Старовойтов

Адрес редакции:

220013 Минск, проспект Независимости, 65
БНТУ, кафедра «Теоретическая механика»
Тел.: (+375 17) 292 74 25, 299 92 52
E-mail: theormech@rambler.ru
seminar.mechatronics@gmail.com

В сборнике печатаются оригинальные научные результаты по механике, компьютерному моделированию, мехатронике и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. В сборнике содержатся научные и научно-методические работы преподавателей, научных сотрудников вузов и научных учреждений. Включены также материалы, обсуждавшиеся на I международном семинаре-коллоквиуме «Моделирование и компьютеринг в механических и мехатронных системах» и на XLIII Республиканском научно-методическом семинаре с международным участием «Применение методов компьютерной механики в инженерии, науке, образовании».

Тематика статей сборника охватывает широкий круг вопросов. Рассматриваются различные подходы к внедрению информационных технологий в преподавании курсов «Теоретическая механика», «Механика материалов», «Механика предельного состояния», «Механика деформируемых тел», «Теория механизмов и машин» и др. Излагаются новые точки зрения на преподавание этих курсов.

Сборник будет полезен для преподавателей высших учебных заведений, научно-инженерных работников, аспирантов, магистрантов и студентов старших курсов технических вузов.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КРУГЛЫХ И КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН

Немировский Ю. В., Романова Т. П.

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск

Изучение динамического поведения элементов конструкций при воздействии взрывных нагрузок имеет большое значение для оценки степени их повреждаемости. В работе предложена общая методика, которая на основе модели жесткопластического тела позволяет рассчитывать динамическое поведение железобетонных кольцевых и круглых пластин при различных структурах армирования. Методика может быть применена в различных инженерных расчетах.

1. Рассмотрим динамическое поведение круглых железобетонных пластин радиуса R с жесткой шайбой или отверстием радиуса R_0 при различных условиях закрепления и воздействии нагрузок взрывного типа. "Взрывные" нагрузки $P(\tau, y)$ характеризуются тем, что мгновенно достигают

максимального значения, а затем убывают, и удовлетворяют условию $\int_{\tau_n}^{\tau} P(s, y) ds \geq (\tau - \tau_n)P(\tau, y)$,

где τ – текущее время, τ_n – время начала действия нагрузки, y – пространственная координата [1]. Предполагается, что пластина содержит по толщине большое количество армированных слоев и связующих их изотропных прослоек из бетона. Связующий материал (бетон) описывается моделью идеального жесткопластического материала с условием пластичности типа модифицированного условия Треска для материала, равно сопротивляющегося на растяжение и сжатие. Считается, что волокна арматуры деформируются, как одномерные элементы. Волокна арматуры в общем случае располагаются в виде двух семейств криволинейных траекторий, симметричных относительно радиуса (угловое армирование), в радиальном и окружном направлении. Тогда условие пластичности и закон пластического течения для таких армированных пластин (рис. 1) в безразмерном виде описываются соотношениями [2, 3]:

$$\begin{aligned} AB: m_2 = a_2, \dot{\kappa}_1 = 0, \dot{\kappa}_2 > 0; \quad BC: m_2 = km_1 + a_3, \dot{\kappa}_1 < 0, \dot{\kappa}_2 = -\dot{\kappa}_1 / k > 0; \quad (1) \\ CD: m_2 = m_1 / k + a_4, \dot{\kappa}_1 < 0, \dot{\kappa}_2 = -k\dot{\kappa}_1 > 0; \quad DE: m_1 = -a_1, \dot{\kappa}_1 < 0, \dot{\kappa}_2 = 0; \\ EF: m_2 = -a_2, \dot{\kappa}_1 = 0, \dot{\kappa}_2 < 0; \quad FG: m_2 = km_1 - a_3, \dot{\kappa}_1 > 0, \dot{\kappa}_2 = -\dot{\kappa}_1 / k < 0; \\ GK: m_2 = m_1 / k - a_4, \dot{\kappa}_1 > 0, \dot{\kappa}_2 = -k\dot{\kappa}_1 < 0; \quad AK: m_1 = a_1, \dot{\kappa}_1 > 0, \dot{\kappa}_2 = 0; \end{aligned}$$

$$a_i = \frac{2h^2(s\Omega + \omega_i s_i + \omega_i^y s_3)(ks\Omega + \omega_i s_i + \omega_i^y s_3)}{(k+1)s\Omega + 2\omega_i s_i + 2\omega_i^y s_3}, \quad (i=1, 2),$$

$$a_j = 2h^2 \Sigma_{j-2} \left[1 - \frac{1}{2 + \Omega s(k-1) / \Sigma_{j-2}} \right], \quad (j=3, 4), \quad \Sigma_1 = s\Omega + \omega_2 s_2 + \omega_2^y s_3 s_{g1} + k(\omega_1 s_1 - \omega_1^y s_3 s_{g1}),$$

$$\Sigma_2 = s\Omega + \omega_1 s_1 - \omega_1^y s_3 s_{g2} + k(\omega_2 s_2 + \omega_2^y s_3 s_{g2}), \quad s_{gi} = \text{sign}(-k^{-2i+3} + \text{tg}^2 \mu) \quad (i=1, 2),$$

где

$$\begin{aligned} m_i = \bar{M}_i / M_0^0, \quad M_0^0 = \sigma_0^0 H_0^2 / 4, \quad s = \sigma_0 / \sigma_0^0, \quad s_i = \sigma_{0i} / \sigma_0^0, \quad s_3 = \sigma_{03} / \sigma_0^0, \\ \Omega = 1 - \omega_1 - \omega_2 - 2\omega_3, \quad \omega_1^y = 2\omega_3 \cos^2 \mu, \quad \omega_2^y = 2\omega_3 \sin^2 \mu, \quad h = H / H_0, \\ \dot{\kappa}_1 = -\dot{v}'', \quad \dot{\kappa}_2 = -\dot{v}' / x, \quad x = r / R, \quad x_0 = R_0 / R, \quad v = (H_0 / R)^2 w, \quad w = \bar{w} / H_0, \end{aligned}$$

$$(*)' = \partial(*) / \partial x, \quad \dot{(*)} = \partial(*) / \partial t, \quad t = \bar{t} / t_0,$$

\bar{M}_1, \bar{M}_2 – радиальный и окружной изгибные моменты; m_1, m_2 – их безразмерные значения; $k\sigma_0$ и σ_0 – пределы текучести связующего материала на растяжение и сжатие ($0 < k < 1$), $\sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{03}$ –

пределы текучести материалов радиальных, окружных и угловых волокон; μ – угол армирования угловых волокон (рис. 2); $\mu_0 = \mu(x_0)$; \bar{w} – прогиб; \bar{t} – время; r – радиальная координата; $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}$ – интенсивности упаковки радиальных, окружных и угловых волокон и их значения при $x = x_0$; H – толщина пластины; σ_0^0, H_0, t_0 – величины обезразмеривания.

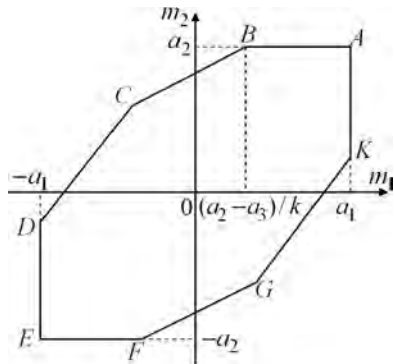


Рисунок 1

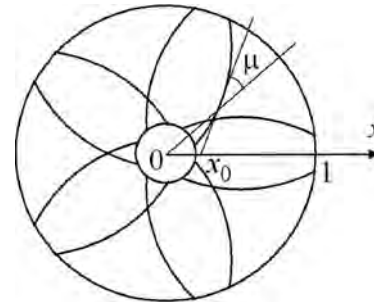


Рисунок 2

При армировании волокнами постоянного сечения для радиальных и окружных волокон имеем выражения:

$$\omega_1(x) = \omega_{01}x_0 / x, \quad \omega_2 = \omega_2(x). \quad (2)$$

Для различных структур углового армирования известны соотношения [4]:

а) структура в форме спирали Архимеда:

$$\omega_3(x) = \frac{\omega_{03} \sqrt{x_0^2 + (xtg\mu)^2}}{x\sqrt{1 + tg^2\mu}}, \quad tg\mu = \frac{xtg\mu_0}{x_0}; \quad (3)$$

б) структура в форме логарифмические спирали:

$$\omega_3(x) = \omega_{03}x_0 / x, \quad \mu(x) = \mu_0 = \text{const}; \quad (4)$$

в) структура в форме “спицы велосипеда”:

$$\omega_3(x) = \frac{\omega_{03}x_0 \cos\mu_0}{\sqrt{x^2 - (x_0 \sin\mu_0)^2}}, \quad \sin\mu = \frac{x_0}{x} \sin\mu_0. \quad (5)$$

Безразмерная плотность армированной пластины будет равна

$$\rho(x) = \rho_0\Omega + \rho_1\omega_1 + \rho_2\omega_2 + 2\rho_3\omega_3 \quad (6)$$

и уравнения движения имеют вид:

$$(xm_1)' - m_2 = xQ, \quad (7)$$

$$(xQ)' + xp_n(x,t) = \alpha\rho(x)x\ddot{v}, \quad (8)$$

$$\rho_i = \bar{\rho}_i / \rho_0^0, \quad Q = \bar{Q}R / M_0^0, \quad p_n = \bar{P}R^2 / M_0^0, \quad \alpha = h\rho_0^0 R^4 / (t_0^2 M_0^0),$$

где $\bar{\rho}_i$ ($i = 0, \dots, 3$) – плотности связующего материала и материалов радиальных, окружных и угловых волокон, ρ_0^0 – обезразмеривающий параметр плотности, \bar{Q} – перерезывающая сила, \bar{P} – нагрузка, распределенная по поверхности пластины, зависящая в общем случае от времени и от радиальной координаты. Для нагрузки примем зависимость

$$p_n(x,t) = p\phi_1(x)\phi_2(t), \quad (9)$$

где $\phi_1(x)$, $\phi_2(t)$ – заданные функции и $\phi_2(t)$ – невозрастающая, p – амплитуда нагрузки.

Соотношения (1) – (9) представляют собой замкнутую систему уравнений, позволяющую в принципе решать задачи динамического изгиба армированных на отрезке $x_0 \leq x \leq 1$ кольцевых пластин при любых осесимметричных структурах армирования, условиях закрепления краев и произ-

вольных заданных функциях $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(t)$. При этом следует иметь в виду, что в пределах отрезка $x_0 \leq x \leq 1$ могут быть реализованы различные режимы, определяемые законами (1). Для каждого из них на соответствующем отрезке $x_0 \leq x_j \leq x \leq x_{j+1} \leq 1$ можно построить аналитическое решение.

Границы участков могут быть определены при выполнении на них условий сопряжения функций m_1 , Q , v , \dot{v} . Учитывая, что в динамических задачах эти границы участков меняются во времени, выписать общее решение, описывающее все возможные ситуации нагружения и закрепления пластин, технически сложно. Поэтому решение на основе соотношений (1) – (9) для каждого конкретного случая удобнее получать отдельно.

В качестве примера рассмотрим шарнирно закрепленную на внешнем контуре, армированную на отрезке $x_0 \leq x \leq 1$ кольцевую пластину при воздействии нагрузки взрывного типа и при наличии на участке $0 \leq x \leq x_0$ жесткой недеформированной шайбы с безразмерной удельной плотностью ρ_c . В этом случае на отрезке $x_0 \leq x \leq 1$ реализуется пластическое состояние AB на рис. 1, описываемое уравнениями:

$$m_2(x, t) = a_2(x), \quad \dot{v}'' = 0, \quad [a_2(x) - a_3(x)] / k \leq m_1(x, t) \leq a_1(x). \quad (10)$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} v(x, t) &= V(t)(1-x)/(1-x_0), \quad xQ(x, t) = x_0Q(x_0, t) + \ddot{V}J_1(x) - p\varphi_2(t)J_2(x), \\ x_0Q(x_0, t) &= \alpha \ddot{V} \rho_c x_0^2 / 2 - p\varphi_2(t) \int_0^{x_0} x\varphi_1(x) dx, \quad (xm_1)' = a_2 + \ddot{V}(t)J_1(x) - p\varphi_2(t)J_2(x), \\ xm_1 &= x_0a_1(x_0) + J_3(x) + \ddot{V}(t)J_4(x) - p\varphi_2(t)J_5(x). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \alpha \left[\rho_c \frac{x_0^2}{2} + \frac{1}{1-x_0} \int_{x_0}^x \rho(y)y(1-y) dy \right], \quad J_2(x) = \int_0^x \varphi_1(y)y dy, \\ J_3(x) &= \int_{x_0}^x a_2(y) dy, \quad J_4(x) = \int_{x_0}^x J_1(y) dy, \quad J_5(x) = \int_{x_0}^x J_2(y) dy, \end{aligned}$$

$V(t)$ – безразмерный прогиб шайбы.

Из выражения (11) и граничного условия $m_1(1, t) = 0$ имеем уравнение

$$\begin{aligned} \ddot{V}(t) &= p\varphi_2(t)d_1 - d_2, \\ d_1 &= J_5(1)/J_4(1), \quad d_2 = [J_3(1) + x_0a_1(x_0)]/J_4(1). \end{aligned} \quad (12)$$

В момент начала движения $t = 0$ из равенства (12) и условия $\dot{V}(0) = 0$ определяется минимальное значение p :

$$p \geq p_0 = d_2 / [\varphi_2(0)d_1]. \quad (13)$$

Решение уравнения (12) при начальных условиях $\dot{V}(0) = V(0) = 0$ дает соотношения:

$$\dot{V}(t) = pd_1I_1 - d_2t, \quad V(t) = pd_1I_2 - d_2 \frac{t^2}{2}, \quad (I_1(t) = \int_0^t \varphi_2(\tau) d\tau, \quad I_2(t) = \int_0^t I_1(\tau) d\tau).$$

Движение пластины прекратится в момент времени t_f , когда $\dot{V}(t_f) = 0$. Тогда максимальный остаточный прогиб пластины будет равен

$$V_f = V(t_f) = pd_1I_2(t_f) - d_2t_f^2 / 2. \quad (14)$$

В соответствии с неравенством (10) данное решение будет справедливо при выполнении неравенства

$$a_2(x) - a_3(x) \leq 0 \quad (x_0 \leq x \leq 1). \quad (15)$$

Для структур армирования, у которых нарушается неравенство (15), на отрезке $x_0 \leq x \leq 1$ будут существовать два пластических режима. Это будет уже другая задача, которая также несложно решается аналитически; но ее решение здесь не приводится в виду ограниченного объема статьи.

Для рассмотренного здесь решения из (11), (12) получим, что распределение изгибающего момента описывается соотношением

$$xm_1(x,t) = x_0 a_1(x_0) + J_3(x) + p\varphi_2(t)[d_1 J_4(x) - J_5(x)] - d_2 J_4(x),$$

и в соответствии с (10) на всем отрезке $x_0 \leq x \leq 1$ в течение всего рассматриваемого периода $0 \leq t \leq t_f$ должно быть $m_1(x,t) \leq a_1(x)$. Для нагрузок взрывного типа, когда $\varphi_2(t)$ – невозрастающая функция, данное требование будет выполняться, если $m_1(x,0)$ будет невозрастающей функцией от координаты x , то есть $m_1'(x,0) \leq 0$. Если справедливо $m_1'(x_0,0) = 0$, то при этом должно выполняться неравенство $m_1''(x_0,0) < 0$. Таким образом, из условия $m_1(x_0,0) = \min_{x_0 \leq x \leq 1} m_1(x,0)|_{p=p_1}$ опреде-

ляется величина p_1 – максимальное значение p для рассматриваемой задачи. Это означает, что при учете (13), данное решение реализуется при амплитудах нагрузок

$$p_0 \leq p \leq p_1.$$

Нагрузки с амплитудой в интервале $p_0 \leq p \leq p_1$ назовем “средними” нагрузками, а при $p > p_1$ – “высокими”. При “высоких” нагрузках в пластине будут развиваться во времени режимы A и AB (рис. 1). Для каждого их них можно выписать решение в аналитической форме и провести соответствующий анализ развития деформирования во времени. Но ввиду громоздкости получающихся соотношений мы их здесь не приводим.

На рис. 3, 4 изображена зависимость предельной амплитуды p_0 (13) от безразмерного размера шайбы x_0 в случае углового армирования по законам (4) – кривая 1 и (5) – кривая 2, при условии

$$\text{одинакового расхода арматуры: } \int_{x_0}^1 \omega_3(x) dx = \text{const}.$$

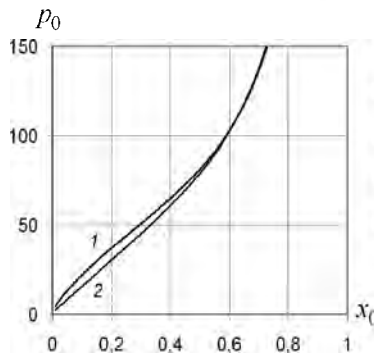


Рисунок 3

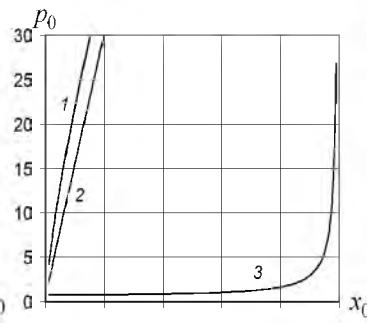


Рисунок 4

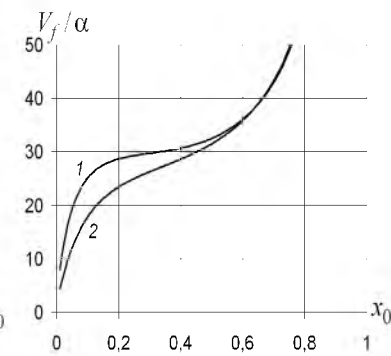


Рисунок 5

Поскольку для бетона предел текучести на растяжение намного меньше, чем на сжатие, то при расчете было принято $k = 1/14$ ([5]). Также считалось $s = 1$, $s_3 = 50$, $\omega_{03} = 0,25$ (для случая армирования (4)), $\mu_0 = \pi/6$, $\rho_0 = 1$, $\rho_3 = \rho_c = 4$. Пластина нагружена равномерно распределенной по поверхности взрывной нагрузкой с прямоугольным импульсом: $\varphi_1(x) \equiv 1$; $\varphi_2(t) = 1$ при $0 \leq t \leq 1$ и $\varphi_2(t) = 0$ при $t > 1$. Кривая 3 на рис. 4 получена для пластины без армирования. На рис. 5 изображена зависимость безразмерного максимального остаточного прогиба пластины V_f / α (14) от величины x_0 при амплитуде нагрузки $p = 2p_0$ (“средние” нагрузки); здесь кривая 1 относится к закону армирования (4), кривая 2 – к закону (5).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00121-а).

Резюме

Разработан общий метод расчета динамической повреждаемости армированных железобетонных круглых и кольцевых пластин в рамках модели жесткопластического материала, учитывающий разные свойства бетона на растяжение и сжатие. В качестве примера построено точное решение динамической задачи по определению предельной нагрузки и остаточных прогибов шарнирно опертой по внешнему контуру кольцевой пластины с центральной жесткой вставкой, под действием распределенной по поверхности нагрузки. Расчеты показывают, что при одинаковом расходе арматуры изменение структуры армирования влияет как на несущую способность таких пластин, так и на степень их остаточной повреждаемости.

Литература

1. Perzyna P. Dynamic load carrying capacity of circular plate // *Archiwum Mechaniki Stosowanej*. – 1958. – V. 10, No 5. – P. 635-647.
2. Nemirovsky Ju.V. Yield surfaces for reinforced concrete axi-symmetrical plates and shells // *Archiwum Inzynierii Ladowej*. – 1974. – Т. XX. – No 4 – P. 575 – 590.
3. Nemirovsky Ju.V., Resnikoff B.S. On limit equilibrium of reinforced slabs and effectiveness of their reinforcement // *Archiwum Inzynierii Ladowej*. – 1975. – Т. XXI. – No 1. – P. 57 – 67.
4. Вохмянин И.Т., Немировский Ю.В. Особенности продольно-поперечного изгиба трехслойных кольцевых пластинок с несимметричными структурами армирования // Краевые задачи и математическое моделирование. Сб. трудов 8-й Всерос. научной конференции. 1 – 3 декабря 2006 г., Новокузнецк, т. 1 / НФИ Кем. ГУ; под общ. ред. В.О. Каледина / – Новокузнецк, 2006, с. 25 – 31.
5. Сахновский К.В. Железобетонные конструкции. М.: Гос. из-во литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1959. – 840 с.

Summary

A general method of calculation of the dynamic damageability of reinforced concrete circular and annular plates in the framework of the model of rigid-plastic material, taking into account the different properties of concrete in tension and compression, is developed. As an example, the exact solution for the dynamic problem of the definition of limit load and final deflections of the hingedly supported annular plate with central rigid insert, under the influence of the load distributed on the surface of plate, is built. Calculations show that changing the structure of reinforcement with the same amount of reinforcement affect the carrying capacity of such plates, and on the degree of their final damage.

Поступила в редакцию 09.10.2012

ИЗГИБ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ СО СТУПЕНЧАТО-ПЕРЕМЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ

¹Плескачевский Ю. М., ²Старовойтова Е.Э.

¹Гомельский филиал НАН Беларуси

²Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

Введение. Тонкостенные композиционные конструкции, усиленные ребрами, накладками и вставками или же ослабленные вырезами или перфорацией, относятся одному из самых распространенных видов комбинированных конструкций, так как они позволяют оптимально распределить материал в сооружениях при удовлетворении прочности и жесткости. В связи с этим актуальной является проблема их расчета при различных внешних воздействиях и внутренней конфигурации. Деформирование и распространение волн в неоднородных элементах конструкций с гладкой конфигурацией, исследовано в работах [1–4]. Исследование НДС однородных тонкостенных конструкций ступенчато-переменной толщины содержится в работах [5, 6]. В публикациях [7–9] рассмотрено деформирование упругого трехслойного стержня с нерегулярной границей при гладких и локальных нагрузках. Здесь исследован изгиб упругопластического трехслойного стержня со ступенчато-переменной границей.

Постановка краевой задачи. Рассматривается несимметричный по толщине упругопластический трехслойный стержень с жестким наполнителем (рис. 1). Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью наполнителя. Для описания кинематики пакета используется гипотеза «ломаной» нормали: в тонких несущих слоях 1, 2 справедливы гипотезы Кирхгофа, в несжимаемом по толщине сравнительно толстом наполнителе 3 нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(x)$. Деформации считаются малыми. На внешний слой 1 стержня действует распределенная силовая нагрузка $q(x), p(x)$. Через $w(x)$ и $u(x)$ обозначены прогиб и продольное перемещение срединной плоскости наполнителя. Так как материалы всех слоев несжимаемы в поперечном направлении, то прогиб во всех точках поперечного сечения стержня одинаков. На торцах предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительному сдвигу слоев, но не мешающих деформированию из своей плоскости. Через h_k обозначена толщина k -го слоя ($k = 1, 2, 3$), при этом

$$h_3 = 2c, \quad h_2 = h_{20} + h_{21}H_0(x - x_0), \quad (1)$$

где $H_0(x_0)$ – функция Хевисайда

$$H_0(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

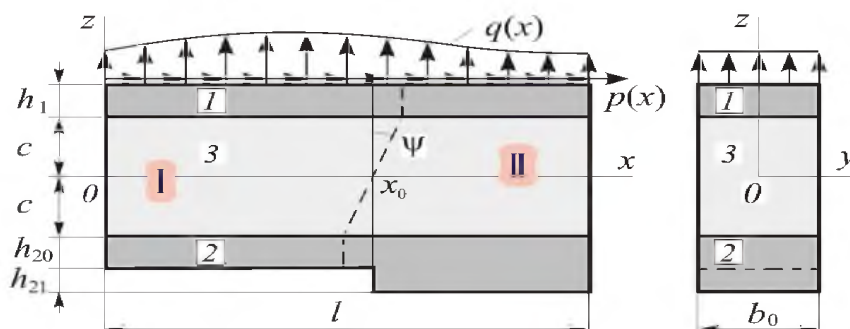


Рисунок 1 – Расчетная схема стержня с нерегулярной границей

Введенные геометрические гипотезы позволяют выразить продольные перемещения в слоях $u^{(k)}$ через три искомые функции $u(x), \psi(x)$ и $w(x)$:

$$u^{(1)} = u + c\psi - zw_{,x} \quad (c \leq z \leq c + h_1), \quad u^{(3)} = u + z\psi - zw_{,x} \quad (-c \leq z \leq c),$$

$$u^{(2)} = u - c\psi - zw_{,x} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \quad (2)$$

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате; z – координата рассматриваемого волокна.

Компоненты тензора деформаций в слоях $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ ($i, j = x, z$) следуют из соотношений Коши и перемещений (2). В слоях стержня вводятся внутренние силы и моменты:

$$N^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} dz, \quad M^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} z dz, \quad Q^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} dz, \quad (3)$$

где $\sigma_x^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$ – компоненты тензора напряжений, b_0 – ширина поперечного сечения стержня.

Уравнения равновесия трехслойного стержня в усилиях (3) и силовые граничные условия следуют из принципа возможных перемещений Лагранжа:

$$\delta A = \delta W, \quad (4)$$

где δA и δW – вариации работ внешних сил и внутренних напряжений

$$\delta A = \iint_S (p\delta u + q\delta w) dS = b_0 \int_0^l (p\delta u + q\delta w) dx.$$

$$\delta W = \iint_S \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (y_x^{(k)} \delta \varepsilon_x^{(k)} + 2\sigma_{xz}^{(3)} \delta \varepsilon_{xz}^{(3)} \delta_{k3}) dz dS = b_0 \int_0^l \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} \delta \varepsilon_x^{(k)} dz + 2 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \delta \varepsilon_{xz}^{(3)} dz \right] dx.$$

В результате получаем систему дифференциальных уравнений равновесия трехслойного стержня в усилиях:

$$\begin{cases} N_{,x} + b_0 p = 0 \\ H_{,x} - Q = 0 \\ M_{,xx} + b_0 q = 0 \end{cases}. \quad (5)$$

При этом должны выполняться следующие силовые граничные условия:

$$\begin{aligned} x = 0: & N = N_0, M = M_0, M_{,x} = Q_0, H = 0, \\ x = l: & N = N_l, M = M_l, M_{,x} = Q_l, H = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В слоях стержня используются физические уравнения состояния теории малых упругопластических деформаций Ильюшина ($k=1, 2, 3$; $i, j = x, y, z$):

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(k)} &= 2G_k (1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)})) \varepsilon_{ij}^{(k)}, \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k \varepsilon^{(k)} \quad (k = 1, 2, 3; i, j = x, y, z), \end{aligned} \quad (7)$$

где $s_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon_{ij}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций; G_k , K_k – модули сдвиговой и объемной деформации; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$ – при $k = 1, 2$ это функции пластичности Ильюшина, которые в случае $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}$ следует положить равными нулю, $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций в k -м слое, $\varepsilon_y^{(k)}$ – предел текучести материалов несущих слоев, $\omega_3(\varepsilon_u^{(3)})$ – универсальная функция, описывающая физическую нелинейность заполнителя, причем $\omega^{(3)} \equiv 0$ при $\varepsilon_u^{(3)} \leq \varepsilon_s^{(3)}$, $\varepsilon_s^{(3)}$ – предел физической нелинейности заполнителя.

Рассмотрим методику решения задачи. Компоненты тензора напряжений в слоях, используя (7), выразим через девиатор и шаровую часть тензора деформаций в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k)} &= s_x^{(k)} + \sigma^{(k)} = 2G_k \varepsilon_x^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)} - 2G_k \varepsilon_x^{(k)} \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}), \\ \sigma_{xz}^{(3)} &= s_{xz}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)} - 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)} \omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)}). \end{aligned}$$

Выделим в тензоре напряжений упругие (индекс «e») и неупругие (индекс «ω») слагаемые:

$$\sigma_x^{(k)} = \sigma_x^{(k)e} - \sigma_x^{(k)\omega}, \quad \sigma_{xz}^{(3)} = \sigma_{xz}^{(3)e} - \sigma_{xz}^{(3)\omega},$$

где

$$\sigma_x^{(k)e} = 2G_k \varepsilon_x^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)}, \quad \sigma_x^{(k)\omega} = 2G_k \varepsilon_x^{(k)} \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}),$$

$$\sigma_{xz}^{(3)e} = 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)}, \quad \sigma_{xz}^{(k)\omega} = 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)} \omega^{(3)} (\varepsilon_u^{(3)}). \quad (8)$$

Проведя подобную операцию с внутренними усилиями (2.8), получим:

$$N^{(k)} = N^{(k)e} - N^{(k)\omega}, \quad M^{(k)} = M^{(k)e} - M^{(k)\omega}, \quad Q^{(3)} = Q^{(3)e} - Q^{(3)\omega}. \quad (9)$$

Упругие (индекс «e») и неупругие (индекс «ω») составляющие в (9) следующие:

$$\begin{aligned} N^{(k)e} &= b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)e} dz, \quad N^{(k)\omega} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)\omega} dz, \quad M^{(k)e} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)e} z dz, \\ M^{(k)\omega} &= b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)\omega} z dz, \quad Q^{(3)e} = b_0 \int_{-c}^c \sigma_{xz}^{(3)e} dz, \quad Q^{(3)\omega} = b_0 \int_{-c}^c \sigma_{xz}^{(3)\omega} dz, \end{aligned} \quad (10)$$

Подставив внутренние усилия (9) в уравнения равновесия (5), приводим систему к виду:

$$\begin{cases} N_{,x}^e = -b_0 p + N_{,x}^\omega \\ H_{,x}^e - Q^e = H_{,x}^\omega - Q^\omega \\ M_{,xx}^e = -b_0 q + M_{,xx}^\omega \end{cases} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} N^e &= \sum_{k=1}^3 N^{(k)e}, \quad M^e = \sum_{k=1}^3 M^{(k)e}, \quad Q^e = Q^{(3)e}, \quad H^e = c(N^{(1)e} - N^{(2)e}) + M^{(3)e}, \\ N^\omega &= \sum_{k=1}^3 N^{(k)\omega}, \quad M^\omega = \sum_{k=1}^3 M^{(k)\omega}, \quad Q^\omega = Q^{(3)\omega}, \quad H^\omega = c(N^{(1)\omega} - N^{(2)\omega}) + M^{(3)\omega}. \end{aligned}$$

Нелинейность материалов слоев учитывают добавки в правых частях уравнений с индексом «ω». Окончательные формулы для вычисления неупругих составляющих в (11) получим, используя соотношения (8) и (10):

$$\begin{aligned} N^\omega &= \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 G_k \int_{h_k} \omega_k \varepsilon_x^{(k)} dz, \\ M^\omega &= \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 G_k \int_{h_k} \omega_k \varepsilon_x^{(k)} z dz, \quad Q^\omega = 2b_0 G_3 \int_{-c}^c \omega_3 \psi dz. \end{aligned} \quad (12)$$

Система уравнений для определения искомых функций следует из уравнений (11), если в ней внутренние усилия и моменты, выразить через искомые перемещения u , ψ и w . В результате получим систему нелинейных дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами. Для ее решения применим метод упругих решений Ильюшина [10]. В итерационном виде система уравнений равновесия в перемещениях будет следующей:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_{10} H(x-x_0)) u_{,xx}^{(n)} + (a_6 + a_{60} H(x-x_0)) \psi_{,xx}^{(n)} - (a_7 + a_{70} H(x-x_0)) w_{,xxx}^{(n)} &= -p + p_\omega^{(n-1)}, \\ (a_6 + a_{60} H(x-x_0)) u_{,xx}^{(n)} + (a_2 + a_{20} H(x-x_0)) \psi_{,xx}^{(n)} - (a_3 + a_{30} H(x-x_0)) w_{,xxx}^{(n)} - a_5 \psi &= h_\omega^{(n-1)}, \\ (a_7 + a_{70} H(x-x_0)) u_{,xxx}^{(n)} + (a_3 + a_{30} H(x-x_0)) \psi_{,xxx}^{(n)} - (a_4 + a_{40} H(x-x_0)) w_{,xxx}^{(n)} &= -q + q_\omega^{(n)}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= K_1^+ h_1 + K_2^+ h_{20} + 2K_3^+ c, \quad a_{10} = K_2^+ h_{21}, \quad K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3} G_k, \quad a_2 = c^2 \left[K_1^+ h_1 + K_2^+ h_{20} + \frac{2}{3} K_3^+ c \right], \\ a_{20} &= c^2 K_2^+ h_{21}, \quad a_3 = c \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) + K_2^+ h_{20} \left(c + \frac{1}{2} h_{20} \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^2 \right], \quad a_{30} = c K_2^+ h_{21} \left(c + h_{20} + \frac{1}{2} h_{21} \right), \\ a_4 &= K_1^+ h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) + K_2^+ h_{20} \left(c^2 + c h_{20} + \frac{1}{3} h_{20}^2 \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^3, \\ a_{40} &= K_2^+ h_{21} \left(c \left(c + 2h_{20} + h_{21} \right) + h_{20} h_{21} + h_{20}^2 + \frac{1}{3} h_{21}^2 \right), \quad a_5 = 2G_3 c, \quad a_6 = c \left[K_1^+ h_1 - K_2^+ h_{20} \right], \\ a_{60} &= -c K_2^+ h_{21}, \quad a_7 = K_1^+ h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) - K_2^+ h_{20} \left(c + \frac{1}{2} h_{20} \right), \quad a_{70} = -K_2^+ h_{21} \left(c + h_{20} + \frac{1}{2} h_{21} \right), \end{aligned}$$

G_k, K_k – модули сдвиговой и объемной деформации k -го слоя,

$$p_\omega^{(n-1)} = \frac{1}{b_0} N_{,x}^{\omega(n-1)}, \quad h_\omega^{(n-1)} = \frac{1}{b_0} (H_{,x}^{\omega(n-1)} - Q^{\omega(n-1)}), \quad q_\omega^{(n-1)} = \frac{1}{b_0} M_{,xx}^{\omega(n-1)},$$

$$\begin{aligned}
N^{\omega(n-1)} &= \sum_{k=1}^3 N^{(k)(n-1)} = \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k \omega^{(k)} (\epsilon_u^{(k)(n-1)}) \epsilon_x^{(k)(n-1)} dz, \\
H^{\omega(n-1)} &= c(N^{(1)\omega(n-1)} - N^{(2)\omega(n-1)}) + M^{(3)\omega(n-1)}, \quad Q^{\omega(n-1)} = 2b_0 \int_{-c}^c G_3 \omega^{(3)} (\epsilon_u^{(3)(n-1)}) \psi^{(n-1)} dz, \\
M^{\omega(n-1)} &= \sum_{k=1}^3 M^{(k)\omega(n-1)} = \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k \omega^{(k)} (\epsilon_u^{(k)(n-1)}) \epsilon_x^{(k)(n-1)} z dz. \tag{14}
\end{aligned}$$

Рассмотрим систему уравнений (13) в двух областях: I – до точки нерегулярности ($x \leq x_0$); II – после нее ($x > x_0$). В первой из них функция Хевисайда обращается в ноль и $h_2 = h_{20}$, в силу (1). Искомые перемещения в этой области пометим индексом «1» внизу. Система (13) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
a_1 u_{1,xx}^{(n)} + a_6 \psi_{1,xx}^{(n)} - a_7 w_{1,xxx}^{(n)} &= -p + p_{\omega}^{(n-1)}, \\
a_6 u_{1,xx}^{(n)} + a_2 \psi_{1,xx}^{(n)} - a_3 w_{1,xxx}^{(n)} - a_5 \psi_1 &= h_{\omega}^{(n-1)}, \\
a_7 u_{1,xxx}^{(n)} + a_3 \psi_{1,xxx}^{(n)} - a_4 w_{1,xxx}^{(n)} &= -q + q_{\omega}^{(n-1)}. \tag{15}
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим систему уравнений (13) во второй области, где функция Хевисайда равна единице ($x > x_0$, после ступеньки) и $h_2 = h_{20} + h_{21}$. Искомые перемещения в этой области пометим индексом «2» внизу. В результате имеем:

$$\begin{aligned}
a_{11} u_{2,xx}^{(n)} + a_{61} \psi_{2,xx}^{(n)} - a_{71} w_{2,xxx}^{(n)} &= -p + p_{\omega}^{(n-1)}, \\
a_{61} u_{2,xx}^{(n)} + a_{21} \psi_{2,xx}^{(n)} - a_{31} w_{2,xxx}^{(n)} - a_5 \psi_2 &= h_{\omega}^{(n-1)}, \\
a_{71} u_{2,xxx}^{(n)} + a_{31} \psi_{2,xxx}^{(n)} - a_{41} w_{2,xxx}^{(n)} &= -q + q_{\omega}^{(n-1)}, \tag{16}
\end{aligned}$$

где

$$a_{11} = a_1 + a_{10}, \quad a_{21} = a_2 + a_{20}, \quad a_{31} = a_3 + a_{30}, \quad a_{41} = a_4 + a_{40}, \quad a_{61} = a_6 + a_{60}, \quad a_{71} = a_7 + a_{70}.$$

В случае жесткой заделки левого конца стержня при свободном правом торце должны выполняться условия (нижний индекс указывает область применения искомого решения):

$$\begin{aligned}
x=0: \quad w_1^{(n)} = w_{1,x}^{(n)} = u_1^{(n)} = \psi_1^{(n)} &= 0; \\
x=l: \quad \psi_2^{(n)} = 0, \quad N_2^{(n)} = N_2^{\omega(n-1)}, \quad M_2^{(n)} = M_2^{\omega(n-1)}, \quad M_{2,x}^{(n)} = M_{2,x}^{\omega(n-1)}. \tag{17}
\end{aligned}$$

Для шарнирно опертого по обоим торцам стержня граничные условия будут:

$$\begin{aligned}
x=0: \quad w_1^{(n)} = u_1^{(n)} = \psi_1^{(n)} = 0, \quad M_1^{(n)} = M_1^{\omega(n-1)}; \\
x=l: \quad w_2^{(n)} = u_2^{(n)} = \psi_2^{(n)} = 0, \quad M_2^{(n)} = M_2^{\omega(n-1)}. \tag{18}
\end{aligned}$$

Если стержень зашцеplen по обоим торцам, то

$$\begin{aligned}
x=0: \quad w_1^{(n)} = w_{1,x}^{(n)} = u_1^{(n)} = \psi_1^{(n)} &= 0; \\
x=l: \quad w_2^{(n)} = w_{2,x}^{(n)} = u_2^{(n)} = \psi_2^{(n)} &= 0. \tag{19}
\end{aligned}$$

Выпишем алгебраическую систему восьми уравнений, сшивающих решения систем (15), (16) в точке нерегулярности $x = x_0$. Для этого потребуем выполнения восьми условий сопряжения: равенства в этой точке перемещений и их производных. В результате:

$$\begin{aligned}
\left\langle \psi_2^{(n)}(x) - \psi_1^{(n)}(x) \right\rangle_{x=x_0} &= 0, \quad \left\langle \psi_{2,x}^{(n)}(x) - \psi_{1,x}^{(n)}(x) \right\rangle_{x=x_0} = 0, \quad \left\langle \psi_{2,xx}^{(n)}(x) - \psi_{1,xx}^{(n)}(x) \right\rangle_{x=x_0} = 0, \\
\left\langle w_2^{(n)}(x) - w_1^{(n)}(x) \right\rangle_{x=x_0} &= 0, \quad \left\langle w_{2,x}^{(n)}(x) - w_{1,x}^{(n)}(x) \right\rangle_{x=x_0} = 0, \quad \left\langle w_{2,xx}^{(n)}(x) - w_{1,xx}^{(n)}(x) \right\rangle_{x=x_0} = 0, \\
\left\langle u_2^{(n)}(x) - u_1^{(n)}(x) \right\rangle_{x=x_0} &= 0, \quad \left\langle u_{2,x}^{(n)}(x) - u_{1,x}^{(n)}(x) \right\rangle_{x=x_0} = 0. \tag{20}
\end{aligned}$$

Таким образом, итерационная краевая задача по определению перемещений в упругопластическом трехслойном стержне с нерегулярной границей замыкается присоединением к системе уравнений (13) граничных условий (17), (19) и условий сопряжения (20).

Решение в общем случае деформирования. Величины (14) с индексом $(n-1)$, соответствующие неупругим составляющим в (15)–(20), на первом шаге ($n=1$) принимаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения и носят название *дополнитель-*

ных внешних нагрузок. Процедура решения сформулированной краевой задачи не отличается от примененной для упругих стержней в работах [7–9]. Поступая подобным образом, в результате искомое решение выписываем в рекуррентном виде:

$$\begin{aligned}\varpi^{(n)}(x) &= \varpi_1^{(n)}(x) + (\varpi_2^{(n)}(x) - \varpi_1^{(n)}(x))H(x - x_0), \\ u^{(n)}(x) &= u_1^{(n)}(x) + (u_2^{(n)}(x) - u_1^{(n)}(x))H(x - x_0), \\ w^{(n)}(x) &= w_1^{(n)}(x) + (w_2^{(n)}(x) - w_1^{(n)}(x))H(x - x_0).\end{aligned}\quad (21)$$

Здесь перемещения с нижним индексом 1 соответствуют решению в первой области, перемещения с индексом 2 – решение во второй области:

$$\begin{aligned}\varpi_1^{(n)}(x) &= C_{21}^{(n)} \operatorname{sh}(B_1 x) + C_{31}^{(n)} \operatorname{ch}(B_1 x) + \\ &+ \frac{1}{\beta_1} \left[\operatorname{sh}(B_1 x) \int g_1^{(n)}(x) \operatorname{ch}(B_1 x) dx - \operatorname{ch}(B_1 x) \int g_1^{(n)}(x) \operatorname{sh}(B_1 x) dx \right], \\ w_1^{(n)}(x) &= \frac{1}{\alpha_{21}} \left[\alpha_{11} \int \varpi_1^{(n)} dx - a_7 L_3^{-1}(p - p_\omega^{(n-1)}) + a_1 L_4^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{a_1 C_{11}^{(n)}}{6} x^3 \right] + \\ &\quad \frac{C_{41}^{(n)}}{2} x^2 + C_{51}^{(n)} x + C_{61}^{(n)}, \\ u_1^{(n)}(x) &= \gamma_{31} \varpi_1^{(n)} + \frac{1}{\alpha_{21}} \left[-a_4 L_2^{-1}(p - p_\omega^{(n-1)}) + a_7 L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{a_7}{2} C_{11}^{(n)} x^2 \right] + C_{71}^{(n)} x + C_{81}^{(n)}, \\ \varpi_2^{(n)}(x) &= C_{22}^{(n)} \operatorname{sh}(\beta_2 x) + C_{32}^{(n)} \operatorname{ch}(\beta_2 x) + \\ &\quad \frac{1}{\beta_2} \left[\operatorname{sh}(\beta_2 x) \int g_2^{(n)}(x) \operatorname{ch}(\beta_2 x) dx - \operatorname{ch}(\beta_2 x) \int g_2^{(n)}(x) \operatorname{sh}(\beta_2 x) dx \right], \\ w_2^{(n)}(x) &= \frac{1}{\alpha_{22}} \left[\alpha_{12} \int \varpi_2^{(n)} dx - a_{71} L_3^{-1}(p - p_\omega^{(n-1)}) + a_{11} L_4^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{a_{11} C_{12}^{(n)}}{6} x^3 \right] + \\ &\quad \frac{C_{42}^{(n)}}{2} x^2 + C_{52}^{(n)} x + C_{62}^{(n)}, \\ u_2^{(n)}(x) &= \gamma_{32} \varpi_2^{(n)} + \frac{1}{\alpha_{22}} \left[-a_{41} L_2^{-1}(p - p_\omega^{(n-1)}) + a_{71} L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{a_{71}}{2} C_{12}^{(n)} x^2 \right] + C_{72}^{(n)} x + C_{82}^{(n)},\end{aligned}\quad (22)$$

где $L_2^{-1}, L_3^{-1}, L_4^{-1}$ – линейные интегральные операторы

$$L_1^{-1}(g) \equiv \int g dx, \quad L_2^{-1}(g) \equiv \iint g dx dx, \quad L_3^{-1}(g) \equiv \iiint g dx dx dx, \quad L_4^{-1}(g) \equiv \iiint g dx dx dx dx;$$

$$B_1^2 = \frac{a_1 a_5 \bar{b}_{21}}{\bar{b}_{21} \bar{b}_{31} - \bar{b}_{11}^2} > 0, \quad \Gamma_{11} = \frac{a_1 \bar{b}_{11}}{\bar{b}_{21} \bar{b}_{31} - \bar{b}_{11}^2}, \quad \Gamma_{21} = \frac{a_6 \bar{b}_{21} - a_7 \bar{b}_{11}}{\bar{b}_{21} \bar{b}_{31} - \bar{b}_{11}^2}, \quad \Gamma_{31} = \frac{a_3 a_7 - a_4 a_6}{\bar{b}_{21}},$$

$$\alpha_{21} \alpha_{31} - \alpha_{11}^2 \neq 0, \quad \alpha_{11} = a_1 a_3 - a_6 a_7, \quad \alpha_{21} = a_1 a_4 - a_7^2, \quad \alpha_{31} = a_1 a_2 - a_6^2,$$

$$\beta_2^2 = \frac{a_{11} a_{51} \alpha_{21}}{\alpha_{22} \alpha_{32} - \alpha_{12}^2} > 0, \quad \gamma_{12} = \frac{a_{11} \alpha_{12}}{\alpha_{22} \alpha_{32} - \alpha_{12}^2}, \quad \gamma_{22} = \frac{a_{61} \alpha_{22} - a_{71} \alpha_{12}}{\alpha_{22} \alpha_{32} - \alpha_{12}^2}, \quad \gamma_{32} = \frac{a_{31} a_{71} - a_{41} a_{61}}{\alpha_{22}},$$

$$\alpha_{22} \alpha_{32} - \alpha_{12}^2 \neq 0, \quad \alpha_{12} = a_{11} a_{31} - a_{61} a_{71}, \quad \alpha_{22} = a_{11} a_{41} - a_{71}^2, \quad \alpha_{32} = a_{11} a_{21} - a_{61}^2.$$

$$g_1^{(n)}(x) = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} \gamma_{11} h_\omega^{(n-1)} + \gamma_{21} (p - p_\omega^{(n-1)}) + \gamma_{11} \left(\int (q - q_\omega^{(n-1)}) dx + C_{11}^{(n)} \right),$$

$$g_2^{(n)}(x) = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{12}} \gamma_{12} h_\omega^{(n-1)} + \gamma_{22} (p - p_\omega^{(n-1)}) + \gamma_{12} \left(\int (q - q_\omega^{(n-1)}) dx + C_{12}^{(n)} \right).$$

Константы интегрирования $C_{11}^{(n)}, \dots, C_{81}^{(n)}; C_{12}^{(n)}, \dots, C_{82}^{(n)}$ следуют из 8 условий закрепления стержня (17)–(19) и требований (20) по сопряжению решений в точке нерегулярности.

Таким образом, общее рекуррентное решение задачи о деформировании упругопластического трехслойного стержня с нерегулярной нижней границей представлено выражениями (21), (22). Константы интегрирования находятся из систем (17)–(20).

Численные результаты получены для металлополимерного стержня единичной длины с материалами слоев Д16Т–фторопласт–Д16Т.

В стандартном пакете геометрические характеристики $c = 0,09$, $h_1 = h_2 = 0,03$, $h_{20} = 0,02$, $h_{21} = 0,01$. Координата начала ступеньки $x_0 = 0,5$.

Интенсивности нагрузок $p = 0$, $q = -10$ МПа.

Торцы стержня жестко заделаны.

Функция пластичности для несущих слоев ($k = 1, 2$) и функция физической нелинейности для заполнителя приняты в виде [2]:

$$\omega(\varepsilon_u) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u \leq \varepsilon_y; \\ A(1 - \varepsilon_y/\varepsilon_u)^\alpha, & \varepsilon_u > \varepsilon_y. \end{cases} \quad (23)$$

Входящие сюда константы для сплава Д16Т: $A = 0,96$, $\alpha = 2,34$, $\varepsilon_y = 0,735$. Для фторопласта: $A_3 = 0,905$, $\alpha_3 = 1,48$, $\varepsilon_s = 3,3\%$, ε_s – аналог предела текучести.

Рис. 2 иллюстрирует сходимость процесса последовательных приближений a – прогиб w (м), b – относительного сдвига ψ . Номер кривой соответствует номеру итерации. Здесь второе приближение отличается от первого примерно на 10 % для прогиба и сдвига. За искомое решение принято 6-е приближение, которое отличается от предыдущего менее чем на 1 %. Результирующий упругопластический прогиб и сдвиг стержня превосходят упругий на 23 % и 25 % соответственно.

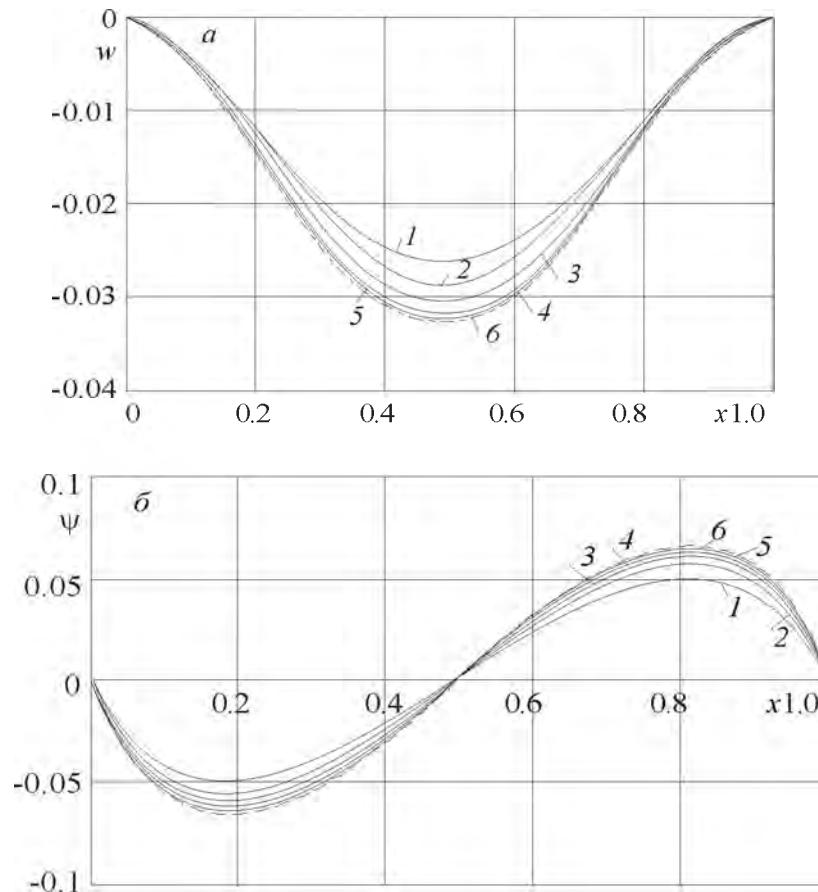


Рисунок 2 – Сходимость метода последовательных приближений

На рис. 3 показаны области пластичности и физической нелинейности в слоях стержня (темная заливка). В несущих слоях области пластичности занимают около 45 % объема, в заполнителе зоны физической нелинейности – 76%.

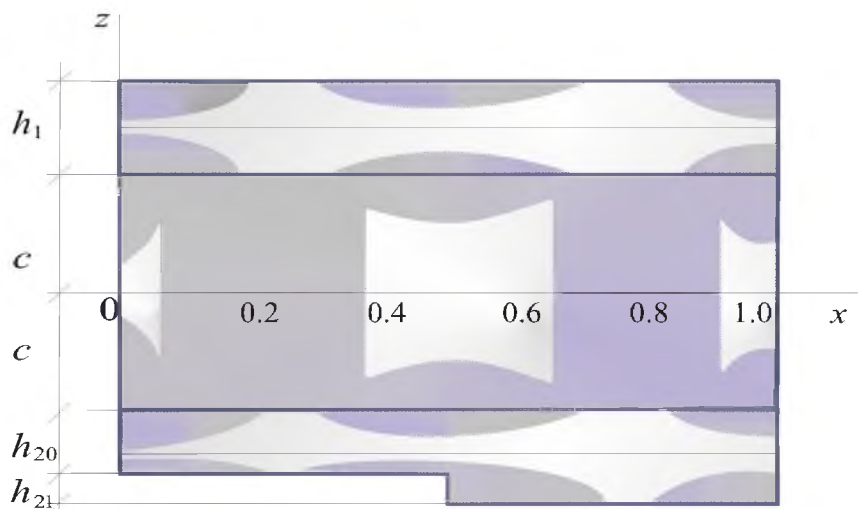


Рисунок 3 – Распределение физической нелинейности в слоях стержня

Изменение нормальных напряжений $\sigma_x^{(k)}$ по толщине пластины на левом торце при упругом и физически нелинейном деформировании иллюстрирует рис. 4: 1 – упругий стержень; 2 – упругопластический. Здесь напряжения во внешних слоях отнесены к $q_1 = 10^8$ Па, в заполнителе – к $q_2 = 10^7$ Па. Их распределение по высоте стержня линейное. За счет наличия ступеньки максимальные напряжения в левом торце на нижней поверхности слоя 2 превосходят напряжения слоя 1 практически на 33 %.

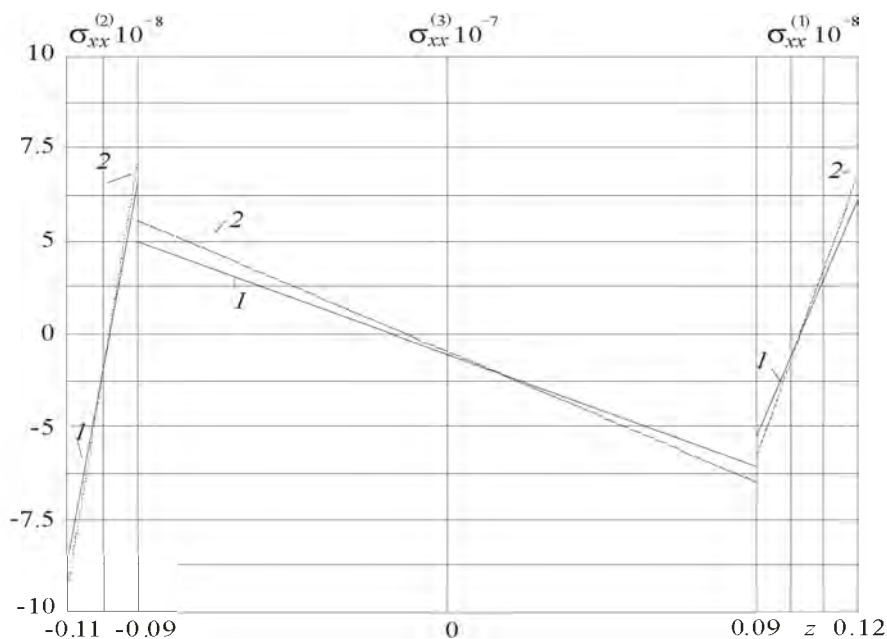


Рисунок 4 – Изменение нормальных напряжений по толщине стержня

Выводы. Приведенная постановка краевой задачи об изгибе упругопластического трехслойного стержня с нерегулярной границей и полученное общее решение (21), (22) позволяют проводить анализ напряженно-деформированного состояния соответствующих элементов конструкций при различных нагрузках, в зависимости от прочностных и геометрических параметров слоев, вида нерегу-

лярности границы. При отсутствии «ступеньки» все приведенные аналитические результаты совпадают с соответствующими решениями для трехслойного стержня постоянной толщины [2].

Резюме

Рассмотрен изгиб упругопластического трехслойного стержня со ступенчато-переменной границей одного из несущих слоев. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета стержня приняты гипотезы ломаной нормали. Деформирование материалов несущих слоев описывается соотношениями теории малых упругопластических деформаций, наполнитель – нелинейно упругий. Получена система уравнений равновесия в перемещениях и ее аналитическое рекуррентное решение. Проведен численный анализ решения.

Литература

1. Поленов, В.С. Распространение волн в насыщенной жидкостью неоднородной пористой среде / В.С. Поленов, А.В. Чигарев // Прикладная математика и механика. – 2010. –Т. 74, № 2. – С. 276–284.
2. Плескачевский, Ю.М. Деформирование металлополимерных систем / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Минск: Бел. наука. 2004. – 386 с.
3. Cheng Zhenqiang, Jemah A.K., Williams F.W. Theory for multilayered anisotropic plates with weakened interfaces // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1996. 63, N 4. P. 1019–1026.
4. Ebsioglu J. K. On the theory on sandwich panels in the reference state // Internal. J. Eng-ng Sci. 1966. N 6. P. 166–194.
5. Белосточный, Г.Н. Оболочки и геометрически нерегулярные пластинки с термочувствительной толщиной / Г.Н. Белосточный, Е.А. Русина // Докл. Росс. Акад. естественных наук. Поволжское межрегиональное отд. Саратов. СГТУ. – №1. 1999. – С. 28–37.
6. Игнатъев, О. В. Вариационно-разностный метод в нелинейной теории оболочек ступенчато-переменной толщины // О. В. Игнатъев, В. В. Карпов, В. Н. Филатов. – Волгоград. 2001. – 210 с.
7. Плескачевский, Ю. М. Изгиб трехслойного стержня с нерегулярной границей / Ю.М. Плескачевский., Е.Э. Старовойтова // Механика машин, механизмов и материалов. 2008. – № 3 (4). – С. 52–55.
8. Плескачевский, Ю. М. Изгиб трехслойного металлополимерного стержня ступенчато-переменной толщины / Ю.М. Плескачевский., Е.Э. Старовойтова // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Сборник научных работ / Днепропетровский национальный университет. Днепропетровск: ІМА-пресс. 2009. – Вып 13. – С. 186–192.
9. Старовойтова, Е.Э. Изгиб трехслойного стержня с нерегулярной границей локальными нагрузками / Е.Э. Старовойтова // Материалы, технологии, инструменты. 2009. – № 1 (14). – С. 10–16.
10. Ильюшин, А.А. Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации / А.А. Ильюшин.– М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.

Summary

The bending of three-layer elastic-plastic beam with stepped variable thickness of one of two stiff shells is considered. To describe kinematics of asymmetrical over thickness core pack the hypotheses of the broken normal are accepted. Stiff shells deformation is circumscribed by correlations of small elastic-plastic deformations theory, filler is elastic nonlinear. A system of equilibrium equations and its analytical iterative solution in terms of displacements have been derived. Numerical results were adduced.

Поступила в редакцию 11.12.2012

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛОСКОЙ ОДНОМЕРНОЙ ВОЛНЫ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ РАЗНОМОДУЛЬНОГО УПРУГОГО СЛОЯ

Буренин А.А., Дудко О.В., Лаптева А.А.

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения
Российской академии наук, Владивосток*

Известно, что множество природных и конструкционных материалов сопротивляются процессам растяжения и сжатия по-разному. Так, приложение различной по знаку нагрузки к твердым горным породам дает неодинаковый по модулю деформационный отклик [1]. Это же свойство характерно для литых металлов и, что совсем очевидно, для сыпучих сред [2] и связных грунтов [3]. Следовательно, в математической модели деформирования реальных материалов свободное состояние может оказаться сингулярной точкой пространства деформаций. Даже в случае линеаризации модельных соотношений наличие такой особой точки приводит к возникновению принципиально нелинейных динамических эффектов, которые не отмечаются линейной теорией упругости – ударным волнам, сигнотонам, полусигнотонам и простым разрывам [4]. В настоящей работе на примере решения простейших нестационарных задач указаны особенности распространения граничных возмущений по среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию.

Определяющие соотношения динамического деформирования изотропной разномодульной упругой среды запишем в прямоугольной декартовой системе координат, вводя предположения о малости деформаций и отсутствии массовых сил:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \dot{v}_i, \quad \sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - 2e_{kj}), \quad (1)$$

$$v_i = \dot{u}_i, \quad 2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}, \quad \rho = \rho_0^{-1} (1 - u_{k,k}).$$

В уравнениях (1) σ_{ij} , e_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций; u_i , v_i – компоненты векторов перемещений и вектора скорости перемещений точек среды; ρ_0 , ρ – плотность среды в свободном и текущем состоянии; точкой обозначена частная производная функции по времени t , латинскими индексами после запятой – частная производная по независимым пространственным (эйлеровым) переменным x_i (для повторяющихся индексов проводится суммирование); δ_{ij} – символ Кронекера.

Упругий потенциал W является функцией состояния, замыкающей систему модельных соотношений (1). В принятом адиабатическом приближении он зависит только от деформаций e_{ij} , а в изотропной среде полностью определяется главными инвариантами тензора деформаций $I_1 = e_{kk}$, $I_2 = e_{ik}e_{ki}$. Для моделирования разномодульного поведения упругой среды воспользуемся подходом, подобным предложенному в [5, 6], добавив в упругий потенциал $W(I_1, I_2)$ слагаемое с модулем от первого инварианта I_1 :

$$W = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 - \nu I_1 |I_1|. \quad (2)$$

Коэффициенты λ , μ в зависимости (2) являются параметрами Ламэ, упругий модуль $\nu > 0$ характеризует наличие микродефектов в материале (или степень разрушенности материала, если рассматриваются горные породы). Функция (2) при $\nu = 0$ приводит соотношения (1) к известной линейной зависимости между напряжениями и деформациями – закону Гука. При ненулевом значении модуля ν в наиболее простом случае одноосного деформирования ($u_1 = u(x, t)$, $u_2 = u_3 = 0$) из соотношений (1), (2) получаем кусочно-линейную зависимость между напряжениями $\sigma_{11} = \sigma$ и деформациями $e_{11} = e$:

$$\sigma = \{\lambda + 2\mu - 2\nu \text{Sign}(e)\}e, \quad \text{Sign}(e) = \begin{cases} 1 & \text{при } e > 0 \text{ (растяжение)}, \\ -1 & \text{при } e < 0 \text{ (сжатие)}. \end{cases} \quad (3)$$

Очевидно, что в зависимости (3) коэффициент пропорциональности между σ и e имеет при растяжении и сжатии различные значения ($\rho a^2 = \lambda + 2\mu + 2\nu$ при $e < 0$, $\rho b^2 = \lambda + 2\mu - 2\nu$ при $e > 0$), а точка $e = 0$ – особая. Константы a и b ($a > b$ при $0 < \nu < \lambda/2 + \mu$) представляют собой фазовые скорости уравнения движения, записанного для одномерного случая:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (4)$$

Таким образом, в областях сжатия среды $c = a$, при растяжении среды $c = b$. Если решение уравнения движения (4) представить в форме Даламбера:

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right), \quad (5)$$

то неизвестные функции $f(\xi(x, t))$ и $g(\xi(x, t))$ могут быть определены для каждой конкретной краевой задачи в соответствии с заданными краевыми и начальными условиями.

Обобщенное решение системы определяющих соотношений (1), (2) может не являться непрерывным на некоторой движущейся поверхности $\Sigma(t)$, на которой необходимо потребовать выполнения условий совместности разрывов. В случае, когда при условии непрерывности перемещений на поверхности $\Sigma(t)$ рвутся их первые производные $u_{i,j}$, то по среде со скоростью G распространяется фронт сильного разрыва, на котором обязаны выполняться динамические и кинематические условия совместности первого порядка [7]:

$$[\sigma_{ij}]v_j = -\rho^+ G[v_i], \quad [v_i] = -G[u_{i,j}]v_j \quad \text{при} \quad [u_i] = 0. \quad (6)$$

В условиях (6) квадратными скобками обозначен скачок функции на поверхности разрывов $\Sigma(t)$: $[m] = m^+ - m^-$, m^+ – значение функции перед поверхностью, m^- – непосредственно за ней; v_j – компоненты единичного вектора нормали к поверхности $\Sigma(t)$.

Введем классификацию возможных разрывов решения уравнения движения (4), подобно принятому в [4]. Если в решении существует разрыв первых производных перемещений и при переходе через поверхность разрывов $\partial u / \partial x$ меняет свой знак, то имеет место плоская одномерная *ударная волна* со скоростью распространения G_α . *Сигнотон* со скоростью распространения G_β назовем плоскую одномерную поверхность разрыва первых производных перемещений, если при переходе через такую поверхность $\partial u / \partial x$ не меняет знак. Если же с одной стороны от поверхности разрывов $\partial u / \partial x = 0$, а с другой стороны $\partial u / \partial x \neq 0$, то такую поверхность называем *полусигнотон* со скоростью G_δ . Сигнотон и полусигнотон, со скоростью a назовем *быстрым*, а со скоростью b – *медленным*. Такая классификация определяет свойства плоских одномерных волн в кусочно-линейной упругой среде: ударная волна меняет значение фазовой скорости уравнения движения с b на a , сжимающая предварительно растянутую среду (следует отметить, что обратный случай невозможен [8]); полусигнотон либо является передним фронтом распространения граничных возмущений по недеформированной среде (волной сжатия или волной разрядки в зависимости от вида граничного воздействия), либо возвращает ранее деформированную область среды в свободное состояние; сигнотон скачком изменяет величину уже существующих предварительных деформаций, не меняя при этом фазовой скорости уравнения движения.

Согласно соотношениям (6), на плоской одномерной ударной волне, сигнотоне и полусигнотоне необходимо выполнить условия

$$u^+ \Big|_{\Sigma(t)} = u^- \Big|_{\Sigma(t)}, \quad (\sigma^+ - \sigma^-) \Big|_{\Sigma(t)} = \rho^+ G^2 \left(\frac{\partial u^+}{\partial x} - \frac{\partial u^-}{\partial x} \right) \Big|_{\Sigma(t)}, \quad (7)$$

где G – скорость распространения соответствующей поверхности сильных разрывов.

Используя условия (7), можно показать, что модуль скорости ударной волны необходимо удовлетворяет неравенству $b < G_\alpha < a$, а скорости сигнотона (G_β) и полусигнотона (G_δ) постоянны и могут принимать значения a или b в зависимости от постановки задачи.

Описанные свойства плоских одномерных волн и соотношения для разрывов на них позволяют поставить ряд нестационарных краевых задач интенсивного одноосного деформирования и получить их аналитические решения.

Рассмотрим отражение плоской одномерной волны сжатия от свободной границы разномодульного упругого слоя. Пусть с момента времени $t = 0$ на граничную плоскость $x = 0$ упругого слоя начинает действовать сжимающая нагрузка, а вторая граница $x = H$ остается свободной на протяжении всего процесса деформирования. Условие свободной границы имеет вид:

$$\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=H} = 0. \tag{8}$$

Положим, что действие сжимающей нагрузки таково, что перемещения точек граничной плоскости $x = 0$ при $t \geq 0$ оказываются заданными положительной монотонно возрастающей функцией $u(0,t) = \varphi(t)$: $\varphi(t) \geq 0$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(t) > 0$ (рис. 1а; рис. 2а). Тогда с момента времени $t = 0$ граничные возмущения распространяются в слой посредством быстрого полусигнотона $\Sigma_\delta(t)$ со скоростью a и координатой фронта $x = at$ (рис. 1б; рис. 2б).

Согласно условиям (7) на поверхности $\Sigma_\delta(t)$ и заданной на границе $x = 0$ функции перемещений $\varphi(t)$, решение задачи в этом случае до момента времени $t = H/a$ определяется соотношениями

$$u(x,t) = \begin{cases} \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) & \text{при } 0 \leq x \leq at, \\ 0 & \text{при } at \leq x \leq H. \end{cases} \tag{9}$$

В момент времени $t = H/a$ полусигнотон $\Sigma_\delta(t)$ отражается от свободной границы слоя $x = H$. Если для линейной среды решение аналогичной задачи после отражения известно, то в случае разномодульной среды возникает вопрос: сколько волновых фронтов отражается и какие они? Оказалось, что решающим фактором для ответа на данный вопрос является знак второй производной заданной на границе $x = 0$ функции перемещений $\varphi(t)$. Если $\varphi''(t) > 0$ (т. е. функция $\varphi(t)$ – вогнутая, положительная монотонно возрастающая (рис. 1а)), то от свободной границы слоя отражается одна волна – сигнотон $\Sigma_\beta(t)$ со скоростью a (рис. 1в), среда за фронтом $\Sigma_\beta(t)$ продолжает находиться в сжатом состоянии. Решение задачи при $t > H/a$ имеет вид

$$u(x,t) = \begin{cases} \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) + \varphi\left(t - 2\frac{H}{a} + \frac{x}{a}\right) & \text{при } 2H - at \leq x \leq H, \\ \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) & \text{при } 0 \leq x \leq 2H - at. \end{cases} \tag{10}$$

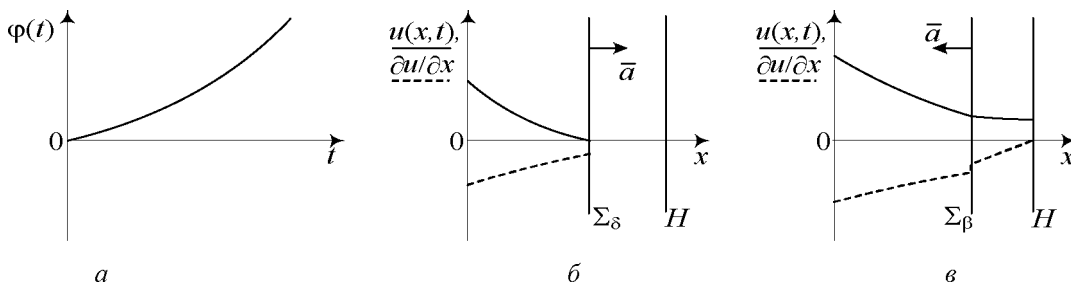


Рисунок 1 – Отражение волны сжатия от свободной границы слоя: решение задачи при вогнутой положительной функции $\varphi''(t)$ ($\varphi''(t) > 0$)

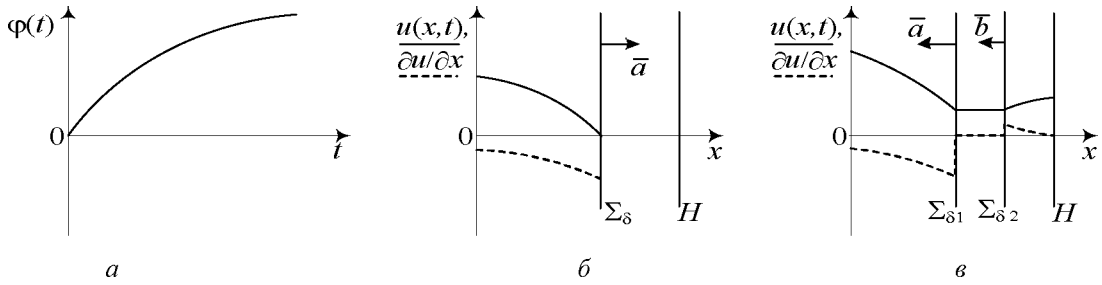


Рисунок 2 – Отражение волны сжатия от свободной границы слоя: решение задачи при выпуклой положительной функции $\varphi''(t)$ ($\varphi''(t) < 0$)

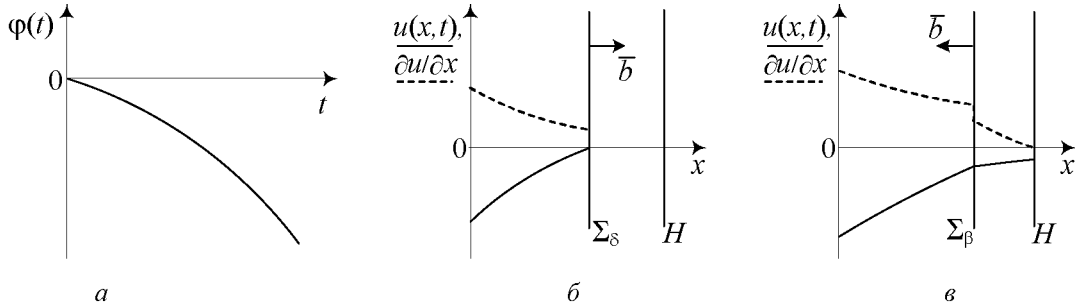


Рисунок 3. – Отражение волны разрежения от свободной границы слоя: решение задачи при выпуклой отрицательной функции $\varphi''(t)$ ($\varphi''(t) < 0$)

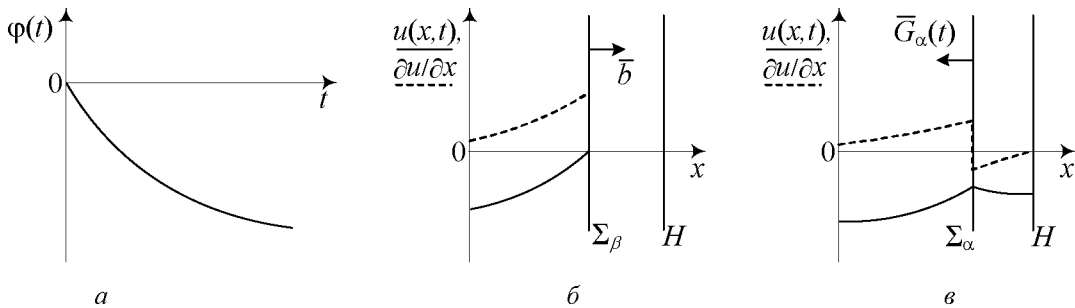


Рисунок 4 – Отражение волны разрежения от свободной границы слоя: решение задачи при вогнутой отрицательной функции $\varphi''(t)$ ($\varphi''(t) > 0$)

В случае, когда функция $\varphi(t)$ – выпуклая (т. е. $\varphi''(t) < 0$ (рис. 2a)), от свободной границы слоя при $t > H/a$ отражаются два волновых фронта (рис. 2в): быстрый полусигнотон $\Sigma_{\delta 1}(t)$ со скоростью распространения a и координатой фронта $x = 2H - at$ и медленный полусигнотон $\Sigma_{\delta 2}(t)$ с координатой фронта $x = (1 + b/a)H - bt$, движущийся со скоростью b .

Решение задачи, соответствующее случаю $\varphi''(t) < 0$, до момента $t = H/a$ также имеет вид (9), а при $t > H/a$ выражается соотношениями

$$u(x,t) = \begin{cases} \varphi\left(t - \frac{H}{a} + \frac{H}{b} - \frac{x}{b}\right) + \varphi\left(t - \frac{H}{a} - \frac{H}{b} + \frac{x}{b}\right) & \text{при } \left(1 + \frac{b}{a}\right)H - bt \leq x \leq H, \\ \varphi\left(2\left(t - \frac{H}{a}\right)\right) & \text{при } 2H - at \leq x \leq \left(1 + \frac{b}{a}\right)H - bt, \\ \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) & \text{при } 0 \leq x \leq 2H - at. \end{cases}$$

Таким образом, упругий слой оказывается поделенным двумя отраженными волновыми фронтами на три области (рис. 2в). В зоне $0 \leq x \leq 2H - at$ между нагружаемой границей слоя и передним

отраженным волновым фронтом $\Sigma_{\delta 1}(t)$ продолжается сжатие среды под действием приложенной на границу $x = 0$ нагрузки. Область $(1 + b/a) \leq x \leq H$ между последним отраженным волновым фронтом $\Sigma_{\delta 2}(t)$ и свободной границей слоя подвергается растяжению, в ней $\partial u / \partial x > 0$ и фазовая скорость уравнения движения равна b . Зона $2H - at \leq x \leq (1 + b/a)H - bt$ между фронтами $\Sigma_{\delta 1}(t)$ и $\Sigma_{\delta 2}(t)$ оказывается областью постоянных перемещений, в которой среда недеформирована и движется как жесткое целое. Скорость перемещений точек среды в этой зоне, согласно полученному решению, не зависит от пространственной координаты x : $u(x, t) = 2\varphi'(2(t - H/a))$.

Рассмотрим теперь случай, когда начиная с момента времени $t = 0$ на одну из границ разномодульного упругого слоя толщины H действует одноосная растягивающая нагрузка, а вторая граница остается свободной. Такая постановка при $t \geq 0$ имеет место, если перемещения точек граничной плоскости $x = 0$ заданы отрицательной монотонно убывающей функцией $u(0, t) = \varphi(t)$: $\varphi(t) \leq 0$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(t) < 0$ (рис. 3а; рис. 4а). Отсутствие нагрузки на границе $x = H$ задано условием (8). Тогда до момента времени $t = H/b$ деформации в слой распространяются посредством медленного полусигнона $\Sigma_{\delta}(t)$ – волны разряжения со скоростью b (рис. 3б; рис. 4б).

Среда за фронтом $\Sigma_{\delta}(t)$ подвергается растяжению. Поле перемещений при $0 \leq t \leq bt$ определяется в форме (5) аналогично предыдущему случаю, отличие состоит лишь в значении фазовой скорости уравнения движения ($c = b$):

$$u(x, t) = \begin{cases} \varphi\left(t - \frac{x}{b}\right) & \text{при } 0 \leq x \leq bt, \\ 0 & \text{при } bt \leq x \leq H. \end{cases}$$

Так же, как и при сжатии слоя, решение при $t > H/b$ зависит от знака второй производной $\varphi''(t)$ заданной на границе $x = 0$ функции перемещений. Если $\varphi''(t) < 0$, т. е. $\varphi(t)$ – отрицательная выпуклая функция (рис. 3а), то от свободной границы $x = H$ отражается один волновой фронт – медленный сигнон $\Sigma_{\beta}(t)$ со скоростью b (рис. 3в), за которым деформации уменьшаются, но среда продолжает находиться в растянутом состоянии. Перемещения точек среды при $t > H/b$ будут иметь вид

$$u(x, t) = \begin{cases} \varphi\left(t - \frac{x}{b}\right) + \varphi\left(t - 2\frac{H}{b} + \frac{x}{b}\right) & \text{при } 2H - bt \leq x \leq H, \\ \varphi\left(t - \frac{x}{b}\right) & \text{при } 0 \leq x \leq 2H - bt. \end{cases}$$

Большой интерес в данной задаче представляет случай, когда заданная на границе $x = 0$ функция $\varphi(t)$ – отрицательная вогнутая (рис. 4а), т. е. $\varphi''(t) > 0$. При таком воздействии на разномодульный упругий слой от свободной границы $x = H$ отражается ударная волна $\Sigma_{\alpha}(t)$ (рис. 4в). Скорость ее движения оказывается зависимой от времени:

$$G_{\alpha}(t) = b + F(a, b, \varphi(t), \varphi'(t))\Big|_{t=H/b} \cdot t + \dots, \quad (11)$$

где $F(a, b, \varphi(t), \varphi'(t)) \geq 0$ – положительная функция, не приведенная здесь из-за ее громоздкости в общем случае. В момент отражения ($t = H/b$) скорость ударной волны $G_{\alpha}(t)$ равна b , а в последующие моменты времени начинает увеличиваться, стремясь достигнуть значения a . Появление такого эффекта объясняется тем, что перед фронтом $\Sigma_{\alpha}(t)$ фазовая скорость уравнения движения меньше, чем за ним ($b < a$), т. е. ударная волна движется из сжатой области слоя в растянутую. Фронт ударной волны $\Sigma_{\alpha}(t)$ в соответствии с полученным выражением (11) для скорости $G_{\alpha}(t)$ будет иметь координату $x = H - \int_{H/b}^t G(\xi) d\xi$. Решение задачи при $t > H/b$ в случае вогнутой отрицательной функции $\varphi(t)$ можно записать в виде:

$$u(x, t) = \begin{cases} \Phi(x, t, G_\alpha(t)) & \text{при } H - \int_{H/b}^t G(\xi) d\xi \leq x \leq H, \\ \varphi\left(t - \frac{x}{b}\right) & \text{при } 0 \leq x \leq H - \int_{H/b}^t G(\xi) d\xi, \end{cases}$$

где функция $\Phi(x, t, G_\alpha(t))$ такова, что $\partial u / \partial x < 0$ при $H - \int_{H/b}^t G(\xi) d\xi \leq x \leq H$.

Таким образом, показано, что решения, полученные для разномодульной изотропной упругой среды с кусочно-линейной зависимостью между напряжениями и деформациями, существенным образом отличаются от решений аналогичных краевых задач линейной нормально изотропной упругой среды. Описанные результаты демонстрируют возможность возникновения нелинейных эффектов (сильных разрывов первых производных перемещений, областей постоянных перемещений) при описании динамического деформирования среды в рамках линейного приближения определяющих соотношений (1). Для этого оказалось достаточным выбрать упругий потенциал материала в виде кусочно-гладкой функции (2) с особенностью в области свободного состояния. Подобные результаты, полученные в рамках математической модели В.П. Мясникова и А.И. Олейникова, были представлены в [9], где рассматривался более широкий класс нестационарных краевых задач, в том числе возникновение ударной волны и области постоянных перемещений при одноосном ударном деформировании разномодульного упругого полупространства.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 11-01-00360-а.

Резюме

В рамках кусочно-линейной модели динамического деформирования изотропной упругой среды с различным сопротивлением растяжению и сжатию изучаются процессы распространения граничных возмущений. Показана возможность возникновения нелинейных эффектов (ударных волн, движущихся слоев недеформированной среды) при отражении плоских одномерных фронтов нагрузки и разгрузки от свободной границы разномодульного упругого слоя.

Литература

1. Капустянский С.М. Анизотропия геоматериалов // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. 1987. Т. 18. С. 53–113.
2. Садовская О.В., Садовский В.М. Математическое моделирование и механике сыпучих сред. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 368 с. ISBN 978-5-9221-0906-2.
3. Лушников В.В., Вулис П.Д., Литвинов Б.М. О соотношении модулей деформации при сжатии и растяжении грунтов // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1973. № 6. С. 18–19.
4. Маслов В.П., Мосолов П.П. Общая теория уравнений движения разномодульной упругой среды // Прикладная математика и механика. 1985. Т. 49, вып. 3. С. 419–437.
5. Мясников В.П. Геофизические модели сплошных сред // Материалы V Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике: тезисы докладов. М.: Наука, 1981. С. 263–264.
6. Олейников А.И. Основные общие соотношения модели изотропно-упругой разномодульной среды // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57, вып. 5. С. 153–159.
7. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. – Владивосток: Дальнаука, 1998. – 528с. ISBN 5-7442-0586-1.
8. Буренин А.А., Чернышов А.Д. Ударные волны в изотропном упругом пространстве // Прикладная математика и механика. 1978. Т. 42, вып. 4. С. 711–717.
9. Дудко О.В., Лаптева А.А., Семенов К.Т. О распространении плоских одномерных волн и их взаимодействии с преградами в среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию // Дальневосточный математический журнал. 2005. Т. 6. № 1–2. С. 94–105. ISSN 1608-845X.

Summary

Within the piecewise linear model of dynamic deformation of an isotropic elastic medium with different resistance to tension and compression the propagation of boundary disturbances are studied. The possibility of occurrence of nonlinear effects (shock waves, moving layers of undeformed media) at reflection flat one-dimensional front of loading and unloading from the free boundary of multimodulus elastic layer are shown.

Поступила в редакцию 15.11.2012

ИЗГИБ С РАСТЯЖЕНИЕМ ТРЕХСЛОЙНОГО ТЕРМОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ

¹Старовойтов Э.И., ¹Попченко А.В., ²Тарлаковский Д.В.

¹Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

²Московский авиационный институт (госунiversитет), Москва

Введение. Неоднородные конструкции нашли широкое применение в различных областях машиностроения и в строительстве, поэтому актуальна разработка методов их прочностного расчета при различных нагрузках. В работах [1–11] приведены результаты по однократному квазистатическому и динамическому деформированию трехслойных элементов конструкций, связанных и несвязанных с винклеровым основанием. Здесь рассмотрен изгиб с растяжением несимметричного по толщине трехслойного стержня в температурном поле.

Постановка задачи. Рассмотрим трехслойный стержень с жестким наполнителем (рис. 1). Систему координат x, y, z свяжем со срединной плоскостью наполнителя. Принимаем, что в тонких несущих слоях 1, 2 справедливы гипотезы Кирхгофа, в несжимаемом по толщине сравнительно толстом наполнителе 3 нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(x)$.

На внешний слой стержня действует равномерно распределенная силовая нагрузка p, q . Температура T в стержне считается известной. Через $w(x)$ и $u(x)$ обозначены прогиб и продольное перемещение срединной плоскости наполнителя. На торцах предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительно сдвигу слоев.

С помощью введенных гипотез, продольные перемещения в слоях $u^{(k)}$ выражаются через три искомые функции $u(x), \psi(x)$ и $w(x)$:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,x} \quad (c \leq z \leq c + h_1), & u^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,x} \quad (-c \leq z \leq c), \\ u^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,x} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (1)$$

где z – координата рассматриваемого волокна, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате, верхний индекс k – номер слоя.

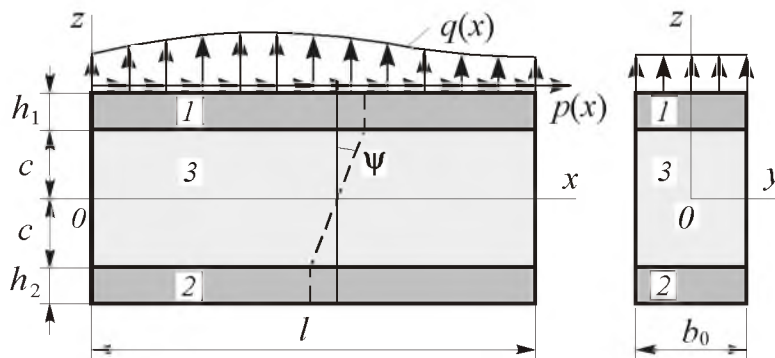


Рисунок 1 – Расчетная схема трехслойного стержня

Компоненты тензора деформаций ϵ_{ij} следуют из соотношений Коши и выражений (1), напряжения – из закона Гука.

Для связи напряжений и деформаций в слоях используем термоупругие соотношения закона Гука (2) в девиаторно-сферической форме

$$\begin{aligned} s_{xx}^{(k)} &= 2G_k(T_k)\epsilon_{xx}^{(k)}, & s_{xz}^{(3)} &= 2G_3\epsilon_{xz}^{(3)}, \\ y^{(k)} &= 3K_k(T_k)(e^{(k)} - \alpha_{0k}T_k), \end{aligned} \quad (2)$$

где $s_{xx}^{(k)}, \epsilon_{xx}^{(k)}$ – девиаторные, $y^{(k)}, e^{(k)}$ – сферические части тензоров напряжений и деформаций, G_k, K_k – температурно зависимые модули сдвига и объемного деформирования [9, 10], α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения материала k -го слоя.

Уравнения равновесия трехслойного стержня получим, используя принцип возможных перемещений Лагранжа:

$$\delta A = \delta W, \quad (3)$$

где δA , δW – вариации работ внешних сил и внутренних напряжений

$$\delta A = \iint_S (p\delta u + q\delta w) dS = b_0 \int_0^l (p\delta u + q\delta w) dx.$$

$$\delta W = \iint_S \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (y_{xx}^{(k)} \delta \varepsilon_{xx}^{(k)} + 2\sigma_{xz}^{(3)} \delta \varepsilon_{xz}^{(3)} \delta_{k3}) dz dS = b_0 \int_0^l \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} \delta \varepsilon_{xx}^{(k)} dz + 2 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \delta \varepsilon_{xz}^{(3)} dz \right] dx, \quad (4)$$

где $\sigma_{xx}^{(k)}$, $\varepsilon_{xx}^{(k)}$ – напряжения и деформации.

С помощью соотношений (1) вариации деформаций в (4) выражаются через вариации независимых перемещений δu , $\delta \psi$ и δw . Подставив полученные выражения в уравнение (3) и приравняв нулю коэффициенты при независимых вариациях, получим в результате систему дифференциальных уравнений равновесия трехслойного стержня в перемещениях:

$$\begin{aligned} a_1 u_{,xx} + a_6 \psi_{,xx} - a_7 w_{,xxx} &= -p, \\ a_6 u_{,xx} + a_2 \psi_{,xx} - a_3 w_{,xxx} - a_5 \psi &= 0, \\ a_7 u_{,xxx} + a_3 \psi_{,xxx} - a_4 w_{,xxx} &= -q. \end{aligned} \quad (5)$$

Коэффициенты, входящие в систему (5) следующие

$$\begin{aligned} a_1 &= K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2 + 2K_3^+ c, \quad a_2 = c^2 \left[K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2 + \frac{2}{3} K_3^+ c \right], \\ a_3 &= c \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) + K_2^+ h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^2 \right], \\ a_4 &= K_1^+ h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) + K_2^+ h_2 \left(c + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^3, \\ a_5 &= 2G_3 c, \quad a_6 = c \left[K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2 \right], \quad a_7 = K_1^+ h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right). \end{aligned}$$

Коэффициенты a_i зависят от жесткостных параметров слоев и через них от температуры:

$$G_k(T_k) \equiv G_k(T_{0k}), \quad K_k(T_k) \equiv K_k(T_{0k}), \quad T_{0k}(t) = \frac{1}{h_k} \int_{h_k} T_k(z, t) dz.$$

Решение задачи термоупругости. Отметим, что температура в уравнения равновесия (5) не входит, поэтому можно воспользоваться аналитическим решением, полученным в [8, 9] при изотермической нагрузке трехслойного стержня. В результате при консольном закреплении левого торца стержня имеем:

$$\psi = C_2 \cdot \text{sh}(\beta x) + C_3 \cdot \text{ch}(\beta x) - \frac{1}{\beta^2} (\gamma_2 p + \gamma_1 q(x-l))$$

$$u = \gamma_3 \psi + \frac{1}{\alpha_2} \left(-\frac{1}{2} a_4 p x^2 + \frac{1}{6} a_7 q x^3 - \frac{1}{2} a_7 q l x^2 \right) + C_7 x$$

$$w = \frac{1}{\alpha_2} \left[\alpha_1 \int \psi dx - \frac{1}{6} a_7 p x^3 + \frac{1}{6} a_1 q x^3 \left(\frac{1}{4} x - l \right) \right] + \frac{1}{2} C_4 x^2 + C_6, \quad (6)$$

где

$$\int \psi dx = \frac{1}{\beta} \left(C_2 \text{ch}(\beta x) + C_3 \text{sh}(\beta x) \right) - \frac{x}{\beta^2} (\gamma_2 p + \gamma_1 q \left(\frac{1}{2} x - l \right)),$$

$$C_2 = \frac{1}{\beta^2 \text{sh}(\beta l)} \left[\Gamma_2 p (1 - \text{ch}(\beta l)) + \Gamma_1 q l \cdot \text{ch}(\beta l) \right], \quad C_3 = \frac{1}{\beta^2} \left[\Gamma_2 p - \Gamma_1 q l \right],$$

$$C_4 = \frac{1}{\alpha_2} \left[a_7 \left(p l + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k dz \right) + a_1 \left(\frac{q l^2}{2} - 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k z dz \right) \right], \quad C_6 = -\frac{\alpha_1}{\beta \alpha_2} C_2,$$

$$C_7 = \frac{1}{\alpha_2} \left[a_4 \left(pl + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k dz \right) + a_7 \left(\frac{ql^2}{2} - 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k z dz \right) \right].$$

$$\beta^2 = \frac{a_1 a_5 \alpha_2}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2} > 0, \quad \Gamma_1 = \frac{a_1 \alpha_1}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2}, \quad \Gamma_2 = \frac{a_6 \alpha_2 - a_7 \alpha_1}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2}, \quad \Gamma_3 = \frac{a_3 a_7 - a_4 a_6}{\alpha_2}.$$

Выражения обобщенной внутренней продольной силы и изгибающего момента через перемещения (6) и температуру будут

$$N = b_0 \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} y_{xx}^{(k)} dz = b_0 \left(a_1 u_{,x} + a_6 \psi_{,x} - a_7 w_{,xx} - 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_{0k} \int_{h_k} T_k dz \right),$$

$$M = b_0 \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} z dz = b_0 \left(a_7 u_{,x} + a_3 \psi_{,x} - a_4 w_{,xx} - 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_{0k} \int_{h_k} T_k z dz \right).$$

Числовые результаты получены для трехслойного стержня, слои которого выполнены из материалов Д16Т-фторопласт-Д16Т. Термомеханические характеристики этих материалов приведены в таблицах 1, 2. Параметры слоев: $h_1 = h_2 = 0,03$, $c = 0,09$; интенсивность распределенной нагрузки $q = -0,15$ МПа, $p = 10$ МПа. Температуру принимаем одинаковой во всех слоях стержня. Изменение параметров упругости несущих слоев описывается известной линейной формулой Белла [2]:

$$\{G(T), K(T), E(T)\} = \{G(0), K(0), E(0)\} \phi(T),$$

$$\phi(T) = \begin{cases} 1, & 0 < T/T_m \leq 0,06, \\ 1,03(1 - T/(2T_m)), & 0,06 < T/T_m \leq 0,57, \end{cases}$$

где T_m – температура плавления материала; $G(0)$, $K(0)$, $E(0)$ – значения модулей упругости при так называемом нулевом напряжении, которые можно определить, зная G_0 при некоторой температуре (например, при $T_0 = 293$ К), тогда $G(0) = G_0 / \phi(T_0)$.

Таблица 1 – Термомеханические характеристики сплава Д16Т

Параметр	Значение	Параметр	Значение
$G(0)$, МПа	$0,3075 \cdot 10^5$	α_0 , 1/К	$24,3 \cdot 10^{-6}$
$K(0)$, МПа	$0,9214 \cdot 10^5$	T_0 , К	293
G_0 , МПа	$0,267 \cdot 10^5$	T_m , К	933
K_0 , МПа	$0,8 \cdot 10^5$		

Таблица 2 – Термомеханические характеристики политетрафторэтилена

Параметр	Значение	Параметр	Значение
G_0 , МПа	90	γ	1,27
K_0 , МПа	4700	T_m , К	600
B	24,44	α_0 , 1/К	$1,78 \cdot 10^{-5}$

В полимерном наполнителе зависимость параметров упругости от температуры принимается в виде, предложенном в [10]:

$$G_3(T_3) = \frac{G_3(T_0)}{\phi_3(T_3)}, \quad K_3(T_3) = \frac{K_3(T_0)}{\phi_3(T_3)}, \quad \phi_3(T) = 1 + B \left(\frac{T - T_0}{T_m} \right)^\gamma.$$

На рисунке 2 показано изменение вдоль оси стержня (a) – продольного перемещения $u(x)$, (b) – прогиба $w(x)$, (c) – относительного сдвига $\psi(x)$: 1 – изотермический изгиб ($T_1 = 293$ К), 2 – термосиловое нагружение ($T_2 = 343$ К), 3 – термосиловое нагружение ($T_3 = 393$ К). Нагревание стержня на 50 К приводит к увеличению максимальных перемещений на 68–71 % по сравнению с изотермическим деформированием. При нагревании на 100 К подобное увеличение достигнет 132–138 %.

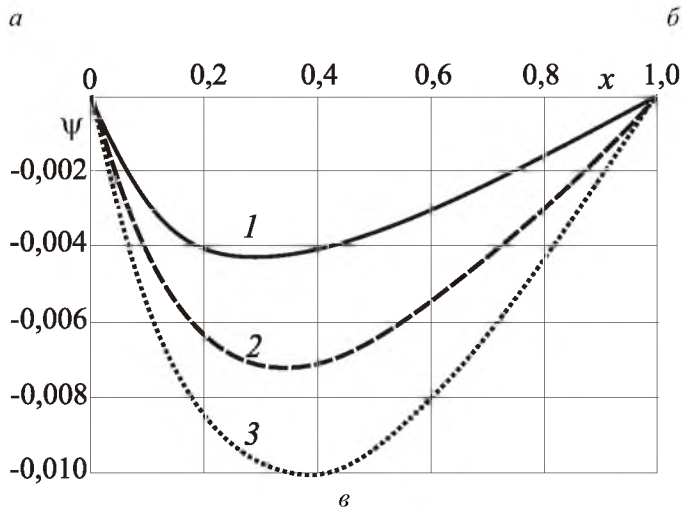
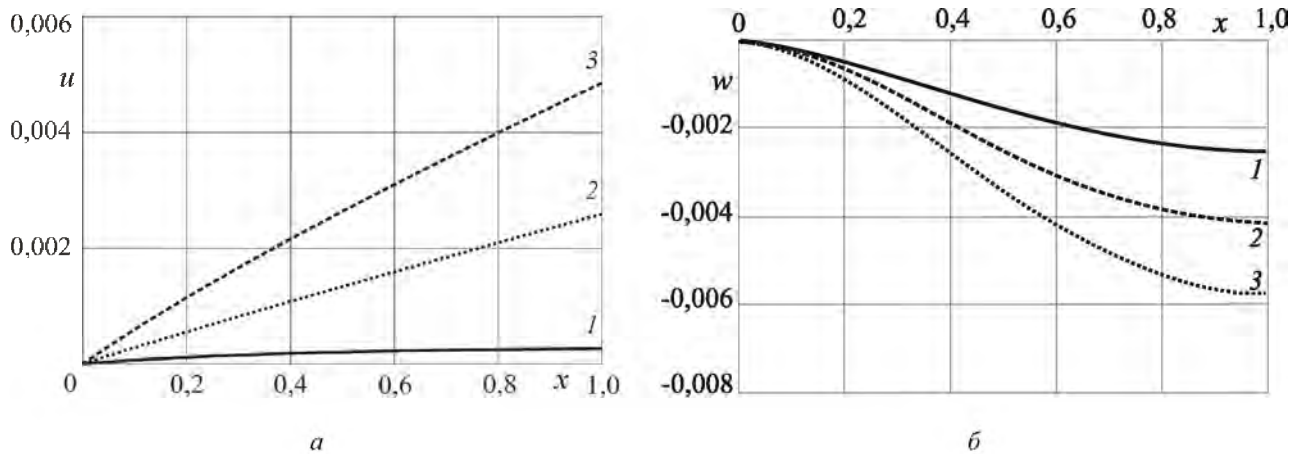


Рисунок 2 – Изменение перемещений вдоль оси стержня

Распределение по поперечному сечению $x = 0$ линейной деформации ϵ_{xx} и нормальных напряжений σ_{xx} показано на рис. 3, 4. Нумерация кривых прежняя. Деформации на склейках слоев непрерывны, при нагревании стержня графики смещаются практически параллельно в положительную область. Напряжения достигают максимума в заделке. Воздействие температуры приводит к увеличению экстремумов напряжений во внешних слоях на 14–43 %, в заполнителе – на 20–60 %.

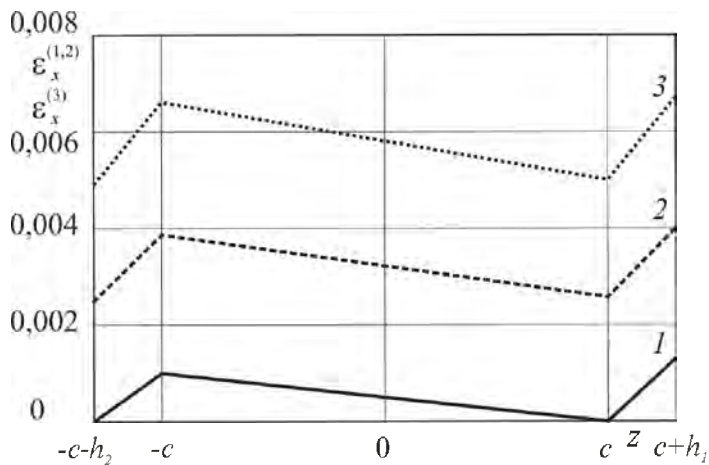


Рисунок 3 – Линейные деформации в поперечном сечении

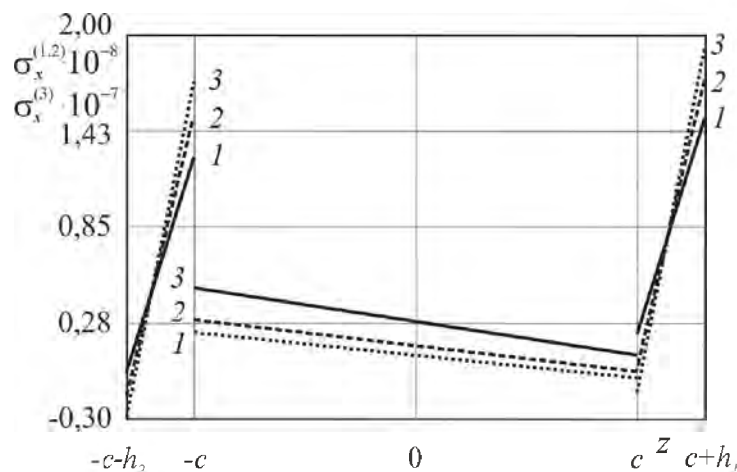


Рисунок 4 – Нормальные напряжения в поперечном сечении

Выводы. Приведенная методика и решение краевой задачи позволяют проводить анализ напряженно-деформированного состояния трехслойного стержня при изгибе в температурном поле.

Литература

1. Cheng, Z. Theory for multilayered anisotropic plates with weakened interfaces / Cheng Z., Jemah A.K., Williams F.W. // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1996. – 63, N 4. P. – 1019–1026.
2. Горшков, А.Г. Гармоническое нагружение слоистых вязкоупругопластических систем / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2000. № 6. С. 91-98.
3. Starovoitov, E.I. Vibrations of circular sandwich plates under resonance loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. 2003. Т. 39. № 12. С. 1458-1463. 7
4. Горшков, А.Г. Колебания трехслойных стержней под действием нагрузок различных форм / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2004. № 1. С. 45-52.
5. Старовойтов, Э.И. Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Е.П. Доровская // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2006. № 3. С. 45-50.
6. Старовойтов, Э.И. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. № 4. С. 55-62.
7. Leonenko, D.V. Thermoplastic strain of circular sandwich plates on an elastic base / D. V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. – 2009, Vol. 44, N 5. – P. 744–755.
8. Starovoitov, E.I. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46, № 2. – P. 291–298.
9. Плескачевский, Ю. М. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.
10. Starovoitov, E. I. Foundations of the theory of elasticity, plasticity and viscoelasticity / E. I. Starovoitov, F.B. Nagiyev – Apple Academic Press, Toronto, New Jersey, Canada, USA, 2012. – 346 p.
11. Поленов, В.С. Распространение волн в насыщенной жидкостью неоднородной пористой среде / В.С. Поленов, А.В. Чигарев // Прикладная математика и механика. – 2010. –Т. 74, № 2. – С. 276-284.

Summary

The bending with tension of three-layer elastic beam in a temperature field is considered. To describe kinematics of asymmetrical over thickness core pack the hypotheses of the broken normal are accepted. A system of equilibrium equations in terms of displacements has been derived. Analytical deciding a problem are received and their numeric analysis are conducted.

Поступила в редакцию 23.10.2012

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СКМ «МАТНЕМАТИСА» ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ В БИОМАТЕРИАЛАХ

¹Чигарев А.В., ²Борисов А.В.

¹ УО Белорусский национальный технический университет

² Филиал ФГБОУ ВПО «НИУ Московский энергетический институт (ТУ)» в г. Смоленске

Введение. Используем в исследовании статистическую модель разрушения опорно-двигательного аппарата человека, предложим функции распределения размеров микротрещины в биологическом материале и получим на ее основе статистические характеристики.

Рассмотрим статистические флуктуации и механизм роста микротрещин в костной системе человека. Каждый из биологических материалов (надкостница, кость, гиалиновый слой и т.д.) имеет собственную, присущую только ему, микроструктуру. Эта микроструктура всегда неоднородна. К неоднородностям следует отнести дефекты, фазовые структуры и композиции, возникающие в процессе развития и жизнедеятельности биологических организмов. Такая структурная неоднородность обуславливает статистическую природу закона усталости и ведет к флуктуации темпа роста микротрещины. Флуктуация темпа роста микротрещины теоретически может быть получена путем учета результатов всех видов дефектов. Практически, это невозможно сделать. Типы дефектов очень сложны, их распределение неоднородно, а количество велико. В нашем случае, оценивается микроструктура материала. Получается стохастическая флуктуация неоднородности структуры, т.е. статическая пространственная флуктуация, являющаяся независимой от времени.

При движении и нагрузке в биологических тканях появляются и растут микротрещины. Положение концов микротрещин непрерывно изменяется в пространстве. Следовательно, темп роста микротрещин изменяется стохастически.

Постановка задачи определения функции плотности вероятности появления и распространения трещины. Рост трещины обуславливается двумя факторами, имеющими место в суставе человека. Во-первых, это регулярная, циклическая сила, возникающая при ходьбе, при выполнении определенных действий на работе, в быту и т.п. Подобные силы действуют на растяжение и сжатие тканей сустава, имеют значения, не превышающие предела упругости элементов сустава, не приводящие к остаточным деформациям или немедленному разрушению. Под действием таких сил происходит накопление микроповреждений, локальных микротрещин в суставе. Идет скрытая фаза разрушения, накопления микроповреждений, сустав при этом является еще здоровым и полнофункциональным. Подобная детерминированная нагрузка приводит к тому, что трещина должна расти равномерно прямолинейно.

Во-вторых, на сустав действует нерегулярная, стохастическая составляющая нагрузки, возникающая в результате случайных перегрузок, например во время падений, занятий спортом и т.п. В суставе имеют место неоднородности структуры материала, другие микротрещины и т.п. Под действием второго фактора в одномерном случае изменяется только скорость роста микротрещины, а в дву- и трехмерном случаях изменяется и направление роста микротрещины, реализуются случайные блуждания конца трещины в суставе. В реальности, в трехмерном случае трещина растет как монета, постепенно увеличивая свой радиус, ее рост в основном, происходит в плоскости, с небольшим изгибом, поэтому в модели, приближенной к реальности необходимы все три пространственные координаты.

Рассмотрим работу опорно-двигательного аппарата человека в течение всей жизни. Количество воздействий на его элементы очень велико. Нагрузки носят нестационарный, случайный характер. Так как речь идет о живом организме, то эмпирической информации о свойствах костей и суставов человека недостаточно. Их принципиально невозможно получить из-за гуманных соображений. Ткани неживого человека не отражают в полной мере свойства живой ткани. В данном случае, наиболее адекватным биологическому прототипу является вероятностный подход к описанию распространения микротрещин.

Предположим, что направление движения конца трещины и скорость ее распространения в каждый момент времени определяются только действующими нагрузками и свойствами самого мате-

риала сустава и не зависят от предыдущего направления движения в предыдущий момент времени. Тогда поведение конца движения микротрещины является марковским случайным процессом. В одномерном случае, возможно следующее описание распространения трещины с использованием уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова [1].

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [K_1(x,t)w(x,t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [K_2(x,t)w(x,t)] \quad (1)$$

где $w(x,t)$ – функция плотности распределения значения координаты конца трещины к моменту времени t ; $K_1(x,t)$ – коэффициент сноса в биологическом материале; $K_2(x,t)$ – коэффициент диффузии в биологическом материале; t – время распространения трещины; x – координата конца трещины.

Это дифференциальное уравнение в частных производных параболического типа. На его основе опишем кинематику распространения трещины в элементах опорно-двигательного аппарата человека.

Численное решение уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова. Проведем численное решение исходного уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (1) в системе компьютерной математики «Mathematica» [2], встроенной функцией `NDSolve`. Опишем алгоритм и команды решения.

1. Задаем исходное уравнение (1) с определенными коэффициентами [3-8], и записываем его в переменную `Eq`.

```
Eq=D[w[x,t],t]==-
-D[(0.7*x+0.8)*w[x,t],x]+(1/2)D[0.5*w[x,t],{x,2}]
```

2. Численно решаем записанное дифференциальное уравнение в частных производных с нормальным начальным и соответствующими граничными условиями. Его решение записываем в переменную `SolEq`.

```
SolEq=NDSolve[{Eq,w[x,0]==(1/Sqrt[2*\[Pi]])*Exp[-
x^2],w[0,t]==(1/Sqrt[2*\[Pi]])*Exp[-t^2],w[6,t]==
(1/Sqrt[2*\[Pi]])*E^-36},w,{x,0,6},{t,0,6}]
```

3. Строим график полученного решения, который представлен поверхностью в трехмерном пространстве.

```
Plot3D[Evaluate[w[x,t]/.First[SolEq]],{x,0,6},
{t,0,6},Boxed->False,AxisLabel->{"x","t","w"}]
```

В результате получаем следующий график (рис. 1) Таким образом, найдена функция плотности вероятности роста трещины в твердых тканях человека численно. Описано поведение функции плотности вероятности. Установлено, что наиболее вероятно появление трещин небольшого размера в начальный период и рост размера трещин с увеличением времени процесса.

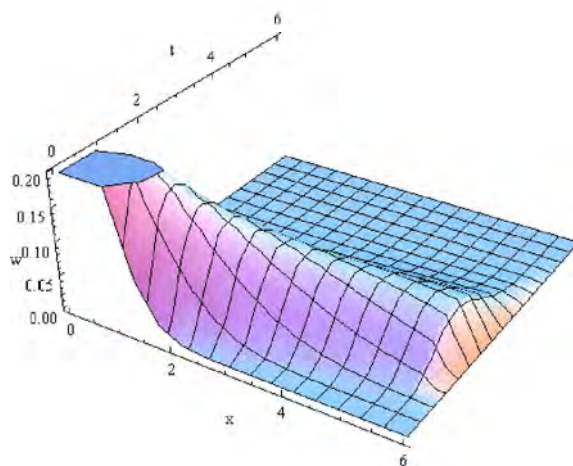


Рисунок 1 – Результат численного решения уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова

Анализируя график процесса (рис. 1), видно, что наиболее вероятно появление микротрещин в первой половине времени процесса. По рис. 1 видно, что вероятность появления трещины зависит от длины трещины. С ростом длины трещины вероятность ее появления уменьшается. Рост длины тре-

щины имеет сопротивление и, чтобы трещина росла, необходимо прикладывать дополнительное внешнее усилие.

Физический смысл данного решения заключается в том, что микротрещины малого размера возникают на начальной стадии процесса и вероятность их возникновения достаточно высока, тогда как трещины более значительные по размеру возникают на последующих стадиях процесса и с ростом времени их размер увеличивается, но при этом значительно снижается вероятность появления больших трещин.

С точки зрения биомеханики это означает, что вначале идет скрытая фаза накопления микроразрушений, а затем, с возрастом, возникают макроскопические трещины, которые приводят к нарушению функционирования опорно-двигательного аппарата человека.

Таким образом, сначала идет инкубационный период, потом накопление локальных микроразрушений в биологических тканях. Затем микротрещины сливаются в магистральную трещину и, когда она достигает границ материала, то происходит его разрушение.

Определение среднего времени достижения трещиной границ сустава. Найдем среднее время первого достижения трещиной границ сустава. Уравнение для времени достижения границы процессом $T(a, x_0, b)$ получено в предположении о стационарности процесса.

$$-1 = K_1(x_0) \frac{dT}{dx_0} + \frac{1}{2} K_2(x_0) \frac{d^2T}{dx_0^2} \quad (2)$$

Проводя численные расчеты при значениях границ, соответствующим характерным размерам в суставе $a = 0, b = 6$, для времени достижения границы из соответствующего начального положения, решим численно исходное дифференциальное уравнение (2) при тех же значениях параметров и нормальными граничными условиями.

Решение проведем в СКМ Mathematica. Задаем исходное уравнение:

```
Eq=-1==D[w[x],x]+(1/2)D[2*w[x],{x,2}]
```

Решаем его:

```
SolEq=NDSolve[{Eq,w[0]==(1/Sqrt[2*\[Pi]])*Exp[-1^2],w[6]==(1/Sqrt[2*\[Pi]])*E^-36},w,{x,0,6}]
```

В качестве результата строим график (рис. 2):

```
Plot[Evaluate[w[x]/.First[SolEq]],{x,0,6},AxesLabel->{"x0","T"}]
```

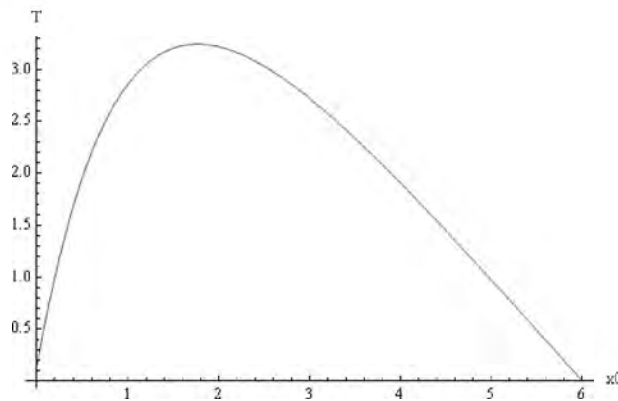


Рисунок 2 – Зависимость среднего времени первого достижения трещиной границы от начального положения начальной микротрещины

Таким образом, нами получены оценки среднего времени достижения трещиной границы сустава.

Так как выше была получена плотность распределения двумерной случайной величины, $w(x, t)$, математическое ожидание и дисперсия определяются соотношениями:

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} tw(x, t) dx dt, \quad D(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (t - M(t))^2 w(x, t) dx dt. \quad (3)$$

Так как функция плотности вероятности получается в результате численного решения дифференциального уравнения в частных производных на заданном отрезке интегрирования. Следовательно функцию плотности вероятности необходимо рассматривать как кусочную функцию, определен-

ную только в на отрезке интегрирования. Следовательно, пользуясь аддитивностью интеграла относительно отрезка интегрирования (свойство выполняется и для кратных интегралов), разбиваем несобственные интегралы на три интеграла, два из которых, несобственные, записанные вне отрезка интегрирования равны нулю, т.к. до рождения и после окончания жизни человека функцию плотности вероятности можно считать нулем, и определенного интеграла на отрезке интегрирования. Тогда вычисления по формулам (30) для $w(x, t)$ с данными, соответствующими модели суставов человека и с нормированными размерами сустава и продолжительностью жизни приводят к следующим значениям:

$$M(t) = 0,15, D(t) = 0,06.$$

Полученные математические ожидания показывают, что среднее время достижения подобных размеров 15% от продолжительности жизни, далее размер микротрещин (см. рис. 1) в течение жизни увеличивается, вероятность их появления снижается, что и наблюдается на практике. Далеко не все люди к старости имеют заболевания опорно-двигательного аппарата, связанные с накоплением микроразрушений.

Выводы.

1. Построено численное решение уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова применительно к одномерной задаче распространения трещины в биологическом материале в среде системы компьютерной математики.

2. Решена задача нахождения среднего времени первого достижения трещиной границы от начального положения микротрещины.

Резюме

В статье рассмотрена предложенная авторами стохастическая модель на основе марковских цепей, описывающая накопление повреждений в элементах опорно-двигательного аппарата человека. Проводится численное решение стохастического уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова в СКМ «Mathematica» и графическая визуализация решения дифференциального уравнения. На основании полученного решения рассчитано среднее время достижения трещиной границ сустава

Литература

1. Казаков В.А. Введение в теорию Марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи. – М.: «Советское радио», 1973. – 232 с.
2. Дьяконов В.П. Mathematica 5.1/5.2/6 в математических и научно-технических расчетах. – М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2008. – 744 с.
3. Чигарев А.В., Борисов А.В. Предельные нагрузки в суставах человека. // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева Серия: Механика предельного состояния. 2010. №2 (8). С. 548–552.
4. Чигарев А.В., Михасев Г.И. Борисов А.В. Биомеханика. – Минск: Изд-во Гревцова, 2010. – 284 с.
5. Чигарев А.В., Борисов А.В. Биомеханика ходьбы человека. Учебное пособие. – М.: Издательство Спутник+, 2009. – 200 с.
6. Чигарев А.В., Борисов А.В. Диффузионная модель разрушения элементов опорно-двигательного аппарата человека. // Российский журнал биомеханики. 2012. Т. 16, № 1 (55). С. 22-37.
7. Чигарев А.В., Борисов А.В. Математическая модель взаимодействия деформируемых твердых тел применительно к оценке нагруженности коленного сустава человека. // Механика машин, механизмов и материалов. Международный научно-технический журнал. № 2 (7), Минск, 2009. С. 83-86.
8. Chigarev A.V., Borisov A.V. Mathematical Modeling of Human Posture Balance When Standing on One Foot. // CET Vol. 1 No. 1, 2012 PP.12-17.

Summary

The work deals with the proposed by the authors stochastic model based on Markovian chains which describes damage accumulation in the elements of a human locomotorium. The numerical solution of Fokker-Plank-Kolmogorov equation in the computer mathematics system “Mathematica” and the graphical visualization of the obtained solution are carried out. On the basis of the obtained solution the average time of achieving the joint-border by the crack is calculated.

Поступила в редакцию 03.10.2012

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНОГО ТЕРМО-ВЛАГО-ВЯЗКОУПРУГОГО ПОВЕДЕНИЯ ПРОСАДОЧНЫХ И НАБУХАЮЩИХ ГРУНТОВ, АРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ГЕОРЕШЕТКОЙ

Янковский А.П.

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,
Новосибирск*

Настоящая работа продолжает исследование, опубликованное в [1], где была предложена методика вычисления эффективных термо-влаگو-упругих характеристик набухающих и просадочных грунтов, армированных пространственной георешеткой. Однако известно, что грунты, а также георешетки, изготавливаемые из полимерных материалов [2], проявляют не только упругие, но и ярко выраженные вязкие и наследственные свойства [2–4], поэтому актуальной является проблема построения определяющих уравнений армированных георешетками грунтов с учетом их вязкого и линейно-наследственного поведения. В связи с этим настоящее исследование посвящено численно-аналитическому моделированию термо-влаگو-вязкоупругого поведения грунтов, армированных пространственной георешеткой.

Пусть имеется термо-влаگو-вязкоупругий слой грунта единичной толщины h , армированный регулярно в плоскости (x_1, x_2) объемной георешеткой (координата x_3 прямоугольной декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 направлена по толщине слоя). Выделим из такого геокомпозита простейший представительный элемент (ячейку) объемом $V = 2a \times 2b \times h$ (рисунок) так, чтобы любой другой элемент композита можно было получить параллельным переносом по направлению x_1 на расстояние $2an$, по направлению x_2 – на расстояние $2bm$, а по направлению x_3 – на расстояние hl ($n, m, l = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$).

На рисунке изображена ячейка с наиболее общим типом криволинейного армирования двумя усиливающими элементами 1, 2, представляющими собой цилиндрические оболочечные элементы,

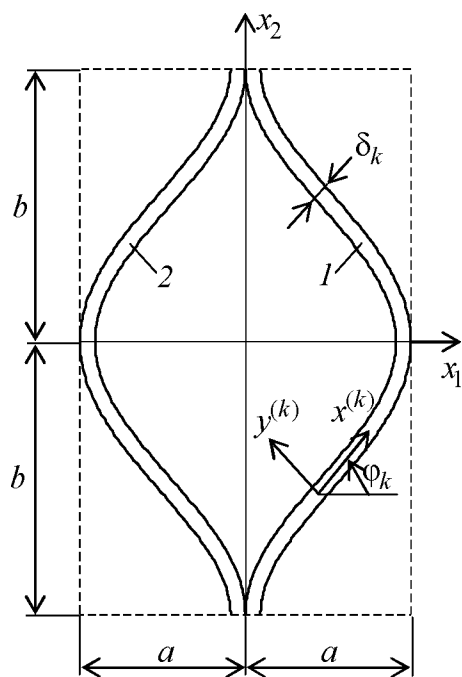


Рисунок 1 – Представительный элемент (ячейка) геокомпозита, армированного пространственной георешеткой (вид сверху)

направляющие которых параллельны оси x_3 , перпендикулярной плоскости рисунка. Из такой структуры заданием геометрии армирующих элементов можно получить георешетки всех видов, используемых на сегодняшний день на практике [2]. С каждым k -м армирующим элементом свяжем свою локальную прямоугольную декартову систему координат $x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)} \equiv x_3$ (как показано на рисунке), которая получается поворотом глобальной системы координат x_1, x_2, x_3 на угол φ_k вокруг вертикальной оси x_3 .

Для удобства дальнейшего изложения, как и в [1], напряженно-деформированное состояние компонент композиции и геокомпозита в целом будем описывать не тензорами напряжений и деформаций, а шестикомпонентными векторами напряжений и деформаций, что позволяет записывать определяющие соотношения в компактной матричной форме.

Все компоненты (фазы) композиции предполагаются материалами с общей анизотропией, механическое поведение которых описывается моделью обобщенного тела Максвелла – Томсона [5]. Согласно этой модели, с учетом принципа Неймана [4] и возможности набухания или проседания грунта [3] (а в самом общем случае и армирующих элементов) определяющие уравнения для компонент композиции, материалы которых предполагаются стабильными, можно записать так [4, 5]:

$$\begin{aligned}
\sigma_i^{(k)}(t) = & A_{ij}^{(k)} \left(\varepsilon_j^{(k)}(t) - \alpha_j^{(k)} T_k(t) - \beta_j^{(k)} w_k(t) \right) + \int_0^t \left[\sum_{m=1}^{M_k} B_{ij,m}^{(k)} \exp\left(-\frac{t-\tau}{n_m^{(k)}}\right) \dot{\varepsilon}_j^{(k)}(\tau) - \right. \\
& \left. - \sum_{s=1}^{N_k} A_{i,s}^{(k)} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_s^{(k)}}\right) \dot{T}_k(\tau) - \sum_{r=1}^{L_k} B_{i,r}^{(k)} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\gamma_r^{(k)}}\right) \dot{w}_k(\tau) \right] d\tau + C_{ij}^{(k)} \dot{\varepsilon}_j^{(k)}(t) - \\
& - D_i^{(k)} \dot{T}_k(t) - F_i^{(k)} \dot{w}_k(t), \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K,
\end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned}
\sigma_k^* &= \left\{ \sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{33}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}, \sigma_{23}^{(k)}, \sigma_{31}^{(k)} \right\} = \left\{ \sigma_1^{(k)}, \sigma_2^{(k)}, \sigma_3^{(k)}, \sigma_4^{(k)}, \sigma_5^{(k)}, \sigma_6^{(k)} \right\}, \\
\varepsilon_k^* &= \left\{ \varepsilon_{11}^{(k)}, \varepsilon_{22}^{(k)}, \varepsilon_{33}^{(k)}, \varepsilon_{12}^{(k)}, \varepsilon_{23}^{(k)}, \varepsilon_{31}^{(k)} \right\} = \left\{ \varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, \varepsilon_3^{(k)}, \varepsilon_4^{(k)}, \varepsilon_5^{(k)}, \varepsilon_6^{(k)} \right\}, \\
\alpha_k^* &= \left\{ \alpha_{11}^{(k)}, \alpha_{22}^{(k)}, \alpha_{33}^{(k)}, \alpha_{12}^{(k)}, \alpha_{23}^{(k)}, \alpha_{31}^{(k)} \right\} = \left\{ \alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \alpha_3^{(k)}, \alpha_4^{(k)}, \alpha_5^{(k)}, \alpha_6^{(k)} \right\}, \\
\beta_k^* &= \left\{ \beta_{11}^{(k)}, \beta_{22}^{(k)}, \beta_{33}^{(k)}, \beta_{12}^{(k)}, \beta_{23}^{(k)}, \beta_{31}^{(k)} \right\} = \left\{ \beta_1^{(k)}, \beta_2^{(k)}, \beta_3^{(k)}, \beta_4^{(k)}, \beta_5^{(k)}, \beta_6^{(k)} \right\};
\end{aligned} \quad (2)$$

$\sigma_i^{(k)}$ – компоненты вектора σ_k напряжений в k -й фазе композиции; $\varepsilon_i^{(k)}$ – компоненты вектора ε_k деформаций в k -й компоненте композиции; $\alpha_i^{(k)}$ – компоненты вектора α_k коэффициентов теплового расширения материала k -й фазы композиции; $\beta_i^{(k)}$ – компоненты вектора β_k коэффициентов линейного расширения набухающего (если компоненты $\beta_i^{(k)}$ положительны) или просадочного (если компоненты $\beta_i^{(k)}$ отрицательны) материала k -й компоненты композиции; T_k – отклонение температуры k -й фазы композиции от температуры естественного состояния; w_k – приращение влажности в k -й компоненте композиции по сравнению с естественным состоянием; $A_{ij}^{(k)}$ – компоненты матрицы жесткости A_k материала k -й фазы композиции; $C_{ij}^{(k)}$ – компоненты матрицы C_k линейных вязкостей материала k -й компоненты композиции; $D_i^{(k)}$ – элементы шестикомпонентного вектора линейных температурных вязкостей материала k -й фазы композиции; $F_i^{(k)}$ – элементы шестикомпонентного вектора линейных «влажностных» вязкостей материала k -й компоненты композиции; $B_{ij,m}^{(k)}$, $n_m^{(k)}$, M_k – характеристики материала k -й фазы композиции, определяющие его механические линейно-наследственные свойства; $A_{i,s}^{(k)}$, $\theta_s^{(k)}$, N_k – характеристики материала k -й компоненты композиции, определяющие его тепловые линейно-наследственные свойства; $B_{i,r}^{(k)}$, $\gamma_r^{(k)}$, L_k – характеристики материала k -й фазы композиции, определяющие его «влажностные» линейно-наследственные свойства (постоянные $n_m^{(k)}$, $\theta_s^{(k)}$, $\gamma_r^{(k)}$ имеют смысл характерного времени релаксации); K – количество армирующих элементов георешетки в ячейке (на рисунке изображена георешетка с двумя ($K = 2$) криволинейными армирующими элементами; возможен расчет и более сложных георешеток, в рамках настоящего исследования это не принципиально); звездочка означает операцию транспонирования; точка над функцией – производная по времени t . В соотношениях (1) и далее: по нижнему повторяющемуся индексу j производится суммирование от 1 до 6; при $k = 0$ эти соотношения относятся к связующему (грунту) и записаны в глобальной системе координат x_1, x_2, x_3 , при $1 \leq k \leq K$ соотношения (1) относятся к k -му армирующему элементу и записаны в локальной системе $x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)} \equiv x_3$, связанной с этим элементом.

Соотношения (1) выписаны для самого общего случая, когда предполагается, что и армирующие элементы могут набухать или проседать от увеличения влажности; если же армирующие элементы не обладают этими свойствами, то в (1) следует формально принять $\beta_j^{(k)} = 0$, $B_{i,r}^{(k)} = 0$, $F_i^{(k)} = 0$

($k \neq 0$). Представление ядер интегральных операторов в (1) в виде линейных комбинаций экспоненциальных функций с числом слагаемых M_k, N_k, L_k позволяет аппроксимировать ядра более сложной структуры, в том числе и некоторые виды слабоингулярных ядер [6]. Равенства (2) задают соответствия между шестью компонентами f_i ($i = \overline{1, 6}$) некоторого вектора \mathbf{f} и компонентами соответствующего симметричного тензора второго ранга f_{ij} ($i, j = 1, 2, 3; 0 \leq k \leq K$). В соотношениях (1) и далее будем в явном виде указывать зависимость функций $\sigma_i^{(k)}, \varepsilon_i^{(k)}, T_k, w_k$ и их производных только от времени t , а зависимости этих функций от пространственных координат x_1, x_2, x_3 для сокращения записи указывать не будем, но будем их неявно учитывать.

Традиционно для решения задач о механическом поведении конструкций из линейно-наследственных материалов применяют преобразование Лапласа [4, 5]. Однако это преобразование оказывается эффективным лишь в тех случаях, для которых известны аналитические решения соответствующих линейно-упругих задач [4]. В связи с этим и исходя из того, что механическое поведение современных весьма сложных дорожных конструкций, как правило, слоистой структуры [2], целесообразно определять численными методами, в настоящем исследовании разработаем численный подход к моделированию термо-влаго-вязкоупругого поведения геокомпозита из линейно-наследственных фазовых материалов без привлечения преобразования Лапласа и функций комплексного переменного. С этой целью предварительно вычислим интегралы в (1) по частям, тогда после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} \sigma_i(t) = & \left(A_{ij} + \sum_m B_{ij,m} \right) \varepsilon_j(t) - \left(A_{ij} \alpha_j + \sum_s A_{i,s} \right) T(t) - \left(A_{ij} \beta_j + \sum_r B_{i,r} \right) w(t) - \\ & - \int_0^t \left[\sum_m \frac{B_{ij,m}}{n_m} \exp\left(-\frac{t-\tau}{n_m}\right) \varepsilon_j(\tau) - \sum_s \frac{A_{i,s}}{\theta_s} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_s}\right) T(\tau) - \sum_r \frac{B_{i,r}}{\gamma_r} \times \right. \\ & \left. \times \exp\left(-\frac{t-\tau}{\gamma_r}\right) w(\tau) \right] d\tau + C_{ij} \dot{\varepsilon}_j(t) - D_i \dot{T}(t) - F_i \dot{w}(t), \quad i = 1, 2, \dots, 6, \end{aligned} \quad (3)$$

где, как обычно [4], предполагается, что до начального момента времени $t_0 = 0$ геокомпозит находился в естественном состоянии, т. е. $\varepsilon_j(t) = 0, T(t) = 0, w(t) = 0$ при $t \leq t_0$. Здесь и далее для упрощения записи в промежуточных выкладках будем опускать индекс k , определяющий номер фазы композиции; суммирование производится по указанным индексам m, s, r от 1 до M, N, L соответственно (точнее до M_k, N_k, L_k).

Введем в рассмотрение интегралы вида:

$$E_{j,m}(t) \equiv \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{n_m}\right) \varepsilon_j(\tau) d\tau, \quad \Theta_s(t) \equiv \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_s}\right) T(\tau) d\tau, \quad W_r(t) \equiv \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\gamma_r}\right) w(\tau) d\tau. \quad (4)$$

Соотношения (3) с учетом (4) примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_i(t) = & \left(A_{ij} + \sum_m B_{ij,m} \right) \varepsilon_j(t) - \left(A_{ij} \alpha_j + \sum_s A_{i,s} \right) T(t) - \left(A_{ij} \beta_j + \sum_r B_{i,r} \right) w(t) - \\ & - \sum_m \frac{B_{ij,m}}{n_m} E_{j,m}(t) + \sum_s \frac{A_{i,s}}{\theta_s} \Theta_s(t) + \sum_r \frac{B_{i,r}}{\gamma_r} W_r(t) + C_{ij} \dot{\varepsilon}_j(t) - D_i \dot{T}(t) - F_i \dot{w}(t), \quad i = \overline{1, 6}. \end{aligned} \quad (5)$$

Дискретизируем задачу по времени t , т. е. будем рассматривать ее решения в моменты времени t_n ($n = 0, 1, 2, \dots$). Предполагаем, что в момент времени t_n решение задачи уже известно, т. е. известны функции, зависящие от пространственных переменных:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_j^n \equiv \dot{\varepsilon}_j(t_n), \quad \varepsilon_j^n \equiv \varepsilon_j(t_n), \quad \dot{T}^n \equiv \dot{T}(t_n), \quad T^n \equiv T(t_n), \quad \dot{w}^n \equiv \dot{w}(t_n), \quad w^n \equiv w(t_n), \\ E_{j,m}^n \equiv E_{j,m}(t_n), \quad \Theta_s^n \equiv \Theta_s(t_n), \quad W_r^n \equiv W_r(t_n), \quad \sigma_i^n \equiv \sigma_i(t_n). \end{aligned} \quad (6)$$

Построим соотношения (5) для момента времени

$$t_{n+1} = t_n + \tau_n, \quad n = 0, 1, 2 \dots, \quad (7)$$

где τ_n – шаг по времени (возможно, переменный). Из соотношений (5) с учетом обозначений типа (6) следует:

$$\begin{aligned} \sigma_i^{n+1} = & \left(A_{ij} + \sum_m B_{ij,m} \right) \varepsilon_j^{n+1} - \left(A_{ij} \alpha_j + \sum_s A_{i,s} \right) T^{n+1} - \left(A_{ij} \beta_j + \sum_r B_{i,r} \right) w^{n+1} - \\ & - \sum_m \frac{B_{ij,m}}{n_m} E_{j,m}^{n+1} + \sum_s \frac{A_{i,s}}{\theta_s} \Theta_s^{n+1} + \sum_r \frac{B_{i,r}}{\gamma_r} W_r^{n+1} + C_{ij} \dot{\varepsilon}_j^{n+1} - D_i \dot{T}^{n+1} - F_i \dot{w}^{n+1}, \quad i = \overline{1, 6}. \end{aligned} \quad (8)$$

Используя равенства (4), с учетом соотношений (6), (7) преобразуем в (8) величины

$$\begin{aligned} E_{j,m}^{n+1} & \equiv \int_0^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{n_m}\right) \varepsilon_j(\tau) d\tau = \int_0^{t_n} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{n_m}\right) \varepsilon_j(\tau) d\tau + \\ & + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{n_m}\right) \varepsilon_j(\tau) d\tau = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{n_m}\right) \varepsilon_j(\tau) d\tau + \int_0^{t_n} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-t_n}{n_m}\right) \times \\ & \times \exp\left(-\frac{t_n-\tau}{n_m}\right) \varepsilon_j(\tau) d\tau = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{n_m}\right) \varepsilon_j(\tau) d\tau + \exp\left(-\frac{\tau_n}{n_m}\right) E_{j,m}^n, \\ \Theta_s^{n+1} & \equiv \int_0^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{\theta_s}\right) T(\tau) d\tau = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{\theta_s}\right) T(\tau) d\tau + \exp\left(-\frac{\tau_n}{\theta_s}\right) \Theta_s^n, \\ W_r^{n+1} & \equiv \int_0^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{\gamma_r}\right) w(\tau) d\tau = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{\gamma_r}\right) w(\tau) d\tau + \exp\left(-\frac{\tau_n}{\gamma_r}\right) W_r^n. \end{aligned} \quad (9)$$

Для приближенного вычисления первых интегралов в правых частях равенств (9) используем формулу трапеций, имеющую второй порядок точности по τ_n , т.е.

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{n_m}\right) \varepsilon_j(\tau) d\tau & \approx \frac{\tau_n}{2} \left(\exp\left(-\frac{t_{n+1}-t_{n+1}}{n_m}\right) \varepsilon_j + \exp\left(-\frac{t_{n+1}-t_n}{n_m}\right) \varepsilon_j \right) = \\ & = \frac{\tau_n}{2} \left(\varepsilon_j^{n+1} + \exp\left(-\frac{\tau_n}{n_m}\right) \varepsilon_j^n \right), \quad \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{\theta_s}\right) T(\tau) d\tau \approx \frac{\tau_n}{2} \left(T^{n+1} + \exp\left(-\frac{\tau_n}{\theta_s}\right) T^n \right), \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{\gamma_r}\right) w(\tau) d\tau & \approx \frac{\tau_n}{2} \left(w^{n+1} + \exp\left(-\frac{\tau_n}{\gamma_r}\right) w^n \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Подставим (10) в соотношения (9), тогда получим приближенные формулы

$$\begin{aligned} E_{j,m}^{n+1} & \approx \frac{\tau_n}{2} \left(\varepsilon_j^{n+1} + \exp\left(-\frac{\tau_n}{n_m}\right) \varepsilon_j^n \right) + \exp\left(-\frac{\tau_n}{n_m}\right) E_{j,m}^n = \frac{\tau_n}{2} \varepsilon_j^{n+1} + \exp\left(-\frac{\tau_n}{n_m}\right) \left(\frac{\tau_n}{2} \varepsilon_j^n + E_{j,m}^n \right), \\ \Theta_s^{n+1} & \approx \frac{\tau_n}{2} T^{n+1} + \exp\left(-\frac{\tau_n}{\theta_s}\right) \left(\frac{\tau_n}{2} T^n + \Theta_s^n \right), \quad W_r^{n+1} \approx \frac{\tau_n}{2} w^{n+1} + \exp\left(-\frac{\tau_n}{\gamma_r}\right) \left(\frac{\tau_n}{2} w^n + W_r^n \right), \quad j = \overline{1, 6}. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя формулу трапеций, запишем следующие приближенные равенства:

$$\varepsilon_j^{n+1} - \varepsilon_j^n = \frac{\tau_n}{2} \left(\dot{\varepsilon}_j^{n+1} + \dot{\varepsilon}_j^n \right), \quad T^{n+1} - T^n = \frac{\tau_n}{2} \left(\dot{T}^{n+1} + \dot{T}^n \right), \quad w^{n+1} - w^n = \frac{\tau_n}{2} \left(\dot{w}^{n+1} + \dot{w}^n \right),$$

из которых следует

$$\dot{\varepsilon}_j^n = \frac{2}{\tau_n} \left(\varepsilon_j^{n+1} - \varepsilon_j^n \right) - \dot{\varepsilon}_j^{n+1}, \quad \dot{T}^n = \frac{2}{\tau_n} \left(T^{n+1} - T^n \right) - \dot{T}^{n+1}, \quad \dot{w}^n = \frac{2}{\tau_n} \left(w^{n+1} - w^n \right) - \dot{w}^{n+1}. \quad (12)$$

Подставим выражения (11), (12) в соотношения (8) и восстановим индекс k , тогда после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} \sigma_i^{n+1} = & \left(A_{ij}^{(k)} + \sum_{m=1}^{M_k} B_{ij,m}^{(k)} \left(1 - \frac{\tau_n}{2n_m^{(k)}} \right) + \frac{2}{\tau_n} C_{ij}^{(k)} \right) \varepsilon_j^{n+1} - \left(A_{ij}^{(k)} \alpha_j^{(k)} + \sum_{s=1}^{N_k} A_{i,s}^{(k)} \left(1 - \frac{\tau_n}{2\theta_s^{(k)}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{2}{\tau_n} D_i^{(k)} \right) T_k - \left(A_{ij}^{(k)} \beta_j^{(k)} + \sum_{r=1}^{L_k} B_{i,r}^{(k)} \left(1 - \frac{\tau_n}{2\gamma_r^{(k)}} \right) + \frac{2}{\tau_n} F_i^{(k)} \right) w_k - \sum_{m=1}^{M_k} \frac{B_{ij,m}^{(k)}}{n_m^{(k)}} \exp \left(-\frac{\tau_n}{n_m^{(k)}} \right) \times \\ & \times \left(\frac{\tau_n}{2} \varepsilon_j^{n+1} + E_{j,m}^{n+1} \right) + \sum_{s=1}^{N_k} \frac{A_{i,s}^{(k)}}{\theta_s^{(k)}} \exp \left(-\frac{\tau_n}{\theta_s^{(k)}} \right) \left(\frac{\tau_n}{2} T_k + \Theta_s^{n+1} \right) + \sum_{r=1}^{L_k} \frac{B_{i,r}^{(k)}}{\gamma_r^{(k)}} \exp \left(-\frac{\tau_n}{\gamma_r^{(k)}} \right) \left(\frac{\tau_n}{2} w_k + W_r^{n+1} \right) - \\ & - C_{ij}^{(k)} \left(\frac{2}{\tau_n} \varepsilon_j^{n+1} + \dot{\varepsilon}_j^{n+1} \right) + D_i^{(k)} \left(\frac{2}{\tau_n} T_k + \dot{T}_k \right) + F_i^{(k)} \left(\frac{2}{\tau_n} w_k + \dot{w}_k \right), \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad 0 \leq k \leq K. \end{aligned} \quad (13)$$

Равенства (13) можно записать в матричной форме

$$\sigma_k^{n+1} = \bar{A}_k^{n+1} \varepsilon_k^n - \mathbf{B}_k^n T_k - \mathbf{V}_k^n w_k + \bar{\mathbf{p}}_k^n, \quad 0 \leq k \leq K, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

где $\bar{A}_k^n = \left(\bar{A}_{ij}^{(k)} \right)$ – 6×6 матрица, $\mathbf{B}_k^n = \left\{ B_i^{(k)} \right\}$, $\mathbf{V}_k^n = \left\{ V_i^{(k)} \right\}$, $\bar{\mathbf{p}}_k^n = \left\{ \bar{p}_i^{(k)} \right\}$ – шестикомпонентные

векторы, элементы которых согласно (13) имеют выражения

$$\begin{aligned} \bar{A}_{ij}^{(k)} = & A_{ij}^{(k)} + \sum_{m=1}^{M_k} B_{ij,m}^{(k)} \left(1 - \frac{\tau_n}{2n_m^{(k)}} \right) + \frac{2}{\tau_n} C_{ij}^{(k)} \quad (j = \overline{1, 6}), \quad B_i^{(k)} = A_{ij}^{(k)} \alpha_j^{(k)} + \sum_{s=1}^{N_k} A_{i,s}^{(k)} \left(1 - \frac{\tau_n}{2\theta_s^{(k)}} \right) + \\ & + \frac{2}{\tau_n} D_i^{(k)}, \quad V_i^{(k)} = A_{ij}^{(k)} \beta_j^{(k)} + \sum_{r=1}^{L_k} B_{i,r}^{(k)} \left(1 - \frac{\tau_n}{2\gamma_r^{(k)}} \right) + \frac{2}{\tau_n} F_i^{(k)}, \quad \bar{p}_i^{(k)} = - \sum_{m=1}^{M_k} \frac{B_{ij,m}^{(k)}}{n_m^{(k)}} \exp \left(-\frac{\tau_n}{n_m^{(k)}} \right) \times \\ & \times \left(\frac{\tau_n}{2} \varepsilon_j^{n+1} + E_{j,m}^{n+1} \right) + \sum_{s=1}^{N_k} \frac{A_{i,s}^{(k)}}{\theta_s^{(k)}} \exp \left(-\frac{\tau_n}{\theta_s^{(k)}} \right) \left(\frac{\tau_n}{2} T_k + \Theta_s^{n+1} \right) + \sum_{r=1}^{L_k} \frac{B_{i,r}^{(k)}}{\gamma_r^{(k)}} \exp \left(-\frac{\tau_n}{\gamma_r^{(k)}} \right) \left(\frac{\tau_n}{2} w_k + W_r^{n+1} \right) - \\ & - C_{ij}^{(k)} \left(\frac{2}{\tau_n} \varepsilon_j^{n+1} + \dot{\varepsilon}_j^{n+1} \right) + D_i^{(k)} \left(\frac{2}{\tau_n} T_k + \dot{T}_k \right) + F_i^{(k)} \left(\frac{2}{\tau_n} w_k + \dot{w}_k \right) \quad (i = \overline{1, 6}). \end{aligned} \quad (15)$$

Так как функции (6) в момент времени t_n предполагаются уже известными, то компоненты матрицы \bar{A}_k^n и векторов \mathbf{B}_k^n , \mathbf{V}_k^n , $\bar{\mathbf{p}}_k^n$ в (14) согласно равенствам (15) также известны. Кроме того, соотношения (14) формально совпадают с определяющими уравнениями термо-влаگو-упругого материала, записанными в матричной форме.

Перепишем равенство (14) в следующем виде:

$$\sigma_k^{n+1} = \bar{A}_k^{n+1} \left(\varepsilon_k^n - \alpha_k^n T_k - \beta_k^n w_k \right) + \bar{\mathbf{p}}_k^n, \quad 0 \leq k \leq K, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (16)$$

где

$$\alpha_k^n = \bar{A}_k^{n-1} \mathbf{B}_k^n, \quad \beta_k^n = \bar{A}_k^{n-1} \mathbf{V}_k^n; \quad (17)$$

\bar{A}_k^{n-1} – 6×6 -матрица, обратная \bar{A}_k^n .

Если вектор $\bar{\mathbf{p}}_k^n$ трактовать как вектор начальных напряжений, матрицу \bar{A}_k^n – как матрицу упругих жесткостей k -й фазы композиции, а шестикомпонентные векторы α_k^n , β_k^n – как векторы коэффициентов теплового расширения и линейного расширения набухающего или проседающего мате-

риала k -й компоненты композиции соответственно, то соотношения (16) с учетом (15), (17) полностью совпадают с равенствами (1) в [1]. Поэтому, применяя к геокомпозиту в момент времени t_{n+1} допущения, использованные в [1] и почти дословно повторяя все рассуждения из [1], получим, что определяющие уравнения для геокомпозита в момент времени t_{n+1} в матричной форме будут иметь следующий вид:

$$\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \bar{A}^n \begin{pmatrix} n+1 & n & n+1 & n & n+1 \\ \boldsymbol{\varepsilon} & -\boldsymbol{\alpha} & T & -\boldsymbol{\beta} & w_0 \end{pmatrix} + \bar{\mathbf{p}}^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{A}^n &= \left(\frac{V_0}{V} \bar{A}_0^n + \frac{h}{V} \sum_{k=1}^K \int_0^{l_k} \delta_k D_k \bar{A}_k^n B_k dl \right) E, \quad \bar{\boldsymbol{\beta}}^n = \bar{A}^{n-1} \left[\frac{V_0}{V} \bar{A}_0^n \left(\bar{\boldsymbol{\beta}}_0^n - \mathbf{H} \right) + \frac{h}{V} \sum_{k=1}^K \int_0^{l_k} \delta_k D_k \bar{A}_k^n (\mathbf{F}_k - B_k \mathbf{H}) dl \right], \\ \bar{\boldsymbol{\alpha}}^n &= \bar{A}^{n-1} \left[\frac{V_0}{V} \bar{A}_0^n \left(\bar{\boldsymbol{\alpha}}_0^n + \mathbf{G} \right) + \frac{h}{V} \sum_{k=1}^K \int_0^{l_k} \delta_k D_k \bar{A}_k^n \left(\bar{\boldsymbol{\alpha}}_k^n - \mathbf{C}_k + B_k \mathbf{G} \right) dl \right]; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\bar{\mathbf{p}}^n = \frac{V_0}{V} \bar{\mathbf{p}}_0^n + \frac{h}{V} \sum_{k=1}^K \int_0^{l_k} \delta_k D_k \bar{\mathbf{p}}_k^n dl + \frac{h}{V} \sum_{k=1}^K \int_0^{l_k} \delta_k D_k \bar{A}_k^n \bar{\mathbf{P}}_k^n dl - \left(\frac{V_0}{V} \bar{A}_0^n + \frac{h}{V} \sum_{k=1}^K \int_0^{l_k} \delta_k D_k \bar{A}_k^n B_k dl \right) \bar{\mathbf{P}}^n; \quad (20)$$

$$\bar{\mathbf{P}}^n \equiv E \left(\frac{h}{V} \sum_{k=1}^K \int_0^{l_k} \delta_k D_k \bar{\mathbf{P}}_k^n dl \right), \quad \bar{\mathbf{P}}_k^n = \left\{ 0, P_2^{(k)}, 0, P_4^{(k)}, P_5^{(k)}, 0 \right\},$$

$$P_2^{(k)} \equiv \left(\bar{p}_1^{(0)} \sin^2 \varphi_k + \bar{p}_2^{(0)} \cos^2 \varphi_k - \bar{p}_4^{(0)} \sin 2\varphi_k - \bar{p}_2^{(k)} \right) / \bar{A}_{22}^{(k)}, \quad (21)$$

$$P_4^{(k)} \equiv \left[\frac{1}{2} \left(\bar{p}_2^{(0)} - \bar{p}_1^{(0)} \right) \sin 2\varphi_k + \bar{p}_4^{(0)} \cos 2\varphi_k - \bar{p}_4^{(k)} \right] / \bar{A}_{44}^{(k)},$$

$$P_5^{(k)} \equiv \left(-\bar{p}_6^{(0)} \sin \varphi_k + \bar{p}_5^{(0)} \cos \varphi_k - \bar{p}_5^{(k)} \right) / \bar{A}_{55}^{(k)};$$

\bar{A}^{n-1} – 6×6 -матрица, обратная \bar{A}^n ; остальные 6×6 -матрицы D_k , B_k , E , шестикомпонентные векторы \mathbf{G} , \mathbf{H} , \mathbf{C}_k , \mathbf{F}_k , функции и величины определены в [1, 7].

Соотношения (18), (19), как и в [1], записаны для случая, когда свойствами набухания или проседания обладает только связующее – грунт (армирующие элементы этими свойствами не обладают, что и имеет место на практике, т. е. $\beta_j^{(k)} = 0$, $B_{i,r}^{(k)} = 0$, $F_i^{(k)} = 0$, $1 \leq k \leq K$, см. (1)).

Выражения (19) формально полностью совпадают с аналогичными равенствами, полученными в [1] (см. там (17), (18)). Соотношения же (20), которые можно трактовать как осредненные начальные напряжения в геокомпозите, отличаются от полученных в [1]. Это объясняется тем, что в [1] рассматривались реальные начальные напряжения в компонентах композиции, для которых выполняются условия сопряжения этих напряжений на границах контакта армирующих элементов и связующего

– грунта (см. (5) в [1]). В настоящем же исследовании $\bar{p}_i^{(k)}$ (см. (15)) – условные начальные напряжения, для которых условия сопряжения на границах контакта армирующих элементов и связующего не выполняются, что и привело к появлению двух последних слагаемых в правой части выражения (20).

Таким образом, если в момент времени t_n известны функции (6), то согласно (19)–(21) в соотношениях (18) известны компоненты 6×6 -матрицы \bar{A}^n и шестикомпонентных векторов $\bar{\boldsymbol{\alpha}}^n$, $\bar{\boldsymbol{\beta}}^n$, $\bar{\mathbf{p}}^n$. Решая для момента времени t_{n+1} соответствующую граничную задачу о термо-влажностно-упругом пове-

дении геокомпозита (или дорожной конструкции в целом) с использованием определяющего соотношения (18), получим поля осредненных напряжений σ^{n+1} и деформаций ε^{n+1} в композиции. Зная эти поля, по формулам (см. (8), (14) в [1] и (11) в [7])

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^{n+1} &= E \varepsilon^{n+1} - G T^{n+1} + H w_0^{n+1} - P, \quad T_k^{n+1} = T^{n+1} \quad (0 \leq k \leq K), \\ \varepsilon_k^{n+1} &= B_k \varepsilon_0^{n+1} + C_k T^{n+1} - F_k w_0^{n+1} + P_k \quad (1 \leq k \leq K) \end{aligned} \quad (22)$$

можем последовательно определить поля деформаций ε_k^{n+1} и температур T_k^{n+1} во всех компонентах

композиции. При известных функциях $\varepsilon_j^{(k)}$, T_k^{n+1} , w_k^{n+1} с учетом (6) по формулам (11)–(13) можем

определить $E_{j,m}^{(k)}$, $\Theta_s^{(k)}$, $W_r^{(k)}$, $\dot{\varepsilon}_j^{(k)}$, \dot{T}_k^{n+1} , \dot{w}_k^{n+1} , $\sigma_i^{(k)}$ ($0 \leq k \leq K$). Следовательно, все функции, указанные в (6), становятся известными в момент времени t_{n+1} , поэтому, повторяя рассуждения (6)–(22) для следующего момента времени (заменяв n на $n+1$), можем рассчитать механическое поведение геокомпозита при $t = t_{n+2}$ и т. д. Так как в начальный момент времени $t = t_0 = 0$ функции (6) при $n = 0$ предполагаются известными и равными нулю, то по описанной выше схеме можем последовательно получить решения задачи о термо-влаго-вязкоупругом поведении армированного грунта в дискретные моменты времени (7).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-90405-Укр_а).

Литература

1. Немировский, Ю.В. Построение определяющих уравнений просадочных и набухающих грунтов, армированных пространственной георешеткой, с учетом предварительного напряженного состояния / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Изв. вузов. Строительство. – 2009. – № 6. – С. 3–10.
2. Матвеев, С.А. Армированные дорожные конструкции: моделирование и расчет / С.А. Матвеев, Ю.В. Немировский. – Новосибирск: Наука, 2006. – 348 с.
3. Тер-Мартirosян, З.С. Механика грунтов / Учебное пособие / З.С. Тер-Мартirosян. – М: Изд-во Ассоциации строит. вузов, 2005. – 488 с.
4. Ильюшин, А.А. Труды. Т. 3. Теория термовязкоупругости / Составители: Е.А. Ильюшина, В.Г. Тунгусова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 288 с.
5. Малмейстер, А.К. Сопротивление жестких полимерных материалов / А.К. Малмейстер, В.П. Тамуж, Г.А. Тетерс. – Рига: Зинатне, 1972. – 500 с.
6. Абросимов, Н.А. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций / Н.А. Абросимов, В.Г. Баженов. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
7. Немировский, Ю.В. Кинематический метод определения эффективных термоупругих характеристик грунта, армированного пространственной георешеткой / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Изв. вузов. Строительство. – 2007. – № 6. – С. 18–26.

Summary

The numerically-analytical model of linear thermo-moisture-viscoelastic behaviour the subsidence and moisture soils reinforced by the space geolattice with structure of a general view is developed, allowing during the discrete moments of a time to reduce an observed problem to thermo-moisture-elastic within the limits of which procedure of construction of the governing equations is already known.

Поступила в редакцию 19.11.2012

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ДВУСТЕННОЙ УГЛЕРОДНОЙ НАНОТРУБКИ, ОСНОВАННОЕ НА НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Михасев Г.И., Шейко А.Н.

Белорусский государственный университет, Минск

Введение. Уникальные свойства углеродных нанотрубок (УНТ) вызвали огромный интерес у исследователей, занимающихся моделированием и созданием нового поколения композитных материалов. Известно, что существуют два подхода к исследованиям УНТ: на основе атомарных или молекулярных моделей и на базе моделей классической механики сплошных сред. Очевидно, что оба подхода имеют свои недостатки [1]. Атомистическое моделирование достаточно сложно провести, требует больших затрат вычислительных ресурсов и для анализа объектов относительно больших размеров не подходит. В то же время применимость методов классической механики сплошных сред к наноразмерными объектами вызывает сомнения [2, 3]. Было выполнено много работ, показавших существенные различия в результатах, полученных по атомистическим моделям и моделям классической механики. Неудачные попытки применить континуальные модели для изучения механических свойств наноразмерных структур частично объясняются тем, что эти модели не учитывают присущие низкоразмерным объектам зависимости предсказуемых свойств от микроструктуры материала.

В последнее время, в связи с ограниченностью классических континуальных моделей в исследовании наноразмерных структур, появилось достаточно много работ, в которых используется нелокальный континуальный подход, предложенный Эрингеном [4, 5]. Согласно нелокальному закону физического состояния Эрингена напряженное состояние в данной точке является функцией деформаций в каждой точке тела. В работе [6] результаты анализа динамического поведения УНТ, предсказываемые моделью нелокальной упругости, были сопоставлены с результатами, полученными на основе молекулярной динамики, и показали хорошую согласованность в широком диапазоне частот. Впоследствии появилось огромное количество работ, в которых УНТ рассматриваются с позиций нелокальной теории оболочек с учетом различных усложняющих факторов и, в частности, с учетом наличия анизотропии упругих свойств, зависящей от хиральности УНТ, зависимости эффективных модулей упругости от размеров УНТ и вида внешней нагрузки и т.п. Однако, в подавляющем числе известных работ механическое поведение УНТ, внедренной в упругую матрицу, исследовалось без учета начальных напряжений, вызванных реакцией окружающей среды. При этом, наиболее изученными оказываются одностенные УНТ, а число работ, в которых детально исследованы механические свойства многостенных и, в частности двустенных УНТ, крайне ограничено.

Целью данной работы является вывести уравнения движения двустенной УНТ, находящейся в упругой среде, с использованием нелокальной теории ортотропных оболочек Флюгге, и на их основе исследовать собственные формы колебаний в зависимости от размеров УНТ, числа волн в окружном и осевом направлениях. Особенностью данной работы, по сравнению с ранее проведенными исследованиями [7-9], является учет начальных мембранных усилий в наноболочке, обусловленных действием внешней нагрузки и/или реакцией окружающей упругой среды.

Система координат. Для описания двустенной углеродной нанотрубки используем механическую систему состоящую из двух концентрически вложенных цилиндрических оболочек. Изображение двустенной углеродной нанотрубки лежащей в упругой среде представлено на рис. 1. Здесь $R_j, j = 1, 2$ — радиусы соответствующих слоев, x — безразмерная осевая координата, а φ — угол. Направления координатных осей указаны на рис. 1.

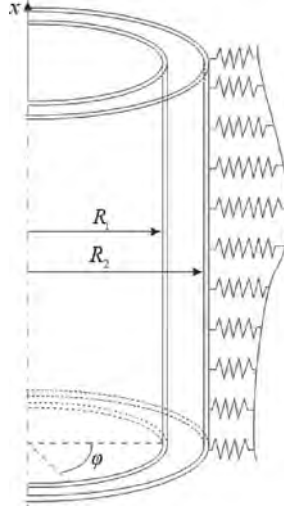


Рисунок 1 – Двустенная углеродная нанотрубка в упругой среде.

Уравнения движения в перемещениях. Двустенная углеродная нанотрубка моделируется двумя концентрически вложенными ортотропными цилиндрическими оболочками. В качестве исходным уравнений примем уравнения типа Флюгге, учитывающие наличие начальных мембранных сил [10].

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial T_{1,1}}{\partial x} + \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} + \frac{T_{1,2}^0}{R_1} \left(\frac{\partial^2 u_{1,1}}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial u_{1,3}}{\partial x} \right) + \frac{T_{1,1}^0}{R_1} \frac{\partial^2 u_{1,1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial S_1^0}{R_1} \frac{\partial^2 u_{1,1}}{\partial x \partial \varphi} - R_1 \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 u_{1,1}}{\partial t^2} = 0, \\
& \frac{\partial T_{1,2}}{\partial \varphi} + \frac{\partial S_1}{\partial x} - \frac{1}{R_1} \frac{M_{1,2}}{\partial \varphi} - \frac{1}{R_1} \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{T_{1,2}^0}{R_1} \left(\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial u_{1,3}}{\partial \varphi} \right) + \frac{T_{1,1}^0}{R_1} \frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial x^2} + 2 \frac{S_1^0}{R_1} \left(\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial u_{1,3}}{\partial x} \right) - \\
& \quad - R_1 \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial t^2} = 0, \\
& \frac{\partial^2 M_{1,2}}{\partial \varphi^2} + 2 \frac{\partial^2 H_1}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 M_{1,1}}{\partial x^2} + R_1 T_{1,2} - T_{1,2}^0 \left(\frac{\partial u_{1,1}}{\partial x} - \frac{\partial u_{1,2}}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_{1,3}}{\partial \varphi^2} \right) - T_{1,1}^0 \frac{\partial^2 u_{1,3}}{\partial x^2} + 2 S_1^0 \left(\frac{\partial u_{1,2}}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_{1,3}}{\partial x \partial \varphi} \right) - \\
& \quad - R_1^2 p_{12}^*(x, \varphi) + R_1 \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 u_{1,3}}{\partial t^2} = 0, \\
& \frac{\partial T_{2,1}}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial \varphi} + \frac{T_{2,2}^0}{R_2} \left(\frac{\partial^2 u_{2,1}}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial u_{2,3}}{\partial x} \right) + \frac{T_{2,1}^0}{R_2} \frac{\partial^2 u_{2,1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial S_2^0}{R_2} \frac{\partial^2 u_{2,1}}{\partial x \partial \varphi} - R_2 \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 u_{2,1}}{\partial t^2} = 0, \\
& \frac{\partial T_{2,2}}{\partial \varphi} + \frac{\partial S_2}{\partial x} - \frac{1}{R_2} \frac{M_{2,2}}{\partial \varphi} - \frac{1}{R_2} \frac{\partial H_2}{\partial x} + \frac{T_{2,2}^0}{R_2} \left(\frac{\partial^2 u_{2,2}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial u_{2,3}}{\partial \varphi} \right) + \frac{T_{2,1}^0}{R_2} \frac{\partial^2 u_{2,2}}{\partial x^2} + \\
& \quad + 2 \frac{S_2^0}{R_2} \left(\frac{\partial^2 u_{2,2}}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial u_{2,3}}{\partial x} \right) - R_2 \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 u_{2,2}}{\partial t^2} = 0, \\
& \frac{\partial^2 M_{2,2}}{\partial \varphi^2} + 2 \frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 M_{2,1}}{\partial x^2} + R_2 T_{2,2} - T_{2,2}^0 \left(\frac{\partial u_{2,1}}{\partial x} - \frac{\partial u_{2,2}}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_{2,3}}{\partial \varphi^2} \right) - T_{2,1}^0 \frac{\partial^2 u_{2,3}}{\partial x^2} + \\
& \quad + 2 S_2^0 \left(\frac{\partial u_{2,2}}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_{2,3}}{\partial x \partial \varphi} \right) - R_2^2 \left[p_2^*(x, \varphi) - \frac{R_1}{R_2} p_{2,1}^*(x, \varphi) \right] + R_2 \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 u_{2,3}}{\partial t^2} = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

где $p_{12}^* = c^*(u_{2,3} - u_{1,3})$, $c^* = \frac{200}{0.16 \pi d^2} \text{ erg / cm}^2$, $d = 0.142 \text{ nm}$, $p_2^* = -\kappa^*(x, \varphi) u_{2,3}$. Здесь,

$T_{1,1}^0$, $T_{1,2}^0$, S_1^0 – начальные усилия, действующие в срединной поверхности оболочки; $p_{j(j+1)}^*$ ($p_{j(j-1)}^*$) – силы Ван-дер-Ваальса, значение которых зависит от величины взаимных перемещений слоев, при

этом в во внимание принимаются лишь радиальные составляющие сил; p_2^* - реакция окружающей упругой среды, определяемая в рамках модели упругого основания Винклера. В данной работе считаем, что окружающая среда является неоднородной так, что коэффициент постели k^* есть функция криволинейных координат на поверхности оболочки.

Уравнения физического локального состояния (с позиций макроскопической континуальной теории) для ортотропной оболочки примем в виде [11]:

$$\begin{aligned} T_{j,1}^{(m)} &= C_{j,11} e_{j,1} + C_{j,12} e_{j,2}, \quad T_{j,2}^{(m)} = C_{j,22} e_{j,2} + C_{j,12} e_{j,1}, \quad S_j^{(m)} = C_{j,66} \psi_j, \quad H_{j,1}^{(m)} = D_{j,66} \phi_j, \\ C_{j,ik} &= h_j B_{j,ik}, \quad M_{j,1}^{(m)} = D_{j,11} \square_{j,1} + D_{n,12} \square_{n,2}, \quad M_{n,2}^{(m)} = D_{n,22} \square_{n,2} + D_{n,12} \square_{n,1}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $C_{n,ik}, D_{n,ik}$ выражаются через упругие постоянные ортотропного материала [11] по формулам:

$$D_{j,ik} = \frac{h_j^3}{12} B_{j,ik}, \quad B_{j,ii} = \frac{E_{j,i}}{1 - \nu_{j,1} \nu_{j,2}}, \quad B_{j,66} = G_j, \quad B_{j,12} = \frac{\nu_{j,2} E_{j,1}}{1 - \nu_{j,1} \nu_{j,2}} = \frac{\nu_{j,1} E_{j,2}}{1 - \nu_{j,1} \nu_{j,2}}, \quad (3)$$

а деформации $e_{j,i}, \psi_j, \square_{j,i}, \phi_j$ ($j=1,2$) выражены через перемещения следующим образом [12]:

$$\begin{aligned} e_{j,1} &= \frac{1}{R_j} \frac{\partial u_{j,1}}{\partial x}, \quad e_{j,2} = \frac{1}{R_j} \left(\frac{\partial u_{j,2}}{\partial \rho} + u_{j,3} \right), \quad \psi_j = \frac{1}{R_j} \left(\frac{\partial u_{j,1}}{\partial \rho} + \frac{\partial u_{j,2}}{\partial x} \right), \quad \square_{j,1} = \frac{1}{R_j^2} \frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial x^2}, \\ \square_{j,2} &= \frac{1}{R_j^2} \left(\frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial \rho^2} + u_{j,3} \right), \quad \phi_j = -\frac{2}{R_j^2} \left[\frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial x \partial \rho} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{j,1}}{\partial \rho} - \frac{\partial u_{j,2}}{\partial x} \right) \right], \quad j=1,2. \end{aligned} \quad (4)$$

После подстановки (4) и (3) в (2) выражения для макроскопических усилий запишутся в виде:

$$\begin{aligned} T_{j,1}^{(m)} &= \frac{h_j E_{j,1}}{(1 - \nu_{j,1} \nu_{j,2}) R_j} \left(\frac{\partial u_{j,1}}{\partial x} + \nu_{j,2} \frac{\partial u_{j,2}}{\partial \rho} + \nu_{j,2} u_{j,3} \right), \quad S_j^{(m)} = \frac{h_j G_j}{R_j} \left(\frac{\partial u_{j,1}}{\partial \rho} + \frac{\partial u_{j,2}}{\partial x} \right), \\ T_{j,2}^{(m)} &= \frac{h_j E_{j,2}}{(1 - \nu_{j,1} \nu_{j,2}) R_j} \left(\frac{\partial u_{j,2}}{\partial \rho} + u_{j,3} + \nu_{j,1} \frac{\partial u_{j,1}}{\partial x} \right), \quad H_j^{(m)} = -\frac{h_j^3 G_j}{6 R_j^2} \left(\frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial x \partial \rho} - \frac{\partial u_{j,2}}{\partial x} \right), \\ M_{j,1}^{(m)} &= \frac{h_j^3 E_{j,1}}{12 (1 - \nu_{j,1} \nu_{j,2}) R_j^2} \left[\frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial x^2} + \nu_{j,2} \left(\frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial \rho^2} - \frac{\partial u_{j,2}}{\partial \rho} \right) \right], \\ M_{j,2}^{(m)} &= \frac{h_j^3 E_{j,2}}{12 (1 - \nu_{j,1} \nu_{j,2}) R_j^2} \left[\frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial \rho^2} - \frac{\partial u_{j,2}}{\partial \rho} + \nu_{j,1} \frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial x^2} \right], \quad j=1,2. \end{aligned} \quad (5)$$

В соответствии с нелокальной континуальной теорией Эрингена [4,5], адаптированной для цилиндрической оболочки, микроскопические и макроскопические напряжения связаны соотношениями:

$$\mathfrak{T}_j(T_{j,i}, S_j, M_{j,2}, H_j) = (T_{j,i}^{(m)}, S_j^{(m)}, M_{j,2}^{(m)}, H_j^{(m)}) \quad (6)$$

где \mathfrak{T}_j - дифференциальный оператор, действующий по формуле:

$$\mathfrak{T}_j = 1 - \left(\frac{e_0 a}{R_j} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) = 1 - e_0^2 m_j^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right), \quad m_j = \frac{a}{R_j}, \quad j=1,2. \quad i=1,2,3. \quad (7)$$

Здесь $a = 0,142 \text{ нм}$ - внутренний характерный размер решетки нанотрубки, R_j - радиус соответствующего слоя, а e_0 - материальная константа нелокальности.

Примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} K_{j,1} &= \frac{h_j E_{j,1}}{(1 - \nu_{j,1} \nu_{j,2})}, \quad K_{j,2} = \frac{h_j E_{j,2}}{(1 - \nu_{j,1} \nu_{j,2})}, \quad K_{j,2} = h_j G_j, \\ D_{j,12} &= \frac{h_j^3 G_j}{6}, \quad D_{j,1} = \frac{h_j^3 E_{j,1}}{12 (1 - \nu_{j,1} \nu_{j,2})}, \quad D_{j,2} = \frac{h_j^3 E_{j,2}}{12 (1 - \nu_{j,1} \nu_{j,2})}, \quad j=1,2. \end{aligned} \quad (8)$$

Перейдем к безразмерным перемещениям по формулам: $u_{j,i} = R_j \tilde{u}_{j,i}$. Далее, опуская волну, примем обозначение $u_{j,i}$ для безразмерных перемещений.

Введем операторы $L_{j,i}(u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3})$, $j = 1, 2$, $i = 1, 2, 3$, по формулам:

$$\begin{aligned}
L_{j,1}(u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3}) &= \frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial x^2} + n_{j,2} \left(\frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u_{j,3}}{\partial x} \right) + k_{j,112} \left(\frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial x \partial y} \right), \\
N_{j,1}(u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3}) &= t_{j,21}^0 \left(\frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial y^2} - \frac{\partial u_{j,3}}{\partial x} \right) + t_{j,11}^0 \frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial x^2} + 2s_{j,1}^0 \frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial x \partial y}, \\
L_{j,2}(u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3}) &= \frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial y^2} + \frac{\partial u_{j,3}}{\partial y} + n_{j,1} \frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial x \partial y} + k_{j,212} \left(\frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial x^2} \right) - \\
&\quad - \kappa_j^4 \left(\frac{\partial^3 u_{j,3}}{\partial y^3} + n_{j,1} \frac{\partial^3 u_{j,3}}{\partial x^2 \partial y} \right) - \kappa_j^4 k_{j,212} \frac{\partial^3 u_{j,3}}{\partial x^2 \partial y}, \\
N_{j,2}(u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3}) &= t_{j,22}^0 \left(\frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial y^2} - \frac{\partial u_{j,3}}{\partial y} \right) + t_{j,12}^0 \frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial x^2} + 2s_{j,1}^0 \left(\frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u_{j,3}}{\partial x} \right), \\
L_{j,3}(u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3}) &= \kappa_j^4 \left\{ \left(\frac{\partial^4 u_{j,3}}{\partial x^4} + 2n_{j,2} \frac{\partial^4 u_{j,3}}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + e_{j,21} \frac{\partial^4 u_{j,3}}{\partial y^4} + 4k_{j,112} \frac{\partial^4 u_{j,3}}{\partial x^2 \partial y^2} \right\} + \\
&\quad + e_{j,21} \left(\frac{\partial u_{j,3}}{\partial y} + u_{j,3} + n_{j,1} \frac{\partial u_{j,1}}{\partial x} \right), \\
N_{j,3}(u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3}) &= -t_{j,21}^0 \left(\frac{\partial u_{j,1}}{\partial x} - \frac{\partial u_{j,2}}{\partial y} + \frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial y^2} \right) - t_{j,11}^0 \frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial x^2} + 2s_{j,1}^0 \left(\frac{\partial u_{j,2}}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial x \partial y} \right).
\end{aligned}$$

где:

$$\begin{aligned}
k_{j,112} &= \frac{K_{j,12}}{K_{j,1}} = \frac{G_j (1 - n_{j,1} n_{j,2})}{E_{j,1}}, \quad t_{j,21}^0 = \frac{T_{j,2}^0}{K_{j,1}}, \quad t_{j,11}^0 = \frac{T_{j,1}^0}{K_{j,1}}, \quad s_{j,1}^0 = \frac{S_j^0}{K_{j,1}}, \quad k_{j,212} = \frac{K_{j,12}}{K_{j,2}} = \frac{G_j (1 - n_{j,1} n_{j,2})}{E_{j,2}}, \\
I_{j,1} &= \frac{R_j^2 c_j h_j}{K_{j,1}} = \frac{R_j^2 c_j (1 - n_{j,1} n_{j,2})}{E_{j,1}}, \quad d_{j,22} = \frac{D_{j,2}}{R_j^2 K_{j,2}} = \frac{1}{12} \left(\frac{h_j}{R_j} \right)^2, \quad \kappa_j^4 = \frac{h_j^2}{12 R_j^2}, \quad s_{j,1}^0 = \frac{S_j^0}{K_{j,1}}, \quad \partial_2 = \frac{R_1}{R_2}, \\
t_{j,22}^0 &= \frac{T_{j,2}^0}{K_{j,2}} = \frac{(1 - n_{j,1} n_{j,2}) T_{j,2}^0}{h_j E_{j,2}}, \quad t_{j,12}^0 = \frac{T_{j,1}^0}{K_{j,2}} = \frac{(1 - n_{j,1} n_{j,2}) T_{j,1}^0}{h_j E_{j,2}}, \quad \kappa_0 = \kappa_0^* \frac{R_2^2 (1 - n_{j,1} n_{j,2})}{h_2 E_{2,1}}, \quad (9) \\
I_{j,2} &= \frac{R_j^2 c_j h_j}{K_{j,2}} = \frac{R_j^2 c_j (1 - n_{j,1} n_{j,2})}{E_{j,2}}, \quad e_{j,21} = \frac{E_{j,2}}{E_{j,1}}, \quad I_{j,2} = I_{j,1} \frac{K_{j,1}}{K_{j,2}} = I_{j,1} \frac{E_{j,1}}{E_{j,2}} = I_{j,1} e_{j,12} = \frac{I_{j,1}}{e_{j,21}}, \quad j = 1, 2.
\end{aligned}$$

Действуя на каждое из уравнений (1), соответствующих движению j -го слоя, оператором \mathfrak{F}_j . После несложных преобразований получим систему уравнений движения двустенной нанооболочки:

$$\begin{aligned}
L_{j,1}(u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3}) + \mathfrak{F}_j \left[N_{j,1}(u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3}) - I_{j,1} \frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial t^2} \right] &= 0, \quad j = 1, 2. \\
L_{j,2}(u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3}) + \mathfrak{F}_j \left[N_{j,2}(u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3}) - I_{j,2} \frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial t^2} \right] &= 0, \quad j = 1, 2. \quad (10) \\
L_{j,3}(u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3}) + \mathfrak{F}_j \left[N_{j,3}(u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3}) - p_{j(j+1)} + \partial_2 p_{(j-1)j} + I_{j,3} \frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial t^2} \right] &= 0, \quad j = 1, 2,
\end{aligned}$$

где $p_{12} = c_1 (u_{2,3} - u_{1,3})$, $p_{21} = c_2 (u_{2,3} - u_{1,3})$, $p_{23} = p_2 = -\kappa_0 u_{2,3}$, $p_{01} = 0$.

Погрешность теории тонких ортотропных оболочек имеет порядок $\sim h_N/R$ [11, 12], а погрешность континуальной модели УНТ $\sim (e_0 a/R_1)^2$ [13]. Таким образом, погрешность уравнений (10) для моделирования УНТ составляет величину порядка $\sim \max_{j=1,2} \{h_j/R_j, (e_0 a/R_1)^2\}$.

Пример. В качестве примера рассмотрим шарнирно опертую двустенную УНТ. В данном случае будем моделировать УНТ изотропной оболочкой, а влияние внешней упругой среды во внимание не принимаем. Изучим зависимость собственных частот колебаний УНТ от ее длины, числа полу-волн в осевом (m) и окружном направлениях (n). В данной упрощенной постановке примем следующие значения физических и геометрических параметров УНТ [14]:

$$E_1 = E_2 = 1.058 \times 10^{12} \text{ Н/м}^2, \quad \nu_1 = \nu_2 = 0.27, \quad \rho_1 = \rho_2 = 1.341 \times 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad (11)$$

$$h_1 = h_2 = 0.34 \times 10^{-9} \text{ м}, \quad R_1 = 1.735 \times 10^{-9} \text{ м}, \quad R_2 = 2.415 \times 10^{-9} \text{ м}, \quad e_0 = 0.39, \quad \kappa^* = 0.$$

Перемещения, удовлетворяющие условиям шарнирного опирания, ищем в виде:

$$u_{j,1} = A_{j,1} \cos\left(\frac{p m x}{l_j}\right) \sin(nz) \cos(\Omega t), \quad u_{j,2} = A_{j,2} \sin\left(\frac{p m x}{l_j}\right) \cos(nz) \cos(\Omega t), \quad (12)$$

$$u_{j,3} = A_{j,3} \sin\left(\frac{p m x}{l_j}\right) \sin(nz) \cos(\Omega t), \quad l_j = \frac{L}{R_j}, \quad j = 1, 2.$$

Подстановка (12) в уравнения движения (10) приводит к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных величин $A_{1,1}, A_{1,2}, A_{1,3}, A_{2,1}, A_{2,2}, A_{2,3}$. Из условия существования нетривиального решения данной системы получаем уравнение относительно неизвестной частоты Ω .

В таблицах 1-6 приведены частоты для шести форм колебаний УНТ. Частоты, приведенные в таблицах 1 и 2, отвечают формам изгибных колебаний. Частоты из таблиц 3 и 4 соответствуют формам тангенциальных колебаний, когда перемещения в осевом направлении являются преобладающими. И наконец, данные, приведенные в таблицах 5 и 6, отвечают тангенциальному движению стенок с большой амплитудой перемещений в окружном направлении. При этом в таблицах с нечетными номерами приведены частоты, соответствующие случаю, когда стенки двигаются в одном направлении (фазы колебаний совпадают), а в таблицах 2, 4, 6 – частоты для форм колебаний, когда движения стенок происходят в разных направлениях.

Таблица 1 – Собственные частоты УНТ соответствующие первой форме колебаний.

n	$m \backslash L/R_1$	$\Omega (\times 10^{13} \text{ Гц})$				
		1	5	10	15	20
1	5	0.3455	1.5241	3.9183	8.2182	11.863
	10	0.1184	0.9559	1.5241	2.451	3.9183
	20	0.03419	0.4641	0.9559	1.2427	1.5241
5	5	1.3104	2.196	4.9004	9.145	12.2401
	10	1.286	1.4945	2.196	3.3411	4.9004
	20	1.2801	1.329	1.4945	1.7857	2.196

Таблица 2 – Собственные частоты УНТ соответствующие второй форме колебаний.

n	$m \backslash L/R_1$	$\Omega (\times 10^{13} \text{ Гц})$				
		1	5	10	15	20
1	5	0.6475	1.8765	4.1239	8.3291	11.8759
	10	0.5605	1.2018	1.8762	2.7376	4.1239
	20	0.5667	0.7304	1.2018	1.5666	1.8765
5	5	2.3776	3.2187	5.8817	9.8163	12.5838
	10	2.3534	2.5531	3.2187	4.3432	5.8817
	20	2.3474	2.3959	2.5531	2.8264	3.2187

Таблица 3 – Собственные частоты УНТ соответствующие третьей форме колебаний.

n	$\frac{m}{L/(R_1)}$	$\Omega (\times 10^{13} \text{ Гц})$				
		1	5	10	15	20
1	5	1.1791	3.277	6.301	9.1965	14.0308
	10	0.8961	1.8776	3.277	4.7943	6.301
	20	0.7815	1.3146	1.8776	2.5399	3.277
5	5	3.7123	4.8827	7.2346	9.8898	15.05
	10	3.6649	4.0162	4.8828	5.996	7.2346
	20	3.6529	3.7471	4.0162	4.4075	4.8827

Таблица 4 – Собственные частоты УНТ соответствующие четвертой форме колебаний.

n	$\frac{m}{L/(R_1)}$	$\Omega (\times 10^{13} \text{ Гц})$				
		1	5	10	15	20
1	5	1.4068	3.4061	6.3489	9.2322	14.1163
	10	1.1415	2.1772	3.4061	4.8641	6.34893
	20	1.05052	1.5525	2.1772	2.7423	3.4061
5	5	5.1251	6.0563	8.10243	10.7961	16.07
	10	5.0906	5.35481	6.0563	7.0045	8.1024
	20	5.0819	5.15078	5.3548	5.6654	6.0563

Таблица 5 – Собственные частоты УНТ соответствующие пятой форме колебаний.

n	$\frac{m}{L/(R_1)}$	$\Omega (\times 10^{13} \text{ Гц})$				
		1	5	10	15	20
1	5	1.905	5.4053	10.4318	15.2235	19.647
	10	1.788	2.9498	5.4053	7.9339	10.4318
	20	1.763	2.009	2.9498	4.1519	5.4053
5	5	6.2142	8.0029	11.928	16.236	20.3949
	10	6.1519	6.6424	8.0029	9.8543	11.928
	20	6.1353	6.2612	6.6424	7.2388	8.0029

Таблица 6 – Собственные частоты УНТ соответствующие шестой форме колебаний.

n	$\frac{m}{L/(R_1)}$	$\Omega (\times 10^{13} \text{ Гц})$				
		1	5	10	15	20
1	5	2.5301	5.5489	10.5013	15.2694	19.6818
	10	2.4528	3.2714	5.5489	8.0274	10.5013
	20	2.4352	2.5951	3.2714	4.3497	5.5489
5	5	8.5544	9.9003	13.22	17.16	21.0967
	10	8.5094	8.8643	9.9003	11.4178	13.220
	20	8.4981	8.588	8.8643	9.3090	9.9003

Анализируя полученные данные, заключаем: увеличение длины нанотрубки приводит к снижению собственных частот, а увеличение числа полуволин в осевом направлении и волн в окружном направлениях приводит к увеличению собственных частот всех форм колебаний. Отметим также, что рост n снижает влияние длины УНТ на значение частот.

Резюме

В данной работе на основе теории тонких ортотропных оболочек Флюгге, а также нелокальной теории Эрингена выведены уравнения движения двустенной углеродной нанотрубки (УНТ), введенной в упругую среду. Предложенная модель УНТ позволяет учитывать начальные напряжения и влияние окружающей упругой среды. В качестве примера изучена зависимость собственных частот УНТ от ее длины и количество волн в осевом и окружном направлениях. Выполнен анализ собственных форм колебаний двустенной УНТ.

Литература

1. Xu, M. Free transverse vibrations of nano-to-micron scale beams/M. Xu// Proc. R. Soc. A.-2006. V. 462. –P. 2977 - 2995.
2. Sun, C.T. Size-dependent elastic moduli of platelike nanomaterials/C.T. Sun, H.Zhang//, J. Appl. Phys. - 2003. V. 93. – P. 1212–1218.
3. Lu, J. Elastic properties of carbon nanotubes and nanoropes/J. Lu// Phys. Rev. Lett.-1997. V. 79 (1297).-P.1607–1616.
4. Eringen, A.C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves/ A.C. Eringen// J. Appl. Phys.-1983. V. 54. P. 4703--4710.
5. Eringen, A.C. Nonlocal continuum field theories/A.C. Eringen. - New-York: Springer.- 2002.
6. Wang, L. Validation of the non-local elastic shell model for studing longitudinal waves in single-walled carbon nanotubes/L. Wang, H. Hu, W. Guo//Nanotechnology.-2006.V. 17. P. 1408–1415.
7. Михасев, Г.И. Уравнения движения многостенной углеродной нанотрубки. основанные на нелокальной теории ортотропных оболочек/Г.И. Михасев//Докл. НАН Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 6. – С. 119-123.
8. Михасев, Г.И. Вывод уравнений движения многостенной углеродной нанотрубки с использованием нелокальной континуальной теории ортотропных цилиндрических оболочек/Г.И. Михасев, А.Н. Шейко//Теоретическая и прикладная механика: Международный научно-технический журнал.-Мн.:БНТУ-2012. Вып. 27. –С. 70-77.
9. Mikhasev, G. Governing Equations for Multi-Walled Carbon Nanotubes Derived From Orthotropic Flügge Shell Theory and elastic Nonlocality/G. Mikhasev//Book of Abstracts of the 38th Solid Mechanics Conference. Warsaw, Poland, August 27-31.-2012. – P. 254-255.
10. W. Flügge, Statik und Dynamik der Schalen (Springer, Berlin, 1934). 54, 4703–4710 (1983).
11. Амбарцумян, С.А. Общая теория анизотропных оболочек/ С.А. Амбарцумян.- М.: Наука. 1974.- 448с.
12. Михасев, Г. И. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках / Г. И. Михасев, П.Е. Товстик// Асимптотические методы. – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2009. – 292с.
13. Peng, J. Can a single-wall carbon nanotube be modeled as a thin shell./J. Peng, J. Wu, K.C. Hwang, J. Song, Y. Huang // J. Mech. Phys. Solids. - 2008. V. 56. - P. 2213-2224.
14. T. Usuki and K. Yogo, Beam equations for multi-walled carbon nanotubes derived from Flügge shell theory, Proc. R. Soc. A 465, 1199–1226 (2009).

Summary

On the basis of Flügge theory for thin orthotropic shells and the non-local theory of Eringen, governing equations of motion of a two-walled carbon nanotube (CNT) embedded in an elastic medium have been derived in this paper. The proposed model of a CNT allows taking into account initial stresses and influence of a surrounding elastic medium. As an example, the dependence of natural frequencies of the CNT on its length and a number of waves in the axial and circumferential directions has been studied. The analysis of the two-walled CNT eigenmodes has been performed.

Поступила в редакцию 23.11.2012

ПРОЧНОСТНОЙ ПРЕДЕЛ ПОЛЗУЧЕСТИ ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

Одинокова О.А.

УО «Тихоокеанский государственный институт», Хабаровск

Для большинства вязкоупругих материалов, работающих в жестких силовых конструкциях, деформируемость становится наиболее важным фактором, определяющим эксплуатационные показатели. В таких случаях величина расчетных напряжений лимитируется деформационными свойствами.

Так известный по ГОСТ 3248-81 [1] способ определяет предел ползучести материала σ_0 в зависимости от эксплуатационных характеристик конструкции: необходимого времени действия нагрузки t_0 и величины предельно допустимой деформации ε_0 или скорости ползучести $\dot{\varepsilon}_0$. ГОСТ 18197-84 содержит аналогичное определение условной (деформационной) долговременной прочности [2]. Определенный таким образом предел ползучести носит конструктивный характер и не отражает состояния самого материала на момент достижения σ_0 , так как в установленных указанным ГОСТом ограничениях он может претерпевать опасные с точки зрения прочности изменения.

Предел ползучести по ГОСТ 3248-81 получают на основе испытаний материала на ползучесть при растяжении. Но в практике эксплуатации конструкций обращает на себя внимание тот факт, что деформируемость одного и того же материала под воздействием растягивающих и равных им сжимающих усилий не одинакова. Вероятно, во всех телах процесс сжатия происходит не идентично процессу растяжения, хотя проявляется это для отдельных материалов в разной степени.

Для большинства традиционных материалов при сравнительно небольших деформациях можно приближенно считать диаграммы растяжения и сжатия совпадающими. Однако в полимерных материалах сжимающие или растягивающие напряжения по-разному отражаются на межмолекулярных взаимодействиях, определяющих деформационные свойства полимера, поэтому механические характеристики при растяжении и сжатии для них различны как по численным значениям, так и физическому смыслу. Это различие усиливается с ростом напряжения.

В настоящей работе – исследуется деформируемость полимерных материалов при растяжении-сжатии под воздействием именно малых напряжений, имеющих место в реальных условиях эксплуатации.

Экспериментальное исследование такого рода сопряжено с большими трудностями, так как, рассматривая малые деформации, необходимо обеспечить высокую чистоту опыта, чтобы в погрешности сравнительных испытаний не потерять различие свойств материала при воздействии на него растягивающих или сжимающих напряжений. Это потребовало создания нового технического оснащения эксперимента. Использование реверсора специальной конструкции [3,4] обеспечивает выполнение указанных выше требований.

В рамках теории старения, на основе изохронных кривых, введенных Ю. Н. Работновым [5], получен критерий оценки несущей способности вязкоупругого материала. Согласно ГОСТ 3248-81 и 18197-84 такие изохронные кривые строят в координатах $\sigma - \varepsilon$, в предлагаемом методе [6] – в полу-

относительных координатах $\sigma - \left(\frac{\varepsilon^+}{\varepsilon^-}\right)$, где отношение

$$\frac{\varepsilon^+}{\varepsilon^-} = \frac{E^-}{E^+} = R, \quad (1)$$

при этом $\sigma^+ = -\sigma^-$. В выражении (1) R является функцией разномодульности, с введением которой стало возможно на ранней стадии выявить потерю несущей способности материала. E^- и E^+ – длительные модули сжатия и растяжения.

Для проверки состояния материала в исследуемом диапазоне времени, температур и напряжений необходимо провести испытания на ползучесть, как при растяжении, так и при сжатии, по результатам которых определяется зависимость

$$R = f(\sigma, T, t). \quad (2)$$

Аппроксимация функции разномодульности произведена на основе метода наименьших квадратов.

Рассмотрим краевую задачу, описываемую внутри области V уравнением $2m$ -го порядка

$$L^{(2m)}[F(\sigma, T, t)] = R_1(\sigma, T, t) \in V \quad (3)$$

при краевых условиях

$$Q_j[F(\sigma, T, t)] = R_j(\sigma, T, t) \in S, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

Выражение для искомой функции $F(\sigma, T, t)$ задаем в виде:

$$F(\sigma, T, t) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot \varphi_k(\sigma, T, t), \quad (5)$$

где A_k – неизвестные параметры, подлежащие определению; $\varphi_k(\sigma, T, t)$ – система линейно независимых функций, удовлетворяющая условию полноты.

Выбираем определенное число точек коллокации (узлов интерполяции) N_1 внутри области V и N_2 – на ее поверхности S . Важно при этом подчеркнуть, что число этих точек должно удовлетворять неравенству:

$$N_1 + mN_2 > N. \quad (6)$$

Задача состоит в том, чтобы найти такие значения A_k , которые будут удовлетворять уравнениям (3) – (5) наилучшим образом, то есть найти наиболее вероятные значения неизвестных параметров, которые будут тем более близки к истинным, чем большее число наблюдений.

Поэтому точность решения повышается как с увеличением числа N неизвестных параметров A_k в выражении (5), так и с относительным ростом левой части неравенства (6).

Подставляя выражение (5) в дифференциальное уравнение (3) и краевые условия (4), получаем определенную невязку в каждой точке коллокации ($i = 1, 2, \dots, N_1 + N_2$).

$$\begin{aligned} \Delta_i &= L^{(2m)}\left[\sum_{k=1}^N A_k \cdot \varphi_k(\sigma_i, T_i, t_i) - R_1(\sigma_i, T_i, t_i)\right], \\ & \quad i = 1, 2, \dots, N_1 \\ \delta_{ij} &= Q_j\left[\sum_{k=1}^N A_k \cdot \varphi_k(\sigma_i, T_i, t_i) - R_j(\sigma_i, T_i, t_i)\right], \\ & \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad i = N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, N_1 + N_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Суммарная квадратичная погрешность при удовлетворении уравнений (3) и (4) по всем точкам коллокации определится по формуле:

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^{N_1} (\Delta_i)^2 + \sum_{i=N_1+1}^{N_1+N_2} \sum_{j=1}^m (\delta_{ij})^2 \quad (8)$$

Полученное выражение (8) является сложной функцией неизвестных параметров A_k ($k = 1, 2, \dots, N$).

Из условия минимума суммарной квадратичной погрешности получаем систему алгебраических уравнений относительно параметров A_1, A_2, \dots, A_k :

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial A_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

При постоянных значениях температуры и времени функцию разномодульности согласно (5) можно представить в виде:

$$F(\sigma) = \sum_{k=0}^m A_k \cdot \sigma^k, \quad (10)$$

где параметры $A_k = f(T, t)$ отражают термовязкоупругие свойства материала. Они могут быть определены из данных эксперимента на ползучесть при одноосном растяжении – сжатии нагрузкой, постоянной во времени. Для изотермического процесса изохронные зависимости $R = f(\sigma)$ имеют тенденцию к росту с увеличением напряжения, при этом

$$R(0) = 1$$

Условие (9) может быть представлено следующим выражением

$$\sum_{j=1}^n (R_j - F(\sigma_j)) \frac{\partial F(\sigma_j)}{\partial A_k} = 0, \quad (11)$$

где n - число точек коллокации (число измерений).

С учетом (10) после несложных преобразований получим:

$$\sum_{k=0}^m A_k \sum_{j=1}^n \sigma_j^{k+i} = \sum_{j=1}^n R_j \cdot \sigma_j^i, \quad (12)$$

$$i = 0, 1, \dots, m; m + 1 < n.$$

Выражение (12) представляет собой систему алгебраических линейных уравнений. Матрица этой системы симметрична относительно главной диагонали, а система линейно независимых функций в выражении (5) принимает вид:

$$\varphi_0(\sigma) = 1; \quad \varphi_1(\sigma) = \sigma; \quad \varphi_2(\sigma) = \sigma^2; \quad \dots; \quad \varphi_m(\sigma) = \sigma^m, \quad (13)$$

Тогда система уравнений (12) запишется следующим образом:

$$nA_0 + A_1 \sum_{j=1}^n \sigma_j + A_2 \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 + \dots + A_m \sum_{j=1}^n \sigma_j^m = \sum_{j=1}^n R_j,$$

$$A_0 \sum_{j=1}^n \sigma_j + A_1 \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 + A_2 \sum_{j=1}^n \sigma_j^3 + \dots + A_m \sum_{j=1}^n \sigma_j^{m+1} = \sum_{j=1}^n R_j \sigma_j,$$

.....

$$A_0 \sum_{j=1}^n \sigma_j^m + A_1 \sum_{j=1}^n \sigma_j^{m+1} + A_2 \sum_{j=1}^n \sigma_j^{m+2} + \dots + A_m \sum_{j=1}^n \sigma_j^{2m} = \sum_{j=1}^n R_j \sigma_j^m.$$

В ограничениях, заложенных в ГОСТ 3248-81, то есть при $T = T_0$ и $t = t_0$ $F(\sigma)$ может иметь максимумы, точки перегиба или вовсе не иметь таковых. Максимум R означает начало потери несущей способности при сжатии, вторая точка перегиба – при растяжении, и соответствующие напряжения должны быть приняты за опасные ($\sigma_{пр}$).

Следовательно, предельное напряжение при сжатии определяется как наименьший положительный корень уравнения (рис. 1)

$$\sum_{k=1}^m k A_k \sigma_{пр}^{k-1} = 0, \quad (15)$$

а при растяжении – как второй положительный корень уравнения (рис. 2)

$$\sum_{k=2}^m k(k-1) A_k \sigma_{пр}^{k-2} = 0. \quad (16)$$

Соотношения (15) и (16) являются математическим выражением предложенного нами определения прочностного предела ползучести. Приведенный выше метод его определения основан на результатах испытания материала в условиях ползучести при растяжении и сжатии, поэтому рассмотренный метод не требует экспериментальной проверки, как многие критерии пластичности или хрупкого разрушения, основанные на принятых гипотезах об условиях перехода к опасному состоянию [7]. В этом смысле предлагаемый способ определения предела ползучести, как и известный критерий Мора, является феноменологическим и естественным образом отражает реальные свойства исследуемого материала.

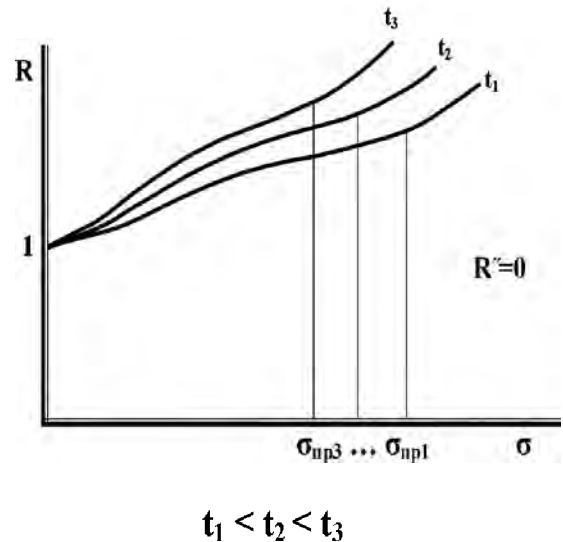


Рисунок 1 – Предельные напряжения при растяжении

Следует заметить, что при наличии указанных выше характерных точек на кривой разномодульности R , кривые ползучести, как при растяжении, так и при сжатии носят монотонно возрастающий характер и сами по себе не несут видимых признаков ухудшения механических свойств материала.

Из анализа кривых $R(\sigma)$ установлено, что с увеличением длительности действия нагрузки максимум или вторая точка перегиба смещается в сторону малых значений напряжений, то есть величина предельного напряжения уменьшается.

В общем случае $\sigma_{пр}$ зависит от температуры и времени действия напряжения и, следовательно, образует поверхность предельных напряжений. Таким образом, предлагаемый метод позволяет диагностировать потерю несущей способности вязкоупругого материала в ранней стадии, когда другие методы не в состоянии это сделать. Опасное напряжение $\sigma_{оп}$ можно определить, задавшись расчетным временем нагрузки t_0 . Меньшее из значений σ_0 (по ГОСТ 3248-81) или $\sigma_{пр}$ следует принять за опасное напряжение.

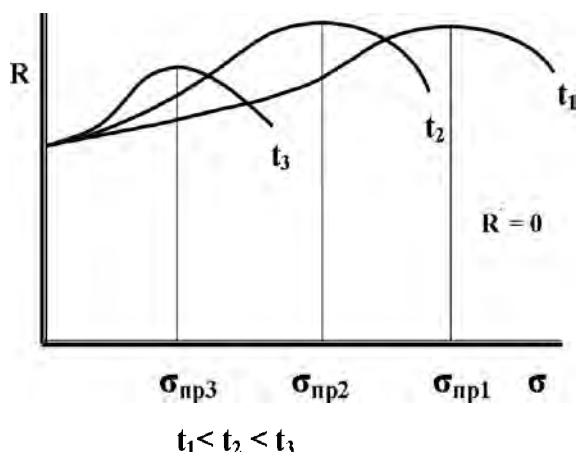


Рисунок 2 – Предельные напряжения при сжатии

Пример конкретного выполнения способа определения предела ползучести. Проводились испытания цилиндрических образцов капролона ($\varnothing 12 \times 120$ мм.), армированного стеклотканью, вырезанных по направлению основы (КСТ). Наибольшее напряжение опыта $\sigma_{max} = \sigma_0 = 51.3$ МПа, которое принято за σ_0 . Испытание образцов производилось в растяжной машине рычажного типа, позволяющей производить мгновенное нагружение постоянной силой. Смена режимов нагружения с растяжения на сжатие осуществлялось при помощи реверсора [3]. Результаты испытаний для $t = 0.25$ мин сведены в таблицу 1.

Каждый образец испытывался в условиях постоянной температуры (293К) на растяжение, значение минимальной нагрузки 1кН, что соответствовало напряжению $\sigma = 8.85$ МПа, длительность испытания – 64 мин.

В качестве аппроксимирующего уравнения принят пяти параметрический многочлен четвертого порядка:

$$F(\sigma) = A_0 + A_1 \sigma + A_2 \sigma^2 + A_3 \sigma^3 + A_4 \sigma^4$$

При этом $k = 5$, $m = 4$, а число точек коллокации $n = 7$.

Таблица 1 – Результаты механических испытаний армированного капролона ($t=0.25$ мин. $T=293$ К)

Напряжения, МПа	8.85	17.7	26.55	35.4	44.25	53.1
$\varepsilon^-, \%$	0.079	0.167	0.260	0.374	0.467	0.561
$\varepsilon^+, \%$	0.087	0.188	0.313	0.430	0.493	0.552
R	1.0986	1.1216	1.2057	1.1506	1.0560	0.9840

Результаты расчета согласно (16), представленные в таблице 2, позволили составить систему уравнений:

$$M \times A = V,$$

то есть:

$$\begin{bmatrix} 7 & 1.859 \times 10^2 & 7.127 \times 10^3 & 3.057 \times 10^5 & 1.396 \times 10^7 \\ 1.859 \times 10^2 & 7.127 \times 10^3 & 3.057 \times 10^5 & 1.396 \times 10^7 & 6.624 \times 10^8 \\ 7.127 \times 10^3 & 3.057 \times 10^5 & 1.396 \times 10^7 & 6.624 \times 10^8 & 3.228 \times 10^{10} \\ 3.057 \times 10^5 & 1.396 \times 10^7 & 6.624 \times 10^8 & 3.228 \times 10^{10} & 1.602 \times 10^{12} \\ 1.396 \times 10^7 & 6.624 \times 10^8 & 3.228 \times 10^{10} & 1.602 \times 10^{12} & 8.063 \times 10^{13} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.617 \\ 2.01 \times 10^2 \\ 7.571 \times 10^3 \\ 3.194 \times 10^5 \\ 1.439 \times 10^7 \end{bmatrix}$$

Таблица 2 – Определение коэффициентов для системы алгебраических уравнений. Армированный капролон

Коеф- фициенты	Точки коллокации (число измерений). $T = 0.25 \text{ мин. } T = 293 \text{ К}$ $1 \leq j \leq n$							$\sum_{j=1}^7$
	1	2	3	4	5	6	7	
σ_j (МПа)	0	8.85	17.7	26.55	35.4	44.25	53.1	$1.859 \cdot 10^2$
σ_j^2	0	$7.832 \cdot 10^1$	$3.133 \cdot 10^2$	$7.049 \cdot 10^2$	$1.253 \cdot 10^3$	$1.958 \cdot 10^3$	$2.820 \cdot 10^3$	$7.127 \cdot 10^3$
σ_j^3	0	$6.932 \cdot 10^2$	$5.545 \cdot 10^3$	$1.872 \cdot 10^4$	$4.436 \cdot 10^4$	$8.664 \cdot 10^4$	$1.497 \cdot 10^5$	$3.057 \cdot 10^5$
σ_j^4	0	$6.134 \cdot 10^3$	$9.815 \cdot 10^4$	$4.969 \cdot 10^5$	$1.570 \cdot 10^6$	$3.834 \cdot 10^6$	$7.950 \cdot 10^6$	$1.396 \cdot 10^7$
σ_j^5	0	$5.429 \cdot 10^4$	$1.737 \cdot 10^6$	$1.319 \cdot 10^7$	$5.559 \cdot 10^7$	$1.696 \cdot 10^8$	$4.222 \cdot 10^8$	$6.624 \cdot 10^8$
σ_j^6	0	$4.805 \cdot 10^5$	$3.075 \cdot 10^7$	$3.503 \cdot 10^8$	$1.968 \cdot 10^9$	$7.507 \cdot 10^9$	$2.242 \cdot 10^{10}$	$3.228 \cdot 10^{10}$
σ_j^7	0	$4.252 \cdot 10^6$	$5.433 \cdot 10^8$	$9.299 \cdot 10^9$	$6.967 \cdot 10^{10}$	$3.322 \cdot 10^{11}$	$1.190 \cdot 10^{12}$	$1.602 \cdot 10^{12}$
σ_j^8	0	$3.763 \cdot 10^7$	$9.634 \cdot 10^9$	$2.469 \cdot 10^{11}$	$2.466 \cdot 10^{12}$	$1.470 \cdot 10^{13}$	$6.321 \cdot 10^{13}$	$8.063 \cdot 10^{13}$
R_j	1	1.0986	1.1216	1.2057	1.1506	1.0560	0.9840	7.617
$R_j \sigma_j$	0	9.7226	19.852	32.011	40.731	46.728	52.250	201.295
$R_j \sigma_j^2$	0	$8.605 \cdot 10^1$	$3.514 \cdot 10^2$	$8.499 \cdot 10^2$	$1.442 \cdot 10^3$	$2.068 \cdot 10^3$	$2.774 \cdot 10^3$	$7.571 \cdot 10^3$
$R_j \sigma_j^3$	0	$7.615 \cdot 10^2$	$6.220 \cdot 10^3$	$2.257 \cdot 10^4$	$5.104 \cdot 10^4$	$9.150 \cdot 10^4$	$1.473 \cdot 10^5$	$3.194 \cdot 10^5$
$R_j \sigma_j^4$	0	$6.739 \cdot 10^3$	$1.101 \cdot 10^5$	$5.991 \cdot 10^5$	$1.807 \cdot 10^6$	$4.049 \cdot 10^6$	$7.823 \cdot 10^6$	$1.439 \cdot 10^7$
$F(\sigma_j)$	1.031	1.0774	1.1243	1.1572	1.1475	1.0839	0.9566	

Решение этой системы дает следующие результаты:

параметры функции разномодульности равны: $A_k = \begin{bmatrix} 1.031 \\ 0.004 \\ 2.035 \cdot 10^{-4} \\ -7.448 \cdot 10^{-6} \\ 3.201 \cdot 10^{-8} \end{bmatrix}$ – функция разномодульно-

сти принимает вид:

$$F(\sigma) = 1.031 + 0.004 \sigma + 2.035 \cdot 10^{-4} \sigma^2 - 7.448 \cdot 10^{-6} \sigma^3 + 3.201 \cdot 10^{-8} \sigma^4.$$

Исследуем R на экстремум и точку перегиба. Равенство нулю первой производной:

$$F'(\sigma) = 0.004 + 4.07 \cdot 10^{-4} \sigma - 2.234 \cdot 10^{-5} \sigma^2 + 1.280 \cdot 10^{-7} \sigma^3 = 0$$

определил предел ползучести при сжатии. Корни этого уравнения равны:

$$\sigma_1 = -7.017 \text{ МПа, } \sigma_2 = 29.237 \text{ МПа и } \sigma_3 = 152.288 \text{ МПа.}$$

Первый отрицательный корень не может определять предельное напряжение как не имеющий смысла. Третий корень должен быть отброшен, так как $\sigma_3 > \sigma_0$. Второй корень уравнения $R'(\sigma) = 0$ положителен и меньше, чем σ_0 . С переходом напряжения через значение 29.237 МПа R' меняет знак с положительного на отрицательный. При $\sigma = 26$ МПа $R' = +1.73 \cdot 10^{-3}$, а при $\sigma = 32$ МПа $R' = -1.658 \cdot 10^{-3}$.

Вторая производная дает уравнение:

$$R'' = 4.07 \cdot 10^{-4} - 44.688 \cdot 10^{-6} \sigma + 38.412 \cdot 10^{-8} \sigma^2 = 0,$$

корни которого равны: $\sigma_1 = 9.96$ МПа, $\sigma_2 = 106.378$ МПа.

Первый положительный корень отражает естественный ход функции разномодульности, а второй – превышает σ_0 , поэтому ни один из них не может быть принят за опасное.

Следовательно, опасным должно быть принято напряжение, равное 29.237 МПа, как наименьшее из значений σ_0 и $\sigma_{пр}$.

При увеличении времени действия напряжения до 8 минут величина опасного напряжения уменьшается до 18.982 МПа, при этом матрица M останется без изменения, а составляющие вектора V подсчитаны в таблице 3

Таблица 3 – Определение коэффициентов вектора V_1 ($T = 293K$, $t = 8$ мин.)
Армированный капролон

Коэффициенты	Точки коллокации $1 \leq j \leq n$							$\sum_{n=1}^7$
	1	2	3	4	5	6	7	
σ_j (МПа)	0	8.85	17.7	26.55	35.4	44.25	53.1	$1.859 \cdot 10^2$
R_j	1	1.122	1.210	1.206	1.020	0.800	0.625	6.983
$R_j \sigma_j$	0	9.9297	21.417	32.019	36.108	35.400	33.188	168.06
$R_j \sigma_j^2$	0	87.878	379.081	850.11	$1.278 \cdot 10^3$	$1.566 \cdot 10^3$	$1.762 \cdot 10^3$	$5.923 \cdot 10^3$
$R_j \sigma_j^3$	0	777.72	$6.71 \cdot 10^3$	$2.257 \cdot 10^4$	$4.525 \cdot 10^4$	$6.932 \cdot 10^4$	$9.358 \cdot 10^4$	$2.382 \cdot 10^5$
$R_j \sigma_j^4$	0	6882.81	$1.188 \cdot 10^5$	$5.992 \cdot 10^5$	$1.602 \cdot 10^6$	$3.067 \cdot 10^6$	$4.969 \cdot 10^6$	$1.036 \cdot 10^7$
$F(\sigma_j)$	0.972	1.1472	1.231	1.1823	1.0139	0.7897	0.6261	

Вектор свободных членов уравнений: $V_1 = \begin{bmatrix} 6.983 \\ 168.06 \\ 5.923 \cdot 10^3 \\ 2.382 \cdot 10^5 \\ 1.036 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$

Решение системы алгебраических уравнений $M \times A_k = V_1$ дает вектор параметров функции раз-

номодульности A_k : $A_k = \begin{bmatrix} 0.972 \\ 0.022 \\ -2.421 \cdot 10^{-5} \\ -2.847 \cdot 10^{-5} \\ 3.543 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix}$

Функция разномодульности и ее производные принимают вид:

$$R(\sigma) = 0.972 + 0.022\sigma - 2.421 \cdot 10^{-5} \sigma^2 - 2.847 \cdot 10^{-5} \sigma^3 + 3.543 \cdot 10^{-7} \sigma^4$$

$$R'(\sigma) = 0.022 - 4.842 \cdot 10^{-5} \sigma - 8.541 \cdot 10^{-5} \sigma^2 + 1.4172 \cdot 10^{-6} \sigma^3$$

$$R'' = -4.842 \cdot 10^{-5} - 1.7082 \cdot 10^{-4} \sigma + 4.2516 \cdot 10^{-6} \sigma^2$$

Корни уравнения $R'(\sigma) = 0$ равны:

$$\sigma_1 = -14.627 \text{ МПа}, \sigma_2 = 18.982 \text{ МПа} \text{ и } \sigma_3 = 55.912 \text{ МПа}.$$

Корни уравнения $R''(\sigma) = 0$ равны:

$$\sigma_1 = -0.281 \text{ МПа}, \sigma_2 = 40.159 \text{ МПа}.$$

Анализ полученных результатов показывает, что за опасные напряжения должна быть принята величина $\sigma_{пр} = 18.982 \text{ МПа}$, как наименьшее значение из σ_0 и $\sigma_{пр}$.

Резюме

На уровне изобретения предлагается метод определения на ранней стадии момента потери несущей способности вязкоупругого материала, различного при растяжении и сжатии. Метод основан на комплексном исследовании процессов деформирования материала в условиях растяжения – сжатия и заключается в определении предельного напряжения $\sigma_{пр}$, величина которого зависит от времени его действия. С увеличением действия нагрузки величина $\sigma_{пр}$ смещается в сторону малых значений напряжений.

Литература

1. ГОСТ 3248-81. Металлы. Метод испытания на ползучесть. - М.: ГК СССР по стандартам. 1981. - 9 с.
2. ГОСТ 18197-72. Пластмассы. Метод испытания на ползучесть при растяжении при постоянной нагрузке. -М.: ГК СССР по стандартам. 1984. –10 с.
3. Одиноква О.А., Мелентьев П.В. / Заводская лаборатория. 1972. Т.38. № 5. С. 109-110.
4. Одиноква А.В., Одиноква О.А. / Заводская лаборатория. 1986. Т. 52. № 6. С. 82-83.
5. Работнов Ю.Н. / Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. 1948. № 6. С. 789-800.
6. А.с. 890132 СССР. Способ определения характеристик ползучести образцов материалов. / О.А.Одиноква, Ю.М.Даниловский // Открытия. Изобретения.1981. № 46. С. 212.
7. Феодосьев В.И. Соппротивление материалов. –М.:Наука, 1974. -560 с.

Summary

At the level of the invention, a method for determining the early time of the loss of bearing capacity of the viscoelastic material, different in tension and compression that occurred. The method is based on a comprehensive study of the processes of deformation of the material under tension - compression and is determining σ_{pr} stress limit, which depends on the time of action. With the increase of the load value σ_{pr} shifted toward smaller values σ_{pr} of voltage.

Поступила в редакцию 05.11.2012

ЕСТЕСТВЕННОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ГОРНОГО МАССИВА ВБЛИЗИ СОЧЛЕНЕНИЯ КРИВИЧСКОГО И ЛИСТОПАДОВИЧСКОГО ТЕКТОНИЧЕСКИХ НАРУШЕНИЙ

¹Журавков М.А., ¹Коновалов О.Л., ¹Круподеров А.В., ¹Хвесеня С.С., ²Богдан С.И.

¹Белорусский государственный университет, Минск
²ОАО «Белгорхимпром», Минск

В данной статье приведены результаты построения трехмерной геомеханической модели зоны сочленения Кривичского и Листопадовичского разломов на Старобинском месторождении калийных солей.

Основной целью исследований являлась оценка естественного напряженно-деформированного состояния массива горных пород на исследуемом участке.

При этом основными используемыми методами при проведении расчетов являлись методы механики сплошных сред, в частности, методы механики деформируемого твердого тела, а также метод конечных элементов для численного решения системы разрешающих уравнений.

Исходными данными для построения модели являлись геологические карты и информация по сейсмическим профилям, которая была соответствующим образом обработана для дальнейшего использования. В итоге были построены реальные поверхности разломов и горизонтов. Для более высокой скорости расчета исходные поверхности были аппроксимированы плоскостями.

Полученные поверхности были подвергнуты дальнейшей обработке для корректного построения конечноэлементной сетки. Были выполнены “обрезания” частей поверхностей, выходящих за границы модели, и в соответствующих местах пересечений, найдены точные точки и линии пересечения, был создан входной файл для построения сетки.

Затем была построена конечноэлементная модель, учитывающая различные виды контакта на разломах. Были проведены тестовые расчеты, выполнена их последующая обработка и анализ.

Исходными данными для построения трехмерной конечноэлементной геомеханической модели сопряжения Кривичского и Листопадовичского разломов является построенная в рамках выполнения [1] трехмерная геологическая модель Кривичского и Листопадовичского разломов, приведенная на рис. 1,2.

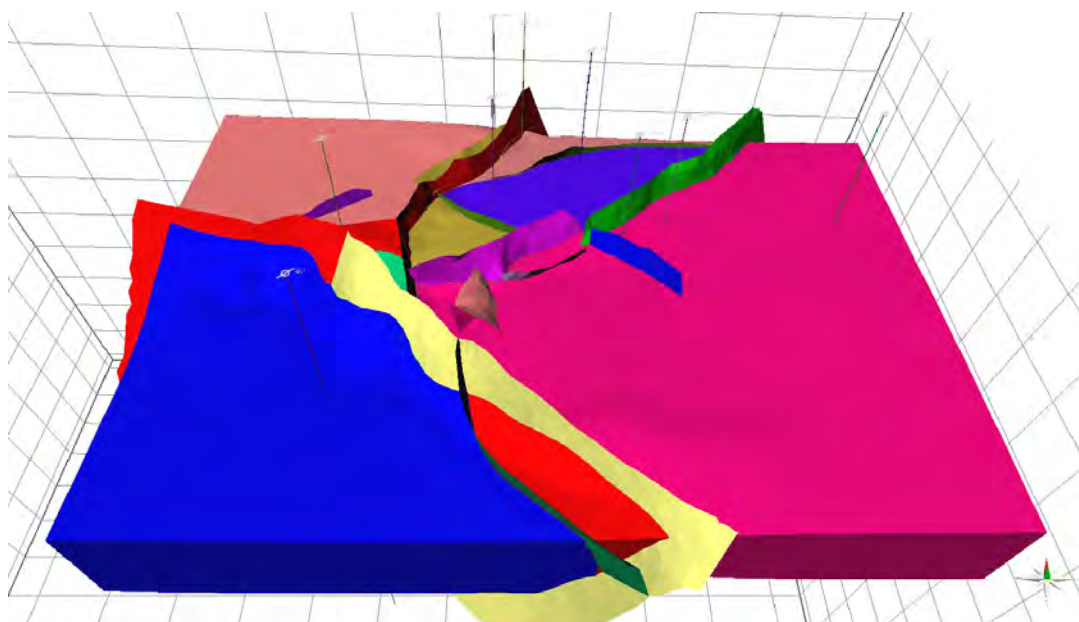


Рисунок 1 – Трехмерная геологическая модель структурных поверхностей и разломной тектоники

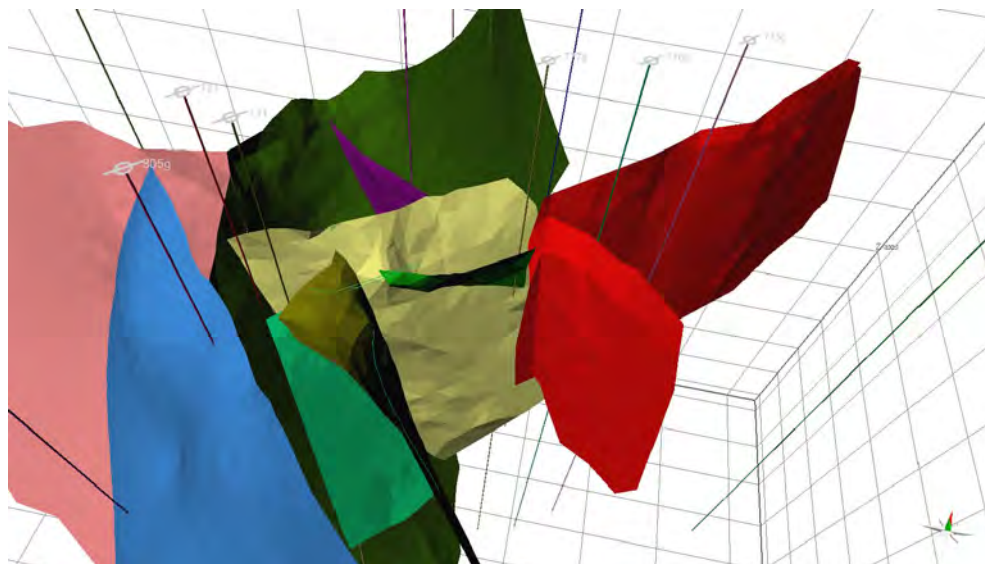


Рисунок 2 – Рассветовский, Листопадовичский, Южно-Косыничский и Кривичский разломы и их оперение

Для моделирования геомеханического поведения массива на исследуемом участке было решено взять для исследования 6 основных разломов: Листопадовичский, Рассветовский, Южно-Косыничский, Кривичский, Кривичский-1 и Кривичский-3.

Следует сказать, что при моделировании и выполнении вычислений для повышения скорости и точности расчетов лучше использовать плоские поверхности разломов. То же самое касается и горизонтов, между которыми располагается разлом. Поэтому была проведена аппроксимация на основании метода наименьших квадратов, т.е. аппроксимирующая плоскость $z = ax + by + c$ подбиралась таким образом, чтобы минимизировалось среднее квадратичное отклонение всех точек поверхностной сетки от данной плоскости, т.е. минимизировалась величина $\sum_i (ax_i + by_i + c - z_i)^2$.

Дальнейший алгоритм построения модели таков:

- отсечение «хвостов», т.е. отсечение тех частей поверхности разлома, которые выходят за горизонты, а также отсечение частей на пересечении разломов;
- создание исходного файла для генерации трехмерной сетки;
- раздваивание поверхностей разлома.

Отсечение «хвостов» происходит по линиям пересечения соответствующих поверхностей. На рисунке 3 показаны уже отсеченные поверхности всех разломов, а также горизонтов I, Шк, Па, V (согласно классификации сейсморазведочных работ).

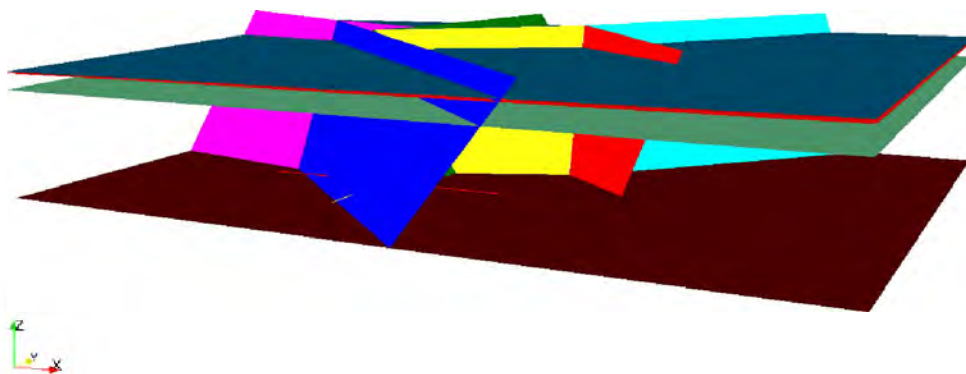


Рисунок 3 – Поверхности разломов и горизонтов пригодные для использования в модели

После выполнения аппроксимации поверхностей разломов и горизонтов строится трехмерная конечноэлементная сетка в пакете **tetgen.exe** [2]. Для правильного ее построения требуется корректное создание **poly**-файла - файла, содержащего в себе информацию о входных точках и входных по-

верхностях, представляющих собой многоугольники в трехмерном пространстве. При этом не должно быть пересечений этих поверхностей за исключением общих ребер. Для этого требуется аккуратное нахождение всех линий и точек пересечения поверхностей между собой. А затем определение многоугольников, которыми будут являться поверхности горизонтов между разломами, а также поверхности разломов между соответствующими горизонтами. На рисунке 4 изображена визуализация poly-файла для исходной модели.

После того, как poly-файл был корректно создан, можно переходить к построению конечноэлементной сетки в виде четырехугольных пирамид.

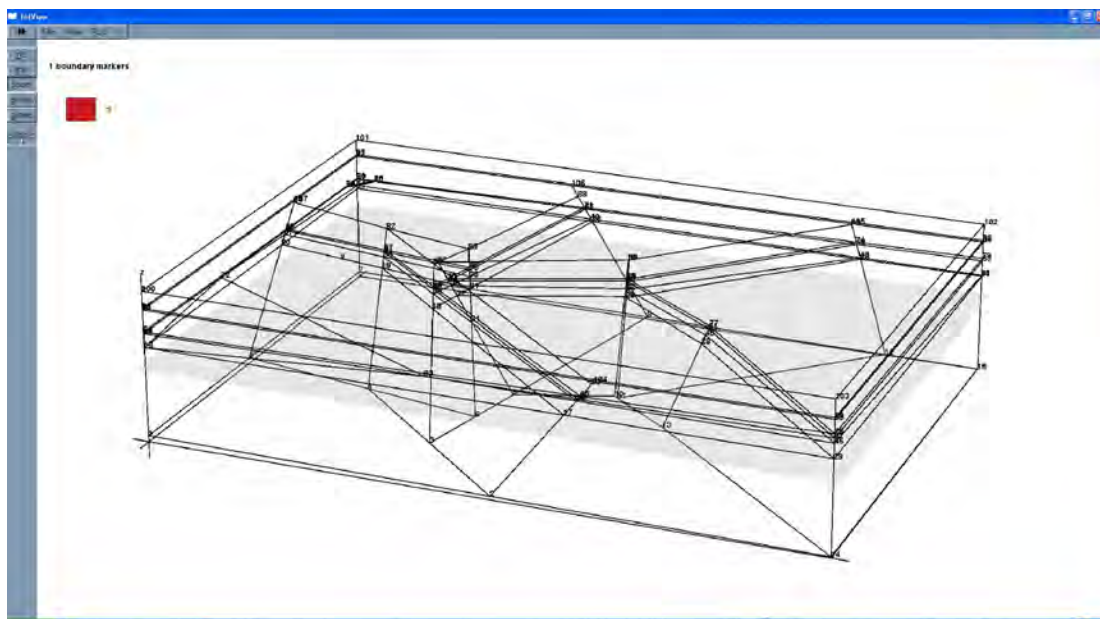


Рисунок 4 – Визуализация poly-файла с отображением всех ребер и вершин

Следует отметить, что для ускорения работы программы и построения конечноэлементной сетки пригодной для расчета, исходный poly-файл должен содержать поверхности, разделенные на довольно малые части, сравнимые с размерами желаемых объемных элементов. Для этого была произведена триангуляция входных поверхностей.

При триангуляции поверхностей невозможность пересечения треугольников достигается тем, что разбиение каждого ребра исходной поверхности является одинаковым для всех поверхностей содержащих это ребро. Триангуляция поверхностей производится с помощью программы **triangle.exe** [3].

Вид poly-файла с триангулированными поверхностями представлен на рис. 5.

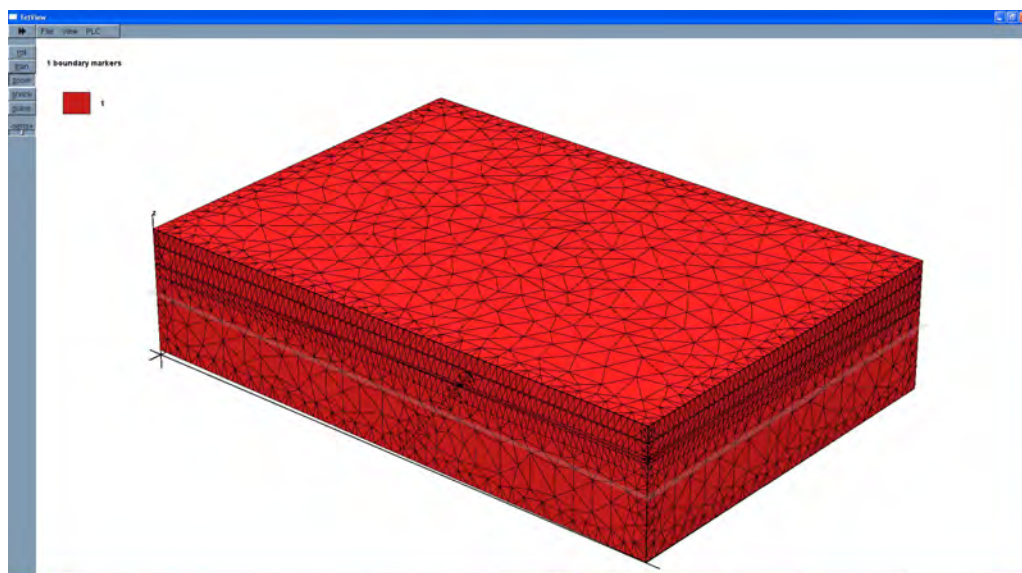


Рисунок 5 Визуализация poly-файла с триангулированными поверхностями

В итоге построенная конечноэлементная сетка представляет собой сплошной объем. Она хоть и содержит точные поверхности разломов внутри, но две действительные поверхности, моделирующие разломы, объединены в одну. Для того, чтобы завести в модель реальные разломы, требуется произвести разбиение сетки по ним. Это достигается путем создания «двойников» каждого узла, т.е. создание узлов, имеющих то же местоположение в пространстве, что и текущий узел, или узлов сдвинутых вдоль нормали к поверхности разломов.

После этого производится переиндексация соответствующих ссылок на узлы у пирамид. Отметим также, что из-за большой размерности сетки раздваивание поверхностей разломов «вручную» является процедурой практически невозможной. В связи с этим, для этих целей разработан специализированный модуль, который автоматически, по информации об исходной сетке, создает новые узлы, моделирующие вторую поверхность разлома.

Алгоритм «раздваивания» состоит в следующем. Сначала для какого-то одного разлома все пирамиды делятся на два непересекающихся множества. Например, признак может быть сформулирован следующим образом: все узлы пирамиды находятся между поверхностями разлома 1 и разлома 2. Так как написание общего алгоритма достаточно трудоемко, то на данном этапе выбор признака проводился для каждого разлома с учетом анализа уже раздвоенных поверхностей и корректности построенной в дальнейшем сетки.

После того, как пирамиды разделены, производится поиск узлов, принадлежащих текущему разлому. Далее производится создание двойников для каждого узла. При этом пирамиды одного множества получают ссылки на новые узлы, а пирамиды второго множества остаются со ссылками на старые узлы. Процедура производится для каждого разлома последовательно. Таким образом, проблема разбиения узлов на пересечениях разломов решается автоматически, так как узлы на пересечениях сначала раздваиваются для одного разлома, а затем уже раздвоенные узлы дублируются для пересекающегося разлома. На рисунке 6 представлена конечноэлементная сетка модели с разломами.

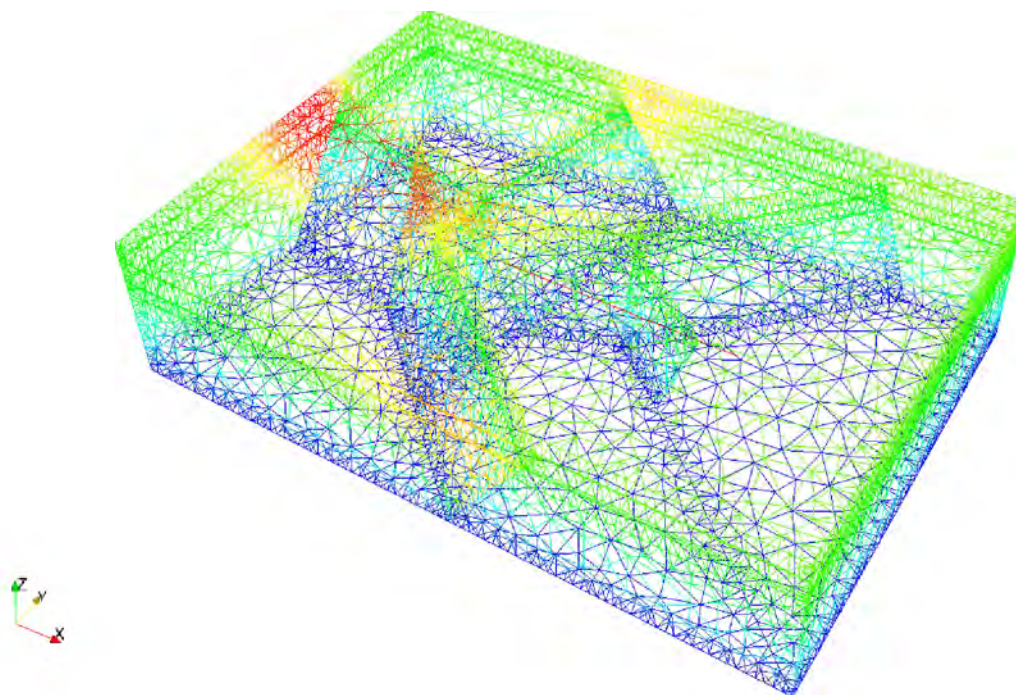


Рисунок 6 – Конечноэлементная сетка модели

Так как в нашем случае, требовалось найти только естественное напряженное состояние массива с разломами, то математическая постановка задачи имеет следующий вид:

1) уравнения равновесия в напряжениях

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho g \delta_{i3} = 0, i = 1..3,$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений;

ρ – плотность массива;

g – ускорение свободного падения;

δ_{ij} – символ Кронеккера;

2) граничные условия:

а) на левом и правом краях, т.е. при $y = Y_l, y = Y_r$:

$$\sigma_{yz} = \sigma_{yx} = 0, u_y = 0,$$

б) на заднем и переднем краю, т.е. при $x = X_l, x = X_r$:

$$\sigma_{xz} = \sigma_{xy} = 0, u_x = 0,$$

где u_i – компоненты вектора перемещений;

X_l – граница модели в западном направлении;

X_r – граница модели в восточном направлении;

Y_l – граница модели в южном направлении;

Y_r – граница модели в северном направлении;

в) на нижней границе условие жесткого закрепления: $u_x = u_y = u_z = 0$,

г) на верхней границе условие свободной поверхности $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$,

3) физический закон связи между напряжениями и деформациями для трансверсально-изотропной среды и модели Кельвина-Фойгта [4,5]

4) соотношения Коши между напряжениями и деформациями:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

где ε_{ij} – компоненты тензора деформаций;

5) уравнения совместности деформаций:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jj}}{\partial x_i^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \varepsilon_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial \varepsilon_{kj}}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_k \partial x_j}, i, j, k = 1..3.$$

Границы модели при этом были выбраны следующими:

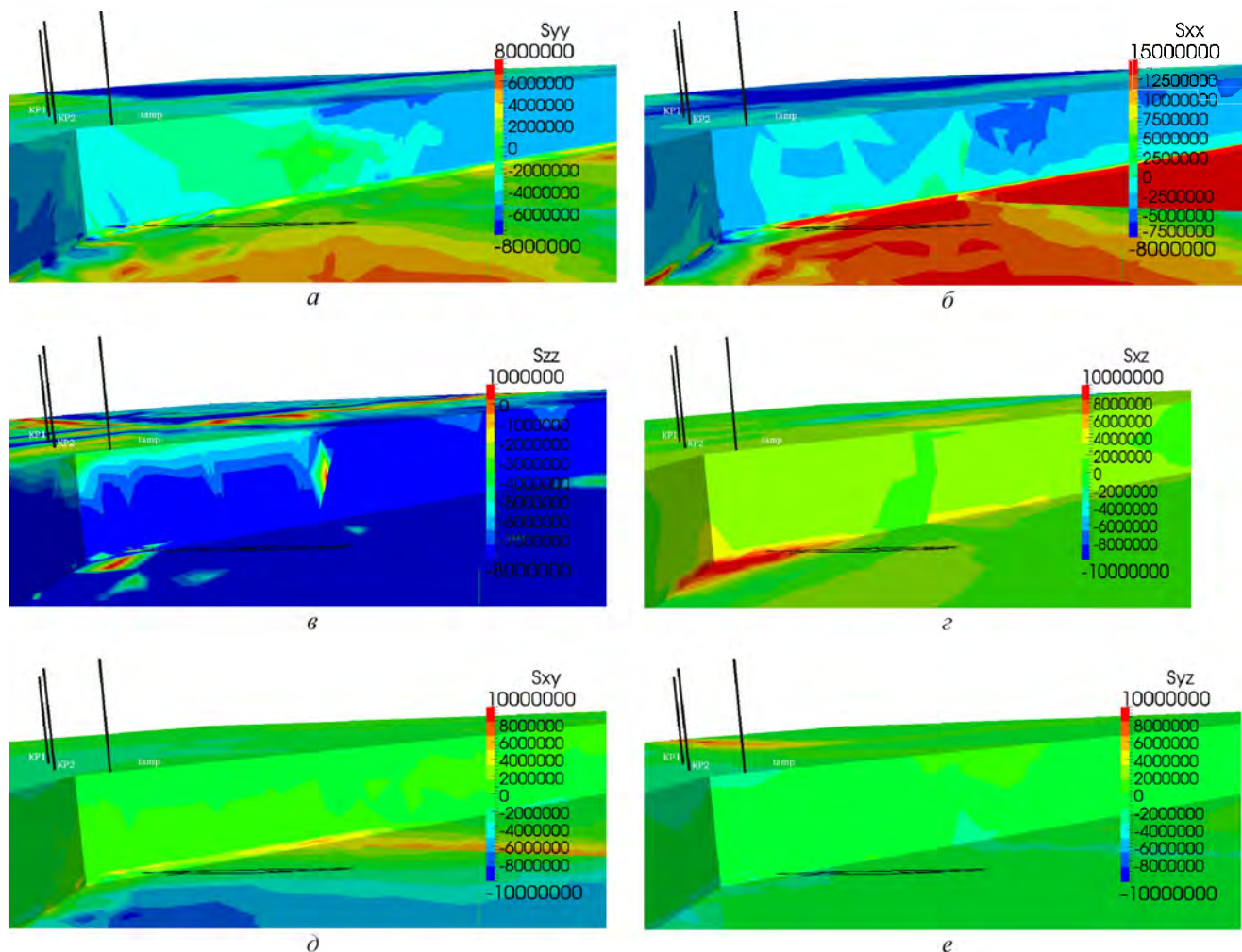
$$X_l = 10005 \text{ м}, X_r = 18000 \text{ м}, Y_l = 13000 \text{ м}, Y_r = 18520 \text{ м}$$

На основании проведения серии численных экспериментов было установлено, что для рассматриваемого класса задач достаточным является выделение трех основных пачек слоев с различными физико-механическими параметрами и дополнительно мощного «основания». Условно выделенные три основные пачки можно назвать, как осадочный слой, глинисто-мергелистая толща, соляной слой. Породная толща, находящаяся ниже соляной пачки принимается как усредненная приведенная пачка слоев. Физико-механические свойства для пачек приведены таблице 1.

Таблица 1 – Значения физико-механических расчетных параметров

Пачка	E_1 (ГПа)	E_2 (ГПа)	ν_1	ν_2	G_2 (ГПа)
Осадочная	0,3	1	0,3	0,3	0,0577
Глинисто-мергелистая толща	5	5	0,3	0,3	0,288
Соляная	14	14	0,3	0,3	0,8

Решение задачи было проведено на базе конечноэлементного пакета TOCHNOG. На рис. 7 представлено пространственное распределение компонент напряженного состояния в массиве



a – напряжения σ_{yy} (Па); *б* – напряжения σ_{xx} (Па); *в* – напряжения σ_{zz} (Па);
г – напряжения σ_{xz} (Па); *д* – напряжения σ_{xy} (Па); *е* – напряжения σ_{yz} (Па);

Рисунок 7 – Напряженное состояние в массиве горных пород

По результатам выполненных расчетов согласно геомеханической модели можно сделать следующие выводы:

- вследствие сложного геологического строения исследуемого участка, в массиве горных пород формируется сложная картина распределения напряжений;
- имеются зоны с растягивающими напряжениями (в основном горизонтальными), которые по значениям могут превосходить вертикальные напряжения в ненарушенном массиве почти в 10 раз и являться зонами разуплотнения массива;
- вертикальные напряжения, за исключением мест непосредственно возле разломов, остаются сжимающими;
- формируются градиенты среднего горного давления вдоль горизонтальных плоскостей, что может вызывать изменение давления поровой жидкости при ее наличии;
- формируются зоны сдвиговых напряжений в вертикальном направлении, что может говорить о возможном наличии сдвиговых трещин, что косвенно подтверждается значениями параметра поврежденности массива, который имеет довольно большие значения, распределенные по довольно большой площади;
- анализ контактных усилий на разломах позволил выявить участки, где последние являются растягивающими; в частности, это касается перегиба разлома Кривичского-1, находящегося в непосредственной близости от места расслопроявления, что может говорить о наличии зон разуплотне-

ния в разломе, а при наличии контактов с обводненными местами массива, о наличии подземных вод в этих местах.

Таким образом, результаты выполненных исследований по изучению напряженно-деформированного состояния зоны сопряжения Кривичского и Листопадовичского разломов согласно построенной геомеханической модели позволяют сделать вывод о том, что на стадии формирования структуры горного массива на исследуемом участке могли сложиться геомеханические условия, способствующие образованию зон растягивающих напряжений вдоль разломов и скоплению в них рассолов.

Резюме

В данной статье описан процесс построения геомеханической модели участка пересечения Кривичского и Листопадовичского разломов. Посчитано напряженно-деформированное состояние горного массива, вызванное собственным весом. Выяснено, что напряженное состояние массива с разломами имеет существенные отличия по сравнению с напряженным состоянием в ненарушенном массиве.

Литература

1. Разработка трехмерной геологической модели на участке сопряжения Кривичского и Листопадовичского разломов в районе юго-западного направления горизонта – 445 м рудника 2 РУ по теме «Выполнить исследования, обосновать и построить трехмерные геологическую и геомеханическую модели зоны сопряжения Кривичского и Листопадовичского разломов для выполнения компьютерного моделирования»: отчет о НИР (промежут.) / БГУ; рук. темы М.А. Журавков, Краснопрошин В.В. – Минск, 2012. – 47 с. – № ГР 20122727.
2. www.tetgen.org [Электронный ресурс]. Дата доступа: 10.09.2012.
3. http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/c_src/triangle/triangle.html [Электронный ресурс]. Дата доступа: 10.09.2012.
4. Bland D. R. The theory of linear viscoelasticity / D.R. Bland. – PERGAMON PRESS, 1960. - 125 с.
5. Мэйз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / Дж.Мэйз. – М.: URSS, 2007. – 318 с.

Summary

The process geomechanical model creation in the region of Listopadovichi's and Krivichi's tectonic breaches intersection is described in this paper. The stress-strain state of rock massif caused by gravity was calculated and analyzed. It was stated that stress-strain state of massif with faults has essential differences as compared with stress-strain state of massif without faults.

Поступила в редакцию 16.11.2012

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ШАРА

Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань

Строится точное решение несимметричной задачи термоупругости для полого шара. Задача предполагается стационарной, несвязной, температура тела не зависит от времени и от деформации конструкции.

В этом случае температура тела удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta T = 0, \quad (1)$$

T – температура тела, Δ – оператор Лапласа в сферической системе координат (α, β, ρ) :

$$\Delta \equiv \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sin \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right]. \quad (2)$$

Здесь ρ – расстояние от центра шара до рассматриваемой точки, α – угол между радиусом-вектором верхнего полюса сферы и радиусом-вектором этой точки, β – угол между нулевым меридианом и меридианом, на котором расположена точка, исследуемая область $0 \leq \alpha \leq \pi$, $-\pi \leq \beta \leq \pi$,

$r \leq \rho \leq R$, R, r – внешний и внутренний радиусы шара. В примере $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Рассматриваются краевые условия трех типов: 1) на граничной поверхности задано распределение температуры, 2) граничная поверхность теплоизолирована, 3) через граничную поверхность осуществляется конвективный теплообмен с внешней средой.

Уравнения равновесия в задаче термоупругости в напряжениях при отсутствии массовых сил можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \sigma_{\alpha\rho}}{\partial \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial \sigma_{\beta\rho}}{\partial \beta} + 2\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{\beta\beta} + \sigma_{\alpha\rho} \operatorname{ctg} \alpha \right] &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\alpha\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + (\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{\beta\beta}) \operatorname{ctg} \alpha + 3\sigma_{\alpha\rho} \right] &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\beta\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial \sigma_{\beta\beta}}{\partial \beta} + 3\sigma_{\beta\rho} + 2\sigma_{\alpha\beta} \operatorname{ctg} \alpha \right] &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

здесь $\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\beta\beta}, \sigma_{\rho\rho}, \sigma_{\alpha\rho}, \sigma_{\beta\rho}, \sigma_{\alpha\beta}$ – напряжения в теле.

Напряжения связаны с перемещениями соотношениями Дюгамеля – Неймана:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= \frac{E}{(1+\nu)} \left\{ \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \left[\theta - \frac{(1+\nu)}{\nu} \alpha_T T \right] \right\}, \\ \sigma_{\alpha\alpha} &= \frac{E}{(1+\nu)} \left\{ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + w \right) + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \left[\theta - \frac{(1+\nu)}{\nu} \alpha_T T \right] \right\}, \\ \sigma_{\beta\beta} &= \frac{E}{(1+\nu)} \left\{ \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + u \operatorname{ctg} \alpha + w \right) + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \left[\theta - \frac{(1+\nu)}{\nu} \alpha_T T \right] \right\}, \\ \sigma_{\alpha\rho} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} - u \right) \right\}, \quad \sigma_{\beta\rho} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} - v \right) \right\}, \\ \sigma_{\alpha\beta} &= \frac{E}{2(1+\nu)\rho} \left\{ \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \nu \operatorname{ctg} \alpha \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где u, v, w – перемещения точки шара вдоль меридиана, параллели и в радиальном направлении, E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона, α_T – коэффициент линейного расширения материала,

$$\theta = \frac{1}{\rho} \left[\rho \frac{\partial w}{\partial \rho} + 2w + \frac{\partial u}{\partial \alpha} + u \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} \right]. \quad (5)$$

Из соотношений (4), (5) следует

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} + \sigma_{\alpha\alpha} + \sigma_{\beta\beta} = & \frac{E}{(1+\nu)} \left\{ \frac{1}{\rho} \left[\rho \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial \alpha} + w + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + u \operatorname{ctg} \alpha + w \right] + \right. \\ & \left. + \frac{3\nu}{(1-2\nu)} \left[\theta - \frac{(1+\nu)}{\nu} \alpha_T T \right] \right\} = \frac{E}{(1-2\nu)} [\theta - 3\alpha_T T]. \end{aligned} \quad (6)$$

Точные решения уравнений теории упругости проще строить, когда эти уравнения записаны относительно перемещений, так как число разрешающих уравнений становится наименьшим, кроме того, легче искать их интегрируемые комбинации. Ранее уравнения термоупругости в перемещениях не публиковались, поскольку до работы [1] их интегрирование не представлялось возможным.

Построим эти уравнения традиционным способом, исключив из системы (3) напряжения с помощью соотношений (4). Подстановка в уравнения соотношений (4), перегруппировка членов полученных уравнений, приведение их с помощью соотношений (5) и (6) к максимально удобному для интегрирования виду производится с помощью компьютерной системы «Mathematica - 5». В результате имеем

$$\begin{aligned} \left(\Delta + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho^2} \right) w + \frac{1}{(1-2\nu)} \frac{\partial}{\partial \rho} [\theta - 2(1+\nu)\alpha_T T] - \frac{2}{\rho} \theta = 0, \quad (7) \\ \left(\Delta - \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \alpha} \right) u - \frac{2 \cos \alpha}{\rho^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{1}{(1-2\nu)\rho} \frac{\partial}{\partial \alpha} [\theta - 2(1+\nu)\alpha_T T] = 0, \\ \left(\Delta - \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \alpha} \right) v + \frac{2}{\rho^2 \sin \alpha} \frac{\partial [w + u \operatorname{ctg} \alpha]}{\partial \beta} + \frac{1}{\rho \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{\theta - 2(1+\nu)\alpha_T T}{(1-2\nu)} \right] = 0. \end{aligned}$$

Этих уравнений вместе с соотношением (5) достаточно для определения перемещений и функции θ . После этого с помощью формул Дюгамеля-Неймана (4) определяются напряжения.

Однако интегрирование системы (7), (5) в представленном виде практически невозможно. Для улучшения ситуации выводится дополнительное уравнение относительно объемной деформации. Для этого действуем на первое уравнение этой системы (7) оператором $\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2)$, на второе - оператором

$\frac{1}{\rho \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\sin \alpha)$, на третье – оператором $\frac{1}{\rho \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta}$ и затем суммируем их. После довольно громоздких вычислений, проведенных также с помощью компьютерной системы «Mathematica - 5», получаем дополнительное уравнение

$$\Delta [(1-\nu)\theta - (1+\nu)\alpha_T T] = 0.$$

Поскольку температура удовлетворяет уравнению $\Delta T = 0$, уравнение принимает вид

$$\Delta \theta = 0. \quad (8)$$

В результате получаем систему разрешающих уравнений (7), (8), в которой вместо уравнения (5) используется уравнение более высокого порядка (8).

Эта система уравнений может быть проинтегрирована, однако в ее решение войдет большее число постоянных интегрирования по сравнению с решением исходной системы.

Чтобы избавиться от «лишних» постоянных и привести в соответствие их количество с числом граничных условий, необходимо выполнить условие (5).

Итак, система разрешающих уравнений задачи термоупругости принимает вид

$$\Delta T = 0, \quad \Delta \theta = 0, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \left(\Delta + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho^2} \right) w + \frac{1}{(1-2\nu)} \frac{\partial}{\partial \rho} [\theta - 2(1+\nu)\alpha_T T] - \frac{2}{\rho} \theta = 0, \\ & \left(\Delta - \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \alpha} \right) u - \frac{2 \cos \alpha}{\rho^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{1}{(1-2\nu)\rho} \frac{\partial}{\partial \alpha} [\theta - 2(1+\nu)\alpha_T T] = 0, \\ & \left(\Delta - \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \alpha} \right) v + \frac{2}{\rho^2 \sin \alpha} \frac{\partial [w + u \operatorname{ctg} \alpha]}{\partial \beta} + \frac{1}{(1-2\nu)\rho \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} [\theta - 2(1+\nu)\alpha_T T] = 0 \end{aligned}$$

при дополнительном условии

$$\theta = \frac{1}{\rho} \left[\rho \frac{\partial w}{\partial \rho} + 2w + \frac{\partial u}{\partial \alpha} + u \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} \right]. \quad (10)$$

Периодическое по координате β решение ищется в виде

$$\begin{aligned} T(\alpha, \beta, \rho) &= \sum_{m=0}^{\infty} [T_m(\alpha, \rho) \cos(m\beta) + T_m^*(\alpha, \rho) \sin(m\beta)], \\ \theta(\alpha, \beta, \rho) &= \sum_{m=0}^{\infty} [\theta_m(\alpha, \rho) \cos(m\beta) + \theta_m^*(\alpha, \rho) \sin(m\beta)], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} w(\alpha, \beta, \rho) &= -\frac{1}{(1-2\nu)} \sum_{m=0}^{\infty} [w_m(\alpha, \rho) \cos(m\beta) + w_m^*(\alpha, \rho) \sin(m\beta)], \\ u(\alpha, \beta, \rho) &= -\frac{1}{(1-2\nu)} \sum_{m=0}^{\infty} [u_m(\alpha, \rho) \cos(m\beta) + u_m^*(\alpha, \rho) \sin(m\beta)], \\ v(\alpha, \beta, \rho) &= -\frac{1}{(1-2\nu)} \sum_{m=0}^{\infty} [v_m(\alpha, \rho) \sin(m\beta) + v_m^*(\alpha, \rho) \cos(m\beta)]. \end{aligned}$$

Тогда относительно коэффициентов рядов (11) получаем систему

$$\begin{aligned} \Delta_m T_m &= 0, \quad \Delta_m \theta_m = 0, \\ \left(\Delta_m + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho^2} \right) w_m &= \frac{\partial}{\partial \rho} [\theta_m - 2(1+\nu)\alpha_T T_m] - \frac{2(1-2\nu)}{\rho} \theta_m, \\ \left(\Delta_m - \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \alpha} \right) u_m - \frac{2m \cos \alpha}{\rho^2 \sin^2 \alpha} v_m &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \alpha} [\theta_m - 2(1+\nu)\alpha_T T_m] - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial w_m}{\partial \alpha}, \\ \left(\Delta_m - \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \alpha} \right) v_m - \frac{2m \cos \alpha}{\rho^2 \sin^2 \alpha} u_m &= -\frac{m}{\rho \sin \alpha} [\theta_m - 2(1+\nu)\alpha_T T_m] + \frac{2m}{\rho^2 \sin \alpha} w_m, \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$\Delta_m \equiv \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sin \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \alpha} \right]. \quad (13)$$

Приведем систему уравнений (12) к пяти отдельным уравнениям относительно искомым функций

$$\begin{aligned} \Delta_m T_m &= 0, \quad \Delta_m \theta_m = 0, \\ \left(\Delta_m + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho^2} \right) w_m &= \frac{\partial}{\partial \rho} [\theta_m - 2(1+\nu)\alpha_T T_m] - \frac{2(1-2\nu)}{\rho} \theta_m, \\ \left(\Delta_m - \frac{1+2m \cos \alpha}{\rho^2 \sin^2 \alpha} \right) (u_m + v_m) &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{m}{\sin \alpha} \right) \left[\theta_m - 2(1+\nu)\alpha_T T_m - \frac{2}{\rho} w_m \right], \\ \left(\Delta_m - \frac{1-2m \cos \alpha}{\rho^2 \sin^2 \alpha} \right) (u_m - v_m) &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{m}{\sin \alpha} \right) \left[\theta_m - 2(1+\nu)\alpha_T T_m - \frac{2}{\rho} w_m \right] \end{aligned} \quad (14)$$

при условии при условии

$$(1 - 2\nu)\theta_m + \frac{1}{\rho} \left[\rho \frac{\partial w_m}{\partial \rho} + 2w_m + \frac{\partial u_m}{\partial \alpha} + u_m \operatorname{ctg} \alpha + \frac{m}{\sin \alpha} v_m \right] = 0. \quad (15)$$

Система уравнений относительно T_m^* , θ_m^* , u_m^* , v_m^* , w_m^* отличается от (14) только тем, что последние два уравнения «меняются местами» – последнее уравнение из (14) становится уравнением относительно суммы перемещений ($u_m^* + v_m^*$), а предпоследнее относительно их разности.

Пусть

$$T_m(\alpha, \rho) = \sum_{n=m}^{\infty} T_{mn} P_n^m(\cos \alpha), \quad \theta_m(\alpha, \rho) = \sum_{n=m}^{\infty} \theta_{mn} P_n^m(\cos \alpha), \quad w_m = \sum_{n=m}^{\infty} w_{mn}(\rho) P_n^m(\cos \alpha), \quad (16)$$

$$u_m + v_m = \sum_{n=m}^{\infty} g_{mn}(\rho) \left[\frac{d}{d\alpha} - \frac{m}{\sin \alpha} \right] P_n^m(\cos \alpha), \quad u_m - v_m = \sum_{n=m}^{\infty} e_{mn}(\rho) \left[\frac{d}{d\alpha} + \frac{m}{\sin \alpha} \right] P_n^m(\cos \alpha).$$

Здесь $P_n^m(\cos \alpha)$ – шаровая функция [2], суммирование по n проводится от $n = m$, поскольку

$P_n^m(\cos \alpha) = 0$ при $n < m$, $P_n^0(\cos \alpha) = P_n^0(\cos \alpha)$. Нетрудно установить, что при $\alpha = 0$ и $m \geq 0$ соотношения $\left[\frac{d}{d\alpha} \pm \frac{m}{\sin \alpha} \right] P_n^m(\cos \alpha)$, а, следовательно, u_m, v_m принимают конечные значения.

В монографии [1] доказана теорема, что функция $\Phi = \left(\frac{d}{d\alpha} - \frac{m}{\sin \alpha} \right) P_n^m(\cos \alpha)$ при любом m удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sin \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + n(n+1) - \frac{m^2 + 1 + 2m \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right] \Phi = 0.$$

Из теоремы следует, что функция $\bar{\Phi} = \left(\frac{d}{d\alpha} + \frac{m}{\sin \alpha} \right) P_n^{-m}(\cos \alpha)$ удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sin \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + n(n+1) - \frac{m^2 + 1 - 2m \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right] \bar{\Phi} = 0.$$

Поскольку $P_n^m(\cos \alpha) = \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)} P_n^{-m}(\cos \alpha)$ [2], функция $\tilde{\Phi} = \left(\frac{d}{d\alpha} + \frac{m}{\sin \alpha} \right) P_n^m(\cos \alpha)$ удовлетворяет тому же, что $\bar{\Phi}$, уравнению. Итак,

$$\left[\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sin \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + n(n+1) - \frac{m^2 + 1 \pm 2m \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right] \left(\frac{d}{d\alpha} \mp \frac{m}{\sin \alpha} \right) P_n^m(\cos \alpha) \equiv 0. \quad (17)$$

Кроме того, имеет место уравнение

$$\frac{1}{\sin \alpha} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{dP_n^m(\cos \alpha)}{d\alpha} \sin \alpha \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \alpha} \right] P_n^m(\cos \alpha) \equiv 0 \quad (18)$$

В результате подстановки соотношений (16) в уравнения (14) с учетом тождеств (17) и (18) относительно коэффициентов рядов имеем следующие уравнения

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{d}{d\rho} \right) - n(n+1) \right] T_{mn} &= 0, & \left[\frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{d}{d\rho} \right) - n(n+1) \right] \theta_{mn} &= 0, \\ \left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{4}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{n^2 + n - 2}{\rho^2} \right] w_{mn} &= \frac{d}{d\rho} [\theta_{mn} - 2(1+\nu)\alpha_T T_{mn}] - \frac{2(1-2\nu)}{\rho} \theta_{mn}, \\ \left[\frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{d}{d\rho} \right) - n(n+1) \right] \begin{Bmatrix} g_{mn} \\ e_{mn} \end{Bmatrix} &= (\rho \theta_{mn} - 2w_{mn}) - 2(1+\nu)\alpha_T \rho T_{mn}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить подстановкой в уравнения, что их решение имеет вид

$$\begin{aligned}
 T_{mn} &= B_{mn}^1 \rho^n + B_{mn}^2 \rho^{-(n+1)}, \quad \theta_{mn} = C_{mn}^1 \rho^n + C_{mn}^2 \rho^{-(n+1)}, \\
 w_{mn} &= C_{mn}^3 \rho^{n-1} + C_{mn}^4 \rho^{-(n+2)} + \frac{[nL_{mn}^1 - 2(1-2\nu)C_{mn}^1]}{2(2n+3)} \rho^{n+1} + \frac{[(n+1)L_{mn}^2 + 2(1-2\nu)C_{mn}^2]}{2(2n-1)} \rho^{-n}, \\
 g_{mn} &= C_{mn}^5 \rho^n + C_{mn}^6 \rho^{-(n+1)} + \frac{1}{n} C_{mn}^3 \rho^{n-1} - \frac{1}{(n+1)} C_{mn}^4 \rho^{-(n+2)} + \\
 &+ \frac{(n+3)L_{mn}^1 + 2(1-2\nu)C_{mn}^1}{2(n+1)(2n+3)} \rho^{n+1} - \frac{(n-2)L_{mn}^2 - 2(1-2\nu)C_{mn}^2}{2n(2n-1)} \rho^{-n}, \\
 e_{mn} &= C_{mn}^7 \rho^n + C_{mn}^8 \rho^{-(n+1)} + \frac{1}{n} C_{mn}^3 \rho^{n-1} - \frac{1}{(n+1)} C_{mn}^4 \rho^{-(n+2)} + \\
 &+ \frac{(n+3)L_{mn}^1 + 2(1-2\nu)C_{mn}^1}{2(n+1)(2n+3)} \rho^{n+1} - \frac{(n-2)L_{mn}^2 - 2(1-2\nu)C_{mn}^2}{2n(2n-1)} \rho^{-n},
 \end{aligned} \tag{19}$$

где $L_{mn}^1 = C_{mn}^1 - 2(1+\nu)\alpha_T B_{mn}^1$, $L_{mn}^2 = C_{mn}^2 - 2(1+\nu)\alpha_T B_{mn}^2$. (20)

Здесь $B_{mn}^1, B_{mn}^2, C_{mn}^1 \div C_{mn}^2$ – постоянные интегрирования.

Отметим, что первые три формулы (19) справедливы при $n \geq m \geq 0$, последние две для $n \geq m > 0$.

Теперь $u_m = \frac{1}{2} \sum_{n=m}^{\infty} \left\{ g_{mn}(\rho) \left[\frac{d}{d\alpha} - \frac{m}{\sin \alpha} \right] P_n^m(\cos \alpha) + e_{mn}(\rho) \left[\frac{d}{d\alpha} + \frac{m}{\sin \alpha} \right] P_n^m(\cos \alpha) \right\}$, (21)

$$v_m = \frac{1}{2} \sum_{n=m}^{\infty} \left\{ g_{mn}(\rho) \left[\frac{d}{d\alpha} - \frac{m}{\sin \alpha} \right] P_n^m(\cos \alpha) - e_{mn}(\rho) \left[\frac{d}{d\alpha} + \frac{m}{\sin \alpha} \right] P_n^m(\cos \alpha) \right\}.$$

Выполняя условие (15), получаем $C_{mn}^7 = -C_{mn}^5$, $C_{mn}^8 = -C_{mn}^6$.

Отдельно рассмотрим случай $m = 0$, очевидно, перемещение $v_0 \equiv 0$, пусть

$$u_0 = \sum_{n=0}^{\infty} u_{0n} \frac{dP_n(\cos \alpha)}{d\alpha}, \tag{22}$$

Тогда при $n > 0$ с учетом условия (15) имеем

$$\begin{aligned}
 T_{0n} &= B_{0n}^1 \rho^n + B_{0n}^2 \rho^{-(n+1)}, \quad \theta_{0n} = C_{0n}^1 \rho^n + C_{0n}^2 \rho^{-(n+1)}, \\
 w_{0n} &= C_{0n}^3 \rho^{n-1} + C_{0n}^4 \rho^{-(n+2)} + \frac{1}{2(2n+3)} [nL_{0n}^1 - 2(1-2\nu)C_{0n}^1] \rho^{n+1} + \\
 &+ \frac{1}{2(2n-1)} [(n+1)L_{0n}^2 + 2(1-2\nu)C_{0n}^2] \rho^{-n}, \\
 u_{0n} &= \frac{[(n+3)L_{0n}^1 + 2(1-2\nu)C_{0n}^1]}{2(n+1)(2n+3)} \rho^{n+1} - \\
 &- \frac{[(n-2)L_{0n}^2 - 2(1-2\nu)C_{0n}^2]}{2n(2n-1)} \rho^{-n} + \frac{1}{n} C_{0n}^3 \rho^{n-1} - \frac{1}{(n+1)} C_{0n}^4 \rho^{-(n+2)}.
 \end{aligned}$$

Наконец, при $m = n = 0$

$$\theta_{00} = C_{00}^1, \quad u_{00} \equiv 0, \quad w_{00} = -\frac{1}{3}(1-2\nu)C_{00}^1 \rho + C_{00}^4 \rho^{-2}.$$

Напряжения вычисляются по формулам (4).

В качестве примера рассматривается сферический купол, представляющий половину полого шара. На внешней его поверхности задана температура, внутренняя поверхность теплоизолирована.

Для решения задачи температуру внешней поверхности купола запишем через шаровые функции, тогда краевые условия задачи теплопроводности имеют вид

$$T(\alpha, \beta, R) = t_0 + t_2 + t_1 P_1(\cos \alpha) - t_2 P_1^1(\cos \alpha) \cos \beta, \quad \left. \frac{\partial T(\alpha, \beta, \rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} = 0. \quad (23)$$

Решение уравнения теплопроводности принимает вид

$$T(\alpha, \beta, \rho) = (B_{00}^1 + B_{00}^2 \rho^{-1}) P_0(\cos \alpha) + (B_{01}^1 \rho + B_{01}^2 \rho^{-2}) P_1(\cos \alpha) + (B_{11}^1 \rho + B_{11}^2 \rho^{-2}) P_1^1(\cos \alpha) \cos \beta.$$

Выполняя условия (2), получаем

$$B_{00}^1 = t_0, \quad B_{00}^2 = 0, \quad B_{01}^1 = \frac{2R^2 t_1}{(2R^3 + r^3)}, \quad B_{01}^2 = \frac{R^2 r^3 t_1}{(2R^3 + r^3)}, \quad (24)$$

$$B_{11}^1 = -\frac{2R^2 t_2}{(2R^3 + r^3)}, \quad B_{11}^2 = -\frac{R^2 r^3 t_2}{(2R^3 + r^3)}.$$

Пусть условия закрепления основания купола $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, \beta, \rho\right) \equiv 0, \quad w\left(\frac{\pi}{2}, \beta, \rho\right) \equiv 0, \quad \sigma_{\alpha\beta}\left(\frac{\pi}{2}, \beta, \rho\right) \equiv 0, \quad (25)$$

что соответствует условию скользящего защемления основания, допускающего свободное проскальзывание вокруг оси. Решение задачи термоупругости имеет вид

$$\theta(\alpha, \beta, \rho) = \theta_{01}(\rho) P_1(\cos \alpha) + \theta_{11}(\rho) P_1^1(\cos \alpha) \cos \beta, \quad w(\alpha, \beta, \rho) = w_{01}(\rho) P_1(\cos \alpha),$$

$$u(\alpha, \beta, \rho) = u_1(\alpha, \rho) \cos \beta, \quad v(\alpha, \beta, \rho) = v_1(\alpha, \rho) \sin \beta,$$

$$\theta_{01} = 2(1 + \nu) \alpha_T \left[\frac{2}{(3 - 2\nu)} B_{01}^1 \rho + \frac{1}{(3 - 4\nu) \rho^2} B_{01}^2 \right],$$

$$\theta_{11} = (1 + \nu) \alpha_T \left[\frac{2}{(1 - 4\nu)} B_{11}^1 \rho + \frac{1}{(1 - \nu) \rho^2} B_{11}^2 \right], \quad (26)$$

$$w_{01} = (1 + \nu) \alpha_T \left[\frac{\rho^2}{(3 - 2\nu)} B_{01}^1 + \frac{2}{(3 - 4\nu) \rho} B_{01}^2 \right],$$

$$u_1(\alpha, \rho) = (1 + \nu) \alpha_T \left\{ \frac{\rho^2}{(1 - 4\nu)} B_{11}^1 - \frac{1}{2(1 - \nu) \rho} B_{11}^2 \right\} \frac{dP_1^1(\cos \alpha)}{d\alpha},$$

$$v_1(\alpha, \rho) = -(1 + \nu) \alpha_T \left\{ \frac{\rho^2}{(1 - 4\nu)} B_{11}^1 - \frac{1}{2(1 - \nu) \rho} B_{11}^2 \right\} \frac{1}{\sin \alpha} P_1^1(\cos \alpha).$$

Рассмотрим другие условия закрепления основания купола

$$u\left(\frac{\pi}{2}, \beta, \rho\right) \equiv 0, \quad v\left(\frac{\pi}{2}, \beta, R\right) = 0, \quad v\left(\frac{\pi}{2}, \beta, r\right) = 0, \quad (27)$$

$$w\left(\frac{\pi}{2}, \beta, R\right) = 0, \quad w\left(\frac{\pi}{2}, \beta, r\right) = 0,$$

что соответствует жесткому защемлению внешнего и внутреннего контуров основания купола. В этом случае некоторые из постоянных интегрирования определяются в явном виде:

$$C_{00}^1 = C_{00}^4 = 0,$$

$$C_{01}^1 = \frac{4(1 + \nu)}{(3 - 2\nu)} \alpha_T B_{01}^1, \quad C_{01}^2 = \frac{2(1 + \nu)}{(3 - 4\nu)} \alpha_T B_{01}^2, \quad C_{01}^3 = 0, \quad C_{01}^4 = 0, \quad C_{11}^5 = 0, \quad C_{11}^6 = 0,$$

остальные получаются из решения системы

$$\frac{(3-2\nu)R^2}{10}C_{11}^1 + \frac{(3-4\nu)}{2R}C_{11}^2 - C_{11}^3 + \frac{1}{2R^3}C_{11}^4 = (1+\nu)\alpha_T \left\{ \frac{2R^2}{5}B_{11}^1 + \frac{1}{R}B_{11}^2 \right\},$$

$$\frac{(3-2\nu)r^2}{10}C_{11}^1 + \frac{(3-4\nu)}{2r}C_{11}^2 - C_{11}^3 + \frac{1}{2r^3}C_{11}^4 = (1+\nu)\alpha_T \left\{ \frac{2r^2}{5}B_{11}^1 + \frac{1}{r}B_{11}^2 \right\},$$

$$\frac{(1-4\nu)R^2}{10}C_{11}^1 - \frac{2(1-\nu)}{R}C_{11}^2 + C_{11}^3 + \frac{1}{R^3}C_{11}^4 = -2(1+\nu)\alpha_T \left\{ \frac{R^2}{10}B_{11}^1 + \frac{1}{R}B_{11}^2 \right\},$$

$$\frac{(1-4\nu)r^2}{10}C_{11}^1 - \frac{2(1-\nu)}{r}C_{11}^2 + C_{11}^3 + \frac{1}{r^3}C_{11}^4 = -2(1+\nu)\alpha_T \left\{ \frac{r^2}{10}B_{11}^1 + \frac{1}{r}B_{11}^2 \right\}$$

В таблицах, приведены результаты вычислений при следующих значениях параметров

$$R = 10м., \quad r = 9.9м., \quad \nu = 0.3, \quad t_0 = 25^0C, \quad t_2 = 5^0C, \quad t_1 = 50^0C.$$

α	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
$w(\alpha, 0, R)/\alpha_T$	418.3	386.4	295.8	209.1	108.3	0
$w(\alpha, 0, r)/\alpha_T$	417.0	385.3	294.9	208.5	107.9	0

α	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
$u(\alpha, 0, R)/\alpha_T$	-234.0	-216.2	-165.5	-117.0	-60.6	0
$u(\alpha, 0, r)/\alpha_T$	-229.8	-212.3	-162.5	-114.9	-59.5	0

α	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
$\sigma_{\alpha\rho}(\alpha, 0, R)/(\alpha_T E)$	-7.4	-12.9	-16.5	-17.6	-17.4	-16.1
	-0.1	-6.1	-11.3	-13.9	-15.5	-16.1
$\sigma_{\alpha\rho}(\alpha, 0, r)/(\alpha_T E)$	-7.3	-12.8	-16.5	-17.6	-17.5	-16.2
	-0.2	-6.3	-11.5	-14.0	-15.7	-16.2

В первых двух таблицах приведены результаты для скользящего защемления основания. При жесткой его заделке эти перемещения не отличаются от приведенных в таблице, перемещения u , v мало отличаются от нуля. Верхняя строка в последней таблице соответствует скользящему защемлению, нижняя – жесткой заделке.

Резюме

Строится точное решение трехмерной задачи теории упругости для полого шара, находящегося в температурном поле. Решение представлено в виде рядов из комбинаций степенных, тригонометрических и шаровых функций. В качестве примера рассматривается сферический купол, основание которого находится в условиях жесткого или скользящего защемления. Решение получено с помощью компьютерной системы «Mathematica - 5»

Литература

1. Гурьянов Н.Г. Краевые задачи теории упругости для шара и цилиндра / Н.Г. Гурьянов, О.Н. Тюленева – Казань: Изд-во Казанского университета, 2008. – 207 с.
2. Бэйтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Том 1. / Г.Бэйтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1973. – 294 с.

Summary

Exact solution of three-dimensional problem of elasticity theory for a spherical shell located in temperature pattern, is developed. The solution is represented by series of combinations of power, trigonometric and spherical functions. Spherical cap the basal part of which is located in terms of rigidly or gliding fixing, is considered as an example. The solution is derived with the help of "Mathematica - 5" computer program.

Поступила в редакцию 12.11.2012

СПОСОБЫ И СТРУКТУРНАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ ТКАНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СОЗДАНИИ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

¹Василевич Ю.В., ²Сахоненко В.М., ²Горелый К.А., ²Малютин Е.В., ¹Неумержицкая Е.Ю.

¹УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

²ОАО «Авангард», Сафоново

Новые материалы, появление которых, как правило, определяется естественным стремлением повысить эффективность разрабатываемых конструкций, открывают возможности для реализации принципиально новых конструктивных решений и технологических процессов, а дальнейшее совершенствование конструкций и технологий ставит новые задачи перед материаловедением.

Современные композиционные материалы обладают не только широким спектром свойств, выгодно отличающих их от традиционных материалов, но и способностью к направленному изменению этих свойств в соответствии с назначением конструкции. Направленный характер свойств композитов одновременно означает, что наряду с высокими характеристиками в одних направлениях они обладают низкими в других. Однако правильный учет особенностей композитов и рациональное использование их преимуществ позволяет получать конструкции, обладающие высокой степенью весового совершенства и качественным уровнем свойств, недостижимых при использовании традиционных материалов.

Значительное место при исследовании полимерных материалов занимают способы их получения, которые осуществляются путем полимеризации полимеров. В каждом случае получение новых материалов с хорошими, а иногда и с «выдающимися» свойствами, связано с целенаправленным регулированием свойств, которые достигаются путем отработки технологических режимов и процессов. Для целенаправленного регулирования свойств полимерных материалов используется целый ряд способов, позволяющих контролировать их на всех стадиях технологического процесса. В настоящее время достигнуты значительные успехи в создании композиционных материалов с желаемым комплексом свойств (повышенного качества, хорошими физико-механическими и теплофизическими показателями, с высокой стабильностью и долговечностью).

Внимание специалистов многих стран мира все больше привлекают конструкционные материалы в виде ориентированных волокнистых композитов. Предназначены они для изготовления основных и вспомогательных несущих элементов конструкций. Для этого имеется возможность выбора их из целого ряда типов волокнистых структур, получаемых различными текстильными методами. Уникальное сочетание легкости, гибкости, высокой прочности и вязкости разрушения, характерное для текстильных армирующих структур, определило преимущество их применения для широкого спектра изделий – от крыльев самолета до углерод-углеродных носовых обтекателей. Значение текстильных конструкционных композитов все время повышается. Текстили, используемые в качестве арматуры для композитов, проектируются с учетом многочисленных требований, включая стабильность размеров и способность к облеганию заданной формы. Однако, несмотря на то, что способы получения сложных текстильных структур найдены довольно давно, технология изготовления изделий из композитов на их основе развивается медленно. Наблюдается отсутствие фундаментальных исследований по вопросам расчетов на прочность и жесткость текстильных каркасов. Отсутствует синтез знаний специалистов по текстильным материалам и по структурной механике. Композиты можно охарактеризовать как определенную комбинацию разнородных материалов, обладающую специфической структурой и геометрической формой, а текстильные композиты определяются в виде комбинации полимерного связующего с системой волокон или нитей, либо с тканью.

Элементы конструкции из текстильных композитов, воспринимающие основные и вспомогательные нагрузки, должны изготавливаться из высокомодульных волокон или нитей. К числу основных высокомодульных волокон относятся стеклянные, углеродные, органические, керамические и стальные волокна. Каждый из этих видов волокон обладает своими характерными преимуществами и недостатками по сравнению с другими. Например, углеродные волокна самые жесткие и самые хрупкие. Стеклянные волокна самые дешевые, обладают высокой вязкостью разрушения. Поэтому в течение последних 50 лет стеклянные волокна являлись и являются основными общепринятыми конструкционными материалами для множества разнородных изделий из текстильных композитов. Разнообразие типов волокнистых наполнителей и связующих, достаточно большой набор методов и приемов формования изделий позволяют обеспечить наиболее рациональный подход к выбору тех-

нологий и аппаратного оформления процессов производства. Тем не менее, следует отметить и некоторые недостатки этих материалов. К их числу относится значительное рассеяние физико-механических свойств, обусловленное структурной неоднородностью и недостаточной стабильностью процесса формования. Слоистость структур большинства стеклопластиков предопределила их слабое сопротивление межслойному сдвигу. Этот недостаток столь существен, что потребовалась разработка специальных методов механических испытаний, например, для оценки прочности при изгибе. Наличие воздушных или газовых включений, обусловленных существующей технологией формования, а также образование микротрещин в процессе производства и эксплуатации вызывают необходимость оценки герметичности конструкций, а также оценки изменения других свойств материалов в процессе эксплуатации.

Ориентация волокнистого наполнителя и его содержание в полимерной матрице позволяет, с одной стороны, оценить физико-механические свойства материала, а с другой стороны, управлять технологическими параметрами процесса формования изделий, а, следовательно, определять и требования к применяемому оборудованию.

Вопросам оценки свойств связующих посвящено большое число работ. Связующее придает композиционному материалу монолитность, способствует равномерному распределению нагрузки между волокнами, защищает их от химических, атмосферных и других внешних воздействий и само воспринимает часть усилий, развивающихся в материале при работе под нагрузкой. Обширный перечень отечественных и зарубежных связующих с указанием их свойств и некоторых технологических особенностей переработки предоставляет разработчикам возможность выбора марки связующего, наиболее приемлемой для решения конкретных задач.

Важнейшую роль в пластике играет характер и ориентация расположения наполнителя в матрице, приводящие к анизотропии свойств композита. Анизотропия стеклопластиков (конструктивная анизотропия) оказывается еще одним регулируемым параметром, лишней «степенью» свободы при конструировании полимерных материалов и конструкций на их основе. Другим преимуществом перед обычными изотропными материалами является эффективное управление анизотропией их механических, теплофизических и других свойств в плоскости армирования. Это дает дополнительные резервы в повышении надежности конструкций, снижении их массы и расширении области применения. Управление анизотропией свойств осуществляется варьированием укладки арматуры.

Появляется возможность формировать свойства материала под конкретную деталь под ее напряженно-деформированное состояние, что обеспечивает повышение несущей способности изделия и приводит к существенному снижению его массы. При этом использование ПКМ предоставляет возможность широкого выбора исходных компонентов и структурных схем армирования композитного материала, технологических способов формообразования изделия и получения требуемой геометрии поверхности конструкции, что дает большую степень свободы разработчику при проектировании изделия. Основным методом изготовления слоистых обшивок, панелей и профилей планера самолета из ПКМ является контактное формование путем ручной или автоматической выкладки листового препрега на плоскую, негативную или позитивную поверхность оправки и последующего автоклавного отверждения изделия. Многослойные композитные оболочки трубопроводов, корпусов двигателей и баллонов давления изготавливаются методом намотки. Это высокопроизводительный процесс, который легко поддается автоматизации и позволяет снизить трудоемкость и стоимость изготовления изделий за счет сокращения числа деталей, входящих в конструкцию, и числа сборочных операций, а также свести к минимуму механическую обработку и значительно повысить коэффициент использования материала.

В современном производстве для композиционно-волокнистого материала (КМ) применяют наполнители, получаемые на основе: 1) прядей или нитей, изготовленных из волокон, а также ровницы (жгутов), 2) тканей и 3) матов (холстов). В первом случае КМ получается путем послойной укладки семейств однонаправленных нитей. В результате образуется слоистая структура взаимно перпендикулярных семейств нитей, у которых отсутствует взаимное переплетение. Во втором случае рассматриваются ортотропные структуры из композиционных материалов, которые представляют собой многослойные среды на основе тканей, имеющих упорядоченное расположение волокон. Все слои сориентированы в одном направлении. Эта система пропитана полимерным связующим. Необходимо отметить, что тканые материалы создаются из нитей и первоначально обладают высокой гибкостью. Существуют две причины этой гибкости: 1) гибкость самой нити, состоящей из тонких параллельных волокон, движение которых ограничивается только трением между ними при деформировании, 2) структура ткани создается путем переплетения нитей без жесткой связи в местах пере-

плетения. Это означает, что перемещение отдельных нитей или волокон в структуре, вызванное усилиями, приложенными к ткани, имеют свойства, аналогичные свойствам тела с подвижной структурой. Для построения модели расчета препрегов возьмем за основу иерархическую структурную организацию этих материалов. Композиты в принципе можно охарактеризовать как определенную комбинацию разнородных материалов, обладающую специфическими структурой и геометрической формой. Если пренебречь молекулярными эффектами в волокнах и характерными чертами изделий в целом, то в общем случае можно выделить четыре основных уровня: волокно → нить → ткань → композит. Первый уровень включает моноволокно, образованное вытяжкой через одну фильеру из расплава с последующей обработкой, обеспечивающей фиксацию формы. Волокна собираются в нити, которые составляют второй уровень рассмотрения. Наиболее важный тип нитей, пригодных для переработки в композиты, - многоволоконные нити, экструдированные из прядильной головки с большим количеством отверстий. Нить, как правило, содержит около 1000 элементарных волокон. Пучки параллельных элементарных волокон обладают когезионной прочностью в поперечном направлении и легко разделяются на отдельные ленты, которые, конечно, не отличаются особыми признаками, так как легко делятся на еще меньшие ленты или объединяются в большие пряжи. Поэтому, при производстве волокон имеет смысл воздействовать на группу волокон так, чтобы поддержать целостность, определенную плотность и приблизительно круглое сечение нити. Традиционно этого добиваются незначительной круткой (порядка 1 об/см), однако по новейшей методике нить пропускают через воздушное сопло, что обеспечивает образование своего рода переплетения, геометрически представляемого как нерегулярное «ложное плетение», поскольку траектории волокон остаются отдельными и невзаимосвязанными. Небольшая не прямолинейность волокон, появляющаяся в результате этих процессов, не оказывает существенного влияния на свойства при растяжении, если волокна однородны. Реакция пучка параллельных волокон на растягивающую нагрузку равна сумме реакций отдельных волокон, а вклад системы волокон в целом входит через статистические эффекты изменчивости свойств от волокна к волокну и вдоль волокна. Причина высокой прочности стеклянного волокна кроется в технологии его получения и связана с высокой скоростью механической вытяжки расплава стеклянной массы, увеличением скорости охлаждения волокна и уменьшением диаметра получаемых нитей. В современном производстве используются волокна диаметром 3 – 11 мкм.

Следующий уровень представляют ткани, трикотажные, плетеные материалы, полученные с помощью специальных способов переплетения нитей. Строение ткани определяется совокупностью различных факторов, в том числе геометрическими характеристиками взаимного расположения нитей основы и утка с перегибами друг на друга при переходе с одной стороны ткани на другую. При перегибах друг на друга согласно закономерности переплетения между натянутыми нитями основы и утка возникают силы взаимного давления. В результате этого возникают силы трения и сцепления между нитями, которые удерживают отдельные нити в ткани как в едином целом изделии. Строение ткани зависит от следующих основных факторов: сырьевого состава нитей; вида нитей и способа их получения; линейной плотности нитей, текс; формы и размеров поперечного сечения нитей; физико-механических свойств нитей; переплетения нитей в ткани; плотности нитей в ткани по основе и по утку; технологических параметров выработки ткани на ткацком станке (натяжение нитей, форма зева, частота вращения главного вала станка и т.д.).

Формирование стеклянной ткани, как и всякой другой ткани, происходит в результате взаимного переплетения двух семейств нитей (основы и утка). Основные нити располагаются вдоль ткани, уточные нити – в поперечном направлении ткани. Переплетением называется определенный порядок чередования перекрытий одной системы нитей с нитями другой системы. Переплетение нитей в ткани определяет ее строение. При выработке тканей используют разнообразные переплетения. Их делят обычно на четыре класса: простые (главные), мелкозорчатые, сложные и крупнозорчатые.

К простому (главному) переплетению относятся: полотняное, саржевое и атласное (сатиновое). Полотняное переплетение является одним из наиболее простых и распространенных. Основные и уточные нити в нем чередуются через одну, что обеспечивает достаточную прочность ткани.

Резюме

Изложены способы и дан анализ структурной организации тканых материалов при создании композиционных материалов.

Summary

Set out the methods and the analysis of the structural organization of woven fabrics to create composites.

Поступила в редакцию 09.12.2012

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОМПОНЕНТ ОСТАТОЧНОГО НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ В ОБЛАСТИ НАИМЕНЬШЕГО СЕЧЕ- НИЯ КОЛЬЦЕВОГО НАДРЕЗА ПОВЕРХНОСТНО УПРОЧНЁННЫХ ДЕТАЛЕЙ СПЛОШНОГО И ПОЛОГО СЕЧЕНИЙ

Сазанов В.П.

*Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика
С.П. Королёва (национальный исследовательский университет), Самара*

Одним из важных вопросов механики остаточных напряжений является установление связи между остаточными напряжениями и сопротивлением деталей усталости. Особую значимость эта задача приобрела в связи с широким применением на практике различных методов поверхностного упрочнения, приводящих к существенному увеличению характеристик сопротивления усталости, особенно в условиях концентрации напряжений. В связи с вышеизложенным, при прогнозировании приращения предела выносливости, вызванного влиянием остаточных напряжений, актуальной задачей является выбор теории прочности и эквивалентного напряжения. Соответственно для решения такой задачи необходимо наличие методики расчёта распределения компонент остаточного напряжённого состояния в области опасного сечения концентратора, представляющего собой надрез определённой геометрической формы.

В данной работе рассматривается задача по определению распределения компонент остаточного напряжённого состояния в окрестности наименьшего сечения (дна) кольцевого надреза, а также их зависимости от геометрических параметров надреза для цилиндрических деталей. Данные детали представляют собой стандартные стальные образцы: один сплошного сечения диаметром $D = 10$ мм и два полого сечения с размерами наружного и внутреннего диаметров $D/d = 25/15$ мм и $D/d = 50/40$ мм.

При проведении расчётов и последующих исследований задача о влиянии закона распределения остаточных напряжений по толщине упрочнённого поверхностного слоя детали не ставилась, поэтому были приняты упрощённые условия:

1) поверхностный слой детали упрочнён на глубину $a = 0,5$ мм по линейному закону распределения осевых остаточных напряжений (максимальное значение на поверхности, минимальное на глубине $a = 0,5$ мм);

2) после упрочнения на деталь нанесён концентратор в виде кольцевого надреза глубиной h и радиусом R на его дне (рис. 1), в результате чего в окрестности концентратора происходит перераспределение остаточных напряжений.

Решение и исследование выполнено методом конечно-элементного моделирования с использованием расчётного комплекса NASTRAN/PATRAN, методические основы использования которого для подобных задач подробно рассмотрены в работе [1].

1. Результаты исследования для детали сплошного сечения диаметром $D = 10$ мм. Эскиз расчётной области детали сплошного сечения приведён на рис. 1.

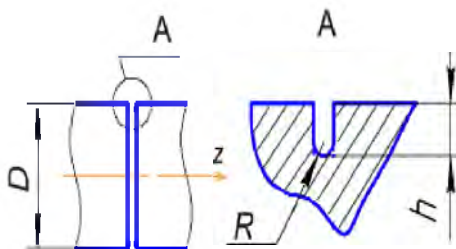


Рисунок 1 – Расчётная область детали сплошного сечения

Фрагмент сетки конечно-элементной модели в области опасного сечения приведён на рис. 2.

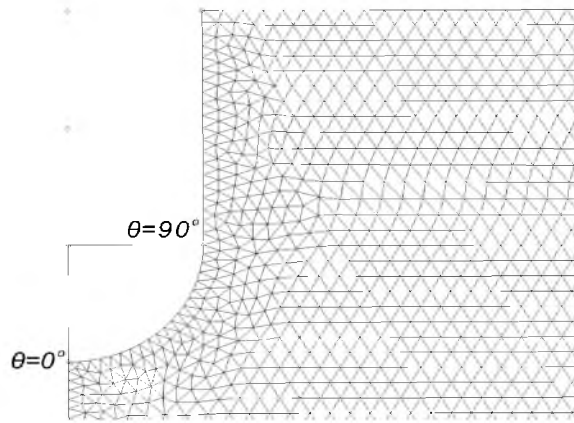


Рисунок 2 Фрагмент сетки конечно-элементной модели в окрестности дна надреза

На рис. 3 для варианта расчёта $h = R = 0,05$ мм приведены графики зависимостей четырёх компонент остаточного напряжённого состояния вдоль полукруглой поверхности дна надреза по угловой координате в диапазоне от 0 градусов (точка наименьшего сечения) до 90 градусов (точка перехода линии окружности в прямую линию).

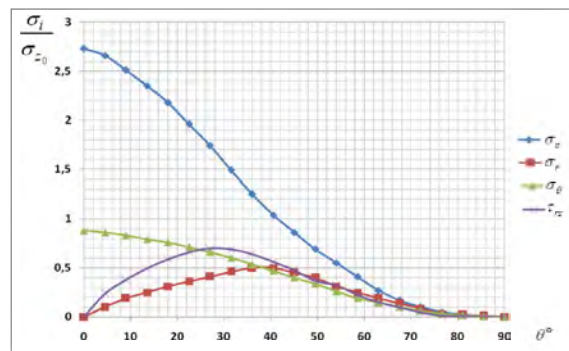


Рисунок 3 – Зависимости компонент остаточного напряжённого состояния вдоль поверхности полукруглого надреза для $h = R = 0,05$ мм

На рис. 4 и 5 приведены аналогичные графики для вариантов расчета $h = 0,108$ мм (промежуточное значение) и $h = 0,216$ мм (данная величина h соответствует глубине неразвивающейся трещины [2], [3]). На графиках рис. 3 – 5 напряжения приведены в относительных величинах к максимальным значениям осевых остаточных напряжений для гладкого образца детали без надреза.

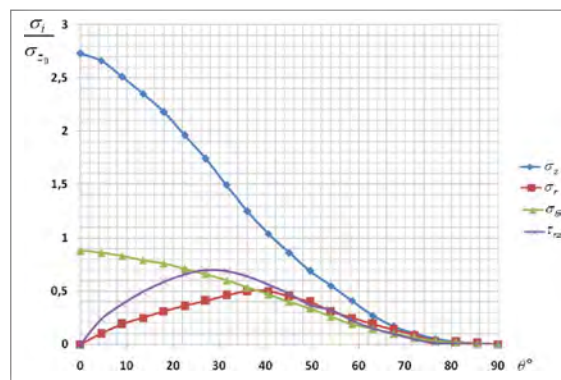


Рисунок 4 – Зависимости компонент остаточного напряжённого состояния вдоль поверхности полукруглого надреза для $h = 0,108$ мм

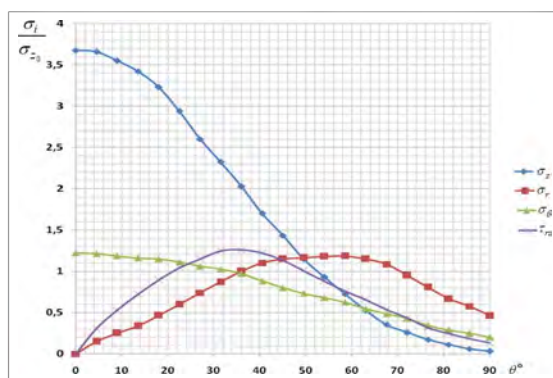


Рисунок 5 – Зависимости компонент остаточного напряжённого состояния вдоль поверхности полукруглого надреза для $h = 0,216$ мм

На рис. 3 – 5 приняты следующие обозначения компонент напряжённого состояния:

- осевое остаточное напряжение σ_z ;
- радиальное остаточное напряжение σ_r ;
- окружное остаточное напряжение σ_θ ;
- касательное остаточное напряжение τ_{rz} .

Из приведённых графиков на рис. 3 – 5 видно, что в наименьшем (опасном) сечении наибольшей по величине является компонента осевого остаточного напряжения и, следовательно, она будет оказывать наибольшее влияние на приращение предела выносливости, вызванное поверхностным пластическим упрочнением детали. Действительно, на практике при прогнозировании приращения предела выносливости поверхностно упрочнённых деталей чаще всего применяется теория наибольших касательных напряжений, а в качестве эквивалентных напряжений используется компонента осевых остаточных напряжений. Компоненты радиального и касательного остаточных напряжений относительно друг друга имеют подобный характер зависимостей: при изменении угловой координаты θ от 0 до 90 градусов (рис. 2) сначала растут, а затем, достигнув максимума, падают. Причём в рассмотренных пределах глубины надреза точка максимального значения указанных компонент при возрастании параметра h смещается в сторону 90 градусов угловой координаты θ .

В связи с большим влиянием осевых остаточных напряжений на приращение предела выносливости проведено исследование их зависимости от геометрических параметров кольцевого надреза. Результаты расчёта осевых остаточных напряжений на дне надреза в зависимости от глубины h и радиусов $R = 0,1$ мм, $0,05$ мм и $0,025$ мм для детали диаметром $D = 10$ мм в виде графиков приведены на рис.6. Значения напряжений приведены в относительных величинах к максимальным осевым остаточным напряжениям на поверхности образца (детали) без надреза.

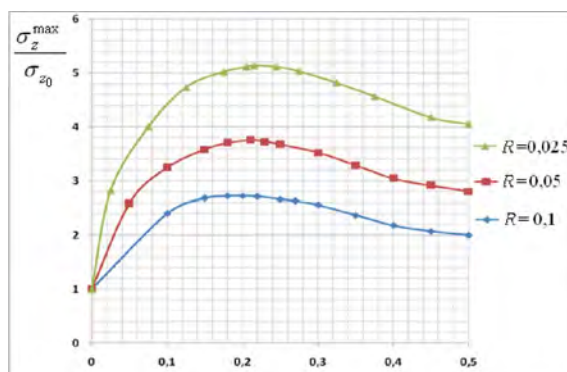


Рисунок 6 – Зависимости осевых σ_z остаточных напряжений на дне надреза от его глубины h и радиуса R для детали диаметром $D = 10$ мм

Из приведённых графиков видно, что при уменьшении радиуса надреза R значения осевых остаточных напряжений в наименьшем сечении возрастают. Для различных радиусов надреза зави-

симости указанных напряжений носят подобный характер: с увеличением глубины надреза h они сначала растут, а затем, достигнув максимума, падают, при этом градиенты возрастания напряжений по абсолютной величине значительно превосходят их значения на участке падения.

2. Результаты исследования для образцов полого сечения. На рис. 7 приведён эскиз расчётной области детали полого сечения.

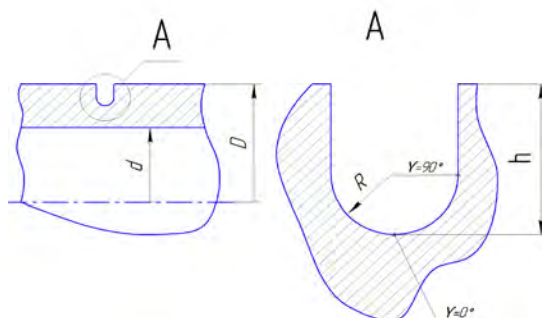


Рисунок 7 – Расчётная часть детали полого сечения

На рис. 8 приведены графики зависимостей компонент остаточного напряжённого состояния вдоль полукруглой поверхности дна кольцевого надреза по угловой координате γ (см. рис. 6) в диапазоне значений от 0 градусов (точка наименьшего сечения) до 90 градусов (точка перехода линии окружности в прямую линию) для детали с размерами $D/d = 25/15$ мм и варианта расчёта $h = R = 0,05$ мм.

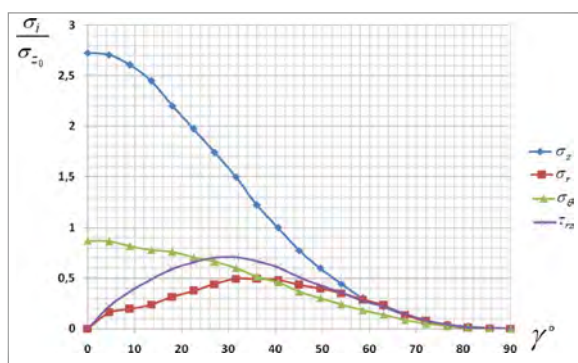


Рисунок 8 – Зависимости компонент остаточного напряжённого состояния вдоль поверхности полукруглого надреза для $h = R = 0,05$ мм ($D/d = 25/15$ мм)

На рис. 9 и 10 приведены аналогичные графики для вариантов расчёта $h = 0,235$ мм (промежуточное значение) и $h = 0,469$ мм (данная величина h соответствует глубине нераспространяющейся трещины [3], [4]). На рис. 8 – 10 компоненты остаточных напряжений приведены в относительных величинах к максимальным значениям осевых остаточных напряжений для гладкого образца детали без надреза.

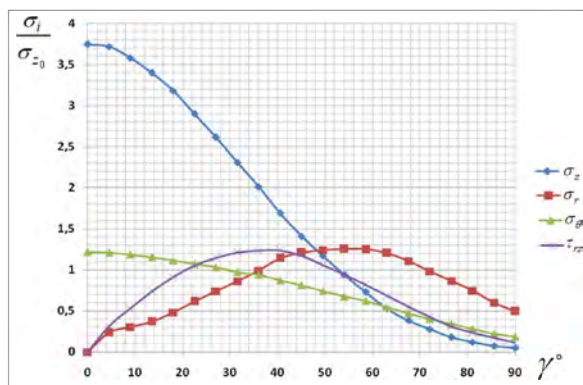


Рисунок 9 – Зависимости компонент остаточного напряжённого состояния вдоль поверхности полукруглого надреза для $h = 0,235$ мм ($D/d = 25/15$ мм)

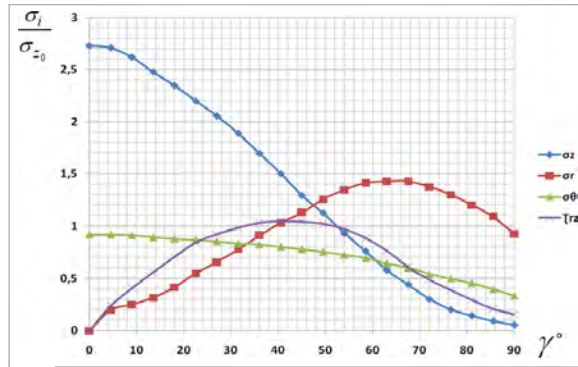


Рисунок 10 – Зависимости компонент остаточного напряжённого состояния вдоль поверхности полукруглого надреза для $h = 0,469$ мм ($D/d = 25/15$ мм)

На рис. 8 – 10 обозначения компонент напряжённого состояния приняты аналогично обозначениям для сплошного сечения.

Как и для детали сплошного сечения, рассмотренного выше, было проведено исследование влияния геометрических размеров кольцевого надреза R и h на величину осевых остаточных напряжений в наименьшем (опасном) сечении. Данные результаты для полых цилиндрических образцов (деталей) с размерами $D/d = 25/15$ мм, $D/d = 50/40$ мм и радиусов надреза $R = 0,05$ мм и $R = 0,1$ мм приведены на рис. 11 и 12. Значения напряжений также приведены в относительных величинах к максимальным осевым остаточным напряжениям на поверхности образца (детали) без надреза.

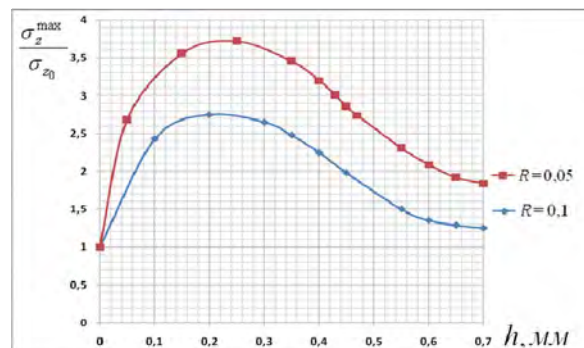


Рисунок 11 – Зависимости осевых остаточных напряжений на дне надреза от его глубины и радиуса для образца размером $D/d = 25/15$ мм

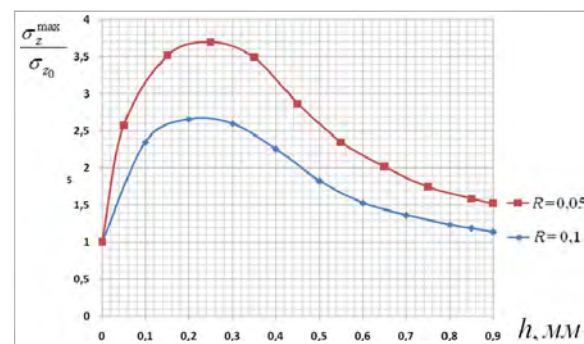


Рисунок 12 – Зависимости осевых остаточных напряжений на дне надреза от его глубины и радиуса для образца размером $D/d = 50/40$ мм

Анализ графиков на рис. 8 – 12 показывает, что установленные ранее закономерности для компонент остаточного напряжённого состояния образца (детали) сплошного сечения (рис. 3 – 6), приведённые в предыдущем разделе, полностью распространяются на аналогичные зависимости для детали полого сечения. Также и в этом случае компонента осевых остаточных напряжений является определяющей по своей величине по отношению к остальным составляющим напряжённого состояния.

Данные обстоятельства позволяют сделать весьма важное заключение об общем подходе при прогнозировании предела выносливости поверхностно упрочнённых деталей различного размера, а также распространить результаты испытаний на усталость цилиндрических образцов малого диаметра, на крупногабаритные детали с учётом масштабного фактора.

Выводы.

1. По результатам исследования закономерностей распределения компонент остаточных напряжений в области наименьшего сечения кольцевого надреза в цилиндрических деталях после нанесения концентратора на упрочнённую поверхность установлено, что компонента осевых остаточных напряжений имеет наибольшее значение и, следовательно, должна оказывать наибольшее влияние на приращение предела выносливости.

2. Предложенный метод исследования и расчёта перераспределения остаточных напряжений в области концентраторов любой геометрической формы позволяет найти главные напряжения в любой точке сечения упрочнённой цилиндрической детали и, следовательно, определить эквивалентные напряжения для выбранной теории прочности при прогнозировании приращения предела выносливости.

Резюме

Методом конечно-элементного моделирования для поверхностно упрочнённых цилиндрических деталей различного диаметра проведено исследование влияния радиуса и глубины надреза на значения осевых остаточных напряжений в наименьшем сечении.

Литература

1. Сазанов, В.П. Моделирование перераспределения остаточных напряжений в упрочнённых цилиндрических образцах при опережающем поверхностном пластическом деформировании / В.П. Сазанов, А.В. Чирков, В.А. Самойлов, Ю.С. Ларионова // Вестник СГАУ. – Самара: СГАУ, 2011. – №3 (27). Часть 3. – С. 171-174.
2. Павлов, В.Ф. Расчёт остаточных напряжений в деталях с концентраторами напряжений по первоначальным деформациям / В.Ф. Павлов, А.К. Столяров, В.С. Вакулук, В.А. Кирпичёв // – Самара: Издательство СНЦ РАН, 2008. – 124 с.
3. Павлов, В.Ф. Остаточные напряжения и сопротивление усталости упрочнённых деталей с концентраторами напряжений / В.Ф. Павлов, В.А. Кирпичёв, В.Б. Иванов. – Самара: Издательство СНЦ РАН, 2008. – 64 с.
4. П.И.Кудрявцев. Нераспространяющиеся усталостные трещины // М.: Машиностроение, 1982. – 171с.

Summary

By FEM modeling the axial residual stresses distribution regularity of surface treatment cylindrical details of various diameters at infliction of different radius and depth notches is researched. It is shown that with diameter rising of treatment detail stratification depth of residual stresses maximum is moving deep.

Поступила в редакцию 13.10.2012

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ САМООРГАНИЗАЦИИ И НАНОСТРУКТУИРОВАНИЯ В МЕТАЛЛАХ И СПЛАВАХ

¹Мрочек Ж.А., ²Терешко И.В., ²Логвин В.А., ²Редько В.П., ²Сотская Л.И.

¹Белорусский национальный технический университет, Минск

²Белорусско-Российский университет, Могилев

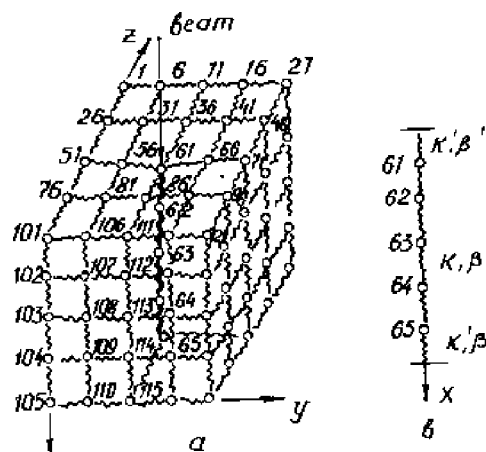
Создание новых упрочняющих технологий поверхностей изделий на основе целенаправленного управления свойствами материалов является важнейшей научной задачей. Наилучшие результаты увеличения долговечности металлов и сплавов получены путем использования ионно-плазменных процессов, в частности, ионно-плазменного осаждения покрытий, ионной имплантацией, а также путем использования мощных высокоэнергетических ионных пучков наносекундной длительности.

Новым направлением в разработке способов упрочнения материалов является создание неравновесных состояний в материалах при обработке их излучением плазмы тлеющего разряда в вакууме [1...5]. Особое значение приобретает знание нелинейных характеристик облучаемых мишеней, в которых можно даже путем слабого воздействия вызвать внутренние процессы усложнения систем с образованием новых метастабильных долгоживущих структур. Способность открытых систем создавать автономные временные и пространственно неоднородные структуры при наличии внешнего потока энергии рассматривается как самоорганизация систем. Следует отметить, что процессы самоорганизации относятся к наиболее ярким явлениям нелинейной физики. Преимущества обработки материалов пучками заряженных частиц перед другими способами очевидны. В плазме тлеющего разряда эти возможности еще дополняются отсутствием необходимости формирования концентрированных ионных пучков, так как мишени подвергаются воздействию «ионного дождя» с широким спектром качества ионов и их энергий. С точки зрения теории самоорганизации – это процесс взаимодействия ионов и общей упорядоченности кристаллических решеток облучаемых мишеней.

В этом случае главной задачей данной работы является исследование основных самоорганизационных процессов в металлах и сплавах, подвергнутых низкоэнергетическому ионному воздействию, с целью разработки новых технологий их упрочнения или пластификации. Эти технологии базируются на знаниях нелинейных параметров, генетически заложенных в потенциальную энергию взаимодействия структурных элементов конкретных кристаллических решеток, и определяющих структуру решеток после воздействия на них низкоэнергетических ионов. Энергия ионов при этом не должна превышать пороговую, требуемую для активного образования точечных дефектов. Основная цель – установить зависимость физико-механических параметров материалов при воздействии плазмы тлеющего разряда от коэффициентов нелинейностей в системе связанных атомных осцилляторов кристаллических решеток различных металлов и сплавов.

В качестве объекта исследований были приняты одномерные нелинейные атомные цепочки, как элементы, выделенные из трехмерных атомных решеток (рис. 1). Внешнее воздействие представлялось в виде единичного ионного удара, а также случайного «ионного дождя», имеющего набор ионов одного сорта, но падающих на элементы цепочек под различными углами и обладающих различной энергией. Интервал величины воздействующих энергий соответствовал классу низкоэнергетических, переданная атомам мишени энергия была меньше пороговой, то есть необходимой для образования точечных дефектов, но достаточной для возбуждения нелинейных колебаний в ионной подсистеме кристаллической решетки.

В качестве потенциала атомного взаимодействия в одномерных кристаллических решетках был принят потенциал Морзе



а – трехмерный вариант,

в – одномерная нелинейная цепочка

Рисунок 1 – Схема взаимодействия ионного пучка с кристаллической решеткой

$$U(r) = J \{ \exp[-2\alpha(r - r_0)] - 2 \exp[-\alpha(r - r_0)] \}, \quad (1)$$

где J , α – соответственно параметры энергии диссоциации пары атомов и степень ангармонизма потенциала, $\Delta r = (r - r_0)$ – смещение атомов из положения равновесия.

Представив потенциал в виде ряда Тейлора, имеем:

$$F = -\frac{dU(r)}{dr} = -K\Delta r + A\Delta r^2 - B\Delta r^3 + C\Delta r^4; \quad (2)$$

$$K = 2\alpha^2 J; A = 3\alpha^3 J; B = 2,3\alpha^4 J; C = 1,25\alpha^5 J, \quad (3)$$

где K , A , B , C – соответственно коэффициенты упругости, квадратичной, кубической нелинейности и нелинейности четвертого порядка.

Коэффициенты вычислялись с использованием параметров потенциала Морзе для α -Fe. Влияние поверхности учитывалось введением приграничных коэффициентов K' , A' , B' , C' , отличных от объемных коэффициентов K , A , B , C . Анализировали потенциалы Борна-Майера, Тода, Джонсона, Линдхарда, применив ту же схему. Показано, что коэффициенты нелинейности варьируются с изменением потенциала. Однако для строго нелинейной среды такой, как, реальные кристаллы, многоямный потенциал является наиболее применимым (рис. 2).



1, 2, 3 – положение «ям» минимумов потенциальной энергии

Рисунок 2. – Зависимость потенциальной энергии взаимодействия атомов от расстояний между центрами атомов.

Для цепочки из N связанных атомных осцилляторов запишем систему уравнений:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -K' x_1 + Ax_1^2 - Bx_1^3 + Cx_1^4 + K(x_2 - x_1) - \\ &- A(x_2 - x_1)^2 + B(x_2 - x_1)^3 - C(x_2 - x_1)^4 - \beta' \frac{dx_1}{dt}; \\ m \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= -K'(x_i - x_{i-1}) + A(x_i - x_{i-1})^2 - B(x_i - x_{i-1})^3 + C(x_i - x_{i-1})^4 + \\ &+ K(x_{i+1} - x_i) - A(x_{i+1} - x_i)^2 + B(x_{i+1} - x_i)^3 - C(x_{i+1} - x_i)^4 - \beta \frac{dx_i}{dt}; \\ m \frac{d^2 x_n}{dt^2} &= -K(x_n - x_{n-1}) + A(x_n - x_{n-1})^2 - B(x_n - x_{n-1})^3 + \\ &+ C(x_n - x_{n-1})^4 - K' x_n + Ax_n^2 - Bx_n^3 + Cx_n^4 - \beta \frac{dx_n}{dt}, \end{aligned} \quad (4)$$

где x_1, x_2, \dots, x_n – смещения атомов из положения равновесия; β' , β – коэффициенты затухания соответственно в приграничной и внутренней областях кристалла.

Система уравнений (4) решалась методом Рунге–Кутты при вариации коэффициентов нелинейности и энергии падающих на кристалл ионов.

Модель для вычисления атомного смещения после прямого ионного удара в решетках различной размерности была развита на базе уравнений классической динамики. Изучалась зависимость смещения каждого атома от времени, прошедшего после прекращения внешнего воздействия.

На основе результатов вычислений строились графики для наблюдений процесса релаксации каждого атома после начального воздействия и для наблюдения соответствующей локализации ато-

мов всей решетки, вытянутой в цепочку, для заданного времени. Для одномерной модели x – это продольное смещение атомов в атомной цепочке, но на графиках это представлено для наглядности как поперечное смещение (для наглядности).

В качестве объекта исследования были выбраны материалы: α -Fe, быстрорежущая сталь Р6М5, электролитический никель, шарикоподшипниковые стали типа ШХ-15 и металлокерамические твердые сплавы Т15К6. Твердые сплавы имеют резко гетерогенную структуру и обладают сложным характером химических связей с преимущественно ковалентной и ионной составляющей. Вольфрам растворяется в карбидах титана, формируя сложные карбиды (Ti, W)C во время спекания. Исходная твердость и хрупкость металлокерамического соединения зависит от процентного содержания в сплаве этих сложных карбидов.

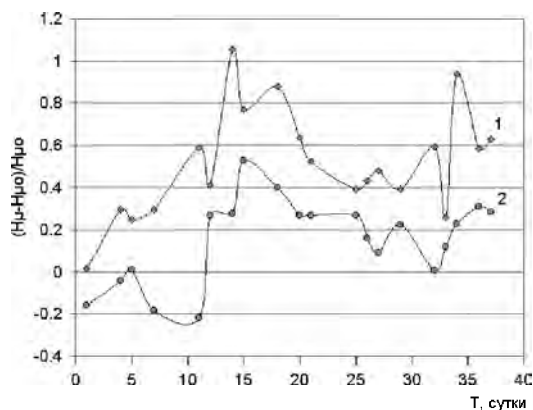
Образцы подвергались обработке излучением плазмы тлеющего разряда с варьированием времени обработки. При этом образцы облучались ионами воздуха (азота, кислорода, водорода и др.) с энергией в пределах 1...2,5 кэВ. Средняя интегральная температура образцов во время облучения не превышала 343 К. Образцы, при облучении, помещались на катоде. Определялась зависимость микротвердости сплавов от времени, прошедшего после прекращения облучения (измерения проводились по суткам в течение двух месяцев).

Тонкая структура всех материалов была изучена послойно, используя электронно-микроскопический метод. Для этого облученные образцы разрезались на тонкие пластины (0,2 мм) на электроискровой машине на разных расстояниях от поверхности облучения. Тонкие фольги исследуемых образцов были подготовлены электролитическим методом, используя стандартную технику, что также исключало создание каких либо термических или механических напряжений во время процесса подготовки образцов к исследованию. Дислокационная структура материалов до и после облучения на разных глубинах от облученной поверхности исследовалась с помощью трансмиссионных электронных микроскопов EM-125 и TESLA-540.

На рис. 3 представлена зависимость микротвердости образцов из быстрорежущей стали Р6М5 от времени, прошедшего после прекращения облучения. На оси ординат представлено относительное изменение микротвердости. Облучение проводилось при напряжении $U = 2,5$ кВ, время обработки составляло 90 минут. Зависимость 1 – соответствует измерениям на облученной поверхности, зависимость 2 – представляет результаты измерений на обратной стороне образцов, не подвергаемой непосредственно воздействию низкоэнергетическими ионами. Высота образцов была 10 мм и обратная сторона образцов плотно прилегала к поверхности катода. При этом можно отметить следующие особенности:

- в течение длительного времени после прекращения облучения наблюдаются сильные осцилляции значений микротвердости. Эти осцилляции ярко выражены как на облученной, так и обратной стороне образцов;

- величина микротвердости на обратной стороне образцов мало отличаются от облученной поверхности (временами значительно превосходят их), что подтверждает наличие эффекта дальнего действия. При этом под “эффектом дальнего действия” понимается значительное превышение глубины структурированного слоя в облученных материалах над величиной проективного пробега ионов в мишенях;



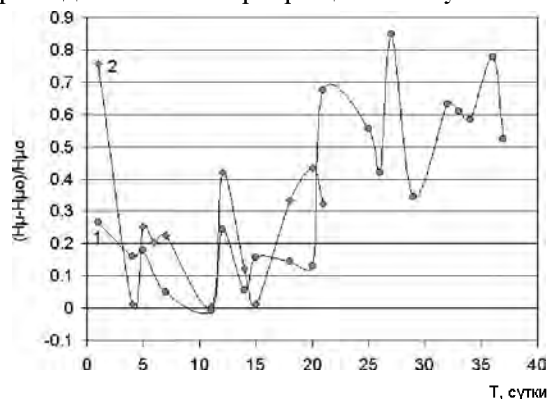
1 – облученная поверхность образца; 2 – обратная сторона образца

$H_{ц}$ – микротвердость образцов после облучения, $H_{ц0}$ – исходная микротвердость необлученных образцов

Рисунок 3 – Зависимость относительного изменения микротвердости образцов из быстрорежущей стали Р6М5 от времени, прошедшего после прекращения облучения

- имеется ярко выраженная тенденция к возрастанию микротвердости образцов с увеличением времени, прошедшего после их облучения в плазме тлеющего разряда. Приблизительно через месяц наблюдается возрастание микротвердости на 80-90% относительно исходного уровня необлученных образцов. Этот факт свидетельствует о долгоживущем, сильно неравновесном состоянии образцов после низкоэнергетического ионного облучения.

Наибольшая величина упрочнения получена при облучении металлокерамических твердых сплавов T15K6. На рис. 4 представлена зависимость относительного изменения микротвердости сплавов T15K6 от времени, прошедшего после прекращения облучения.



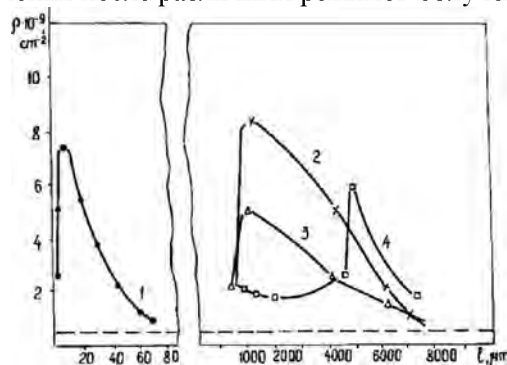
1 – облученная поверхность образца; 2 – обратная сторона образца

Рисунок 4. – Зависимость относительного изменения микротвердости сплава T15K6 от времени, прошедшего после прекращения облучения

Облучение проводилось в течение 15 минут при напряжении $U = 1$ кВ (зависимость – 1) и напряжении $U = 2,5$ кВ (зависимость – 2). Наибольшее упрочнение поверхности получено при $U = 1$ кВ, то есть понижение энергии ионов, усиливает эффект дальнего действия.

Наиболее значимый результат электронно-микроскопического исследования состоит в том, что низкоэнергетическое облучение металлических образцов приводит к повышению плотности дислокаций. Фактически, это почти объемная модификация. Подобный эффект, но в значительно меньших масштабах (глубина структурированного слоя не превышала 100 мкм), наблюдался при имплантации ионов Hf и Ag в α -Fe [6, 7]. Энергия ионов при этом соответствовала 40...70 кэВ, что уже приводит к ионной имплантации. Достаточно большая глубина структурированного слоя в этой работе связывается с напряжениями, полученными при ионной имплантации внедренных ионов. Сверхглубокое проникновение азота и существенное изменение микроструктуры инструментальных сталей на больших глубинах при сравнительно небольших энергиях ионов в процессе плазменно-иммерсионной ионной имплантации наблюдалось в работе [8]. Исследование закономерностей распределения дефектов за пределами зоны торможения ионов при ионном легировании кремния и антимолида индия, а также при ионно-лучевой обработке полупроводникового твердого раствора $Cd_xHg_{1-x}Te$ наблюдалось в [9].

На рис. 5 представлены величины измерений средней скалярной плотности дислокаций с расстоянием от поверхности облучения после различных режимов облучения.



1 – α -Fe, имплантированное ионами гафния с энергией 100кэВ; 2 – α -Fe, энергия ионов 0,8кэВ, время облучения 90мин; 3 – α -Fe, энергия ионов 2кэВ, время облучения 90мин; 4 – α -Fe, энергия ионов 0,8кэВ, время облучения 60мин. Штрихованная линия соответствует начальному состоянию.

Рисунок 5. – Зависимость скалярной плотности дислокаций от расстояния до облученной поверхности.

Зависимости 2 и 4 получены при напряжении в $U = 0,8$ кВ, зависимость 3 – при напряжении 2 кВ. Зависимость 1 представлена для сравнения «дальнодействующего эффекта», наблюдаемого Ю. Шаркеевым для α -Fe, облученного ионами Hf с энергией 100 кэВ. Видно, что «эффект дальнодействия» становится более значительным и наблюдается при существенно больших расстояниях от облученной поверхности, если энергия ионов понижается почти на два порядка. Такой ярко выраженный эффект повышения плотности дислокаций наблюдается только в хорошо отожженных образцах с небольшой исходной плотностью дислокаций в α -Fe и Ni₃Fe. В материалах с исходно повышенной плотностью дислокаций (не отожженная медь и быстрорежущая сталь Р6М5) наиболее значимыми будут происходящие перестройки имеющейся дислокационной структуры, заключающиеся в интенсивном образовании дислокационных фрагментов или измельчении фрагментов с соответствующим увеличением их разориентировок. Причем эти перестройки наблюдаются также на большой глубине от поверхности облучения.

Установлено, что уменьшение энергии облучающих ионов в интервале от 2,5 кэВ до 1 кэВ ведет к увеличению глубины структурированного слоя [10]. Во время облучения образцы не испытывали ни термического, ни механического воздействия, однако, даже на большой глубине от облученной поверхности формировались дислокационные структуры (дислокационные ячейки, сети ячеек, полосовые дислокационные структуры), которые соответствовали глубоко деформированному состоянию материала. При этом макроскопические размеры облученных материалов оставались неизменными.

Используя метод электронной микроскопии установлено, что после низкоэнергетического ионного облучения в приповерхностных слоях 0...1 мкм облученного α -Fe, формируется сложная многослойная нанометрическая структура типа “сэндвич” (рис. 6). Наноразмерностью обладают при этом как формирующиеся в процессе облучения сверхтонкие слои, так и локализованные нанокристаллы железа.

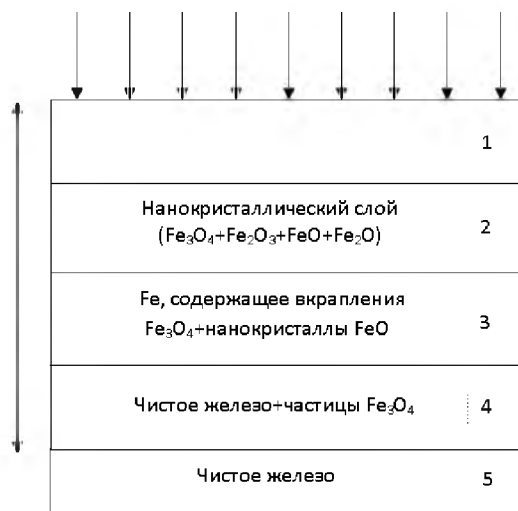
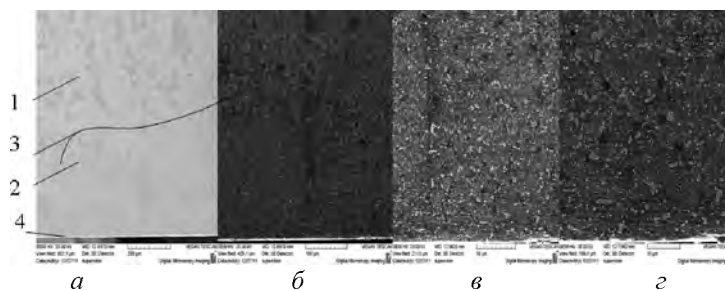


Рисунок 6. – Схема структуры типа “сэндвич” в приповерхностных слоях α -Fe после низкоэнергетического ионного облучения в плазме тлеющего разряда

Первый слой (толщиной 0,15 мкм) имеет двухфазную аморфную структуру, т.е. представляет собой смесь аморфного железа и оксида Fe₃O₄ (заметим, что чистое железо вообще аморфизуется с большим трудом). Следующий слой (слой 2, толщиной 0,20 мкм) имеет нанокристаллическую структуру, т.е. содержит нанокристаллы железа с размером 0,1...0,15 мкм. В этом слое присутствуют оксиды Fe₂O₃, FeO, Fe₃O₄. Слой 3 (толщина 0,15 мкм) состоит из кристаллов железа с малой плотностью дислокаций (соответствует плотности дислокаций хорошо отожженного материала, приблизительно равной 10⁸ см⁻²). Внутри слоя 3 – оксиды железа и нанокристаллическая фаза FeO. Слой 4 (толщина 0,5 мкм) включает микрокристаллы чистого железа с дислокационной плотностью 3,2 × 10⁹ см⁻². В этом слое присутствуют круглые частицы Fe₃O₄, диаметр которых 0,12...0,15 мкм. Слой 5 распространяется в объем основного материала, представленного чистым железом. Более глубокие слои материала – это чистое α -Fe с соответствующей дефектной структурой. Следует заметить, что исследование дефектной структуры поверхностного слоя после низкоэнергетического ионного воздействия следует рассмотреть более детально, так как аморфизация в слое и образование наноструктур требует более пристального внимания. Для анализа результатов воздействия излучения плазмы тлеющего

разряда на образцы из быстрорежущей стали P12 проводилась сканирующая микроскопия. Результаты сканирования изменения структуры по глубине с различным увеличением образца из быстрорежущей стали P12 после обработки излучением плазмы тлеющего разряда представлены на рис. 7.



1 – основной материал образца; 2 – поверхностный слой с измененной структурой; 3 – условная граница раздела основного материала и поверхностного слоя с измененной структурой; 4 – облучаемая поверхность
а – 250 кратное увеличение; б – 500 кратное увеличение; в – 1000 кратное увеличение;
г – 2500 кратное увеличение

Рисунок 7. – Изменение структуры по глубине образца из быстрорежущей стали P12 после обработки

Неравномерное изменение структуры облучаемого образца по глубине рис.7, а наглядно демонстрирует адекватность принятой схемы взаимодействия ионного пучка с кристаллической решеткой рис.1 и гипотезы, базирующаяся на возбуждении нелинейных колебаний в кристаллических решетках.

Полученные результаты исследований не могут быть объяснены, исходя из традиционных представлений физики радиационных дефектов в твердых телах. Поэтому с помощью программы TRIM рассчитали пробег ионов кислорода, азота и водорода, а также энергетические потери ионов при электронном и ядерном торможении как в однокомпонентном материале α -Fe, так и в многокомпонентных образцах двухкарбидного твердого сплава T15K6. Показано, что ионная имплантация таких низкоэнергетических ионов не может привести к столь далекому изменению структуры материалов. Следовательно, потребовались новые представления о процессах, развиваемых в кристаллических решетках после воздействия на них низкоэнергетическими ионами.

Такие представления [11] основывались на учете нелинейных эффектов нарушения трансляционной симметрии кристаллических решеток во время бомбардировки поверхности твердых тел заряженными частицами. Предложена гипотеза, базирующаяся на возбуждении нелинейных колебаний в кристаллических решетках, которые приводят к развитию процессов самоорганизации в ионной подсистеме кристаллических структур. Проведено компьютерное моделирование процесса самоорганизации в трехмерных кристаллических решетках после внешнего низкоэнергетического воздействия, представленного в виде беспорядочного “ионного дождя”. Атомы на поверхности мишени получают случайные по величине и направлению импульсы от бомбардирующих поверхность ионов. Энергия, переданная атомам мишени, меньше пороговой, необходимой для образования точечных дефектов, но вполне достаточна для возбуждения нелинейных колебаний в ионной подсистеме решетки. На рис. 8 представлена схема локального возбуждения участка кристаллической решетки как результат взаимодействия между падающим ионным “дождем” и поверхностью образцов (атомы на поверхности кристалла получают случайный импульс на поверхности и смещаются вдоль осей X, Y, Z).

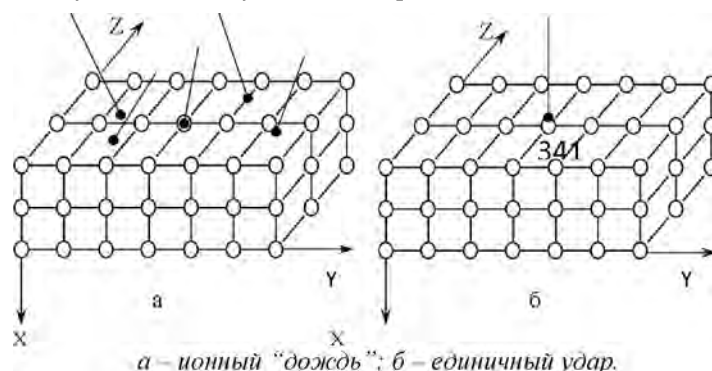


Рисунок 8. – Предполагаемая схема облучения кристаллической решетки материала

Можно предположить, что в системе связанных осцилляторов возбуждаются нелинейные колебания. Время стабилизации на два-три порядка выше, чем время обычных атомных релаксаций. В результате формируются новые метастабильные долгоживущие структурные состояния кристаллической решетки. Показано, что к моменту времени, когда нелинейные колебания прекращаются, атомы стабилизируются в новых позициях. Конечное состояние атомной решетки, облученной низкоэнергетическими ионами, это высоко фрагментированная структура. Имеется целый спектр новых стабильных коллективных состояний атомов в решетках после затухания нелинейных колебаний. Однако конкретный вид этих новых гетерогенных структур зависит от потенциала, характеризующего связи между атомными осцилляторами и величиной внешнего возбуждения. В частности, для потенциала Морзе с параметрами нелинейности, рассчитанными для α -Fe, можно предположить, что после внешнего низкоэнергетического воздействия в нелинейных решетках образуются блуждающие солитоны. В реальном кристалле аналогом солитонов являются дислокации. Возрастание плотности дислокаций вплоть до очень больших (в масштабе возможных пробегов ионов в металлах) расстояний от облученной поверхности вполне может быть связано с образованием солитонов, пробеги которых вдоль атомных цепочек в кристаллических решетках во много раз больше, чем пробеги внедренных имплантированных ионов.

Результаты аналитического эксперимента показывают, что конечное состояние атомной решетки, облученной низкоэнергетическими ионами, есть высоко фрагментированная структура, и это хорошо согласуется с результатами электронно-микроскопического исследования дислокационной структуры облученных образцов.

На рис. 9 представлена зависимость смещения случайно выбранного атома (№341 рис. 8) вдоль оси X от времени, прошедшего после прекращения внешнего воздействия. Предполагается, что атом решетки, получив исходно малое смещение от внешнего низкоэнергетического воздействия, в результате коллективных нелинейных колебаний всех атомных осцилляторов кристаллической решетки, получает конечное очень большое смещение от исходного положения равновесия в момент времени, значительно превышающий время стандартных атомных релаксаций. Время, прошедшее после прекращения облучения кристалла на три порядка превышает время нормальных атомных релаксаций, а решетка практически не стабилизирована. Анализ расчетов позволяет сделать вывод, что рассматриваемый атом уже никогда не возвращается в исходное положение и представляет собой элемент новых структур (с наноразмерностью) в исходном кристалле.

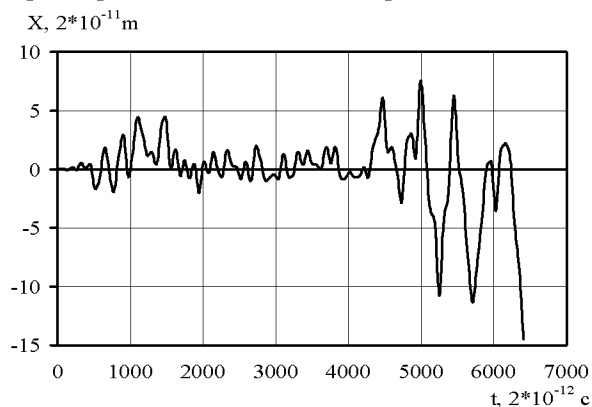


Рисунок 9. – Зависимость смещения атома (№341) вдоль оси X от времени, прошедшего после прекращения облучения

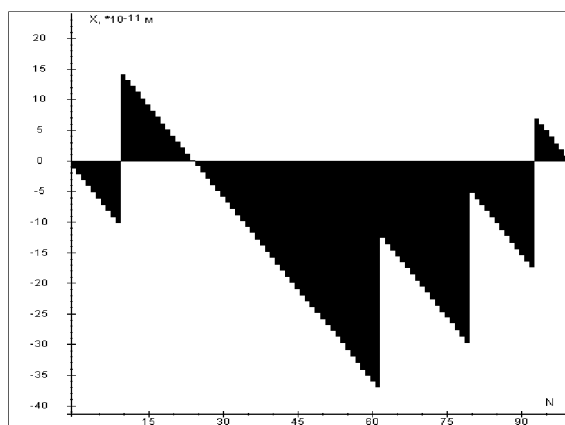
Периоды колебаний рис. 9 очень велики по сравнению с нормальными (Дебаевскими). При изменении временного масштаба (т.е. уменьшении шага по времени на несколько порядков) будут видны и "обычные" колебания. Следует заметить, что "быстрые" колебания происходят уже по отношению к позициям, смещенным относительно исходных.

Доказано, что для случая "дождя" требуется более низкая энергия для развития процессов самоорганизации, чем в случае удара единичного иона. Это достигается быстрым переходом: хаос налетающих ионов → локальный хаос в бывшей упорядоченной структуре → образование новых метастабильных долгоживущих структур в бывшей упорядоченной структуре мишени.

Очень важно, что процесс нелинейных колебаний захватывает весь объем облученных кристаллов. Фактически мы наблюдаем объемную наноструктуризацию материалов после низкоэнергетического ионного облучения.

На рис. 10 представлен результат численного эксперимента по исследованию процесса релаксации в одномерной нелинейной атомной цепочке, в случае, когда ее первый атом получает первоначальный небольшой импульс от внешнего ионного воздействия. В цепочке возбуждаются нелинейные колебания вдоль оси X , в результате которых все атомы стабилизируются в новых положениях, которые можно интерпретировать как образование новых долгоживущих метастабильных групп нанокластеров. Время стабилизации значительное и зависит от жесткости межатомных связей в решетках (на них базируются коэффициенты нелинейности) и величины энергии ионов внешнего облучения. Период решетки внутри кластеров не соответствует периоду в первоначальной цепочке, некоторые кластеры разделены областями с отрицательной плотностью атомов (например, атомы 10 и 11, 93 и 94). Но именно они приносят решеткам (облучаемым материалам) новый комплекс физических и механических свойств.

Для полной интерпретации экспериментальных данных желательно учитывать, что исходный потенциал решетки является постоянно «деформируемым», т.е. новые долгоживущие структуры уже не соответствуют «старому» потенциалу, потому и появляются новые «периоды решеток» внутри кластеров.



Ось Y – смещение атомов, ось X – номер атома в нелинейной цепочке

Рисунок 10. – Смещения первых 100 атомов возбужденной нелинейной атомной цепочки вдоль оси X в момент времени стабилизации.

Результаты расчетов зависят от размерности выбранных объектов и размеров модельного объекта. В частности, это касается величины энергии и дозы внешнего воздействия, необходимого для возбуждения в облучаемых системах нелинейных колебаний. Однако после возбуждения таких колебаний в системе и развития коллективных процессов самоорганизации в нелинейных системах, типы новых структур, образующихся после стабилизации решеток, уже мало зависят от размерности, размера объектов и даже вида потенциала. Эта зависимость будет приблизительно такая: в одномерной решетке образуется одномерный кластер, в трехмерной решетке – трехмерный кластер. Типы образующихся после низкоэнергетического облучения структур можно вполне представить на одномерной модели нелинейных цепочек, выделенных из кристаллической трехмерной решетки.

На рис. 11 представлена фазовая диаграмма случайно выбранного из данной нелинейной цепочки атома №2. Его начальное положение соответствует нулевой координате и нулевой начальной скорости на фазовой плоскости.

Анализ показывает, что аттрактор представляет собой сильно смещенное от первоначального положения состояние. Это состояние достигается путем многочисленных нелинейных колебаний и иллюстрирует перенос энергии в нелинейных системах от колеблющейся моды к поступательной.

Таким образом, конечное положение всех атомов решетки, облученной низкоэнергетическими ионами, после длительного процесса релаксации, является сильно смещенным из

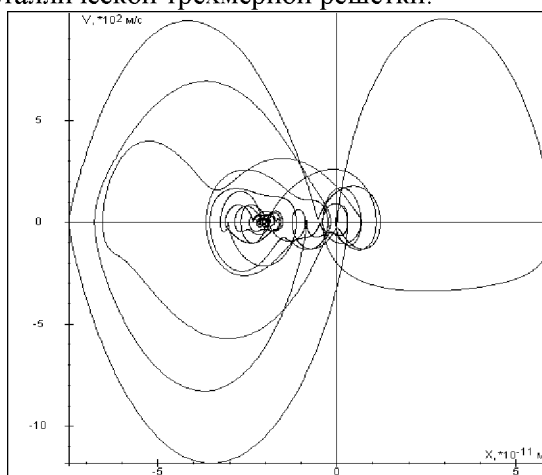


Рисунок 11. – Фазовая диаграмма для атома №2 из атомной цепочки после прекращения облучения

положения равновесия. При этом в облученных материалах происходит формирование широкого спектра новых долгоживущих метастабильностей, в частности, наноструктурных комплексов различной размерности. При низкоэнергетическом ионном облучении в плазме тлеющего разряда в образцах α -Fe возможно формирование наноструктур в виде четырехслойного приповерхностного участка (и кластеров с наноразмерностью даже на достаточно большой глубине от облученной поверхности). Формирование таких слоев и структур можно объяснить возбуждением нелинейных колебаний в ионной подсистеме облучаемых решеток и их синергетическим действием. В результате образуются высокофрагментированные структуры с наноразмерностью. Величина фрагментированных участков должна увеличиваться с расстоянием от облученной поверхности. Тогда логичными становятся переходы «аморфный слой \rightarrow нанокристаллический слой \rightarrow мелкокристаллический слой». Основные методы обработки и исследований образцов после воздействия плазмы тлеющего разряда запатентованы [12...15].

Выводы.

1 Установлено, что обработка плазмой тлеющего разряда (низкоэнергетическими ионами) приводит к изменению дислокационной плотности и типа дислокационных структур в металлах на большой глубине от облученной поверхности. Этот результат определен как эффект «дальнодействия».

2 Доказано, что низкоэнергетическое ионное воздействие на поверхность в плазме тлеющего разряда приводит к нелинейным колебаниям атомных осцилляторов, в результате формируются новые метастабильные долгоживущие структуры решеток, которые приводят к изменению физико-механических свойств облученных материалов.

3. Следует отметить, что наиболее перспективным как в научном, так и в прикладном плане являются технологии создания в кристаллических материалах многоуровневой дефектной структуры, в частности, формирование наноразмерных комплексов и кластеров в процессе воздействия потоков различных энергий на поверхность металлов и сплавов.

4 Установлено, что низкоэнергетическое ионное облучение в плазме тлеющего разряда поверхностей металлов и сплавов может быть использовано для создания технологий целенаправленного управления поведением материалов и созданием элементов элементов новых инженерных конструкций.

Литература

1. Tereshko, I.V. Self Organizing processes in metals by Low-energy ion beams / I.V. Tereshko, V.I. Khodyrev, E.A. Lipsky // Nucl. Instr. And Meth. In Physics Research NIMB. 1993. В 80/81. P. 115-117.
2. Tereshko, I.V. The formation of nanoclusters in metals by the low-energy ion irradiation. Surface and Coatings Technology / I.V. Tereshko, V.V. Abidzina, I.E. Elkin, A.M. Tereshko, V.V. Glushchenko, Semfira Stoye // V.201 (2007), 19-20, P. 8552-8556.
3. Tereshko, I.V. Nanostructural evolution of steel and titanium alloys exposed to glow discharge. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms / I. Tereshko, V. Abidzina, A. Tereshko I. Elkin. // V. 261 (2007), 1-2, P. 678-681.
4. Abidzina, V. Cell adhesion study of the titanium alloys exposed to glow discharge. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms / V. Abidzina, I. Deliloglu-Gurhan, F. Ozdal-Kurt, B.H. Sen, I. Tereshko, I Elkin, S. Budak, C. Muntele, D. Ila // V. 261 (2007) P. 624-626.
5. Abidzina, V. Fabrication of Nanoscale gold Clustrs by Low-Energy Ion Irradiation. Mat. Res. Soc. Symp. Proc. / V. Abidzina, I. Tereshko, I. Elkin, V.Red'ko, S Budak, C Muntele, D.Walker, D. Ila // 1020. P. 183-188.
6. Диденко, А.Н. Эффекты дальнодействия в ионно-имплантированных металлических материалах / А.Н. Диденко, Ю.П. Шаркеев, Э.В. Козлов, А.И. Рябчиков / РАНБ г. Томск, 2004 г., 326 с.
7. Морозов, Н.П. Глубокое проникновение радиационных дефектов из ионно-имплантированного слоя в объем полупроводников. / Н.П. Морозов, Д.И. Тетельбаум // Физика и техника полупроводников.-1983.- Т.17, вып. 3/ 31, С. 95-102.
8. Гольцев, В.П. Радиационное нарушение структуры переходных металлов при ионном облучении / В.П. Гольцев, В.М. Анищик, В.В. Углов // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Физика радиационных повреждений и радиационное материаловедение.-1983-Вып.1 (24), С. 52-53.

9. Квасов, Н.Т. Термоупругие эффекты в полупроводниках при ионно-лучевом травлении и проблема дальнего действия. / Н.Т. Квасов, К.Ю. Ярашунас, С.Ф. Спизжук, С.Ю. Шилина // Физика и Химия обработки материалов-1990-№5, С. 9-13.
10. Терешко, И.В. Эффект дальнего действия в материалах при низкоэнергетическом ионном облучении / И.В. Терешко, В.И. Ходырев и [др.] // Вестник Нижегородского университета. Серия Физика Твердого Тела. 1998, Выпуск 2. С. 131-139.
11. Терешко, И.В. Модификация материалов после низкоэнергетического ионного облучения в плазме тлеющего разряда / И.В. Терешко, А.А. Руссиян, О.В. Обидина, И.Е. Елькин, В.В. Глушенко, А.М. Терешко // БЫСТРОЗАКАЛЕННЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ПОКРЫТИЯ, Сборник трудов 4-й Всероссийской с международным участием научно-технической конференции, Москва, 2005, С. 210-215.
12. Режущее-формаобразующий инструмент, Патент РФ № 7535. заявка u20110009 от 10.01.2010г. зарегистрировано в Гос.реестре изобр. 30.08.2011 МПК В26D 1/00. Авторы Логвин В.А., Мрочек Ж.А., Логвина Е.В., Никитин В.М., Никитин С.В. Патент. обладатель ГУВПО «Белорусско-Российский университет».
13. Режущая часть инструмента. Патент РФ № 7492. заявка u20101056 от 21.12.2010г. зарегистрировано в Гос.реестре изобр. 30.08.2011 МПК В26D 1/00. Авторы Логвин В.А., Жолобов А.А., Логвина Е.В., Патент. обладатель ГУВПО «Белорусско-Российский университет».
14. Вакуумная установка. Патент РФ № 7491. заявка u20101055 от 21.12.2010г. зарегистрировано в Гос.реестре изобр. 30.08.2011 МПК В26D 1/00. Авторы Логвин В.А., Жолобов А.А., Логвина Е.В., Патент. обладатель ГУВПО «Белорусско-Российский университет».
15. Микроскоп инструментальный. Патент РФ № 7215. заявка u2010066 от 26.07.2010г. зарегистрировано в Гос.реестре изобр. 30.04.2011 МПК G 02B 21/00. Авторы Логвин В.А., Жолобов А.А., Волченков А.В., Логвина Е.В., Патент. обладатель ГУВПО «Белорусско-Российский университет».

Summery

The goal of this paper is to study self-organization processes that cause nanostructural evolution in nonlinear crystal media. The computer simulation was used to investigate the interaction between low-energy ions and crystal lattices. Energy transmitted to target atoms is less than the threshold needed to form point defects but sufficient for nonlinear oscillation excitation in ion subsystem of a lattice. We showed that nonlinear oscillations become excited in the chains after low-energy ion impact and as a result of them the whole atoms become stabilized in new positions, which results in the formation and development of new metastable atomic groups (nanoclusters). It is clusters that provide new complexes of physical and mechanical properties for lattices (irradiated materials). Low-energy ion irradiation may be used to develop new hardening technologies of metals and alloys on the basis of the formation of nanoelements in them.

Поступила в редакцию 25.01.2012

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАГРУЗОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛЕПЕСТКОВЫХ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ОПОР

¹Левина Г.А., Дрокин В.В., Хлызов И.Е.

¹ФГБУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет»
(национальный исследовательский университет), Челябинск

Введение. Одной из проблем создания высокоскоростных турбомашин (турбохолодильников, турбокомпрессоров, турбогенераторов и др.), роторы которых вращаются со скоростями 20...100 тысяч оборотов в минуту, является обеспечение надежной работы их опор. Основные трудности связаны с динамическими нагрузками, а также со сложными температурными условиями в роторном узле машины. Отмеченные обстоятельства имеют место, например, при эксплуатации турбомашин в составе транспортных систем кондиционирования или энергетики. В указанных условиях газодинамические опоры с твердыми поверхностями могут оказаться неработоспособными.

В лепестковых газодинамических опорах (ЛГО) газовый смазочный слой заключен между твердой поверхностью вращающегося вала и тонкими упругими металлическими оболочками-лепестками, перекрывающими или не перекрывающими друг друга. Лепестки радиальных подшипников закреплены по одному краю на втулке, жестко связанной с корпусом машины (рисунок 1), лепестки подпятников закреплены на плате (рисунок 2). На рабочие поверхности лепестков наносится износостойкое антифрикционное покрытие.

Несущая способность лепестковой опоры в стационарных условиях работы зависит от скорости вращения вала, параметров состояния окружающей газовой среды, геометрических параметров. Оценить достижимую несущую способность опоры можно по ее нагрузочным характеристикам (НХ) – зависимостям результирующей реакции (поддерживающей силы) и минимального зазора (минимальной толщины смазочного слоя) от смещения вала.

Современные вычислительные методы и компьютерные технологии позволяют эффективно выполнить математическое моделирование опор и их нагрузочных характеристик.

Весьма важен вопрос выбора программного обеспечения. Обзор специализированных программ для расчета подшипников жидкостного и газового трения показал, что возможность расчета ЛГО в большинстве программных продуктов отсутствует. Особенности определения реакций ЛГО – связанность задачи о давлении газового слоя и задачи о деформациях упругих элементов, а также заранее неопределимые области контактов упругих элементов – ограничивают возможности применения известных инженерных пакетов. Кроме того, программное обеспечение с закрытым кодом не предоставляет пользователю возможность добавления новых алгоритмов расчета и математических моделей.

С учетом приведенных обстоятельств задача математического моделирования ЛГО с использованием современных программных сред и технологий сохраняет актуальность.

Представленное исследование является продолжением и развитием предшествующих работ [1–3], в которых упругогидродинамическая (УГД) задача «прогиб → давление → прогиб...» решается на основе применения вариационного принципа Лагранжа для определения упругих перемещений лепестков и краевой задачи о распределении давления, описанной уравнением Рейнольдса теории газовой смазки. По результатам итерационного вычислительного процесса УГД задачи определяются величины главного вектора сил давления газового слоя и момента сил вязкого трения.

1. Постановка и решение задачи гидроупругости. Рассматриваются плоские модели подшипника (рисунок 1) и подпятника (рисунок 2) с перекрытием лепестков. Построение математических моделей опирается на следующие предпосылки и допущения: лепесток рассматривается как тонкая упругая цилиндрическая оболочка, для которой справедливы гипотезы Кирхгофа–Лява; средняя линия лепестка принимается нерастяжимой, упругие перемещения лепестка считаются малыми – задача о прогибах рассматривается как геометрически линейная. Поверхности лепестков и цапфы принимаются гладкими, без трения. Для газового смазочного слоя опоры принимаются известные допущения теории газовой смазки [4].

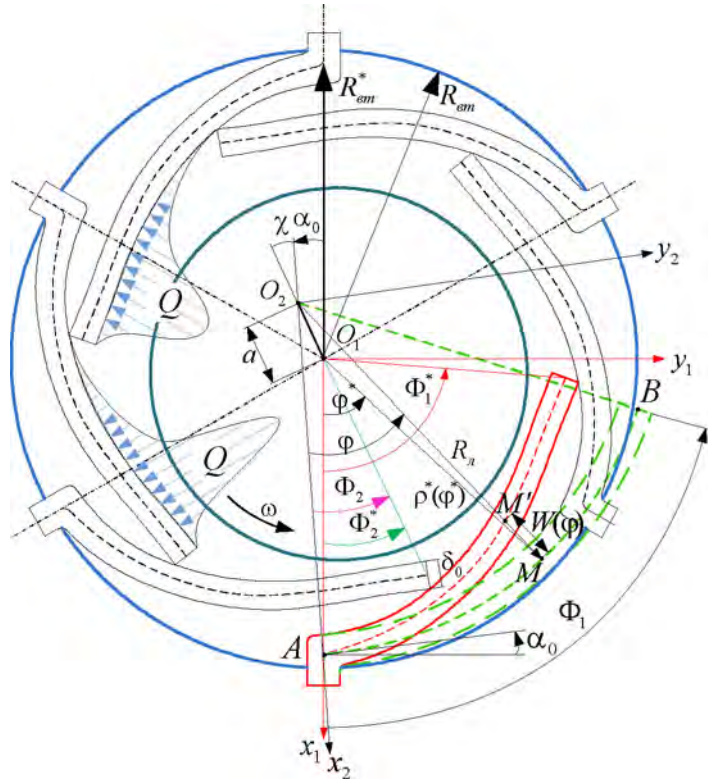


Рисунок 1 – К описанию математической модели лепесткового подшипника

При численном решении УГД задачи на плоской модели подпятника достаточно рассмотрения трех контактирующих лепестков и одного смазочного сектора опоры; при решении УГД задачи для радиального лепесткового подшипника требуется рассмотрение всех лепестков упругого пакета, поскольку каждый из них находится в своих условиях ограничений. Поэтому численное решение УГД задачи для подшипника на плоской модели требует большего объема вычислений.

Потенциальная энергия Π упругого пакета *лепесткового подшипника* рассматривается как функционал от распределения прогибов лепестков $W_i(\varphi_i^*)$, $i = \overline{1, N}$, где i – номер лепестка, N – число лепестков,

$$\Pi_i = L \left[\frac{D}{2} \int_0^{\Phi_1^*} \frac{1}{R_n^3} (W_i'' + W_i)^2 d\varphi_i^* - R_n \int_{\Phi_2^*}^{\Phi_1^*} Q_i W_i d\varphi_i^* \right] \quad (1)$$

Прогиб отсчитывается от средней линии недеформированного лепестка и определяется по направлению полярного радиуса, проведенного из центра O_1 .

Вариационная задача формулируется:

$$\Pi = \sum_{i=1}^N \Pi_i(W_i) \rightarrow \inf \Pi, \quad W_i(\varphi_i^*) \in C^2, \quad \varphi_i^* \in [0; \Phi_1^*] \quad (2)$$

при ограничениях

$$W_i^-(\varphi_i^*) \leq W_i(\varphi_i^*) \leq W_i^+(\varphi_i^*), \quad (3)$$

$$W_i^+(\varphi_i^*) = \begin{cases} R_{\text{вн}} - \delta_0 / 2 - r(\varphi_i^*); & \varphi_i^* \in [0; 2\pi / N]; \\ R_{\text{вн}} - 3\delta_0 / 2 - \delta_n - r(\varphi_i^*); & \varphi_i^* \in [2\pi / N; \Phi_1^*]; \end{cases}$$

$$W_i^-(\varphi_i^*) = \begin{cases} R_y + H_{\text{min}} + 3\delta_0 / 2 + 2\delta_n - r(\varphi_i^*); & \varphi_i^* \in [0; \Phi_2^*]; \\ R_y + H_{\text{min}} + \delta_0 / 2 + \delta_n - r(\varphi_i^*); & \varphi_i^* \in [\Phi_2^*; \Phi_1^*]; \end{cases}$$

и краевых условиях

$$W_i(0) = 0; W_i'(0) = 0; W_i''(\Phi_1^*) = 0. \quad (4)$$

Здесь L – длина подшипника в осевом направлении; $D = E\delta_0^3 / [12(1 - \nu^2)]$ – коэффициент цилиндрической жесткости лепестка, E – модуль упругости 1-го рода материала лепестка; δ_0 – толщина лепестка без покрытия; ν – коэффициент Пуассона; R_n – радиус средней линии недеформированного лепестка; $Q_i = P_i - P_a$ – избыточное давление в смазочном слое, ограниченном лепестком с номером i , P_i – давление в i -ом смазочном слое, P_a – давление окружающей среды; R_q – радиус цапфы вала; $R_{вт}$ – радиус втулки подшипника; δ_n – толщина покрытия лепестка; φ_i^* – полярный угол точки средней линии i -го лепестка в системе координат, связанной с втулкой; пределы интегрирования соответствуют расчетной схеме, представленной на рисунке 1. При описании ограничений учитывается толщина покрытия δ_n и величина минимального допустимого зазора H_{\min} .

Численное решение вариационной задачи (1)–(3) выполняется путем дискретизации и сведения к задаче нелинейного программирования. Дискретизация с помощью построения равномерной сетки на средней линии лепестка. Минимизация дискретного аналога функционала потенциальной энергии $I(W_{ij})$ осуществляется методом проекций градиента.

Признаки достижения приближенного решения вариационной задачи на сеточной модели:

$$|I_1 - I_2| < \varepsilon_1; \quad (5)$$

$$\begin{cases} |\partial I / \partial W_{ij}| \leq \varepsilon_2 & \text{– в точках без контакта;} \\ |\partial I / \partial W_{ij} + \partial I / \partial W_{i,j'}| \leq \varepsilon_2 & \text{– при упругом контакте двух лепестков;} \\ \partial I / \partial W_{ij} > \varepsilon_2 & \text{– при контакте лепестка с валом в задаче упругости.} \end{cases} \quad (6)$$

Здесь I_1, I_2 – значения функционала потенциальной энергии на соседних итерациях; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – малые параметры.

Условия (6) следуют из принципа виртуальных перемещений для системы с неупругими связями и соответствуют условиям Куна–Таккера задачи нелинейного программирования.

Уравнение для распределения давления в газовом смазочном слое при изотермическом течении рассматривается на каждом секторе, ограниченном лепестком, в виде

$$\frac{d}{d\varphi_i} \left(h_i^3 p_i \frac{dp_i}{d\varphi_i} - \Lambda p_i h_i \right) = 0, \quad (7)$$

с краевыми условиями для границ, открытых в окружающую среду

$$p_i(\Phi_1) = p_i(\Phi_2) = 1, \quad (8)$$

где $h_i = h_i(\varphi_i) = H_i(\varphi_i) / H^*$ – функция зазора; $p_i = p_i(\varphi_i) = P_i(\varphi_i) / P_a$ – безразмерное давление; H_i – зазор между цапфой и лепестком; H^* – характерный зазор; $\Lambda = 6\mu\omega R_{ц}^2 / P_a H^{*2}$ – газодинамический параметр подшипника, μ – динамический коэффициент вязкости газовой среды, ω – угловая скорость вращения вала, $R_{ц}$ – радиус цапфы вала.

Заметим, что в области правой (в направлении скольжения) кромки лепестка имеет место резкое ступенчатое изменение зазора на величину толщины лепестка, что приводит к возможности проявления инерционных эффектов при движении вязкого газа в этой локальной области. Однако дополнительные исследования показывают, что влияние таких эффектов на распределение давления весьма мало. Поэтому с учетом большой величины зазора в области «ступеньки» принимаются приближенно краевые условия (8).

Численное решение краевой задачи (7), (8) выполняется в виде итерационного процесса Ньютона–Канторовича, на каждом шаге которого соответствующие линейные уравнения аппроксимируются разностной схемой по методу баланса с последующим применением немонотонной прогонки и процедуры поправок приращений давления (регуляризации) [3].

$$p_{ij}^{(n+1)} = p_{ij}^{(n)} + \beta \Delta p_{ij}, \quad (9)$$

где Δp_{ij} – разности сеточных значений давления при входе в итерационный шаг с номером n и значений, полученных после решения сеточных уравнений этой итерации

Параметр β определяется по условию минимума нормы вектора невязки нелинейных разностных уравнений, соответствующих (7), после подстановки в них (9):

$$\sigma(\beta) = \|L_{\Delta} p^{(n+1)}\| \Rightarrow \min \sigma. \quad (10)$$

Итерационный процесс завершается по достижении условия

$$\left| p_{ij}^{(n+1)} - p_{ij}^{(n)} \right| / p_{ij}^{(n+1)} < \varepsilon^*, \quad (11)$$

где ε^* – заданная величина, порядка $10^{-12} \dots 10^{-8}$.

Краевая задача для давления решается на сгущенной, по сравнению с решением задачи упругости, сетке. Переход от сеточной схемы задачи о прогибах к сеточной схеме задачи о распределении давления выполняется с помощью линейной интерполяции, обратный переход – через осреднение найденных значений давления по ближайшим узлам.

Условие завершения вычислительного УГД процесса аналогично (11), исходя из оценки наибольшей относительной разности сеточных значений давления на двух соседних итерациях: это значение сравнивается с малой предустановленной величиной.

По результатам решения УГД задачи определяем приложенную к валу результирующую сил давления смазочного слоя $\vec{F} = (F_x; F_y)$ и величину главного момента сил вязкого трения $M_{в.тр}$

$$F_x = - \sum_{i=1}^N LR_{\Pi} \int_{\Phi_2^*}^{\Phi_1^*} P_i(\varphi_i^*) \sin \varphi_i^* d\varphi_i^*; \quad F_y = \sum_{i=1}^N LR_{\Pi} \int_{\Phi_2^*}^{\Phi_1^*} P_i(\varphi_i^*) \cos \varphi_i^* d\varphi_i^*. \quad (12)$$

$$M_{в.тр} = \frac{LR_y^3 \mu \omega}{h^*} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{\Lambda} \frac{\partial p}{\partial \varphi^*} h + \frac{1}{h} \right) d\varphi^*. \quad (13)$$

Контактные реакции пакета лепестков находятся при отсутствии вращения вала в численном решении задачи упругости на дискретной модели как силы, приложенные к валу со стороны лепестков в точках контакта лепестков с валом:

$$F_{ij}^K = \partial I / \partial W_{ij} - \text{в узле контакта } i\text{-го лепестка с валом}; \quad (14)$$

$$F_{ij}^K = \partial I / \partial W_{ij} + \partial I / \partial W_{ij'} - \text{в узле контакта } i\text{-го лепестка с валом и с соседним лепестком}. \quad (15)$$

Момент сил сухого трения опоры, действующий при пуске и останове ротора, находится с использованием найденных в результате решения задачи упругости контактных сил по закону Амонта-Кулона

$$M_{тр} = k_{тр} R_{\Pi} \sum_{i=1}^N F_{ij}^K, \quad (16)$$

где $k_{тр}$ – коэффициент трения покрытия лепестка по поверхности вала. Направление силы трения выбирается противоположным скорости скольжения поверхности вала относительно лепестков при разгоне (выбеге) ротора.

Плоская модель подпятника с перекрытием профилированных лепестков, приведена на рис. 2.

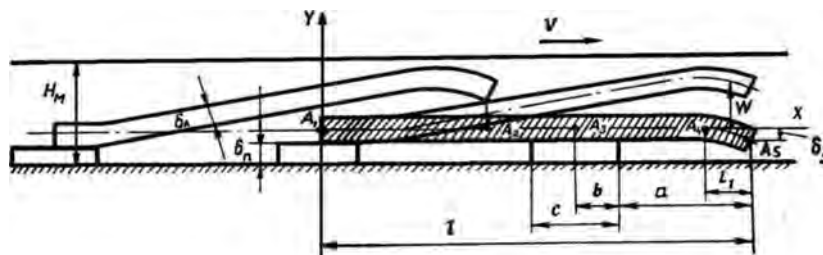


Рисунок 2 – К описанию математической модели лепесткового подпятника

Расчет прогибов лепестков производим на каждом шаге УГД процесса до достижения заданного числа итераций варьирования прогибов. С учетом давления газового слоя на лепестки потенциальная энергия упругого пакета определяется по формуле

$$\Pi = l_p N \int_0^l \left(\frac{D}{2} (\dot{W})^2 + QW \right) dx, \quad (17)$$

где l_p – протяженность лепестка в радиальном направлении; l – протяженность средней линии лепестка.

Ограничения на прогибы в размерном виде записываются

$$\begin{aligned} W(x) &\leq H_M - \delta_{II} / 2 - \delta_{III} - Y_0(x), \text{ если } a + b \leq x \leq l; \\ W(x) &\leq Y_0(l - a - b + x) + W(l - a - b + x) - Y_0(x) - \delta_{II} - \delta_{III}, \text{ если } 0 \leq x \leq a + b; \\ W(x) &\geq \delta_{II} / 2 - Y_0(x), \text{ если } 0 \leq x \leq b - c, \quad b \leq x \leq l - a - b, \quad b \leq x \leq l - a - c; \\ W(x) &\geq \delta_{II} / 2 + \delta_{III} - Y_0(x), \text{ если } b - c \leq x \leq b, \quad l - a - c \leq x \leq l - a - b; \\ W(x) &\geq Y_0(x - l + a + b) + W(x - l + a + b) + \delta_{II} + \delta_{III} - Y_0(x), \text{ если } l - a - b \leq x \leq l. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь H_M – монтажный зазор подпятника, определяемый как предустановленное расстояние между поверхностями пяты и платы до нагружения опоры; $Y_0(x)$ – функция, учитывающая профиль средней линии недеформированного лепестка; a – протяженность перекрытия лепестков за опорным элементом; b – расстояние от начала лепестка до конца опорного элемента; c – длина опорного элемента.

По результатам решения УГД задачи для заданного положения пяты определяется величина результирующей сил давления смазочного слоя, т.е. величина осевой реакции (осевая несущая способность) лепесткового газодинамического подпятника

$$F = N l_p \int_a^l P(x) dx. \quad (19)$$

В случае двухстороннего подпятника при нахождении результирующей реакции можно использовать интеграл от избыточного давления $Q(x)$.

Предельная несущая способность F_{np} при заданной скорости вращения определяется по достижении допустимого минимального зазора H_{min} между лепестками и валом, или между лепестками и пятой вала. Выбор величины минимального допустимого зазора при моделировании в вычислительных программах процесса нагружения опоры связан с той особенностью, что лепестки «отслеживают» поверхность пяты с весьма малыми зазорами. С другой стороны, исходные положения теории газовой смазки требуют, чтобы величина H_{min} превышала высоту микронеровностей ограничивающих слой поверхностей и приближенно соответствовала условию $H_{min} \geq 100 \bar{l}_p$, где \bar{l}_p – длина свободного пробега молекул смазывающего газа. При численном моделировании ЛГО величину H_{min} рассматриваем как варьируемый параметр и учитываем указанные ограничения при анализе результатов расчета.

Метод реализован в алгоритмах (рисунок 3) авторских программ расчета нагрузочных характеристик лепестковых газодинамических опор [5, 6]. В программах [7, 8] для каждого положения вала или пяты решается УГД задача. Использование средств визуализации Delphi и Visual C++ позволило создать удобный интерфейс: с помощью отображения на дисплее деформированной конфигурации упругого пакета и эпюр давления через равное число итерационных шагов пользователь получает представление о ходе вычислительного процесса. Такая реализация дает возможность делать выводы об эффективности настройки решателя УГД задачи в целом и подзадач расчета прогибов и давлений и изменять такие параметры вычислительной схемы, как число итераций в каждой из подзадач, шаг сетки, параметры ε^* завершения итерационных циклов, и другие.

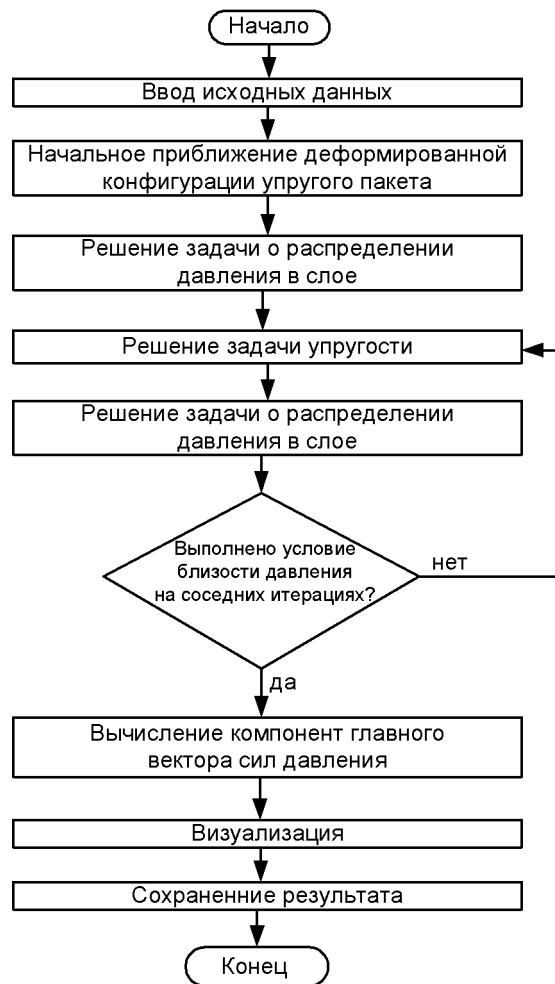


Рисунок 3. – Блок-схема алгоритма численного решения УГД задачи

2. Результаты численного моделирования нагрузочных характеристик ЛГО. Радиальный подшипник с параметрами: $N = 8$; $R_{II} = 30,5$ мм; $l_l = 43$ мм; $R_l = 34$ мм; $\alpha = 5^\circ$; $L = 54$ мм; $\delta_o = 0,15$ мм; $\delta_{II} = 0,02$ мм; $H_M = 0,12$ мм; $T = 500$ °С; $P_a = 4$ атм.

На рис.4а – расчетные нагрузочные характеристики при различных скоростях вращения вала. На рис. 4б – зависимости максимального избыточного давления в зазоре Q_{max} и минимального зазора в опоре H_{min} от относительного эксцентриситета вала и втулки ϵ . Номера линий и индексы обозначений на графиках соответствуют следующим скоростям вращения вала: 1 – 10000 об/мин; 2 – 25000 об/мин; 3 – 60000 об/мин; 4 – 72000 об/мин; 5 – статическая нагрузочная характеристика.

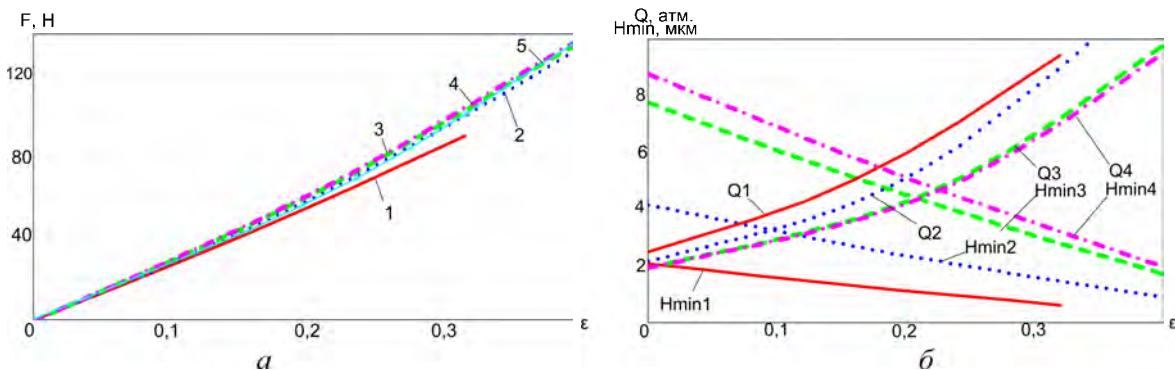


Рисунок 4. – Нагрузочные характеристики радиальной лепестковой опоры

По результатам вычислений нагрузочных характеристик ЛГО с указанными параметрами формулируем основные выводы:

1. Нагрузочные характеристики при заданных скоростях вращения вала 10...72 тыс. об/мин близки к статической нагрузочной характеристике (при $\omega = 0$). Это соответствует представлению о том, что при умеренных нагрузках (меньше предельной) жесткость ЛГО определяется жесткостью упругого пакета лепестков.
2. При увеличении скорости вращения вала возрастает значение минимального зазора в между валом и упругим пакетом лепестков.
3. По рассчитанным нагрузочным характеристикам можно определить приближенно скорость «всплытия» вала турбомашин на газовом слое. Анализ данных о подъемной силе подшипника и толщине газового слоя, позволяет заключить, что при скорости около 10 тыс. об/мин происходит «всплытие» вала – формирование смазочного слоя и отделение поверхностей лепестков от поверхности вала с уравниванием нагрузки на вал.
4. Вследствие существующего преднапряжения в подшипнике (упругий пакет после сборки опорного узла деформирован цапфой вала) момент сухого трения отличен от нуля даже при центральном положении вала. Момент сухого трения при пуске/останове ротора турбомашин превышает момент вязкого трения примерно в 10 раз.

Обоснование достоверности результатов, полученных по описанному методу, опирающееся на согласованность с данными экспериментальных исследований и с расчетами других авторов, содержится в работе [9].

Результаты численного моделирования для двустороннего подпятника с параметрами: $l_{\text{л}}=40$ мм; $\delta_0=0,2$ мм; $\delta_n=0,03$ мм; $\delta_s=20$ мм; $L_1=5$ мм; $\delta_{\text{оп.}}=0,15$ мм; $c=6$ мм; $b=3$ мм; $R_{\text{внутр.}}=35$ мм; $R_{\text{внеш.}}=59,5$ мм; $N=12$; $P_a=3,5$ атм. Номера линий соответствуют следующим значениям монтажного зазора и скорости вращения вала: 1 – $H_M=750$ мкм; $\Omega=60000$ об/мин; 2 – $H_M=750$ мкм; $\Omega=72000$ об/мин; 3 – $H_M=700$ мкм; $\Omega=60000$ об/мин; 4 – $H_M=700$ мкм; $\Omega=72000$ об/мин. На рис. 5а – нагрузочные характеристики опоры. На рис. 4б – зависимости минимального зазора в опоре от осевого смещения вала.

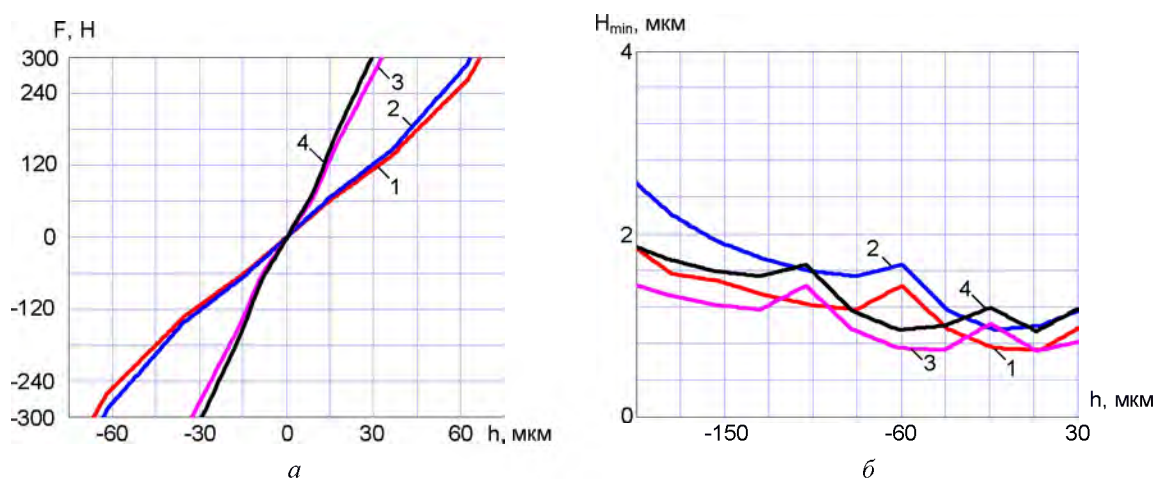


Рисунок 5. – Нагрузочные характеристики и минимальные зазоры двустороннего подпятника

Проведенные вычислительные эксперименты позволяют заключить, что параметры профиля и толщина основы лепестков подпятника существенно влияют на предельную несущую способность опоры.

Заключение. Накопленный опыт вычислений нагрузочных характеристик лепестковых газодинамических опор в созданных программах для ЭВМ позволяет сделать вывод об эффективности математических моделей и программных средств. Созданные программы оптимизированы для сокращения необходимого для вычислений времени и ориентированы на получение численных решений упругогидродинамической задачи с достаточной точностью. Накопленные расчетные данные позволяют перейти к разработке на основе созданной вычислительной программы методики автоматизированного проектирования ЛГО.

Резюме

Реакции лепестковых газодинамических опор определяются на основе численного решения упругогидродинамической задачи для газового смазочного слоя, ограниченного упругими оболочками. Представлены метод и результаты вычислений нагрузочных характеристик лепестковых радиальных и осевых опор при различных значениях конструктивных параметров.

Литература

1. Левина, Г.А. Определение реакций лепесткового газодинамического подшипника / Г.А. Левина, В.В. Смирнов // Челябинск: Челябинск. политехн. ин-т. – 1984. – Деп. в ВИНТИ 02.10.84. – № 7211-84.
2. Левина, Г.А. Решение упругогидродинамических задач и анализ нагрузочных характеристик лепесткового газодинамического подпятника с профилированными лепестками / Г.А. Левина, А.К. Бояршинова // М.: Машиноведение. – 1989. – № 4. – С. 88–94.
3. Левина, Г. А. Численное решение краевой задачи о распределении давления в слое сжимаемой смазки / Г. А. Левина, В. В. Смирнов // Информационные и робототехнические системы: Тематич. сб. научн. трудов. – Челябинск: ЧПИ. – 1985. – С.87–90.
4. Дроздович, В.Н. Газодинамические подшипники / В.Н. Дроздович // Л., «Машиностроение» (Ленингр. отд-ние). – 1976. – 208 с.
5. Левина, Г.А. Нагрузочные характеристики лепестковых радиальных подшипников турбомашин / Г.А. Левина, В.В. Дрокин // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Наука и образование. – 2010. – №4(110). – С. 146–150. – ISSN 1994-2354.
6. Левина, Г.А. Численное моделирование и анализ нагрузочных характеристик лепесткового подшипника с газовым смазочным слоем / Г.А. Левина, В.В. Дрокин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2011. – Выпуск 18, №31 (248). – С. 23–30.
7. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. 2009616105 Российская Федерация. Упругогидродинамический расчет нагрузочных характеристик лепесткового газодинамического подшипника, v.1.0 / Г.А. Левина, В.В. Дрокин; заявители и патентообладатели Общество с ограниченной ответственностью «ЭкоТурбо» и Южно-Уральский государственный университет. – заявка № 2009614875; – зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 05.11.2009.
8. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. 2010616109 Российская Федерация. Расчет статических нагрузочных характеристик лепесткового газодинамического подшипника, v.1.0 / Г.А. Левина, В.В. Дрокин; заявитель и патентообладатель Южно-Уральский государственный университет. – заявка № 2010614474; – зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 16.09.2010.
9. Дрокин, В. В. Анализ нагрузочных характеристик лепесткового газодинамического подшипника на основе численного моделирования: автореферат дис. канд. техн. наук./В.В. Дрокин // Челябинск: Студия дизайна и типография «ТЕТА». – 2012. – 17 с.

Summary

The reactions of a multi-leaf bearing with gas lubrication are defined on the basis of the hydro elasticity problem's numerical solution for the gas layer restricted with elastic shells. The method and the results of the computing of the load characteristics of multi-leaf bearings with different design factors are presented.

Поступила в редакцию 16.11.2012

МЕТОД РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ТЕПЛОЫДЕЛЯЮЩЕГО ЭЛЕМЕНТА ЯДЕРНОГО РЕАКТОРА

Куликов И.С., ¹Глембоцкий А.В.

¹ГНУ «Объединенный институт энергетических и ядерных исследований – Сосны» НАНБ, Минск

Развитие атомной энергетики на нынешнем этапе ее развития предполагает развитие как уже хорошо отработанных технологий действующих реакторов, так и разработку принципиально новых. В данном контексте можно считать достаточно перспективным направлением развития технологию высокотемпературных гелиевых реакторов со сферическими тепловыделяющими элементами (ТВЭЛами).

Первыми уровнями концепции глубокоэшелонированной защиты, которая лежит в основе всех современных технологий безопасности АЭС, являются уровни топливного сердечника (керна) и оболочка ТВЭЛ, которые составляют главную часть тепловыделяющего элемента. Однако, вопросы прочности и надежности сферических тепловыделяющих элементов по сравнению с цилиндрическими элементами исследованы недостаточно. В данной статье предлагается трехмерная математическая модель сферического тепловыделяющего элемента с учетом деформаций термического расширения, радиационного распухания, ползучести, а также, мгновенной пластической деформации.

Для вывода системы уравнений в сферических координатах запишем систему уравнений описывающие напряжено-деформированное состояние тела в декартовой системе (x_1, x_2, x_3) координат.

Данная система уравнений включает в себя:

1. уравнение равновесия;
 2. соотношения Коши;
 3. граничные условия
 4. физические уравнения.
- Соответственно имеем:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} l_j = P_i \quad (3)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \sigma_{ij} - 3\nu \delta_{ij} \sigma \right] + \varepsilon_{ij}^n \quad (4)$$

где $i, j = 1, 2, 3$, F_i – объемные силы, ρ – плотность материала, в общем случае зависящая от температуры и облучения, P_i – поверхностные силы, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, ε_{ij} – компоненты тензора деформаций, u_i – перемещения, $\varepsilon_{ij}^{(n)} = \delta_{ij} (\varepsilon_{ij}^{(T)} + \varepsilon_{ij}^{(s)}) + \varepsilon_{ij}^{(p)} + \varepsilon_{ij}^{(c)}$, $\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$, l_j – направляющие косинусы внешней нормали, δ_{ij} – символ Кронекера, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ – деформация термического расширения, $\varepsilon_{ij}^{(c)}$ – деформация ползучести, $\varepsilon_{ij}^{(s)}$ – деформация радиационного распухания, $\varepsilon_{ij}^{(p)}$ – мгновенная пластическая деформация, t – время [1].

Выразив из физических уравнений (4) напряжения через деформации и используя связь перемещений и деформаций (2), а затем подставив полученные выражения в уравнения равновесия (1), получим систему уравнений равновесия в перемещениях, аналогичных уравнениям Ламе в теории упругости:

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} + \mu \nabla^2 u_1 - \lambda \frac{\partial \Theta^{(n)}}{\partial x_1} - 2\mu \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}^{(n)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{12}^{(n)}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{13}^{(n)}}{\partial x_3} \right) + F_1 = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} + \mu \nabla^2 u_2 - \lambda \frac{\partial \Theta^{(n)}}{\partial x_2} - 2\mu \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}^{(n)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{22}^{(n)}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{23}^{(n)}}{\partial x_3} \right) + F_2 = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x_3} + \mu \nabla^2 u_3 - \lambda \frac{\partial \Theta^{(n)}}{\partial x_3} - 2\mu \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}^{(n)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{23}^{(n)}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{33}^{(n)}}{\partial x_3} \right) + F_3 = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \end{cases} \quad (5)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, $\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$, $\Theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$,
 $\Theta^{(n)} = \varepsilon_{11}^{(n)} + \varepsilon_{22}^{(n)} + \varepsilon_{33}^{(n)}$.

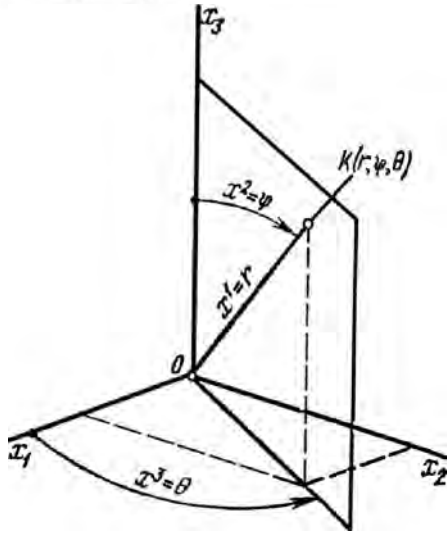


Рисунок 1.— Сферическая система координат

Общий вид уравнений схож с хорошо известными уравнениями Ламе, однако главное отличительной особенностью полученных уравнений является учет дополнительных обратимых и необратимых деформация, которые возникают в результате воздействия температуры и нейтронного облучения.

Для перехода от декартовой системы координат к сферической, используем тензорное преобразования, где соотношение между двумя базисами декартовой системы координат (x_1, x_2, x_3) и сферической (x^1, x^2, x^3) представлено на рисунке 1. Запишем дифференциальные операторы в криволинейных координатах.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \quad (6)$$

где H_i — коэффициенты Ламе, которые для сферической системы координат имеют вид $(H_1 = 1, H_2 = r, H_3 = r \sin(\varphi))$, Φ — скалярная функция.

Оператор Лапласа, как известно, в сферической системе координат можно записать

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2 \sin^2(\varphi)} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (7)$$

Однако для определения проекции вектора $\Delta \vec{A}$ на оси криволинейной системы координат необходимо использовать выражение, которое является инвариантом [2]:

$$\Delta \vec{A} = \text{grad} \cdot \text{div} \vec{A} - \text{rot} \cdot \text{rot} \vec{A} \quad (8)$$

Указанные в выражении (8) операторы в сферической системе координат имеют вид

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_\varphi \sin(\varphi)) + \frac{1}{r \sin(\varphi)} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \quad (9)$$

$$\text{rot}_r \vec{A} = \frac{1}{r \sin(\varphi)} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} (A_\theta \sin(\varphi)) - \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} \right) \quad (10)$$

$$\text{rot}_\varphi \vec{A} = \frac{1}{r \sin(\varphi)} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (A_\theta r) \quad (11)$$

$$\text{rot}_\theta \vec{A} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (A_\varphi r) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \quad (12)$$

Соответственно получаем выражения для проекции на оси координат:

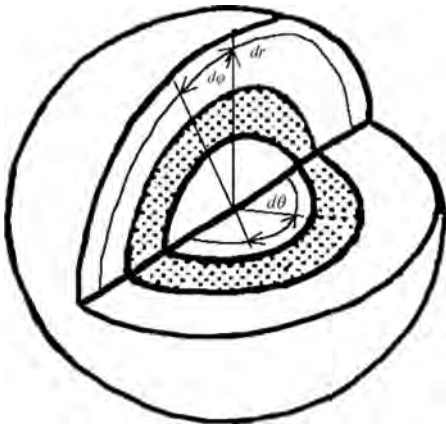
$$(\Delta \vec{A})_r = \Delta A_r - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + A_\varphi \operatorname{ctg}(\varphi) \right) - \frac{2}{r^2 \sin(\varphi)} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \quad (13)$$

$$(\Delta \vec{A})_\varphi = \Delta A_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{r^2 \sin^2(\varphi)} - \frac{2 \cos(\varphi)}{r^2 \sin(\varphi)} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \quad (14)$$

$$(\Delta \vec{A})_\theta = \Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2(\varphi)} + \frac{2}{r^2 \sin(\varphi)} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos(\varphi)}{r^2 \sin^2(\varphi)} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} \quad (15)$$

Используя записанные соотношения, получаем систему уравнений равновесия в перемещениях с учетом неупругих деформаций (термического расширения, радиационного набухания, пластичности и ползучести) в сферической системе координат.

$$\left\{ \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 u_r + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2}{r} \Theta \right) - \lambda \frac{\partial \Theta^{(n)}}{\partial r} - 2\mu \left(\frac{\partial \varepsilon_{rr}^{(n)}}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_{r\varphi}^{(n)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}^{(n)}}{\partial \theta} \right) + F_r &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} + \mu \left(\nabla^2 u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r^2 \sin^2(\varphi)} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{2 \cos(\varphi)}{r^2 \sin^2(\varphi)} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) - \lambda \frac{\partial \Theta^{(n)}}{\partial \varphi} \\ - 2\mu \left(\frac{\partial \varepsilon_{r\varphi}^{(n)}}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(n)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\theta}^{(n)}}{\partial \theta} \right) + F_\varphi &= \rho \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + \mu \left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2(\varphi)} + \frac{2}{r^2 \sin(\varphi)} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos(\varphi)}{r^2 \sin^2(\varphi)} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \right) - \lambda \frac{\partial \Theta^{(n)}}{\partial \theta} \\ - 2\mu \left(\frac{\partial \varepsilon_{r\theta}^{(n)}}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\theta}^{(n)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^{(n)}}{\partial \theta} \right) + F_\theta &= \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \end{aligned} \right. \quad (16)$$



1 – внешняя оболочка; 2 – пироуглеродный слой;
3 – топливный ядро,

Рисунок 2. – Расчетная схема сферического ТВЭЛ:

$$\begin{aligned} \text{где } \Theta &= \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2 \frac{u_r}{r} + \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi}{r} \operatorname{ctg}(\varphi) + \frac{1}{r \sin(\varphi)} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \\ \Theta^{(n)} &= \varepsilon_{rr}^{(n)} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(n)} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(n)}. \end{aligned}$$

Используя полученные выражения, составим трехмерную математическую модель для расчета трехслойного сферического ТВЭЛ. При построении модели сделаем следующие предположения: топливный ядро имеет форму шара и окружен сферически-симметричными покрытиями; материал топлива и оболочек, жестко контактирующих друг с другом (рис. 2).

Для построения расчетной математической модели необходимо записать систему уравнений (16) для трех слоев, обозначенных на рис. 2: внешней оболочки, пироуглеродного слоя и топливного ядра. Соответственно получим:

$$\begin{cases}
(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)}) \frac{\partial \Theta^{(k)}}{\partial r} + \mu^{(k)} \left(\nabla^2 u_r^{(k)} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} + \frac{2u_r^{(k)}}{r^2} - \frac{2}{r} \Theta^{(k)} \right) - \lambda^{(k)} \frac{\partial \Theta^{(kH)}}{\partial r} - 2\mu^{(k)} \left(\frac{\partial \varepsilon_{rr}^{(kH)}}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_{r\varphi}^{(kH)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}^{(kH)}}{\partial \theta} \right) = 0 \\
(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)}) \frac{\partial \Theta^{(k)}}{\partial \varphi} + \mu^{(k)} \left(\nabla^2 u_\varphi^{(k)} - \frac{u_\varphi^{(k)}}{r^2 \sin^2(\varphi)} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial \varphi} - \frac{2 \cos(\varphi)}{r^2 \sin^2(\varphi)} \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial \theta} \right) - \lambda^{(k)} \frac{\partial \Theta^{(kH)}}{\partial \varphi} \\
- 2\mu^{(k)} \left(\frac{\partial \varepsilon_{r\varphi}^{(kH)}}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(kH)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\theta}^{(kH)}}{\partial \theta} \right) = 0 \\
(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)}) \frac{\partial \Theta^{(k)}}{\partial \theta} + \mu^{(k)} \left(\nabla^2 u_\theta^{(k)} - \frac{u_\theta^{(k)}}{r^2 \sin^2(\varphi)} + \frac{2}{r^2 \sin(\varphi)} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos(\varphi)}{r^2 \sin^2(\varphi)} \frac{\partial u_\varphi^{(k)}}{\partial \theta} \right) - \lambda^{(k)} \frac{\partial \Theta^{(kH)}}{\partial \theta} \\
- 2\mu^{(k)} \left(\frac{\partial \varepsilon_{r\theta}^{(kH)}}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\theta}^{(kH)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^{(kH)}}{\partial \theta} \right) = 0
\end{cases} \quad (17)$$

где $k = 1, 2, 3$ (1 – внешняя оболочка, 2 – пироуглеродный слой, 3 – топливный керн),

$$\lambda^{(k)} = \frac{\nu^{(k)} E^{(k)}}{(1 + \nu^{(k)})(1 - 2\nu^{(k)})}, \quad \mu^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{2(1 + \nu^{(k)})}, \quad \Theta^{(k)} = \varepsilon_{rr}^{(k)} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(k)} = \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} + \frac{2u_r^{(k)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi^{(k)}}{\partial \varphi} +,$$

$$+ \frac{u_\varphi^{(k)}}{r} \operatorname{ctg}(\varphi) + \frac{1}{r \sin(\varphi)} \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial \theta}, \quad \Theta^{(kH)} = \varepsilon_{rr}^{(kH)} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(kH)} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(kH)}, \quad \varepsilon_{rr}^{(k)} = \alpha^{(k)} T^{(k)}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)} = \alpha^{(k)} T^{(k)},$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(kH)} = \alpha^{(k)} T^{(k)}, \quad \Delta = \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2 \sin^2(\varphi)} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} +$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin^2(\varphi)} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \left(2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad \alpha^{(k)} - \text{коэффициент теплопроводности материала.}$$

Температурные поля в сферическом тепловыделяющем элементе можно задать либо в виде некоторой функции, установленной эмпирическим путем, либо путем решения задачи теплопроводности для трехслойной сферы с внутренними источниками тепловыделения. В последнем случае температурное поле сферического гонзла будет описываться тремя уравнениями теплопроводности:

$$\begin{cases}
\frac{\partial T^1}{\partial t} = \alpha_1 \Delta T^1 \\
\frac{\partial T^2}{\partial t} = \alpha_2 \Delta T^2 \\
\frac{\partial T^3}{\partial t} = \alpha_3 \Delta T^3 + q(r, \varphi, \theta)
\end{cases} \quad (18)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – коэффициенты температуропроводности материалов, $q(r, \varphi, \theta)$ – объемное тепловыделение.

Данные уравнения теплопроводности дополняются условиями равенства температур и тепловых потоков на границах слоев и граничными условиями 3-го рода на поверхности внешней оболочки и охлаждающей среды.

В такой постановке термомеханическую задачу можно решить аналитически, как это показано в работе [3]. Однако, если учитывать деформации ползучести, радиационного распухания или мгновенные пластические деформации, то ее решение в аналитическом виде не представляется возможным ввиду нелинейности уравнений (17). Решение подобного рода задач возможно только с помощью численных методов. Для численного решения наиболее подходящими являются методы релаксации и расщепления с несогласованным стабилизирующим оператором [4].

Для дальнейшего решения будет более удобна несколько другая форма записи уравнений (17):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_r^{2(\kappa)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r^{2(\kappa)}}{\partial \varphi^2} + \left(\frac{1}{r^2 \sin^2(\varphi)} + \frac{1 + \lambda^{(\kappa)} / \mu^{(\kappa)}}{r \sin(\varphi)} \right) \frac{\partial u_r^{2(\kappa)}}{\partial \theta^2} + F_1^{(\kappa)}(r, \varphi, \theta) = 0 \\ \frac{\partial u_\varphi^{2(\kappa)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\varphi^{2(\kappa)}}{\partial \varphi^2} + \left(\frac{1}{r^2 \sin^2(\varphi)} + \frac{1 + \lambda^{(\kappa)} / \mu^{(\kappa)}}{r \sin(\varphi)} \right) \frac{\partial u_\varphi^{2(\kappa)}}{\partial \theta^2} + F_2^{(\kappa)}(r, \varphi, \theta) = 0 \\ \frac{\partial u_\theta^{2(\kappa)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta^{2(\kappa)}}{\partial \varphi^2} + \left(\frac{1}{r^2 \sin^2(\varphi)} + \frac{1 + \lambda^{(\kappa)} / \mu^{(\kappa)}}{r \sin(\varphi)} \right) \frac{\partial u_\theta^{2(\kappa)}}{\partial \theta^2} + F_3^{(\kappa)}(r, \varphi, \theta) = 0 \end{array} \right. \quad (19)$$

$$\text{где } F_1^{(\kappa)} = \left(1 + \lambda^{(\kappa)} / \mu^{(\kappa)} \right) \left(\frac{\partial \Theta^{(\kappa)}}{\partial r} - \frac{\partial^2 u_r^{(\kappa)}}{\partial r^2} \right) + \frac{4}{r} \frac{\partial u_r^{(\kappa)}}{\partial r} + \frac{ctg(\varphi)}{r^2} \frac{\partial u_r^{(\kappa)}}{\partial \varphi} - \frac{u_r^{(\kappa)}}{r^2} - \frac{2}{r} \Theta^{(\kappa)} - \lambda^{(\kappa)} / \mu^{(\kappa)} \frac{\partial \Theta^{(\kappa)}}{\partial r} - 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{rr}^{(\kappa H)}}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_{r\varphi}^{(\kappa H)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}^{(\kappa H)}}{\partial \theta} \right),$$

$$F_2^{(\kappa)} = \left(1 + \lambda^{(\kappa)} / \mu^{(\kappa)} \right) \left(\frac{\partial \Theta^{(\kappa)}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\varphi^{(\kappa)}}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial u_\varphi^{(\kappa)}}{\partial r} + \frac{ctg(\varphi)}{r^2} \frac{\partial u_\varphi^{(\kappa)}}{\partial \varphi} - \lambda^{(\kappa)} / \mu^{(\kappa)} \frac{\partial \Theta^{(\kappa)}}{\partial r} - 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{r\varphi}^{(\kappa H)}}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(\kappa H)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\theta}^{(\kappa H)}}{\partial \theta} \right),$$

$$F_3^{(\kappa)} = \left(1 + \lambda^{(\kappa)} / \mu^{(\kappa)} \right) \left(\frac{\partial \Theta^{(\kappa)}}{\partial r} - \frac{1}{r \sin(\varphi)} \frac{\partial^2 u_\theta^{(\kappa)}}{\partial \theta^2} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta^{(\kappa)}}{\partial r} + \frac{ctg(\varphi)}{r^2} \frac{\partial u_\theta^{(\kappa)}}{\partial \varphi} - \frac{u_\theta^{(\kappa)}}{r^2 \sin^2(\varphi)} \frac{2}{r^2 \sin(\varphi)} \frac{\partial u_r^{(\kappa)}}{\partial \varphi} - \frac{2 \cos(\varphi)}{r^2 \sin^2(\varphi)} \frac{\partial u_\varphi^{(\kappa)}}{\partial \theta} - \lambda^{(\kappa)} / \mu^{(\kappa)} \frac{\partial \Theta^{(\kappa)}}{\partial r} - 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{r\theta}^{(\kappa H)}}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\theta}^{(\kappa H)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^{(\kappa H)}}{\partial \theta} \right).$$

Построим разностные соотношения для системы уравнений (19). Вторые производные по пространственным координатам аппроксимируем разностными выражениями, воспользовавшись следующими разностными операторами:

$$\begin{aligned} \Lambda_r A_{nms} &= \frac{A_{n+1ms} - 2A_{nms} + A_{n-1ms}}{h_r^2} \\ \Lambda_\varphi A_{nms} &= \frac{A_{nm+1s} - 2A_{nms} + A_{nm-1s}}{h_\varphi^2} \\ \Lambda_\theta A_{nms} &= \frac{A_{nms+1} - 2A_{nms} + A_{nms-1}}{h_\theta^2} \end{aligned} \quad (20)$$

где $n = 1, 2, \dots, N$; $m = 1, 2, \dots, M$; $s = 1, 2, \dots, S$.

Очевидно, что

$$\begin{aligned}
\Lambda_r A_{nms} &= \frac{\partial^2 A(r_n, \varphi_m, \theta_s)}{\partial r^2} + O(h_r^2) \\
\Lambda_\varphi A_{nms} &= \frac{\partial^2 A(r_n, \varphi_m, \theta_s)}{\partial \varphi^2} + O(h_\varphi^2) \\
\Lambda_\theta A_{nms} &= \frac{\partial^2 A(r_n, \varphi_m, \theta_s)}{\partial \theta^2} + O(h_\theta^2)
\end{aligned} \tag{21}$$

Для смешанных производных второго порядка соответственно имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 A(r, \varphi, \theta)}{\partial r \partial \varphi} &= \frac{A_{n+1m+1s} - A_{nm+1s} - A_{n+1ms} + A_{nms}}{h_r h_\varphi} \\
\frac{\partial^2 A(r, \varphi, \theta)}{\partial r \partial \theta} &= \frac{A_{n+1ms+1} - A_{nms+1} - A_{n+1ms} + A_{nms}}{h_r h_\theta} \\
\frac{\partial^2 A(r, \varphi, \theta)}{\partial \varphi \partial \theta} &= \frac{A_{nm+1s+1} - A_{nms+1} - A_{nm+1s} + A_{nms}}{h_\varphi h_\theta}
\end{aligned} \tag{22}$$

Производных первого порядка аппроксимируются «левой» разностной схемой.

Слагаемые $F_1^{(*k)}, F_2^{(*k)}, F_3^{(*k)}$ соответствуют $F_1^{(k)}, F_2^{(k)}, F_3^{(k)}$, в которых производные заменены на разностные выражения соответствующего порядка.

В итоге получает разностную схему:

$$\left\{ \begin{aligned}
&\left(\Lambda_r^{(k)} + \frac{1}{r_n^2} \Lambda_\varphi^{(k)} + \left(\frac{1}{r_n^2 \sin^2(\varphi_m)} + \frac{1 + \lambda^{(k)} / \mu^{(k)}}{r_n \sin(\varphi_m)} \right) \Lambda_\theta^{(k)} \right) u_r^{(k)} + F_1^{(*k)}(r_n, \varphi_m, \theta_s) = 0 \\
&\left(\Lambda_r^{(k)} + \frac{1}{r_n^2} \Lambda_\varphi^{(k)} + \left(\frac{1}{r_n^2 \sin^2(\varphi_m)} + \frac{1 + \lambda^{(k)} / \mu^{(k)}}{r_n \sin(\varphi_m)} \right) \Lambda_\theta^{(k)} \right) u_\varphi^{(k)} + F_2^{(*k)}(r_n, \varphi_m, \theta_s) = 0 \\
&\left(\Lambda_r^{(k)} + \frac{1}{r_n^2} \Lambda_\varphi^{(k)} + \left(\frac{1}{r_n^2 \sin^2(\varphi_m)} + \frac{1 + \lambda^{(k)} / \mu^{(k)}}{r_n \sin(\varphi_m)} \right) \Lambda_\theta^{(k)} \right) u_\theta^{(k)} + F_3^{(*k)}(r_n, \varphi_m, \theta_s) = 0
\end{aligned} \right. \tag{23}$$

Граничные условия задаются равенством значений и производных на границе слоев. Если их записать, то получаем замкнутую систему уравнений. Эти уравнения нелинейные и поэтому для их решения применим итерационный процесс, на каждом этапе которого нелинейные члены вычисляются по значениям переменных, найденным на предыдущем шаге. Использую метод факторизации и введя промежуточные сеточные функции решение трехмерной задачи распадается на 3 этапа. На первом этапе одномерная задача решается по одной из переменных, на втором – по другой переменной и, соответственно, на третьем – по третьей переменной.

Перепишем уравнения системы (23) как гиперболические. При этом итерации по переменной времени будем продолжать до выхода решения полученной системы на стационарный режим. Построим экономичную факторизованную схему $\Lambda = \Lambda_r + \Lambda_\varphi + \Lambda_\theta$, $B = I + \beta h_\tau^2 \Lambda = I + \beta h_\tau^2 (\Lambda_r + \Lambda_\varphi + \Lambda_\theta)$. Заменяем оператор B факторизованным оператором $\bar{B} = (I + \beta h_\tau^2 \Lambda_r)(I + \beta h_\tau^2 \Lambda_\varphi)(I + \beta h_\tau^2 \Lambda_\theta)$, где I – единичный оператор. Полученная неявная схема

будет устойчивой при значениях параметра $\beta \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{h_\tau^2 \|\Lambda\|}$.

Таким образом, получаем 3 системы уравнений:

$$\begin{cases} (I - \beta h_\tau^2 \Lambda_r^{(\kappa)}) u_r^{(n+1/2, \kappa)} + \overline{F}_1^{*\kappa}(r_n, \varphi_m, \theta_s) = 0 \\ (I - \beta h_\tau^2 \Lambda_r^{(\kappa)}) u_r^{(n+1/2, \kappa)} + \overline{F}_2^{*\kappa}(r_n, \varphi_m, \theta_s) = 0 \\ (I - \beta h_\tau^2 \Lambda_r^{(\kappa)}) u_r^{(n+1/2, \kappa)} + \overline{F}_3^{*\kappa}(r_n, \varphi_m, \theta_s) = 0 \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} \left(I - \frac{\beta h_\tau^2 \Lambda_\varphi^{(\kappa)}}{r_n^2} \right) u_\varphi^{(n+1/2, \kappa)} + \overline{F}_1^{*(\kappa)}(r_n, \varphi_m, \theta_s) = 0 \\ \left(I - \frac{\beta h_\tau^2 \Lambda_\varphi^{(\kappa)}}{r_n^2} \right) u_\varphi^{(n+1/2, \kappa)} + \overline{F}_2^{*(\kappa)}(r_n, \varphi_m, \theta_s) = 0 \\ \left(I - \frac{\beta h_\tau^2 \Lambda_\varphi^{(\kappa)}}{r_n^2} \right) u_\varphi^{(n+1/2, \kappa)} + \overline{F}_3^{*(\kappa)}(r_n, \varphi_m, \theta_s) = 0 \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} \left(I - \left(\frac{1}{r_n^2 \sin^2(\varphi_m)} + \frac{1 + \lambda^{(\kappa)}}{r_n \sin(\varphi_m)} \frac{\mu^{(\kappa)}}{\mu^{(\kappa)}} \right) \beta h_\tau^2 \Lambda_\theta^{(\kappa)} \right) u_\theta^{(n+1, \kappa)} + \overline{F}_1^{*(\kappa)}(r_n, \varphi_m, \theta_s) = 0 \\ \left(I - \left(\frac{1}{r_n^2 \sin^2(\varphi_m)} + \frac{1 + \lambda^{(\kappa)}}{r_n \sin(\varphi_m)} \frac{\mu^{(\kappa)}}{\mu^{(\kappa)}} \right) \beta h_\tau^2 \Lambda_\theta^{(\kappa)} \right) u_\theta^{(n+1, \kappa)} + \overline{F}_2^{*(\kappa)}(r_n, \varphi_m, \theta_s) = 0 \\ \left(I - \left(\frac{1}{r_n^2 \sin^2(\varphi_m)} + \frac{1 + \lambda^{(\kappa)}}{r_n \sin(\varphi_m)} \frac{\mu^{(\kappa)}}{\mu^{(\kappa)}} \right) \beta h_\tau^2 \Lambda_\theta^{(\kappa)} \right) u_\theta^{(n+1, \kappa)} + \overline{F}_3^{*(\kappa)}(r_n, \varphi_m, \theta_s) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Значения $\overline{F}_1^{*(\kappa)}, \overline{F}_2^{*(\kappa)}, \overline{F}_3^{*(\kappa)}$ вытекают из сопоставления (24) и (23).

Как видим, задача свелась к решению локально одномерных краевых задач. Решение данной системы может быть построено по методу прогонки. Подобные схемы расчета ранее были использованы в [5] при решении динамических задач для оболочек.

Резюме

Приводится вывод системы уравнений напряженно-деформированного состояния с учетом обратимых и не обратимых деформаций в сферической системе координат. В качестве примера приводится численная схема расчета термоупругого задачи для сферического тепловыделяющего элемента.

Литература

1. Куликов И.С., Прочность элементов конструкций при облучении / И.С. Куликов, В. Б. Нестеренко, Б.Е. Тверковкин. – Минск: Наука и техника, 1990. – 144с.
2. Готман А.Ш. Тензорное исчисление: учеб. Пособие/ А.Ш. Готман. – Новосибирск: Изд-во Новосибирской гос. акад. вод. трансп. , 2007. – 129 с.
3. Гурьянов Н.Г. Краевые задачи теории упругости для шара и цилиндра / Н.Г. Гурьянов, О.Н. Тюленева – Казань: Изд-во Казанского университета, 2008. – 207 с.
4. Петрусёв А.С. Разностные схемы и их анализ / А.С. Петрусёв – Москва: Изд-во МФТИ, 2004. – 89 с.
5. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа/ А.С. Вольмир – Москва: Изд-во «Наука», 1976. – 416 с.

Summary

The deduction of the equations of the stress-strain state with reversible and irreversible deformations in spherical coordinates is presented. As an example, the numerical scheme for the calculation of the thermoelastic problem for a spherical fuel element is given.

Поступила в редакцию 10.12.2012

ИССЛЕДОВАНИЕ СОВМЕСТНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ ТЕПЛОВЫХ И СИЛОВЫХ НАГРУЗОК, ПРИЛОЖЕННЫХ НА ВНЕШНЕЙ И ВНУТРЕННЕЙ ГРАНИЦАХ

¹Миронов Д.Н., ¹Чигарев В.А., ²Гончаренко В.П.

¹ УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

² УО «Военная академия Республики Беларусь», Минск

Термоупругая деформация тела, возникающая от нестационарных механических и тепловых воздействий, сопровождается обратным эффектом - изменением его температурного поля на внешних и внутренних границах. Задача термоупругости, в которой учитывается указанный выше эффект, называется связанной динамической задачей термоупругости [1, 3]. Но в данной задаче практически не рассматривается влияние напряжений от совместного воздействия температурных и силовых воздействий и нет математических зависимостей, позволяющих численно оценить данное воздействие. Поэтому задачей работы является получение описанных выше зависимостей. Законы термодинамики гласят, что изменение деформаций упругого тела сопровождается изменением его температуры, при котором возникает теплоток, обуславливающий увеличение энтропии термодинамической системы и, следовательно, термоупругое рассеяние энергии [4]. В металлических телах эффект связанности поля деформации и температурного поля обычно мало влияет на термическое возмущение и распределение тепловых напряжений. Но это не значит, что подобное положение сохранится и для новых материалов, обладающих большим параметром связанности [5, 6].

При учете эффекта связанности устанавливаются новые качественные особенности распространения упругих волн, которые под влиянием тепловых эффектов распространяются с затуханием и дисперсией. В частности, существенно отличается решение динамической задачи термоупругости о тепловом ударе на поверхности полупространства без учета связи полей деформации и температуры от решения с учетом этой связи; в случае «несвязанного» решения разрыв напряжения αx остается неизменным, тогда как при «связанном» он с течением времени быстро уменьшается. В работе, связанная задача термоупругости рассматривается при малом термическом возмущении, т.е. при

$$\frac{T - T_0}{T_0} \ll 1. \quad (1)$$

В этом случае связанная задача становится линейной и при формулировке ее в перемещениях сводится к решению системы уравнений

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \vec{F} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T \text{grad } (T - T_0) - \rho \ddot{\vec{u}} &= 0, \\ \nabla^2 T + \frac{\omega_0}{\lambda_q} - \frac{1}{a} T - \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T T_0}{\lambda_q} \text{div } \dot{\vec{u}} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где μ – коэффициент динамической вязкости; u – деформация; F – поверхностная площадь; λ – коэффициент теплопроводности; α_T – коэффициент теплоотдачи; λ_q – коэффициент теплоотдачи потока; ρ – плотность, ω – скорость течения теплового потока, ∇ – оператор Лапласа.

Представления общих решений этой системы обобщают представления общих решений уравнения

$$\mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T \text{grad } (T - T_0) - \rho \ddot{\vec{u}} = 0, \quad (3)$$

описывающего динамическую задачу термоупругости. Известные представления решения уравнений классической теории упругости Б.Г. Галеркина и П.Ф. Папковича обобщаются на случай связанной задачи термоупругости. Применение прямых методов для решения связанных задач термоупругости в общем случае встречает большие математические трудности; перспективной является разработка приближенных методов решения связанных задач термоупругости на основе вариационных принципов, аналогичных таковым для статических и квазистатических задач термоупругости.

Представления общего решения. Связанная задача термоупругости при малом термическом возмущении описывается системой уравнений (2) при начальных и граничных условиях.

При объемной силе

$$\vec{F} = \text{grad } \Pi + \text{rot } \vec{\chi} \quad (4)$$

известно следующее представление общего решения уравнений (2):

$$\mathbf{u} = \text{grad } \Phi + \text{rot } \vec{A} \quad (5)$$

$$T - T_0 = \frac{1}{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T} [(\lambda + 2\mu)\Pi_1^2 \Phi + \Pi], \quad (6)$$

в котором скалярная Φ и векторная \vec{A} функции удовлетворяют уравнениям

$$A^2 \left[\varepsilon_1^2 \Phi + \frac{1}{\lambda + 2\mu} \Pi \right] - \frac{\varepsilon}{\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Phi = - \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T}{(\lambda + 2\mu)\lambda_q} \omega_0; \quad (7)$$

$$\vec{A} = -\frac{\vec{\chi}}{\mu} \quad \Pi^2 = \nabla^2 - \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \quad \varepsilon^n = \nabla^2 - \frac{1}{c_n^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (n=1,2); \quad (8)$$

где ε – параметр связанности, имеющий значение, $\vec{\chi}$ – термоупругая постоянная, c_1 и c_2 – скорость распространения упругой волны соответственно расширения и искажения (9).

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (9)$$

При $\varepsilon = 0$ и $\Pi = 0$ уравнение (7) на основании уравнения

$$\nabla^2 T + \frac{\omega_0}{\lambda_q} - \frac{1}{a} T = 0 \quad (10)$$

переходит в

$$A_1^2 \Phi = \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T}{\lambda + 2\mu} (T - T_0) = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_T (T - T_0), \quad (11)$$

а при $\vec{\chi} = 0$ уравнение (7) переходит в уравнение (12) динамической задачи термоупругости.

$$\varepsilon_2^2 \vec{A} = 0 \quad (12)$$

Найдено также обобщение известного представления решения уравнений классической теории упругости Б. Г. Галеркина [2] (на случай связанной задачи термоупругости):

$$\vec{u} = \text{grad } \Phi + \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \varepsilon_1^2 \vec{A} - \text{grad div } \vec{A}, \quad T - T_0 = \frac{\lambda + 2\mu}{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T} \varepsilon_1^2 \Phi, \quad (13)$$

где функция Φ и \vec{A} удовлетворяют уравнениям

$$A^2 \Pi_1^2 \Phi - \frac{\varepsilon}{a} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Phi - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot \frac{\varepsilon}{a} \varepsilon_2^2 \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A} = - \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T}{(\lambda + 2\mu)\lambda_q} \omega_0 \quad (14)$$

$$\Phi^2 \Pi_2^2 \vec{A} = - \frac{\lambda + \mu}{(\lambda + 2\mu)\mu} \vec{F} \quad (15)$$

Как и в динамической задаче термоупругости, представление (13) при отсутствии объемных сил можно преобразовать к представлению (5). Действительно, если в представление (13) и уравнение (14) внести выражения

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{A}_1 + \vec{A}_2, \quad \Phi = \Phi' + \text{div } \vec{A}_1 \quad (16)$$

в которых \vec{A}_0 – частное решение неоднородного уравнения (15), \vec{A}_1 и \vec{A}_2 – решения уравнений

$$\Pi_1^2 \vec{A}_1 = 0, \quad \Pi_2^2 \vec{A}_2 = 0 \quad (17)$$

где Φ' – новая скалярная функция, то форма их не изменится, но вместо Φ и \vec{A} в представлении (13) возникают Φ' и $\vec{A}_1 + \vec{A}_2$, а в уравнении (14) Φ' и \vec{A}_0 . На основании второго уравнения (17) и тождества

$$\text{grad div } \vec{A}_2 = \nabla^2 \vec{A}_2 + \text{rot rot } \vec{A}_2 \quad (18)$$

при подстановке $-\text{rot } \vec{A}_2 = \vec{A}'$ такое представления при $\vec{A}_0 = 0, \Pi = 0, X = 0$ (отсутствие объемных сил) переходит в представление (5). Вводя в представление (13) и в уравнения (14) и (15) новые функции

$$B_0 = \text{div } \vec{A} - \vec{B} \cdot \vec{r}, \quad \vec{B} = \frac{1}{2} \Pi_1^2 \vec{A} \quad (19)$$

где r – радиус-вектор, получаем обобщение известного представления П. Ф Папковича на случай связанной задачи термоупругости (19)

$$\vec{u} = \text{grad } \Phi + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \vec{B} - \text{grad } \vec{B} \cdot \vec{r} + B_0; \quad T - T_0 = \frac{\lambda+2\mu}{(3\lambda+2\mu)\alpha_T} \varepsilon_1^2 \Phi, \quad (20)$$

в котором функция Φ, \vec{B}, B_0 удовлетворяют уравнениям

$$A^2 \Pi_1^2 \Phi - \frac{\varepsilon}{a} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Phi - \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot \frac{\varepsilon}{a} \square_2^2 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{B} \cdot \vec{r} + B_0) = \frac{(3\lambda+2\mu)\alpha_T}{(\lambda+2\mu)\lambda_q} \omega_0 \quad (21)$$

$$\Pi_2^2 \vec{B} = -\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)\mu} \vec{F}, \quad B_0 + \vec{r} \cdot \Phi_1^2 B_0 = 0 \quad (22)$$

В случае распространения безвихревой волны (волны расширения) и отсутствия объемных сил и источников тепла ($\vec{A} = 0, \Pi = 0, \omega_0 = 0$) представление (5) имеет вид

$$\vec{u} = \text{grad } \Phi, \quad T - T_0 = \frac{\lambda+2\mu}{(3\lambda+2\mu)\alpha_T} \varepsilon_1^2 \Phi, \quad (23)$$

где функция Φ удовлетворяет уравнению

$$(\Pi^2 A^2 - \frac{\varepsilon}{a} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2) \Phi = 0 \quad (24)$$

Решение для функции Φ ищут в виде

$$\Phi = \varphi(x, y, z) e^{pt}, \quad (25)$$

где p – комплексная постоянная. Подставляя это решение в (24), для φ получают уравнение

$$\left[\left(\nabla^2 - \frac{p}{a} \right) \left(\nabla^2 - \frac{p^2}{c_1^2} \right) - \frac{\varepsilon p}{a} \nabla^2 \right] \varphi = 0, \quad (26)$$

которое может быть представлено в виде

$$(\nabla^2 + \delta_1^2)(\nabla^2 + \delta_2^2)\varphi = 0, \quad (27)$$

$$\text{где } \delta_1^2 \delta_2^2 = -\frac{p^2}{2c_1^2} \left\{ \left(1 + \frac{1+\varepsilon}{\chi'} \right) \pm \left[1 - \frac{2(1-\varepsilon)}{\chi'} + \left(\frac{1+\varepsilon}{\chi'} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}; \quad \chi' = \frac{ap}{c_1^2}. \quad (28)$$

Если предположить, что термоупругая связь отсутствует ($\varepsilon = 0$), то из уравнения (28) получаем

$$\delta_1^2 = -\frac{p^2}{c_1^2}; \quad \delta_2^2 = -\frac{p}{a}. \quad (29)$$

Следовательно, уравнение (28) описывает распространение двух видов волн расширения, из которых один, связанный с δ_1 , близок к чисто упругой волне, а другой, связанный с δ_2 , сходен по своему характеру с чисто тепловой волной.

На основании уравнений (25) и (26) общее решение уравнения (24) можно представить в виде

$$\Phi = \sum_{j=1}^2 \varphi_j e^{pt}, \quad (30)$$

где φ_j удовлетворяет уравнению

$$(\nabla^2 + \delta_j^2)\varphi_j = 0 \quad j = 1, 2. \quad (31)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае общее решение связанной термоупругой задачи на основании представления (23) и решения (30) принимает вид

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^2 \text{grad } \varphi_j e^{pt} \quad (32)$$

$$T - T_0 = -\frac{\lambda + 2\mu}{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T} \sum_{j=1}^2 \left(\frac{p^2}{c_1^2} + \delta_1^2 \right) \varphi_j e^{pt} \quad (33)$$

Учитывая, что $\varepsilon_{RR} = \text{div } \vec{u} = \sum_{j=1}^2 \nabla^2 \varphi_j e^{pt} - \sum_{j=1}^2 \delta_j^2 \varphi_j e^{pt}$ и принимая во внимание формулу (33), получаем на основании соотношения

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + [\lambda\varepsilon_{RR} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0)]\delta_{ij} \quad (34)$$

следующие выражения для напряжений:

$$\sigma_{Rl} = 2\mu \left[\varepsilon_{Rl} + \delta_{Rl} \sum_{j=1}^2 \left(\delta_j^2 + \frac{\rho p^2}{2\mu} \right) \varphi_j e^{pt} \right] \quad (35)$$

δ_{Rl} – символ Кронекера; ρ – плотность среды, в которой распространяется волна (31).

Задача термоупругости, описываемая двумя уравнениями:

$$\mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T \text{grad } (T - T_0) - \rho \ddot{\vec{u}} = 0, \quad (36)$$

$$\nabla^2 T + \frac{\omega_0}{\lambda_q} - \frac{1}{a} T = 0 \quad (37)$$

называется несвязанной динамической задачей термоупругости, или просто динамической задачей термоупругости. При существенном приращении температуры $T - T_0$ коэффициенты λ , μ , α_T в соотношениях (34) являются функциями T , а следовательно, и функциями координат xR и времени t . Помня об этом, находим для такой задачи следующие уравнения движения в перемещениях:

$$\mu u_{i,RR} + (\lambda + \mu) u_{R,Ri} + \mu_{,R} (u_{i,R} + u_{R,i}) + \lambda_{,i} u_{R,R} - [(3\lambda + 2\mu)\alpha_T (T - T_0)]_{,i} - \rho \ddot{u}_i. \quad (38)$$

Вместо этих трех скалярных уравнений можно записать одно векторное в виде

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + 2 \text{grad } \mu \cdot \text{Pe} \text{ grad } \lambda \text{ div } \vec{u} - \text{grad } [(3\lambda + 2\mu)\alpha_T (T - T_0)] - \rho \ddot{\vec{u}}, \quad (39)$$

где $\text{grad } \mu$ и Pe – скалярное произведение тензора деформации Pe на вектор $\text{grad } \mu$. Если учесть зависимость λ_q от температуры, то уравнение теплопроводности становится нелинейным.

Резюме

В работе получены зависимости тензоров напряжений и деформаций на внешних и внутренних границах оболочек от совместных температурных и механических воздействий.

Литература

1. Карнаухов, В.Г. Связанные задачи термоупругости / В.Г. Карнаухов – Киев: Наука, думка, 1982. – 260с.
2. Зарубин, В.С. Математические модели термомеханики / В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 168с.
3. Устинов, Ю.А. Некоторые задачи для упругих цилиндрических тел с винтовой анизотропией / Ю.А. Устинов // Успехи механики. – 2003. - №4. – С. 3 – 29.
4. Кондепуди, Д. Современная термодинамика (От тепловых двигателей до диссипативных структур) / Д. Кондепуди, И. Пригожин. – Москва, 2002. – 461 с.
5. Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Д. Гудьер – Москва: Наука, 1975. – 576 с.
6. Акимов, В.А. Операторный метод решения задач теории упругости / В.А. Акимов – Минск: УП «Техно-принт», 2003 – 101 с.

Summary

In work dependences tensors pressure and deformations on external and internal borders of covers from joint temperature and mechanical influences are received. The given problem is considered within the limits of the theory of elasticity of a firm body.

Поступила в редакцию 02.10.2012

АНАЛИЗ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ПОДВИЖНОГО СЕКТОРА ДЕРЕВООБРАБАТЫВАЮЩЕЙ ФРЕЗЫ

Аникеенко А.Ф., Бобылев П.С., Вихренко В.С.

УО «Белорусский государственный технологический университет», Минск

Одним из путей создания конкурентоспособного дереворежущего инструмента является его техническое совершенствование и обновление в условиях непрерывно возрастающих требований, таких, как снижение удельной металлоемкости и энергопотребления, повышение ресурса и надежности, сокращение затрат времени на замену затупившихся режущих элементов, реализация прогрессивных технико-экономических решений на основе функционально-стоимостного анализа. Кроме этого, необходимо решить ряд важных задач, сдерживающих создание новейших видов дереворежущего инструмента: внедрение механотроники, разработка автоматизированной системы проектирования режущих инструментов (САПР РИ), автоматизированных средств идентификации состояния режущих элементов, а также теории расчета инструментов на прочность, жесткость и колебания.

Фрезерование широко используется в деревообработке [1–3]. В данной работе рассматривается новая конструкция сборной фрезы [4] для продольно-фрезерных, фрезерных и карусельно-фрезерных станков, обрабатывающих центров и автоматических линий, отличительной особенностью которой является наличие подвижных относительно корпуса фрезы секторов, несущих режущие ножи. Эта фреза предназначена для цилиндрического, профильного и фасонного фрезерования древесины всех пород и под разными углами резания, а также кромок облицованных и не облицованных древесностружечных, цементно-стружечных плит и плит MDF и кромок фанеры.

Фреза (рис. 1) состоит из корпуса, в котором расточены два, три или четыре паза типа “ласточкин хвост”. В пазы корпуса устанавливают поворотные быстросъемные секторы-ножедержатели. Для настройки реза на требуемый угол резания (изменение режима резания, инструментального материала ножа и обрабатываемого материала) сектор-ножедержатель поворачивают и фиксируют в заданном положении винтами. В качестве режущих элементов используются ножи, изготовленные из инструментальной стали с твердосплавной напайкой или неперетачиваемые двухлезвийные твердосплавные пластинки.

Для сокращения затрат времени на замену затупившихся режущих элементов и переналадку углов резания в соответствии с условиями эксплуатации фрезы секторы-ножедержатели должны фиксироваться в корпусе минимальным количеством крепежных элементов. Наиболее неблагоприятные условия возникают в процессах разгона и остановки фрезы, когда касательные составляющие сил инерции стремятся повернуть подвижный сектор относительно корпуса фрезы. Начальный этап разгона характеризуется малыми значениями центробежных сил инерции, и поэтому методика расчета усилий на этом этапе существенно отличается от более позднего этапа, когда превалирующими становятся центробежные силы инерции.

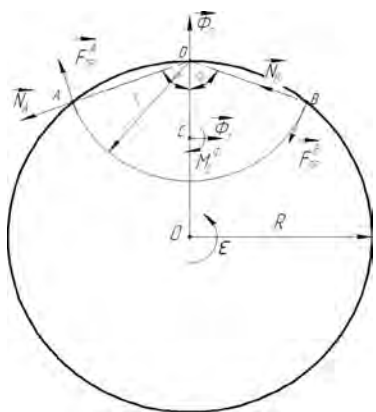


Рисунок 1. – Схема фрезы с подвижным сектором OAB. Радиус фрезы равен R , подвижного сектора r . Фреза вращается с постоянным угловым ускорением ϵ

Выполним анализ движения фрезы на начальном этапе разгона. Предположим, что в соединении сектора-ножедержателя с корпусом фрезы существует небольшой зазор. Тогда в начале процесса разгона фрезы, когда центробежная сила инерции не велика, сектор касается фрезы в двух противоположных точках A и B (рис. 1), и действие касательных сил инерции приводит к появлению нормальных реакций N_A и N_B в точках A и B , причем значения обеих реакций положительны, а также сил трения $F_{тр}^A$ и $F_{тр}^B$. При этом в т. В сектор прижимается к корпусу фрезы по цилиндрической поверхности, тогда как в т. A – по конической, и в результате действия расклинивающих усилий в т. A необходимо учитывать приведенный коэффициент трения, определяемый соотношением

$$f_{\text{тр}} = f / \sin 20^\circ \approx 3f.$$

Задача состоит в том, чтобы выяснить, достаточно ли сил трения для обеспечения относительного равновесия сектора при ускоренном движении фрезы в процессе ее разгона или остановки, или рассчитать параметры крепежного устройства.

Задачу решаем методом предельного равновесия, когда предполагается, что силы трения достигли своих предельных значений, равных произведению коэффициентов трения на нормальные реакции. Составим на основании принципа Даламбера уравнения моментов всех сил, включая силы инерции, относительно точек A и B , которые позволяют определить нормальные реакции:

$$\begin{aligned} N_B r \sin(\pi - 2\phi) + \Phi_n r \sin \phi + \Phi_\tau \left(\frac{2}{3} r \frac{\sin \phi}{\phi} - r \cos \phi \right) - M_c^\phi - F_{\text{тр}}^B r (1 + \cos(\pi - 2\phi)) &= 0, \\ -\Phi_n r \sin \phi + \Phi_\tau \left(\frac{2}{3} R \frac{\sin \phi}{\phi} - r \cos \phi \right) - M_c^\phi + N_A r \sin(\pi - 2\phi) - F_{\text{тр}}^A r (1 + \cos(\pi - 2\phi)) &= 0, \end{aligned}$$

где силы инерции и момент сил инерции определяются соотношениями (т. С – центр масс сектора):

$$\begin{aligned} \Phi_n &= m\omega^2(R - DC), \quad \Phi_\tau = m\varepsilon(R - DC), \quad M_C^\phi = (J_D - mDC^2)\varepsilon, \\ J_D &= \frac{1}{2}mr^2, \quad DC = \frac{2}{3}r \frac{\sin \phi}{\phi}, \quad \frac{r}{R} = 2 \cos \phi, \quad \omega = \varepsilon t. \end{aligned}$$

Отметим, что часто встречающиеся комбинации приводятся к простым соотношениям:

$$\begin{aligned} M_C^\phi - \Phi_\tau \left(\frac{2}{3} r \frac{\sin \phi}{\phi} - r \cos \phi \right) &= mr^2\varepsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r} \left(\cos \phi - \frac{2}{3} \frac{\sin \phi}{\phi} \right) - \frac{1}{3} \frac{\sin 2\phi}{\phi} \right), \\ M_C^\phi - \Phi_\tau \frac{2}{3} r \frac{\sin \phi}{\phi} &= mr^2\varepsilon \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \frac{R \sin \phi}{r \phi} \right). \end{aligned}$$

В результате для нормальных реакций находим

$$N_A = \frac{A + B\varepsilon t^2}{\sin 2\phi - f_{\text{тр}}(1 - \cos 2\phi)} mr\varepsilon, \quad N_B = \frac{A - B\varepsilon t^2}{\sin 2\phi - f(1 - \cos 2\phi)} mr\varepsilon,$$

где

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \frac{\sin 2\phi}{\phi} + \frac{R}{r} \left(\cos \phi - \frac{2}{3} \frac{\sin \phi}{\phi} \right), \quad B = \left(\frac{R}{r} - \frac{2}{3} \frac{\sin \phi}{\phi} \right) \sin \phi,$$

и принято равноускоренное вращение фрезы с угловой скоростью $\omega = \varepsilon t$.

Суммарная сила трения определяется уравнением моментов относительно т. D :

$$F_{\text{тр}}^A + F_{\text{тр}}^B = \left(\frac{2}{3} \frac{R \sin \phi}{r \phi} - \frac{1}{2} \right) mr\varepsilon.$$

Продолжительность первого этапа определяется условием $N_B \geq 0$, откуда для продолжительности первого этапа следует ограничение $t \leq t_1 = \sqrt{A/B\varepsilon}$.

Моменты M_1 и M_2 относительно т. B соответственно распределенных сил нормального давления и сил трения вычисляются путем интегрирования

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_0^{2\phi} (q_0 + q_1 \psi) r \sin \psi d\psi, \\ M_2 &= - \int_0^{2\phi} f(q_0 + q_1 \psi) (r - r \cos \psi) d\psi. \end{aligned}$$

Моменты относительно точки A соответственно равны

$$\begin{aligned} M_1' &= - \int_0^{2\phi} (q_0 + q_1 2\phi - q_1 \psi) r \sin \psi d\psi, \\ M_2' &= - \int_0^{2\phi} f(q_0 + q_1 2\phi - q_1 \psi) (r - r \cos \psi) d\psi. \end{aligned}$$

$$C_1 = mr^2\varepsilon \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{R}{r} - \frac{2 \sin \phi}{3 \phi} \right) (\cos \phi + \varepsilon t^2 \sin \phi) - \frac{2}{3} \frac{R \sin \phi}{r \phi} \right],$$

$$C_2 = mr^2\varepsilon \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{R}{r} - \frac{2 \sin \phi}{3 \phi} \right) (\cos \phi - \varepsilon t^2 \sin \phi) - \frac{2}{3} \frac{R \sin \phi}{r \phi} \right].$$

Записанное выше представление коэффициентов A и B необходимо для выделения слагаемых, содержащих коэффициент трения f . Систему уравнений относительно неизвестных q_0 и q_1 решаем методом Крамера:

$$q_0 = \frac{C_1 B_2 - C_2 B_1}{\Delta}, \quad q_1 = \frac{A_1 C_2 - A_2 C_1}{\Delta}, \quad \Delta = A_1 B_2 - A_2 B_1$$

После подстановки выражений для коэффициентов интенсивности распределенного нормального давления получим

$$q_0 = \frac{(b_{20} + b_{21}f)C_1 - (b_{10} + b_{11}f)C_2}{\Delta},$$

$$q_1 = \frac{(a_{10} + a_{11}f)C_2 - (a_{20} + a_{21}f)C_1}{\Delta};$$

$$\Delta = d_0 + d_1 f + d_2 f^2,$$

$$d_0 = a_{10}b_{20} - a_{20}b_{10}, \quad d_1 = a_{10}b_{21} + a_{11}b_{20} - a_{20}b_{11} - a_{21}b_{10}, \quad d_2 = a_{11}b_{21} - a_{21}b_{11}.$$

Для нахождения требуемого значения коэффициента трения составим уравнения моментов относительно точки D :

$$\Phi_{\tau} DC - M_c^{\Phi} = \int_0^{2\phi} r F_{\text{тр}} d\psi.$$

Вычислив интеграл и выполнив преобразования, получим соотношение

$$2f\phi(q_0 + \phi q_1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \frac{R \sin \phi}{r \phi} \right) mr\varepsilon,$$

которое удобно переписать в виде

$$f = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \frac{R \sin \phi}{r \phi} \right) mr\varepsilon / [\phi(q_0 + \phi q_1)].$$

Отметим, что в правой части масса, радиус и угловое ускорение сокращаются, поскольку знаменатель пропорционален этим величинам. Построив правую часть полученного уравнения как функцию f , найдем ее пересечение с прямой f , и тем самым определим значение коэффициента трения, достаточного для удержания сектора в состоянии относительного равновесия в некоторый заданный момент времени t .

Выполним числовые расчеты. Номинальный режим работы фрезы устанавливается при $\omega \cong 1250$ рад/с (12 000 об/мин). Тогда при $\varepsilon = 600$ рад/с² время разгона фрезы составит примерно 2 секунды. Для проверки условий устойчивости относительного равновесия подвижной части фрезы вычисления выполнены в рамках программного пакета MathCAD [5].

Продолжительность первого этапа составляет $t_1 = 0,02$ с, а суммарная необходимая для обеспечения относительного равновесия сила трения, зависящая лишь от углового ускорения вращения фрезы, равна 85 Н. Возникающие при этом силы трения обеспечивают около половины этой величины. Поэтому необходимы минимальные стопорные устройства, например, в виде одного или двух винтов М4. За время 0,02 с продолжительности первого этапа корпус фрезы поворачивается примерно на угол 0,12 рад (около 7°), так что даже при отсутствии стопорных устройств угол относительного поворота сектора составит не более половины этой величины, т.е. около 3°, что и было зафиксировано при испытаниях опытного образца фрезы.

На втором этапе уже в момент времени 0,03 с требуемый коэффициент трения составляет 0,35, и поскольку контакт сектора и корпуса осуществляется по конической поверхности, то значение приведенного коэффициента трения для стали по стали 0,35–0,4 достаточно для обеспечения относительного равновесия сектора. С течением времени ввиду увеличения сил нормального взаимодействия, обусловленного увеличением центробежной силы инерции, требуемое значение коэффициента

трения быстро уменьшается, что обеспечивает безопасность работы фрезы на всех режимах ее работы.

Резюме

Исследованы условия относительного равновесия установленного с помощью соединения типа «ласточкин хвост» подвижного сектора деревообрабатывающей фрезы, несущего режущие элементы. Установлено, что распределение сил взаимодействия сектора и корпуса на начальном и более поздних этапах разгона различно. Показано, что для обеспечения относительного равновесия сектора на начальном этапе необходимы минимальные стопорные устройства, тогда как на более поздних этапах реализуется режим самоторможения.

Литература

1. Амалицкий В. В. Деревообрабатывающие станки и инструменты / В. В. Амалицкий – М.: Академия, 2007.
2. Морозов В. Г. Дереворежущий инструмент: Справочник / В. Г. Морозов – М.: Лесная промышленность, 1988.
3. Песоцкий А. Н. Проектирование лесопильно-деревообрабатывающих производств / А. Н. Песоцкий – М.: Лесная промышленность, 1976.
4. Гришкевич А. А. Экспериментальная установка для исследования процесса фрезерования древесины и древесных материалов / А. А. Гришкевич, А. Ф. Аникеев // Труды БГТУ. Лесная и деревообр. промышл. – Минск, 2005.– Вып XIII. Сер. II. – С. 202–204.
5. Дьяконов В.М. Специальный справочник по MathCAD / В. М. Дьяконов. – СПб: Петербург, 2001.

Summary

The conditions of relative equilibrium of the movable sector of a woodworking rotary cutter are investigated. The dovetail is used to connect the sector to the cutter frame. It is found that there are two different sector-frame interaction force distributions on the initial and the successive time intervals during cutter speeding up. On the initial stage a minimal blocking device is necessary to ensure relative equilibrium of the sector with respect to the frame, while on the latter stage the conditions of self blocking are realized.

Поступила в редакцию 15.11.2012

ЛОКАЛЬНЫЕ НАГРУЖЕНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УПРУГИМ НАПОЛНИТЕЛЕМ

Леоненко Д. В.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

Введение. Трехслойные элементы конструкций типа пластин и оболочек широко применяются в современных отраслях промышленности, что обуславливает необходимость разработки методов их расчета. Вопросы распространения волн в неоднородной пористой среде рассмотрено в статье [1]. В монографии [2] исследовано статическое и динамическое деформирование трехслойных пластин и оболочек при отсутствии упругих сред. В работе [3] исследованы колебания трехслойных пластин и стержней, скрепленных с упругим основанием. В монографии [4] исследовано поведение однослойных элементов конструкций на упругом основании. Здесь рассмотрены колебания трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем внутри при действии локальных распределенных и сосредоточенных нагрузок.

Постановка задачи. В тонких изотропных несущих слоях оболочки вращения приняты гипотезы Кирхгофа–Лява. В толстом наполнителе учитывается работа поперечного сдвига и обжатие по толщине, изменение перемещений принято линейным по поперечной координате. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Деформации малые.

Обозначим через h_k толщину k -го слоя, $h_3 = 2c$. За независимые переменные принимаются u_α^k , w^k – тангенциальные перемещения и прогибы точек срединных поверхностей несущих слоев в направлении осей x_α , z правой системы координат, отнесенной к линиям главных кривизн срединной поверхности наполнителя и к внешней нормали, соответственно (рис. 1). В результате получаем следующее выражение для перемещений в несущих слоях ($c \leq z \leq c + h_1$, $-c - h_2 \leq z \leq -c$):

$$\begin{aligned} u_\alpha^{kz} &= u_\alpha^k + (z \mp a_k) \psi_\alpha^k, \quad a_k = c + 0,5h_k, \\ \psi_1^k &= -w^k_{,1}, \quad \psi_2^k = (R \pm a_k)^{-1} (u_2^k - w^k_{,2}). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и далее греческие индексы принимают значения 1, 2, латинские – 1, 2, 3 (если другое специально не указано); нижний знак в формуле соответствует индексу $k = 2$ (номеру слоя); ψ_α^k – угол поворота деформированной нормали в k -м несущем слое; частное дифференцирование по координате обозначается соответствующим нижним координатным индексом, следующим после запятой.

Из условия непрерывности перемещений на границах контакта слоев для наполнителя ($-c \leq z \leq c$) получим:

$$\begin{aligned} u_1^{3z} &= 0,5 \sum_{k=1}^2 (1 \pm z/c) (u_1^k \pm 0,5h_k w^k_{,1}), \\ u_2^{3z} &= \sum_{k=1}^2 (1 \pm z/c) ((0,5 \mp D_{k2}) u_2^k \pm D_{k2} w^k_{,2}), \quad w^{3z} = 0,5 \sum_{k=1}^2 (1 \pm z/c) w^k, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$D_{k1} = h_k / 4, \quad a_k = c + 0,5h_k, \quad D_{k2} = 0,25h_k (1 \pm a_k / R)^{-1} R^{-1}.$$

Здесь и далее индекс «3» – номер наполнителя, как и другие цифровые индексы, будем писать без скобок.

Уравнения движения трехслойной оболочки и силовые граничные условия следуют из вариационного принципа Лагранжа с учетом вариации работы сил инерции:

$$\delta A - \delta W = \delta A_I, \quad (3)$$

где δA – вариация работы внешних сил, δW – вариация работы внутренних сил упругости, δA_I – вариация работы сил инерции.

К наружным поверхностям несущих слоев приложена распределенная нагрузка q_I^1 и реакция упругой безынерционной среды Винклера (рисунок 1):

$$q_{3r}^2 = -\kappa_0 w^2, \quad q_{\alpha r}^k = 0, \quad (4)$$

где κ_0 – коэффициент постели.

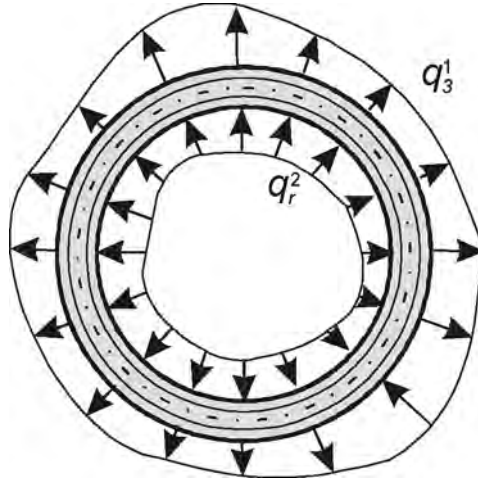


Рисунок 1 – Поперечное сечение цилиндрической оболочки

Подставив в вариационное уравнение (3) соотношения для вариаций работ и выделив независимые вариации перемещений путем интегрирования по частям, приравняв коэффициенты при независимых вариациях нулю, получим шесть уравнений движения цилиндрической трехслойной оболочки с упругим наполнителем (4)

$$\sum_{k=1}^2 \left[a_{m\beta 1}^k u_{\beta, \alpha\alpha}^k + a_{m\beta 2}^k u_{\beta, \gamma\beta}^k + a_{m\beta 3}^k u_{\beta}^k + a_{m\beta 4}^k u_{\beta, \gamma\beta}^k + a_{m\beta 5}^k w_{, \alpha}^k + a_{m\beta 6}^k w_{, \alpha\alpha\alpha}^k + a_{m\beta 7}^k w_{, \alpha\beta\beta}^k \right] - b_{\alpha}^m \ddot{u}_{\beta}^m = (\mp 0, 5h_m c_2^m \delta_{\alpha 2} - R) m_m q_{\alpha}^m \delta_{m1},$$

$$\sum_{\gamma=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left[a_{m31}^{\gamma k} w_{, \gamma\gamma\gamma}^k + a_{m32}^k w_{, 1122}^k + a_{m33}^{\gamma k} w_{, \gamma\gamma}^k + (a_{m34}^k - Rm_m \kappa_0^m \delta_{2m}) w^k + a_{m35}^{\gamma k} u_{\gamma, \gamma\gamma}^k + a_{m36}^{\gamma k} u_{\gamma, \gamma}^k + a_{m37}^{\gamma k} u_{\gamma, \gamma\beta\beta}^k \right] - b_3^m \ddot{w}^m = -Rm_m \left[q_3^m \pm 0, 5h_m (q_1^m, 1 + R^{-1} c_2^m q_2^m, 2) \right] \delta_{m1}$$

$$(m, \alpha, \beta = 1, 2; \alpha \neq \beta). \quad (5)$$

Здесь δ_{mk} – символы Кронекера,

$$m_m = 1 \pm (c + h_m) R^{-1}, \quad b_1^m = 2R [\rho_m I_1^m + 0, 25 \rho_3 I_2^{\pm}], \quad b_3^m = b_1^m,$$

$$b_2^m = 2R \left[\rho_m (I_1^m + 2R^{-1} (1 \pm a_1/R)^{-1} I_3^m + R^{-2} (1 \pm a_1/R)^{-2} I_5^m) + \rho_3 (B_{m2})^2 I_2^{\pm} \right]. \quad (6)$$

Коэффициенты, входящих в (6) выражаются через геометрические характеристики слоев и параметры упругости материалов.

Метод Бубнова–Галеркина позволяет представить искомые перемещения и нагрузку в виде разложения в ряды по системе базисных функций:

$$u_{\beta}^k = \sum_{m,n} \Psi_{\beta mn}^k(x, \varphi) T_{\beta mn}^k(t), \quad w_k = \sum_{m,n} \Psi_{3mn}^k(x, \varphi) T_{3mn}^k(t), \quad q_l^k = \sum_{m,n} \Psi_{qlmn}^k(x, \varphi) q_{lmn}^k(t). \quad (7)$$

За счет выбора базисных функций $\Psi_{3mn}^k, \Psi_{3mn}^k$ должны удовлетворяться граничные условия. Подставив выражения (7) в систему (5), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функции времени $T_{jmn}(t)$:

$$\sum_{j=1}^6 P_{ljmn} T_{jmn} + q_{lmn}(t) = b_l \ddot{T}_{lmn}, \quad (l = 1 \dots 6). \quad (8)$$

Здесь коэффициенты P_{ljmn} зависят от волновых параметров m и n , которые характеризуют форму колебаний и связаны с числом узловых линий, q_{lmn} – коэффициенты разложения компонент внешней нагрузки по системе базисных функций.

Собственные колебания. Задачу о собственных колебаниях трехслойной цилиндрической оболочки получаем из (8), положив $q_{lmn} = 0$. Предполагая, что все точки конструкции совершают колебания с одинаковой частотой, уравнения для ее вычисления получим из (9), предварительно функции $T_{jmn}(t)$ представив в виде

$$T_{lmn}(t) = A_{lmn} \sin(\omega_{lmn} t + \alpha_{lmn}), \quad (9)$$

где A_{lmn}, ω_{lmn} – амплитуды и частоты колебаний; α_{lmn} – начальные фазы.

Опустив для краткости индексы m и n , подставив (9) в систему (8), придем к обобщенной задаче на собственные значения:

$$[P]\{A\} = -\omega^2 [B]\{A\}, \quad (10)$$

где $[P]$ – квадратная матрица шестого порядка, составленная из коэффициентов P_{ljmn} ; $[B]$ – диагональная матрица из b_i ; $\{A\}$ – вектор, сформированный амплитудами A_i .

Обозначив $\lambda = -\omega^2$ и обратив матрицу $[B]$, так как она не является вырожденной, осуществим переход от (10) к стандартной задаче на собственные значения:

$$[R]\{A\} = \lambda \{A\}, \quad [R] = [B]^{-1}[P]. \quad (11)$$

Переход от (11) к (10) и вычисление собственных значений λ легко реализуются с помощью стандартных программ, входящих в математическое обеспечение любого компьютера.

По найденным значениям ω_i^2 ($i = 1, \dots, 6$) вычисляется собственный вектор $\{A_i\}$.

Вынужденные колебания. Представим искомые функции времени (9) $T_{lmn}(t)$ в виде разложения в конечный ряд по системе собственных ортонормированных функций

$$T_{lmn} = \sum_{i=1}^6 D_{lmmi} \chi_{lmmi}.$$

Подставляя это выражение в (8) и используя свойство ортогональности собственных форм колебаний, приходим к шести независимым уравнениям относительно собственных функций времени ζ_{lmmi} (для каждого m и n):

$$\ddot{\chi}_{lmmi} + \omega_{lmmi}^2 \chi_{lmmi} = \tilde{q}_{lmmi}(t), \quad \tilde{q}_{lmmi} = \sum_{l=1}^6 q_{lmm} D_{lmmi} / \sum_{l=1}^6 b_l D_{lmmi}^2, \quad (12)$$

где \tilde{q}_{lmmi} – компоненты приведенной нагрузки (силовой или тепловой), δ_{lmmi} – коэффициенты форм.

После решения уравнений (12) искомые перемещения представляются в виде сумм произведений ζ_{lmmi} на соответствующие коэффициенты и исходные координатные функции (7).

Частные случаи. Рассмотрим несколько частных случаев локального нагружения цилиндрической оболочки, заполненной внутри наполнителем. Локальные поверхностные нагрузки могут быть сосредоточенными (приложенными в точке) и распределенными по длине (погонные силы) или по площади. Здесь сосредоточенные в точке нагрузки не рассматриваются.

Кольцевая равномерно распределенная нагрузка. Пусть к внешней поверхности оболочки приложена кольцевая равномерно распределенная нагрузка с интенсивностью q_0 (рисунок 2а):

$$q_3^1 = q_0(t)(H_0(x_1 - x) - H_0(x_0 - x)), \quad (13)$$

где x_0, x_1 – координаты границ кольца нагрузки.

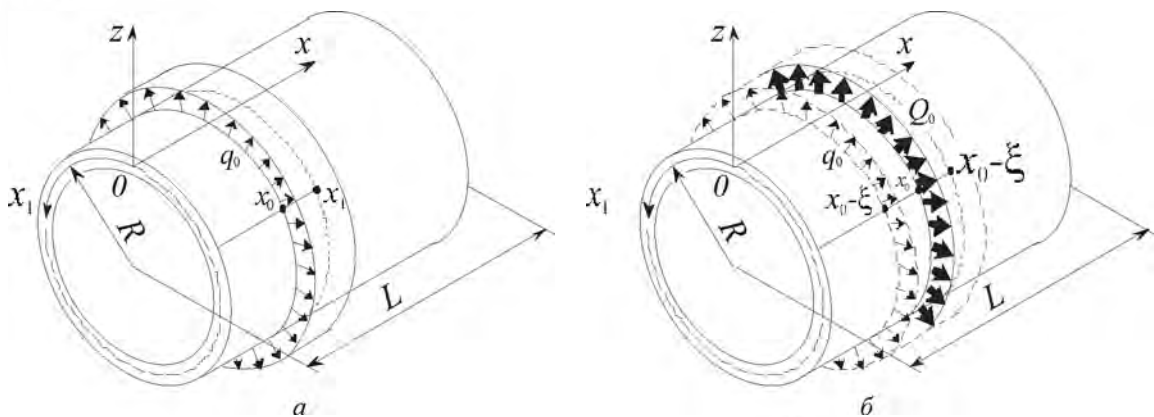


Рисунок 2 – Схемы нагружения цилиндрической оболочки

Коэффициенты разложения нагрузки (13) в ряд следуют из выражения (7):

$$q_{3m}^1 = \frac{2q_0(t)}{L} \int_{x_0}^{x_1} \sin\left(\frac{pm}{L}x\right) dx = \frac{2q_0(t)}{\pi m} \left(\cos\left(\frac{pm}{L}x_0\right) - \cos\left(\frac{pm}{L}x_1\right) \right). \quad (14)$$

Перемещения в несущих слоях описываются выражениями (1), функции времени $\zeta_m(t)$ определяются из соотношений (12).

Погонная сила. Пусть к внешней поверхности оболочки приложена погонная осесимметричная нагрузка распределенная по окружности с интенсивностью $Q_0(t)$ (рис.2б):

$$Q(x, t) = Q_0(t)H_0(x - x_0)H_0(x_0 - x),$$

где x_0 – координата сечения, в котором приложена нагрузка.

Решение задачи проведем, применяя результаты (14) для распределенной на интервале $(x_0 - \xi \leq x \leq x_0 + \xi)$ поверхностной нагрузки q_0 (13). Предполагая, что величина ξ мала, введем в функцию (14) замену $q_0 = Q_0/(2\xi)$ и устремим ξ к нулю, оставляя Q_0 постоянной:

$$q_{3m}^1 = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\frac{2Q_0(t)}{\pi m 2\xi} \left(\cos\left(\frac{pm}{L}(x_0 - \xi)\right) - \cos\left(\frac{pm}{L}(x_0 + \xi)\right) \right) \right] = \frac{2Q_0(t)}{L} \sin\left(\frac{pm}{L}x_0\right).$$

Численное исследование. Для примера представлено численное исследование колебаний круговой трехслойной цилиндрической оболочки ($h_1 = h_2 = 0,02 R$, $c = 0,025 R$), свободно опертой торцами на жесткие неподвижные опоры, наполненной упругой средой при действии внезапно приложенной сжимающей погонной нагрузки интенсивностью $Q_0 = -10^6$ Н/м, т. е. направленной противоположно внешней нормали.

Изменение прогибов несущих слоев в середине пролета оболочки (а) и горизонтальных перемещений на правом торце (б) показано на рисунках 3 ($\kappa_0 = 0$) и 4 ($\kappa_0 = 10^9$ Па/м) в зависимости от относительной координаты расположения силовой окружности. Моменты времени фиксировались так, чтобы перемещения достигали амплитудных значений.

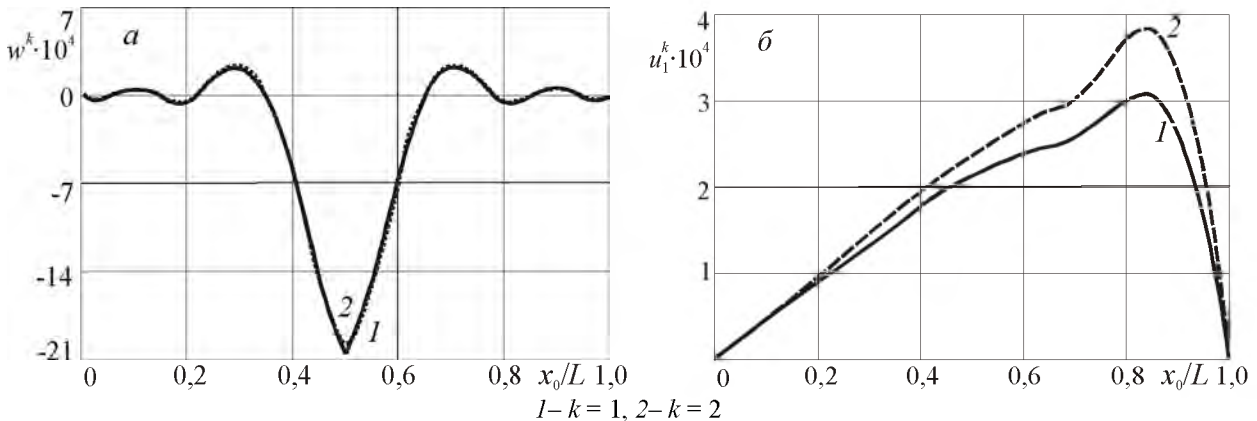


Рисунок 3 – Зависимость прогиба (а) и горизонтального перемещения (б) несущих слоев ($L = 2R$, $\kappa_0 = 0$) от места приложения силового кольца

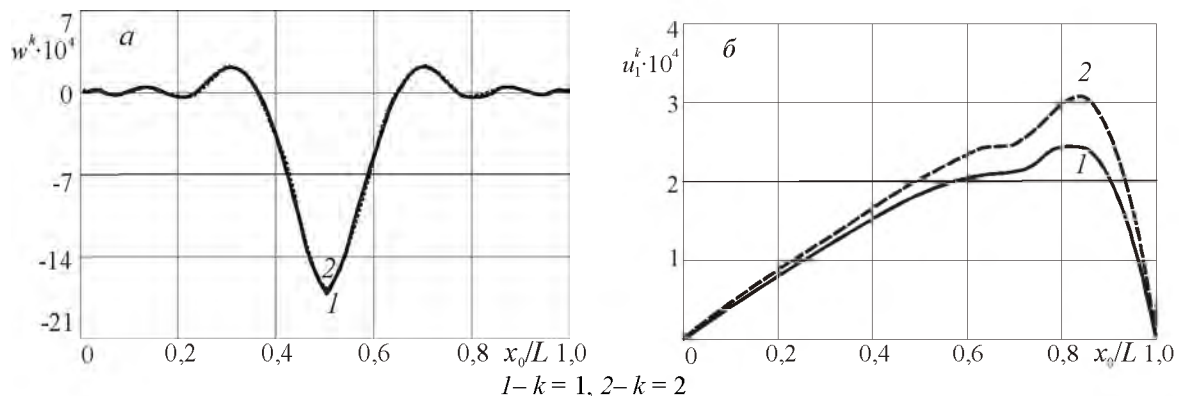


Рисунок 4. – Зависимость прогиба (а) и горизонтального перемещения (б) несущих слоев ($L = 2R$, $\kappa_0 = 10^9$ Па/м) от места приложения силового кольца

Максимальные прогибы в середине оболочки достигаются при действии кольца погонных сил над рассматриваемым сечением, причем отклонение силы на 10% L от сечения вызывает уменьшение вертикальных перемещений в 3 раза. С увеличением жесткости упругой среды область локальных изменений прогибов в окрестности рассматриваемого сечения сужается, их максимальная величина уменьшается. В среде высокой жесткости существенна разность прогибов несущих слоев, т. е. сжатие заполнителя максимально.

Горизонтальные перемещения на правом торце достигают максимальных значений (см. рисунки 3–4, б), если силовая окружность расположена в сечении $x = (0,82–0,92) L$. Как и в случае с прогибами при увеличении жесткости упругой среды сдвигаются вправо к рассматриваемому сечению $x = L$, разница между перемещениями в слоях уменьшается.

Выводы. Таким образом, построена механико-математическая модель динамического деформирования трехслойной цилиндрической оболочки, наполненной упругой средой. Получены решения задач о собственных и вынужденных колебаниях. Установлено, что по мере удаления от точек приложения локальных нагрузок перемещения быстро затухают с увеличением жесткости среды.

Резюме

Рассмотрены колебания трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем внутри под действием локальных нагрузок. Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа–Лява. В толстом заполнителе учитывается работа поперечного сдвига и обжатие по толщине, изменение перемещений принято линейным по поперечной координате. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Для упругого наполнителя принята гипотеза Винклера. В качестве примера исследовано изменение перемещений при действии погонных сил.

Литература

1. Поленов, В.С. Распространение волн в насыщенной жидкостью неоднородной пористой среде / В.С. Поленов, А.В. Чигарев // Прикладная математика и механика. – 2010. –Т. 74, № 2. – С. 276–284.
2. Старовойтов, Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2002. – 344 с.
3. Плескачевский, Ю.М. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю.М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д.В. Леоненко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.
4. Власов, В. З. Балки, плиты, оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 491 с.

Summary

The vibrations of the three-layered cylindrical shell with elastic filler under local load are considered. Kirchhoff-Love's hypotheses are accepted for the thin isotropic bearing layers. The work of the in-plane shear, compression over thickness and variations in displacements are taken linear along the transverse coordinate for the thick filler the conditions of displacement continuity are not used on the contact boundaries. Reaction of the elastic filler is described in terms of the Winkler model. The investigation of variations in displacements under action of linear forces is given as an example.

Поступила в редакцию 26.07.2012

**ПРИМЕНЕНИЕ СХЕМЫ «КРЕСТ» ПРИ ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ
ДИНАМИЧЕСКИХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИБКИХ АРМИРОВАННЫХ
БАЛОК-СТЕНОК С УЧЕТОМ ИХ ОСЛАБЛЕННОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ
ПОПЕРЕЧНОМУ СДВИГУ**

Немировский Ю.В., Янковский А.П.

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

Стержни и балки составляют основу силовых элементов многих защитных ограждений и ответственных элементов судостроительной, машиностроительной и авиационной техники, объектов стройиндустрии. При воздействии динамических нагрузок высокой интенсивности их повреждаемость во многом определяет возможность дальнейшего функционирования указанных объектов. Поэтому проблема динамического расчета таких элементов конструкций является одной из важнейших в механике деформируемого твердого тела. Большинство существующих на данный момент решений основано на модели идеального жесткопластического тела. Их обзор и анализ приведены в [1, 2 и др.]. Упругопластическая динамика изотропных балок исследована, например, в [3, 4 и др.], причем в [3] – на основе первого варианта теории Тимошенко, т.е. с учетом однородных по высоте поперечных сдвигов.

В работах [5, 6] авторы изучали динамическое поведение армированных балок в рамках моделей упругопластического и вязкопластического деформирования их фазовых материалов. Особенность этих исследований заключается в том, что они проводились в рамках гипотез Бернулли, т.е. в балках не учитывались поперечные сдвиги и они считались относительно жесткими (не гибкими). Однако известно, что при изучении механического поведения линейно-упруго или линейно-вязкоупруго изгибаемых тонкостенных элементов конструкций типа балок, пластин и оболочек волокнистой структуры с сильно выраженной анизотропией, когда модули упругости фазовых материалов различаются на несколько порядков (в 30 и более раз – угле-, боропластики и т.п. [7]), необходимо учитывать их ослабленное сопротивление поперечному сдвигу [3, 8–11 и др.].

В металлокомпозитных (или на основе металлического связующего) тонкостенных конструкциях модули упругости фазовых материалов различаются менее чем на порядок [7] (слабая анизотропия композиции), поэтому при исследовании их упругого поведения в условиях изгиба достаточно использовать классические теории Бернулли или Кирхгофа – Лява [10, 11 и др.], не учитывающие поперечные сдвиги. При изучении же упругопластического деформирования изгибаемых армированных металлокомпозитных тонкостенных элементов конструкций может оказаться необходимым учитывать их ослабленное сопротивление поперечному сдвигу. Действительно, в [12] была предложена итерационная модель упругопластического поведения перекрестно-армированного слоя, основанная на применении метода секущего модуля [13]. Покажем, что для некоторых металлокомпозитных или композиций с металлическим связующим при одних и тех же деформациях секущие модули (которые в линейно-упругом случае соответствуют модули упругости) фазовых материалов могут различаться в десятки раз и даже на два порядка.

С этой целью рассмотрим идеализированную диаграмму растяжения–сжатия фазового материала в виде диаграммы с линейным упрочнением [14]

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s = \sigma_s / E, \\ \text{sign}(\varepsilon) \sigma_s + E_s (\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon) \varepsilon_s), & |\varepsilon| > \varepsilon_s, \end{cases} \quad (1)$$

где σ , ε – напряжение и деформация; E , E_s – модуль Юнга и модуль линейного упрочнения; σ_s , ε_s – предел текучести и предельная упругая деформация фазового материала. Секущий модуль определяется так [13, 14]:

$$G_s(\varepsilon) = \sigma(\varepsilon) / \varepsilon. \quad (2)$$

На рис. 1 изображены зависимости

$$g(\varepsilon) = G_s^{(1)}(\varepsilon) / G_s^{(0)}(\varepsilon) \quad (3)$$

для некоторых композиций: АДН-У8А (кривая 1), АДМ-У8А (кривая 2), ИМВ-2-В (кривая 3). В равенстве (3) принято: $G_s^{(0)}$, $G_s^{(1)}$ – секущие модули связующего и арматуры композиции. Механические характеристики фазовых материалов, которые, согласно [12], предполагаются несжимаемыми, приведены в таблице.

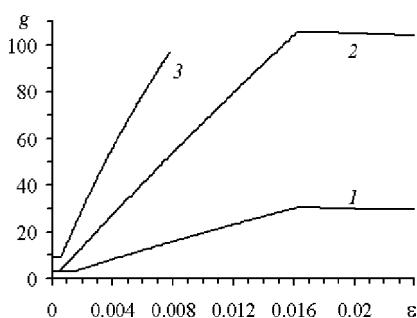


Рисунок 1 – Зависимости отношений секущих модулей некоторых фазовых материалов

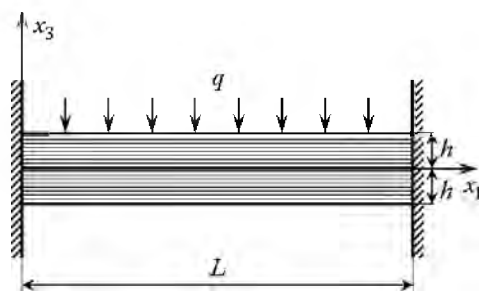


Рисунок 2 – Армированная балка-стенка

Таблица 1 – Физико-механические характеристики фазовых материалов [7]

Материал	ρ , кг/м ³	σ_s , МПа	E , ГПа	E_s , ГПа
Алюминиевый сплав АДН	2700	100	71	0,824
Алюминиевый сплав АДМ	2700	30	71	0,143
Магниевый сплав ИМВ-2	1590	26	45	0,965
Стальная проволока У8А	7800	3400	210	9,545
Борные волокна (В)	2550	3200	410	—

Левые горизонтальные участки кривых на рис. 1, согласно (1)–(3), соответствуют линейно-упругому деформированию обоих фазовых материалов, возрастающие участки – пластическому деформированию связующего, а правые убывающие участки – пластическому деформированию обоих фазовых материалов. (Борные волокна ведут себя упруго-хрупко [7], поэтому ниспадающий участок на кривой 3 отсутствует.)

Как видно из рис. 1, для некоторых металлокомпозиций или композиций с металлическим связующим отношение секущих модулей (3) может быть больше 30, следовательно, при изучении упруго-пластического изгиба тонкостенных элементов конструкций из таких композиций необходимо учитывать их ослабленное сопротивление поперечному сдвигу.

Для описания ослабленного сопротивления продольно-армированной балки-стенки поперечному сдвигу воспользуемся вторым вариантом теории Тимошенко [8, 10 и др.], т.е. сдвиговую деформацию ε_{13} в поперечном направлении x_3 зададим распределенной по высоте балки в следующем виде:

$$\varepsilon_{13}(x_1, x_3, t) = \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \varepsilon_{13}^0(x_1, t), \quad |x_3| \leq h, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad t \geq t_0, \quad (4)$$

где h – полувысота балки; L – ее длина; ε_{13}^0 – деформация поперечного сдвига в срединном слое ($x_3 = 0$); t – время; x_1, x_2, x_3 – прямоугольная декартова система координат, связанная с балкой, как показано на рис. 2; t_0 – начальный момент времени. Высота $2h$ балки-стенки и ее толщина B в направлении x_2 предполагаются постоянными (хотя это и не принципиально).

Согласно теории Тимошенко, обжатием тонкостенного элемента пренебрегаем, т.е. считаем, что прогиб u_3 не зависит от поперечной координаты x_3 ($u_3 = u_3(x_1, t)$). Используя дифференциальные соотношения, связывающие деформации с перемещениями, на основании (4) в приближении Кармана [15] получим

$$u_1(x_1, x_3, t) = u_1^0(x_1, t) - x_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{2x_3}{h^2} \left(h^2 - \frac{x_3^2}{3} \right) \varepsilon_{13}^0(x_1, t); \quad (5)$$

$$\varepsilon_{11}(x_1, x_3, t) = \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{2x_3}{h^2} \left(h^2 - \frac{x_3^2}{3} \right) \frac{\partial \varepsilon_{13}^0}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2, \quad |x_3| \leq h, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad (6)$$

где $u_1^0(x_1, t)$ – перемещение точек срединного слоя ($x_3 = 0$) в продольном направлении x_1 . Остальные деформации в рассматриваемых балках-стенках либо тождественно равны нулю ($\varepsilon_{12} \equiv \varepsilon_{23} \equiv 0$), либо определяются из условия несжимаемости $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0$, из которого, согласно допущениям, использованным в [12], для балок-стенок с учетом (6) и равенств $\sigma_{22} \equiv \sigma_{33} \equiv 0$ получаем $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\varepsilon_{11}/2$. (Здесь и далее ε_{ij} , σ_{ij} – тензоры усредненных деформаций и напряжений в композиции.)

Таким образом, в соотношениях (4)–(6) неизвестными являются функции u_1^0 , u_3 , ε_{13}^0 , зависящие только от одной пространственной переменной x_1 и времени t .

Зная выражения для компонентов тензора деформаций ε_{11} , ε_{13} , согласно равенству (28) с учетом соотношений (29), (27) из [12], можем определить все ненулевые компоненты напряжений в каждой точке балки-стенки

$$\sigma_{11}(x_1, x_3, t) = a_{11}^n \varepsilon_{11}, \quad \sigma_{13}(x_1, x_3, t) = a_{55}^n \varepsilon_{13}, \quad |x_3| \leq h, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad (7)$$

где a_{11}^n , a_{55}^n – ненулевые компоненты матрицы A^n в (29) из [12], известные в данный момент времени t в каждой точке тонкостенной конструкции из решения на предыдущей n -й итерации по методу секущего модуля и в рассматриваемом частном случае продольного армирования определяемые так:

$$a_{11}^n(x_1, x_3, t) = 3 \sum_{k=0}^K \omega_k g_k \left(\Gamma_k^n, \theta \right), \quad \frac{1}{a_{55}^n(x_1, x_3, t)} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^K \frac{\omega_k}{g_k \left(\Gamma_k^n, \theta \right)}, \quad (8)$$

$$\Gamma_k^n(x_1, x_3, t) = \sqrt{3 \varepsilon_{11}^{(k)} \varepsilon_{11}^{(k)} + 4 \varepsilon_{13}^{(k)} \varepsilon_{13}^{(k)}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K.$$

Здесь приняты те же обозначения, что и в [12]: K – количество семейств арматуры (предполагается, что в общем случае балка может быть армирована несколькими семействами волокон разной физической природы); ω_0 , ω_k – относительное объемное содержание связующего и арматуры k -го семейства в представительном элементе композиции;

$\varepsilon_{11}^{(k)}(x_1, x_3, t)$, $\varepsilon_{13}^{(k)}(x_1, x_3, t)$ – известные n -ые приближения деформаций в k -м фазовом материале (при $k = 0$ – в связующем, при $1 \leq k \leq K$ – в арматуре k -го семейства); Γ_k^n ($0 \leq k \leq K$) – известное n -ое приближение интенсивности деформаций сдвига в k -м фазовом материале [13, 14]; θ – температура композиции;

$g_k \left(\Gamma_k^n, \theta \right)$ – известный на n -ой итерации секущий модуль в k -м компоненте композиции: $T_k = g_k(\Gamma_k, \theta) \Gamma_k$ (T_k – интенсивность касательных напряжений в k -м фазовом материале). Отметим, что соотношения (8) формально совпадают со структурными формулами модели В.В. Болотина для однонаправленно армированного упругого композита в случае несжимаемых фазовых материалов [16].

Соотношения (7) с учетом (8) справедливы при нелинейно-упругом деформировании фазовых материалов или при активном их нагружении в случае упругопластического деформирования (в рамках деформационной теории пластичности [13, 14]). Учет разгрузки материалов компонентов компо-

зации приводит к более сложным, чем (7), (8), соотношениям $\sigma_{ij} \square \varepsilon_{ij}$, и этот случай в данной работе не рассматривается.

В настоящем исследовании для простоты предполагается, что балка нагружена только в поперечном направлении x_3 (см. рис. 2). При подстановке выражений (4) в соотношения (7) получаем автоматическое выполнение на верхней ($x_3 = h$) и нижней ($x_3 = -h$) торцевых поверхностях балки-стенки граничных условий по касательным напряжениям

$$\sigma_{13}^{(\pm)}(x_1, t) = \sigma_{13}(x_1, \pm h, t) = a_{55}^n(x_1, \pm h, t)\varepsilon_{13}(x_1, \pm h, t) \equiv 0.$$

В рамках первого варианта теории Тимошенко, используемого, например, в [3, 9 и др.], эти граничные условия не могут быть тождественно удовлетворены.

Используя уравнения равновесия гибких стержней [17], на основе принципа Даламбера с учетом (5) получим следующие уравнения движения балки-стенки:

$$\frac{\partial F_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(F_{13} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 2hB\rho \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial F_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(F_{11} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + Bp_3(x_1, t) = 2hB\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} - F_{13} = \frac{2}{3} h^3 B\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{8}{5} \varepsilon_{13}^0 - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \quad (10)$$

где [7]

$$\rho = \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^K \rho_k \omega_k; \quad (11)$$

ρ_0, ρ_k – объемная плотность материала связующего и арматуры k -го семейства; F_{11}, F_{13} – мембранная и поперечная силы соответственно; M_{11} – изгибающий момент; p_3 – приведенная поперечная распределенная по толщине нагрузка, действующая в направлении x_3 (согласно рис. 2, $p_3 = -q$).

Для удобства дальнейшего изложения введем в рассмотрение новую неизвестную функцию

$$\gamma_{13}^0(x_1, t) \equiv \frac{8}{5} \varepsilon_{13}^0 - \frac{\partial u_3}{\partial x_1},$$

Отсюда

$$\varepsilon_{13}^0(x_1, t) = \frac{5}{8} \left(\gamma_{13}^0 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right). \quad (12)$$

Уравнение (10) с учетом (12) примет вид

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} - F_{13} = \frac{2}{3} h^3 B\rho \frac{\partial^2 \gamma_{13}^0}{\partial t^2}. \quad (13)$$

Уравнения (9), (13) образуют систему уравнений движения рассматриваемой балки-стенки. Отметим, что нелинейным слагаемым в левой части первого уравнения (9) обычно пренебрегают [15, 18], предполагая его малость. В настоящем исследовании это слагаемое будем учитывать, так как для относительно высоких балок-стенок его вклад может быть значительным.

С учетом (12) соотношения (4)–(6) примут вид:

$$\varepsilon_{11}(x_1, x_3, t) = \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + \frac{x_3}{4h^2} \left(h^2 - \frac{5}{3} x_3^2 \right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{5x_3}{4h^2} \left(h^2 - \frac{x_3^2}{3} \right) \frac{\partial \gamma_{13}^0}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2, \quad (14)$$

$$\varepsilon_{13}(x_1, x_3, t) = \frac{5}{8} \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \left(\gamma_{13}^0 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \quad |x_3| \leq h, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad t \geq t_0;$$

$$u_1(x_1, x_3, t) = u_1^0(x_1, t) + \frac{x_3}{4h^2} \left(h^2 - \frac{5}{3} x_3^2 \right) \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{5x_3}{4h^2} \left(h^2 - \frac{x_3^2}{3} \right) \gamma_{13}^0(x_1, t). \quad (15)$$

На основании выражений (7) с учетом (14) можем определить все внутренние силовые факторы в балке:

$$\begin{aligned} F_{11}(x_1, t) &= B \int_{-h}^h \sigma_{11} dx_3 = A_{11}^n \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + B_{11}^n \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + C_{11}^n \frac{\partial \gamma_{13}^0}{\partial x_1} + \frac{1}{2} A_{11}^n \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2, \\ M_{11}(x_1, t) &= B \int_{-h}^h \sigma_{11} x_3 dx_3 = \bar{A}_{11}^n \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + D_{11}^n \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + E_{11}^n \frac{\partial \gamma_{13}^0}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \bar{A}_{11}^n \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2, \\ F_{13}(x_1, t) &= B \int_{-h}^h \sigma_{13} dx_3 = A_{55}^n \left(\gamma_{13}^0 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \quad 0 \leq x_1 \leq L, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11}^n(x_1, t) &\equiv B \int_{-h}^h a_{11} dx_3, \quad \bar{A}_{11}^n(x_1, t) \equiv B \int_{-h}^h a_{11} x_3 dx_3, \quad B_{11}^n(x_1, t) \equiv \frac{B}{4h^2} \int_{-h}^h a_{11} x_3 \left(h^2 - \frac{5}{3} x_3^2 \right) dx_3, \\ C_{11}^n(x_1, t) &\equiv \frac{5B}{4h^2} \int_{-h}^h a_{11} x_3 \left(h^2 - \frac{1}{3} x_3^2 \right) dx_3, \quad D_{11}^n(x_1, t) \equiv \frac{B}{4h^2} \int_{-h}^h a_{11} x_3^2 \left(h^2 - \frac{5}{3} x_3^2 \right) dx_3, \\ E_{11}^n(x_1, t) &\equiv \frac{5B}{4h^2} \int_{-h}^h a_{11} x_3^2 \left(h^2 - \frac{1}{3} x_3^2 \right) dx_3, \quad A_{55}^n(x_1, t) \equiv \frac{5B}{8h^2} \int_{-h}^h a_{55} \left(h^2 - x_3^2 \right) dx_3, \quad 0 \leq x_1 \leq L. \end{aligned} \quad (17)$$

Внутренние силовые факторы (16) должны удовлетворять уравнениям движения (9), (13).

Определим тип системы уравнений движения балки-стенки в геометрически линейной постановке в случае линейно-упругого поведения фазовых материалов композиции. При этом, согласно (8), имеем

$$a_{11} = \text{const}, \quad a_{55} = \text{const}, \quad (18)$$

причем в (8) $g_k = G_k = \text{const}$ ($0 \leq k \leq K$) – модуль сдвига k -го фазового материала. Здесь a_{11} – эффективный продольный модуль упругости композиции; a_{55} – удвоенный эффективный модуль поперечного сдвига композиции.

Подставляя (18) в соотношения (17), получим

$$\begin{aligned} A_{11} &= 2hBa_{11} = \text{const}, \quad \bar{A}_{11} = B_{11} = C_{11} = D_{11} = 0, \\ E_{11} &= \frac{2}{3} h^3 Ba_{11} = \text{const}, \quad A_{55} = \frac{5}{6} hBa_{55} = \text{const}. \end{aligned} \quad (19)$$

Равенства (16) с учетом (19) принимают вид

$$F_{11}(x_1, t) = 2hBa_{11} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1}, \quad M_{11}(x_1, t) = \frac{2}{3} h^3 Ba_{11} \frac{\partial \gamma_{13}^0}{\partial x_1}, \quad F_{13}(x_1, t) = \frac{5}{6} hBa_{55} \left(\gamma_{13}^0 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right). \quad (20)$$

Подстановка выражений (20) в (9), (13) приводит к системе разрешающих уравнений движения линейно-упругих балок-стенок в геометрически линейной постановке:

$$\begin{aligned} 2hB \left[\rho \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} - a_{11} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} \right] &= 0, \\ hB \left[2\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \frac{5}{6} a_{55} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \right] - \frac{5}{6} hBa_{55} \frac{\partial \gamma_{13}^0}{\partial x_1} &= Bp_3(x_1, t), \\ \frac{2}{3} h^3 B \left[\rho \frac{\partial^2 \gamma_{13}^0}{\partial t^2} - a_{11} \frac{\partial^2 \gamma_{13}^0}{\partial x_1^2} \right] + \frac{5}{6} hBa_{55} \left(\gamma_{13}^0 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Каждое уравнение (21) содержит волновой оператор (выражения, заключенные в квадратные скобки), причем частные производные от неизвестных функций, входящие в эти операторы, имеют наибольший порядок, поэтому тип системы (21) определяется именно этими волновыми операторами. Следовательно, система (21) является системой гиперболического типа, описывающей волновые процессы, распространяющиеся в линейно-упругих балках-стенках, подчиняющихся гипотезам второго варианта теории Тимошенко.

Как видно из первого и третьего уравнений системы (21), волновые процессы для функций u_1^0 , γ_{13}^0 распространяются вдоль балки с одной и той же скоростью $c_1 = \sqrt{a_{11}/\rho}$. Согласно же второму уравнению (21), волновой процесс для прогиба u_3 распространяется вдоль балки с существенно меньшей скоростью $c_2 = \sqrt{5a_{55}/(12\rho)} < c_1$. Так, для балки из ИМВ-2-В-композиции (см. таблицу) с одинаковым объемным содержанием арматуры и связующего ($\omega_0 = \omega_1 = 0,5$) на основании (8), (11), (18) получим $c_1 \approx 10500$ м/с, $c_2 \approx 3500$ м/с, т.е. скорость распространения волнового процесса для u_3 почти в три раза меньше, чем для волновых процессов, описываемых функциями u_1^0 , γ_{13}^0 . (Для композиций с еще более сильно выраженной анизотропией – угле-, боропластики – различие в скоростях c_1 , c_2 становится более существенным.)

Таким образом, для численного интегрирования уравнений движения (21) можно использовать схему «крест» [3, 19 и др.]. Условная устойчивость этой схемы накладывает следующее ограничение на выбор шагов по времени Δt и по пространственной переменной Δx_1 : $\Delta x_1 / \Delta t > c_1 > c_2$ [3, 19].

Если же рассматривается линейно-упругая задача в геометрически нелинейной постановке, то уравнения движения (9), (13) с учетом (16)–(19) принимают вид

$$\begin{aligned}
& 2hB \left(\rho \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} - a_{11} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} \right) - 2hB \left[\left(a_{11} - \frac{5}{6} a_{55} \right) \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{5}{12} a_{55} \gamma_{13}^0 \right] \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{5}{6} hBa_{55} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial \gamma_{13}^0}{\partial x_1} = 0, \\
& -2hBa_{11} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} + 2hB\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - 2hB \left\{ a_{11} \left[\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] + \frac{5}{12} a_{55} \right\} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - \\
& - \frac{5}{6} hBa_{55} \frac{\partial \gamma_{13}^0}{\partial x_1} = Bp_3(x_1, t), \\
& \frac{2}{3} h^3 B \left(\rho \frac{\partial^2 \gamma_{13}^0}{\partial t^2} - a_{11} \frac{\partial^2 \gamma_{13}^0}{\partial x_1^2} \right) + \frac{5}{6} hBa_{55} \left(\gamma_{13}^0 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{22}$$

Характеристическое уравнение системы (22):

$$\begin{aligned}
& \left(\rho \alpha_t^2 - a_{11} \alpha_x^2 \right) \left\{ \left(\rho \alpha_t^2 - a_{11} \alpha_x^2 \right) \left[\rho \alpha_t^2 - \left[a_{11} \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right) + \frac{5}{12} a_{55} \right] \alpha_x^2 \right] - \right. \\
& \left. - a_{11} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \left[\left(a_{11} - \frac{5}{6} a_{55} \right) \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{5}{12} a_{55} \gamma_{13}^0 \right] \alpha_x^4 \right\} = 0,
\end{aligned} \tag{23}$$

где α_t , α_x – параметры, задающие направление характеристики ($\alpha_t^2 + \alpha_x^2 = 1$).

Первый множитель в уравнении (23), стоящий вне фигурных скобок, порождает две действительные характеристики, соответствующие волновому оператору в третьем уравнении системы (22). Выражение же, заключенное в уравнении (23) в фигурные скобки, может порождать как действительные, так и комплексные характеристики в разных подобластях области интегрирования системы

(22) $0 \leq x_1 \leq L$, $t \geq t_0$, т.е. в зависимости от соотношения величин $\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1}$, $\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2$, $\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \gamma_{13}^0$ и малости

их модулей по сравнению с единицей. Следовательно, в общем случае система уравнений движения (22) является квазилинейной системой смешанно-составного типа [20].

В частном случае, когда

$$\left| \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \right| \square \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \square \left| \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \gamma_{13}^0 \right| \square 1, \quad (24)$$

уравнение (23) приближенно можно заменить на $\left(\rho \alpha_t^2 - a_{11} \alpha_x^2 \right)^2 \left(\rho \alpha_t^2 - \frac{5}{12} a_{55} \alpha_x^2 \right) = 0$,

которое соответствует системе (21). А значит, при выполнении условий (24) система (22) является гиперболической и для ее интегрирования можно использовать условно устойчивую схему «крест» [3, 19].

Так как в общем случае, когда условия (24) не выполняются, система (22) не является гиперболической, то применение схемы «крест» для ее численного интегрирования требует специального обоснования.

Покажем, что в случае больших прогибов (для гибких балок) схема «крест» для системы (22) является неустойчивой. В качестве конкретных примеров исследуем динамическое поведение балки-стенки длиной $L = 1$ м высотой $2h = 0,1$ м (см. рис. 2), выполненной из ИМВ-2-В-композиции (см. таблицу) с плотностью армирования $\omega_1 = 0,5$ ($\omega_0 = 1 - \omega_1 = 0,5$). Оба конца балки жестко закреплены, т.е. выполняются следующие граничные условия

$$u_3(x_1, t) = 0, \quad u_1^0(x_1, t) = 0, \quad \gamma_{13}^0(x_1, t) = 0 \quad (x_1 = 0, L; \quad t \geq 0). \quad (25)$$

Здесь второе и третье соотношения являются следствиями интегральных равенств

$$\int_{-h}^h u_1(x_1, x_3, t) dx_3 = 0, \quad \int_{-h}^h u_1(x_1, x_3, t) x_3 dx_3 = 0 \quad (x_1 = 0, L; \quad t \geq 0),$$

где функция $u_1(x_1, x_3, t)$ имеет выражение (15).

В начальный момент времени $t = 0$ балка находится в состоянии покоя

$$\begin{aligned} u_3(x_1, 0) = 0, \quad u_1^0(x_1, 0) = 0, \quad \gamma_{13}^0(x_1, 0) = 0, \\ \frac{\partial u_3(x_1, 0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_1^0(x_1, 0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \gamma_{13}^0(x_1, 0)}{\partial t} = 0 \quad (0 \leq x_1 \leq L) \end{aligned} \quad (26)$$

и нагружается фронтальной нагрузкой взрывного типа [1-3, 21]

$$p_3(x_1, t) = p_3(t) = p_* \left(e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_0 t} \right), \quad (27)$$

где $p_* = p_{\max} \left(e^{-\alpha_1 t_*} - e^{-\alpha_0 t_*} \right)^{-1}$, $t_* = \ln(\alpha_0 / \alpha_1) / (\alpha_0 - \alpha_1)$, $\alpha_0 \square \alpha_1 \square 1$; (28)

α_0, α_1 – параметры, задающие вид взрывной нагрузки; t_* – момент времени, в который внешняя нагрузка p_3 достигает своего максимального по модулю значения p_{\max} .

В расчетах принято $\alpha_0 = 200 \text{ с}^{-1}$, $\alpha_1 = 20 \text{ с}^{-1}$. На рис. 3 для примера изображена зависимость (27) с учетом (28) при $p_{\max} = 0,1 \text{ ГПа}$. Для численного интегрирования начально-краевой задачи (21), (25), (26) или (22), (25), (26) использовалась схема «крест». При этом вдоль оси балки вводилась равномерная сетка с шагом $\Delta x_1 = L / 20 = 0,05 \text{ м}$. Все частные производные в уравнениях системы (21) или (22) заменялись конечными разностями на трехточечном шаблоне (т.е. аппроксимация производных имела второй порядок точности [19]). Равномерный шаг по времени задавался равным $\Delta t = 10^{-8} \text{ с}$. Следовательно, $\Delta x_1 / \Delta t = 5 \cdot 10^6 \square c_1 = 10500 \text{ м/с}$, т.е. необходимое условие устойчивости схемы «крест» для системы (21) выполнялось.

На рис. 4, 5 изображены кривые, характеризующие вертикальные колебания центрального сечения балки-стенки ($x_1 = L / 2$) при разных уровнях нагружения p_{\max} и разном механическом поведении связующего ИМВ-2.

На рис. 4 приведена зависимость $u_3(L/2, t)$ при $p_{\max} = 0,1$ ГПа. Как видно из этого рисунка, $|u_3| \leq 2h/5 = 2$ см, т.е. прогибы являются малыми (балка – относительно жесткой), поэтому выполняются условия (24) и система (22) является гиперболической, а значит, применение схемы «крест» приводит к устойчивому численному решению, которое визуальнo практически не отличается от решения системы (21).

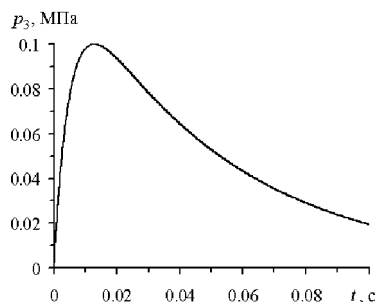


Рисунок 3 – Поведение фронтальной нагрузки взрывного типа

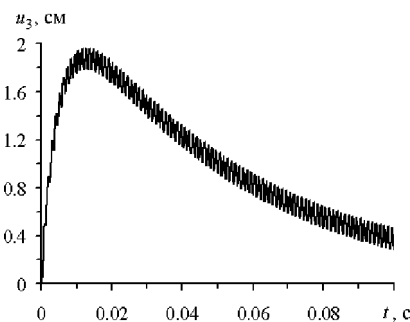
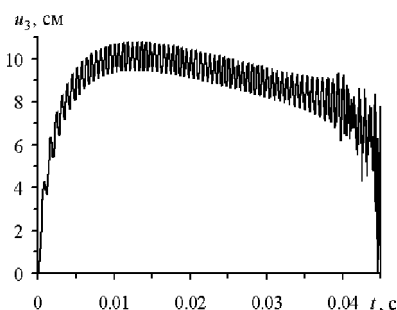
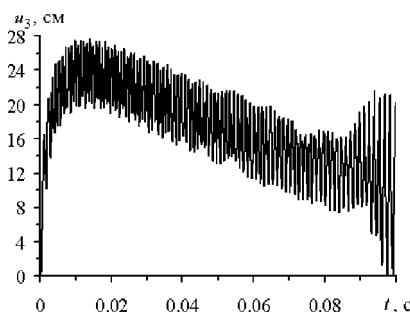


Рисунок 4 – Вертикальные колебания центрального сечения при $p_{\max} = 0,1$ ГПа

На рис. 5 изображены зависимости $u_3(L/2, t)$, рассчитанные при значительно большем уровне нагрузки ($p_{\max} = 1$ ГПа), причем на рис. 5, а приведено решение, полученное в предположении об идеальном линейно-упругом поведении связующего ИМВ-2 ($\epsilon_s \rightarrow \infty$ в (1)), а на рис. 5, б – в предположении об нелинейно-упругом поведении связующего, описываемом соотношениями (1) и табличными данными для сплава ИМВ-2.



а



б

а) – линейно-упругое поведение связующего; б) – нелинейно-упругое поведение связующего ИМВ-2
Рисунок 5 – Вертикальные колебания центрального сечения при $p_{\max} = 1$ ГПа

Из рис. 5 следует, что $|u_3| \square 2h = 10$ см, т.е. прогибы при $p_{\max} = 1$ ГПа являются большими, поэтому условия (24) не выполняются и система (22) (или в нелинейно-упругом случае система (9), (13) с учетом (16), (17)) не является гиперболической. Поведение правых участков кривых на рис. 5 показывает, что схема «крест» в этом случае является неустойчивой как при линейно-упругом, так и при нелинейно-упругом поведении фазовых материалов композитной балки-стенки. По-видимому, и в более общем случае упругопластического деформирования фазовых материалов (с учетом явления разгрузки и эффекта Баушингера) схема «крест» также будет неустойчивой при решении задач динамики изгибаемых балок-стенок в рамках геометрически нелинейной постановки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00121-а).

Литература

1. Комаров, К.Л. Динамика жестко-пластических элементов конструкций / К.Л. Комаров, Ю.В. Немировский. – Новосибирск: Наука, 1984. – 236 с.
2. Ананенко, Л.А. Динамика неупругих балок / Л.А. Ананенко, К.Л. Комаров. – Новосибирск: Наука, 1999. – 151 с.

3. Абросимов, Н.А. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций / Н.А. Абросимов, В.Г. Баженов. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
4. Карпов, В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. В 2 ч. Ч. 1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения / В.В. Карпов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 288 с.
5. Немировский, Ю.В. Интегрирование задачи динамического упругопластического изгиба армированных стержней переменного поперечного сечения обобщенными методами Рунге – Кутты / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Вычислительные технологии. – 2004. – Т. 9, № 4. – С. 77–95.
6. Немировский, Ю.В. Динамический вязкопластический изгиб армированных стержней переменного поперечного сечения / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Математические методы и физико-механические поля. – 2006. – Т. 49, № 1. – С. 53–66.
7. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. Д. М. Карпиноса. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
8. Малмейстер, А.К. Соппротивление полимерных и композитных материалов / А.К. Малмейстер, В.П. Тамуж, Г.А. Тетерс. – Рига: Зинатне, 1980. – 571 с.
9. Васильев, В.В. Механика конструкций из композитных материалов / В.В. Васильев. – М.: Машиностроение, 1988. – 269 с.
10. Немировский, Ю.В. Прочность элементов конструкций из композитных материалов / Ю.В. Немировский, Б.С. Резников. – Новосибирск: Наука, 1986. – 166 с.
11. Немировский, Ю.В. О границах применимости некоторых теорий расчета изгибаемых армированных пластин / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Научный вестник НГТУ. – 2004. – №3 (18). – С. 91–113.
12. Немировский, Ю.В. Структурная модель механики металлокомпозитов / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Проблемы и достижения прикладной математики и механики: к 70-летию академика В.М. Фомина: сб. науч. тр. – Новосибирск: Параллель, 2010. – С. 98–103.
13. Ильюшин, А.А. Пластичность. Ч. 1. Упруго-пластические деформации / А.А. Ильюшин. – М.–Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948. – 376 с.
14. Малинин, Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н.Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.
15. Васидзу, К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
16. Болотин, В.В. Основные уравнения теории армированных сред / В.В. Болотин // Механика полимеров. – 1965. – № 2. – С. 27–37.
17. Доннелл, Л.Г. Балки, пластины и оболочки / Л.Г. Доннелл. – М.: Наука, 1982. – 567 с.
18. Вольмир, А.С. Гибкие пластинки и оболочки / А.С. Вольмир. – М.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1956. – 420 с.
19. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
20. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов / Т.Д. Джураев. – Ташкент: Фан, 1979. – 238 с.
21. Физика взрыва / Под ред. К. П. Станюковича. – М.: Наука, 1975. – 704 с.

Summary

It is formulated the initial-boundary problem of the dynamic deformation of a flexible reinforced beams-panels with regard to their weakened resistance of the transverse shear in the approximation of Karman. It is shown that in elastoplastic deformation of metal-composite beams it is necessary to take into account the weakened resistance to in-plane shear. A qualitative analysis of the governing system of equations of motion is performed. It is demonstrated that in the geometrically linear formulation the dynamics of the linear-elastic beams is described by a system of hyperbolic type, so for the numerical integration of the application of the «cross» scheme is quite justified if it meets necessary conditions of stability. In the framework of the geometrically nonlinear formulation of a problem of the dynamics the governing system of equations of motion is not hyperbolic, so in this task the «cross» scheme is unstable.

Поступила в редакцию 12.11.2012

К МОДЕЛИРОВАНИЮ ТЕХНОЛОГИИ ИЗГОТОВЛЕНИЯ КРЕМНИЕВЫХ МЭМС/НЭМС-ПРИБОРОВ

А.В.Юхневич, И.А.Майер, А.Е.Усенко

*Учреждение Белорусского государственного университета
«Научно-исследовательский институт физико-химических проблем», г. Минск*

Монокристаллический кремний является основным материалом современной микро-/нано-электроники и перспективным исходным материалом для изготовления других миниатюрных приборов и систем различного назначения, таких как электромеханические (МЭМС/НЭМС), оптические, химико-аналитические. По нашему мнению, поверхность совершенных монокристаллов можно рассматривать как наиболее перспективную исходную двухмерную среду, которая позволяет обеспечить атомную точность при формировании на ней как отдельных микро-/нано-приборов, так и их упорядоченных множеств в сложных трехмерных устройствах [1]. На пути к естественному пределу миниатюризации – атомным размерам приборов, будет возрастать роль совершенства исходных монокристаллов. В этом и в других отношениях, благоприятствующих миниатюризации изделий, монокристаллический кремний находится в числе лидеров. Основные проблемы на этом пути связаны с разработкой соответствующих технологий.

Маскированное химическое растворение – ключевой этап в технологии изготовления многих современных и перспективных кремниевых миниатюрных приборов. Сущность этого процесса заключается в скульптурировании кристалла путем его растворения в окнах химической маски, нанесенной на поверхность. Общая форма результирующей структуры, качество ее деталей, определяется кристаллографической ориентацией исходной поверхности, формой и ориентацией маски, свойствами растворителя, условиями проведения процесса (температура, характер перемешивания раствора, освещение и др.). Пример такой структуры показан на рис. 1. Эта и большинство других разрабатываемых микроструктур представляют

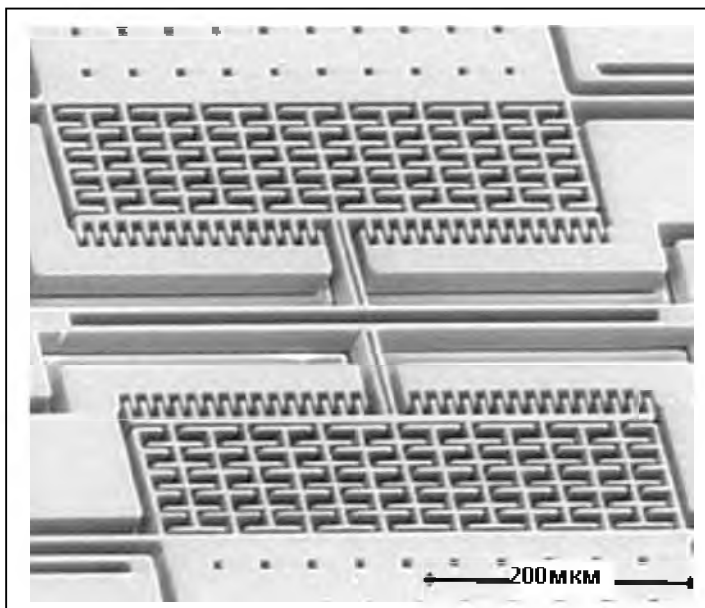


Рисунок 1. – Фрагмент конструкции резонансного микроакселерометра.

собой совокупность прямоугольных микро-/нано-деталей, форма и качество поверхности которых определяют эксплуатационные параметры соответствующих миниатюрных приборов.

С целью совершенствования технологии изготовления кремниевых микро-/нано-приборов в НИИ ФХП БГУ экспериментально и теоретически изучаются особенности маскированного растворения монокристаллического кремния. Некоторые результаты этой работы представлены в докладе. В частности, на рис.2 продемонстрирована полученная в натуральных опытах связь формы результирующей поверхности с условиями растворения. Определены зависимости ориентации, морфологии, скорости растворения самоформирующихся микро-/нано-поверхностей от химического состава и температуры растворителя, формы маски и от других условий травления кристалла [2].

В настоящее время основной метод оптимизации рассматриваемого технологического процесса – эмпирический подбор экспериментальных условий, при которых обеспечивается необходимое качество отдельных деталей и параметры микроприбора в целом. Современные теории растворения кристаллов не позволяют с желательной (атомной) точностью прогнозировать результаты натуральных опытов и производственных достижений при формировании 3D-структуры микро-/нано-объектов методом маскированного химического травления. Недостаточно изучены атомно-молекулярные физико-химические механизмы процесса растворения. Одним из перспективных путей изучения деталей этого процесса является его компьютерное моделирование на атомном уровне и сравнительный анализ результатов такого моделирования с результатами соответствующих натуральных экспериментов [3].

Основной результат нашего движения в данном направлении – разработка и испытание ряда оригинальных компьютерных программ Diamond (кинетический Монте-Карло-алгоритм, Borland C++ Builder, Windows XP), предназначенных для моделирования на атомном уровне маскированного растворения кристаллов типа алмаза [4]. В этих программах (моделях растворения) все физико-химические особенности процесса растворения и его элементарных стадий (удаление каждого атома с немаскированной части изучаемой поверхности) определяются набором вероятностей модели (НВМ) – рядом значений вероятности удаления поверхностных атомов различных типов.

В модели Diamond-3, которая рассматривается в данном сообщении, атомы поверхности классифицируются не только по числу первых и вторых соседей, но и по их принадлежности к поверхностным (число соседей меньше четырех), или к объемным (число соседей равно четырем). В этом случае НВМ включает 139 вероятностей – по числу различных типов поверхностных атомов.

Блок-схема программы Diamond-3 показана на рис. 3, где приняты следующие обозначения параметров программы: $[{}^0N_1 - {}^0N_{139}]$ – числа атомов различных типов на исходной поверхности, определяющие ее микро-/нано-рельеф; N – общее число атомов, удаляемых в компьютерном эксперименте; M – номер цикла, соответствующего удалению выбранного поверхностного атома; $[P_1 - P_{139}]$ – НВМ – вероятности удаления атомов различных типов; Mn_i – номер атома i -типа, удаляемого в M -ом цикле; $[{}^MN_1 - {}^MN_{139}]$ – числа атомов различных типов после удаления атома в M -ом цикле. Результат работы программы – изображение травленной поверхности с атомным разрешением. Программа позволяет выделять заданными цветами атомы различных типов.

На рис. 4 показаны примеры таких изображений, полученные в двух компьютерных экспериментах по маскированному травлению поверхности (001) кристалла кремния в изотропном и анизотропном

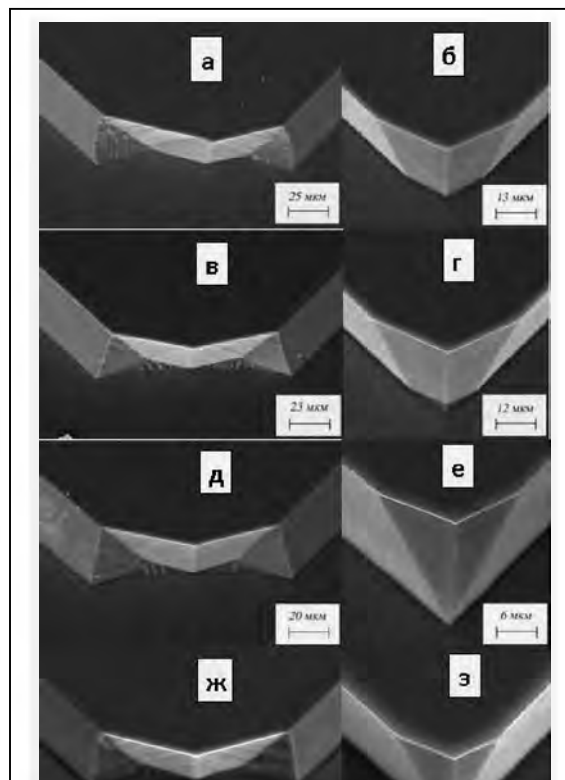


Рисунок 2. – Формы результирующего микро-рельефа вблизи прямого угла маски на поверхности (001) после травления кристалла в растворе КОН различных концентраций (моль/литр) при $T=80^\circ\text{C}$: а, б – 10; в, г – 12; д, е – 14; ж, з – 16 м/л. Левый ряд – тип ориентации краев угла маски $\langle 011 \rangle$, правый ряд – $\langle 001 \rangle$.

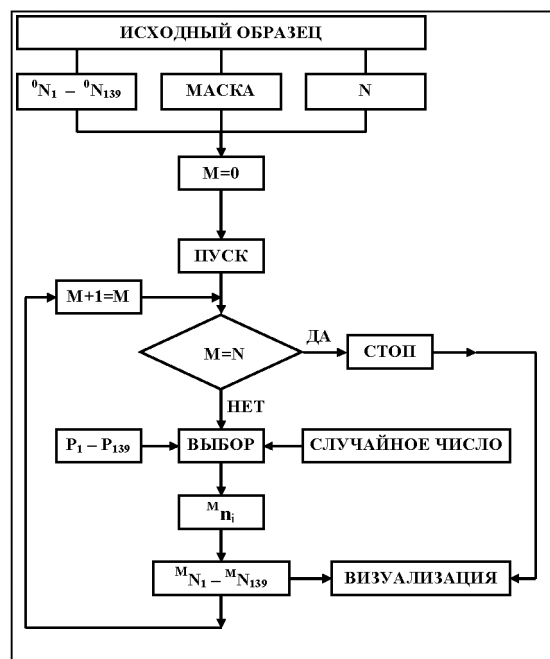


Рисунок 3. Блок-схема программы Diamond-3

тропном «растворителях». Красным, желтым, синим и зеленым цветом выделены, соответственно, атомы маски, двух-, трех- и четырех-связные атомы поверхности.

Нано-/микро-/макро-детали результирующего рельефа «травленной» поверхности определяет содержание НВМ. Очевидно, что соотношение вероятностей P_{1-139} в конкретном компьютерном эксперименте зависит как от энергий связи каждого атома с поверхностью, так и от особенностей взаимодействия атомов кристалла с ионами и молекулами растворителя (от «сорта» последнего). Энергии связи, в свою очередь, определяются числом и типом соседей каждого атома («сортом» кристалла).

Основной проблемой в каждом компьютерном эксперименте является нахождение набора НВМ – численных значений вероятностей $P_1 - P_{139}$, который давал бы результат, адекватный изучаемой технологической задаче. Эта проблема решается целенаправленным подбором в сочетании с использованием теоретических оценок энергий взаимодействия атомов кремния с соседними атомами кристалла и молекулами раствора.

Объектом наших исследований является процесс маскированного химического растворения монокристаллического кремния с прикладной целью совершенствования технологии (повышения точности) изготовления сложных предельно миниатюрных кремниевых приборов различного назначения, таких как акселерометры, гироскопы, инвазивные автономные медицинские роботы. В натуральных экспериментах, с использованием различных видов оптической, электронной, атомно-силовой микроскопии, мы изучаем особенности «самоформирования» отдельных элементов конструкции таких микро/нано-изделий.

В компьютерных экспериментах, целью которых является выяснение физико-химических деталей процесса растворения кристалла в конкретных экспериментальных условиях (ориентация исходной поверхности, форма маски, раствор определенного состава), подбираются параметры программы (N_{1-139} – характер исходной поверхности, форма маски, набор P_{1-139}), дающие результат (3D-форма результирующего «компьютерного» микро/нано-объекта), похожий в наибольшей мере на результат соответствующего натурального опыта. Выделенный таким образом набор вероятностей содержит информацию о тонких особенностях элементарных актов взаимодействия поверхностных атомов кремния с молекулами и ионами растворителя, которую затруднительно получить известными экспериментальными и теоретическими методами.

В компьютерных экспериментах, направленных на изучение возможности изготовления конкретного микро/нано-изделия, имеющего определенную 3D-форму, подбираются такие параметры программы Diamond, которые обеспечивают наилучшее соответствие «компьютерной» формы изделия с необходимой. Результаты такого подбора способствуют определению реальных экспериментальных и производственных условий изготовления изделий, имеющих ожидаемые параметры. В частности, найденные таким образом значения вероятностей $P_1 - P_{139}$ содержат информацию об оптимальном составе растворителя, который можно рекомендовать для разработки и использования в соответствующем технологическом процессе.

Сравнительный анализ имеющихся к настоящему времени результатов натуральных и компьютерных опытов по растворению важной для практики поверхности (001) кристалла кремния показал, что модель Diamond-3 способна передать основные особенности процесса растворения лучше, чем ее предшественники, в которых учитывалось только число первых и вторых соседей. Однако для наиболее адекватного согласования этих результатов на атомном уровне требуется совершенствование и этой модели в направлении более тонкого учета особенностей каждого поверхностного атома и его окружения. В настоящее время варианты такого совершенствования изучаются. Программа Diamond относительно просто может быть адаптирована к моделированию процесса растворения других кристаллов, имеющих структуру, отличную от алмазоподобной.

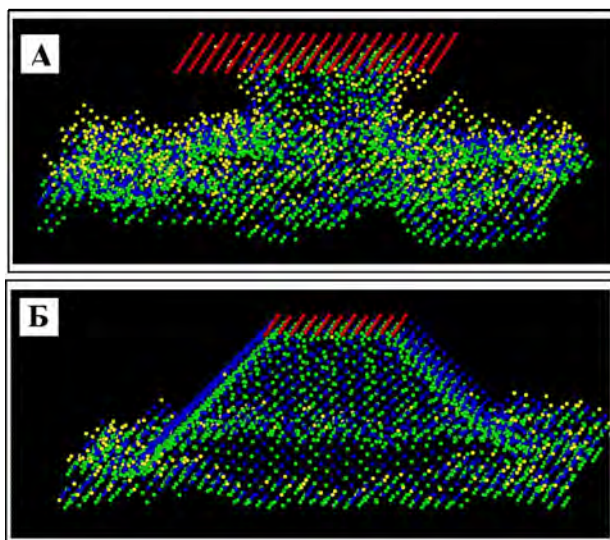


Рисунок 4. Примеры визуализации структур, сформированных при маскированном «травлении» поверхности (001): А – в изотропном «растворе»; Б – в анизотропном «растворе»

Резюме

В статье приводится описание оригинальной компьютерной программы, предназначенной для моделирования на атомном уровне процесса маскированного растворения монокристаллов типа алмаза. Этот процесс является ключевым в технологии изготовления большинства современных и перспективных кремниевых МЭМС/НЭМС-приборов. Сравнение результатов натуральных и компьютерных экспериментов позволяет уточнить детали процесса растворения кристалла кремния, а также наметить пути совершенствования технологии изготовления миниатюрных кремниевых приборов различного назначения. В основе программы – кинетический метод Монте-Карло и классификация атомов поверхности по числу и типу первых и вторых соседей поверхностного атома, удаляемого в каждом цикле работы программы.

Литература

1. Юхневич А. В. Некоторые особенности атомной структуры монокристаллов кремния. /Сборник: «Избранные научные труды Белорусского Государственного Университета». Т. 5.// А. В. Юхневич. –Мн.: БГУ. 2001. – С. 89-122.
2. Усенко А.Е. Анизотропное растворение монокристаллического кремния вблизи края химической маски на поверхности (001) / А.Е.Усенко, А.В.Юхневич, // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2009, – №8. – С. 64-70.
3. Gosalvez, M.A. An atomistic introduction to anisotropic etching / M.A. Gosalvez, K. Sato, A.S. Foster, R.M. Nieminen and H. Tanaka // J. Micromech. Microeng. – 2007. – V.17, No.4. – P.S1–S26.
4. Юхневич А. В. Атомное моделирование процесса химического растворения кристаллов кремния. / А. В. Юхневич, И. А. Майер, А. Е. Усенко. //Тезисы докладов VIII-й Международной конференции и VII-й Школы ученых и молодых специалистов по актуальным проблемам физики, материаловедения, технологии и диагностики кремния, наноразмерных структур и приборов на его основе «КРЕМНИЙ 2011», Москва, Россия, 05-08 июля 2011 г. М.: Изд. дом «МИСиС», 2011. – С.126.

SUMMARY

This paper considers an original computer program designed to simulate at the atomic level the process of diamond crystal etching with chemical masking. This process is a key technology in the manufacture of most modern and advanced silicon MEMS / NEMS devices. At the heart of the program - a kinetic Monte Carlo method and the classification of the surface atoms on the number and type of the first and second neighbors. Comparison of the results of computer and real experiments enables us to refine the details of the silicon crystal dissolution process, and identify ways to improve the technology of miniaturized silicon devices.

Поступила в редакцию 28.11.2012

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ОСТЕОГЕНЕЗА НА МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОРИСТОГО ТИТАНА ПРИ СЖАТИИ

¹Никитин А.В., ²Шилько С.В.

¹УО «Белорусский государственный университет», Минск

²ГНУ Институт механики металлополимерных систем им. В.А. Белого НАНБ, Гомель

Введение. Критическим параметром, определяющим нормальное приживление и последующее функционирование имплантируемых протезов, является прочность их соединения с прилегающими биотканями организма. Повышение этого показателя достигается созданием микрорельефа (разного рода неровностей и каналов) на поверхности имплантата. В этой связи проницаемость и развитая поверхность пористых материалов на основе керамики, полимеров и металлов обеспечивают активное врастание биоткани и формирование сети кровеносных сосудов, способствуя широкому применению таких материалов в хирургии.

Для частичного или полного замещения костных тканей активно применяется пористый титан [1-5], обладающий коррозионной стойкостью и биосовместимостью, повышенной статической прочностью и формостабильностью в сравнении с известными бионейтральными полимерными материалами, а также ударной вязкостью, существенно превосходящей вязкость керамических протезирующих материалов. Модуль упругости пористого титана можно регулировать в довольно широком интервале значений, характерных для костной ткани [6,7], что способствует деформационной совместимости имплантатов [6]. В результате снижается концентрация напряжений и улучшается передача нагрузки на проксимальную часть бедренной кости, если речь идет об эндопротезах суставов.

Чтобы оптимизировать конструкцию эндопротезов и прогнозировать их работоспособность, необходимо оценить кинетику изменения деформационно-прочностных свойств пористого титана в процессе остеогенеза и образования композита кость/титан. Весьма информативными представляются экспериментальные и теоретические методы механики композитов [7-9], в частности, анализ диаграмм деформирования, получаемых при механических испытаниях образцов имплантируемого пористого материала в различных фазах остеогенеза [10,11].

Целью настоящего исследования была оценка изменения упругих свойств пористого титана при завершеном остеогенезе в протезах тазобедренного сустава.

Материал и методика исследования. В качестве объекта исследования использовали ножку эндопротеза бесцементной фиксации со вставками из пористого титана (рис. 1) до и после имплантации на срок, при котором завершился остеогенез. Можно отметить, что способ размещения и развитая поверхность вставок направлены на повышение прочности адгезионного соединения имплантата с костными тканями в зоне максимальных растягивающих напряжений.

Для количественной оценки прогнозируемого эффекта упрочнения в результате формирования композита кость/титан проводились испытания на статическое сжатие призматических сегментов вставок толщиной 4 мм до и после заполнения пор, размер которых варьировался в пределах 150...350 мкм, костной тканью. Нагружение производилось на машине Instron 5567 (ИММС НАНБ) со скоростью 10 мм/мин (рис. 2). Результаты испытаний представлены на рис. 3. Напряжения рассчитывались, исходя из поперечного сечения образца в недеформированном состоянии (это является корректным ввиду высокой сжимаемости пористого титана; погрешность возрастает по мере остеогенеза вследствие увеличения коэффициента Пуассона). На диаграмме деформирования выделяются три линейных участка. Искажения формы образцов в виде неплоскостности и шероховатости граней проявляются в виде начального участка, который в дальнейшем исключался из рассмотрения.



а) исходная структура вставки из пористого титана;
 б) структура с порами, заполненными костной тканью
 Рисунок 1 – Ножка эндопротеза бесцементной фиксации



Рисунок 2 – Испытательная машина Instron 5567.

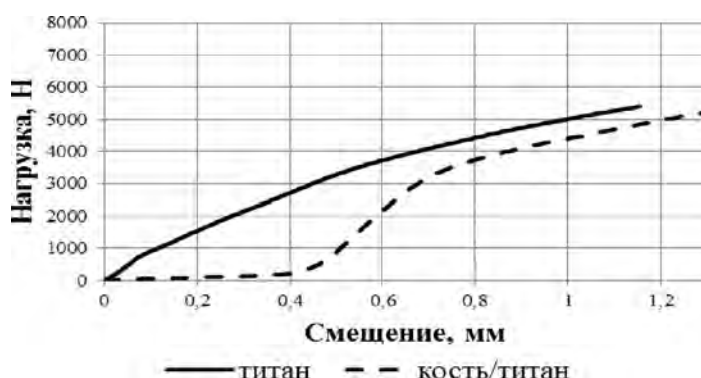


Рисунок 3 – Зависимость нагрузки от смещения. Сплошная линия – пористый титан; пунктирная линия – композит кость/титан

Для определения модуля Юнга по приведенной ниже формуле анализировали второй линейный участок диаграмм в интервале сжимающего усилия 1000...3000Н:

$$E = \frac{\Delta F}{\Delta U} \cdot \frac{H}{S},$$

где E – модуль Юнга; ΔF – приращение усилия сжатия; ΔU – приращение перемещений сжатия; S , H – площадь поперечного сечения и высота образца соответственно.

Обсуждение результатов. Результаты исследований показали справедливость предположения, что заполнение ячеек пористого титана костной тканью способствует повышению его механических характеристик. Модуль Юнга исходного образца, рассчитанный исходя из диаграммы сжатия, составил 0,61 ГПа. Следует отметить соответствие указанного значения экспериментальным данным для губчатой кости. Модуль Юнга сформированного композита кость/титан равен 1,24 ГПа. Таким образом, в процессе остеосинтеза происходит более чем двукратное увеличение модуля упругости имплантируемого материала.

Несмотря на довольно убедительные результаты проведенного эксперимента, следует принять во внимание предварительный характер полученных результатов, не позволяющих дать статистически значимую оценку влияния остеогенеза на деформационные характеристики пористого титана. В дальнейшем планируется проведение дополнительных испытаний с использованием большего количества образцов, а также исследование реологических свойств рассматриваемых материалов.

Заклучение. Показано, что кинетика деформационно-прочностных свойств пористого титана в процессе остеогенеза является актуальной областью биомеханических исследований. Проведенные испытания на статическое сжатие показали двукратное повышение модуля упругости имплантированного материала в результате заполнения пор костной тканью.

Резюме

Рассмотрено применение пористого титана для повышения функциональных характеристик эндопротезов. Показано, что кинетика деформационно-прочностных свойств пористого титана в процессе остеогенеза является актуальной областью биомеханических исследований. Проведенные испытания на статическое сжатие показали двукратное повышение модуля упругости имплантированного материала в результате заполнения пор костной тканью.

Литература

1. Гюнтер, В.Э. Физико-механические свойства и структура сверхэластичных пористых сплавов на основе никелида титана / В.Э. Гюнтер [и др.] // Письма в ЖТФ. – 2000. – Т. 26, Вып. 1. – С. 71-76.
2. Spoerke, E.D. Titanium with aligned, elongated pores for orthopedic tissue engineering applications / E.D. Spoerke [etc.] // J. of Biomed. Mater. Research Part A. – 2008. – 84A. – 402-412.
3. Choe, H. Superalloy foams produced by gas-phase alloying techniques / H. Choe, D. Dunand // 3rd Int. Conf. on Cellular Metals and Metal Foaming Technology. – Berlin. – 2003. – P. 261-266.
4. Пинчук, Л.С. Эндопротезирование суставов: технические и медико-биологические аспекты / Л.С. Пинчук, В.И. Николаев, Е.А. Цветкова. – Гомель, ИММС НАНБ. – 2003. – 308 с.
5. Савич, В.В. Влияние состояния поверхности титановых имплантатов на их взаимодействие с биологическими тканями и жидкостями / В.В. Савич, М.Г. Киселев, Т.П. Павич // Порошковая металлургия: Респ. межвед. сб. научн. трудов. – Вып. 29. – Минск, 2006. – С. 283–306.
6. Шилько, С.В. О деформационной совместимости имплантатов с мягкими биологическими тканями / С.В. Шилько [и др.] // XLII Респ. научно-метод/ семинар «Применение методов компьютерной механики в инженерии, науке, образовании». – Минск, 3-4 февр. 2011 г.
7. Shilko, S. Development of metal-polymer composite for cardioprotheses: application of mesomechanics, surface engineering and hemocompatibility analysis / S. Shilko [etc.] // Инженерия поверхности. Новые порошк. комп. материалы. Сварка. Сб. докл. межд. симп. Ч. 2. – Минск, 25-27 марта 2009. – С. 276–282.
8. Michailidis, N. Experimental and FEM analysis of the material response of porous metals imposed to mechanical loading / N. Michailidis [etc.] // J. Colloids and Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects. – 2011. – Vol. 382. – P. 124–131.
9. Singh, R. Characterization of the deformation behavior of intermediate porosity interconnected Ti foams using micro-computed tomography and direct finite element modeling / R. Singh [etc.] // J. Acta Biomaterialia. – 2010. – N 6. – P. 2342–2351.
10. Меликян, М.Л. Динамика минерализации костной ткани в пористом титане и прочностные свойства композита «титан – костная ткань» / М.Л. Меликян, В.И. Итин // Письма в ЖТФ. – 2002. – т. 28, вып. 16. – С. 20-24.
11. Sargeant, T.D. Hybrid bone implants: Self-assembly of peptide amphiphile nanofibers within porous titanium / T.D. Sargeant [etc.] // Biomaterials. – 2008. – Vol. 29. – P. 161-171.

Summary

Using of porous titanium for the improvement of functional characteristics of endoprotheses is considered. It's shown that kinetics of deformational and strength properties of porous titanium under osteogenesis process is an actual topic of biomechanics. The compression tests performed allows us to note twice increasing of implanted material's Young modulus due to bone tissue ingrowth.

Поступила в редакцию 28.11.2012

ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ ИЗМЕНЕНИЯ ФОРМЫ

Буренин А.А., Рагозина В.Е., Иванова Ю.Е.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, Владивосток

Волновые процессы передачи по нелинейно упругой среде сдвиговых деформаций имеют закономерности, принципиально отличные от тех, которые задают механизмы объемного деформирования. Объемная деформация изучена достаточно полно в [1-5], в частности, благодаря наличию аналогий с гидро- и аэродинамикой и разработанным в этих областях методам математического исследования. Для процессов поперечного деформирования на сегодняшний день получено сравнительно мало ключевых результатов, это направление требует дальнейшего анализа. Отметим, что для плоских одномерных задач при наличии деформационной анизотропии известны [6-7] два варианта волн разрыва деформации: волна плоскополяризованного типа и волна круговой поляризации. Первая из них может изменить только интенсивность предварительного сдвига, вторая корректирует его направленность. Кроме этого, применение метода малого параметра к задаче об одномерной плоской сдвиговой волне в несжимаемой среде без предварительных деформаций показало [8], что прифронтная область волны в главном определяется решениями нового эволюционного уравнения, отличного от уравнения Хопфа. Действительно, угол наклона характеристик для эволюционного уравнения сдвиговой волны оказался зависящим не от удельного импульса, а от удельной кинетической энергии. Для обобщения перечисленных результатов далее рассмотрим одномерный процесс распространения осесимметричных деформаций по несжимаемой упругой среде. Предположение о несжимаемости среды принимается с целью сосредоточить все внимание на эволюции граничных возмущений для деформаций изменения формы.

Общая система уравнений движения изотропной несжимаемой упругой среды в системе декартовых координат x_i ($i = 1, 2, 3$) в представлении Эйлера имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \rho(\dot{v}_i + v_{i,j}v_j), \quad v_i = \dot{u}_i + u_{i,j}v_j, \quad 2\alpha_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}, \\ W(I_1, I_2) &= (a - \mu)I_1 + aI_2 + bI_1^2 - \kappa I_1 I_2 - \theta I_1^3 + cI_1^4 + dI_2^2 + kI_1^2 I_2 + \dots, \\ \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}}(\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), \quad I_1 = \alpha_{ii}, \quad I_2 = \alpha_{ij}\alpha_{ji}. \end{aligned} \quad (1)$$

В (1) u_i и v_i – компоненты векторов перемещений и скорости, α_{ij} , σ_{ij} – компоненты тензоров деформаций Альманси и напряжений Коши-Эйлера, $\rho = const$ – плотность среды, p – функция добавочного гидростатического давления, $W(I_1, I_2)$ – функция упругого потенциала (плотность распределения внутренней энергии, отнесенная к ρ), μ – модуль сдвига, $a, b, c, d, k, \theta, \kappa$ – упругие постоянные более высокого порядка. Точкой над символом в (1) и далее обозначена частная производная по времени, индексом после запятой – частная производная по соответствующей координате, по повторяющемуся индексу принято соглашение о суммировании.

Рассматриваем неограниченное пространство, занятое несжимаемой средой, с цилиндрической полостью. Граница полости в цилиндрических координатах r, ψ, z задается уравнением $r = r_0$. До момента $t = 0$ деформации в среде отсутствуют. С момента $t = 0$ граничные точки начинают движение по закону

$$r = r_0 = const, \quad \psi = \psi_0 + \varphi_0(t), \quad u_z = u_0(t), \quad \varphi_0(0) = u_0(0) = 0, \quad \varphi_0'(0)u_0'(0) \neq 0, \quad (2)$$

в котором $\varphi_0(t)$ и $u_0(t)$ – известные функции времени. Все точки среды также совершают винтовое движение, поэтому для поля перемещений имеем

$$u_r(r, t) = r(1 - \cos \varphi), \quad u_\varphi(r, t) = r \sin \varphi, \quad u_z = u(r, t), \quad \varphi = \varphi(r, t) = \psi - \psi_0. \quad (3)$$

Как следствие системы уравнений (1) и формул (3) для функций $\varphi(r, t)$, $u(r, t)$, $p(r, t)$ получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} -\tilde{p}_{,r} + 2\beta(r\varphi_{,r}\varphi_{,rr} + u_{,r}u_{,rr}) + (2\beta + 1)r\varphi_{,r}^2 + \gamma r^{-1}u_{,r}^2 + \dots &= -\frac{r(\dot{\varphi})^2}{C^2}, \\ \varphi_{,rr}(1 + \alpha u_{,r}^2 + 3\alpha r^2\varphi_{,r}^2) + 2\alpha\varphi_{,r}u_{,r}u_{,rr} + \frac{\varphi_{,r}}{r}(3 + 3\alpha u_{,r}^2 + 5\alpha r^2\varphi_{,r}^2) + \dots &= \frac{\ddot{\varphi}}{C^2}, \\ u_{,rr}(1 + 3\alpha u_{,r}^2 + \alpha r^2\varphi_{,r}^2) + 2\alpha r^2\varphi_{,r}u_{,r}\varphi_{,rr} + \frac{u_{,r}}{r}(1 + \alpha u_{,r}^2 + 3\alpha r^2\varphi_{,r}^2) + \dots &= \frac{\ddot{u}}{C^2}, \\ \tilde{p} = \frac{p}{\mu}, \quad C^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad \alpha = \frac{a+b+\kappa+d}{\mu}, \quad \beta = -1 - \frac{2a+2b+\kappa}{2\mu}, \quad \gamma = \beta + \frac{\kappa+2b}{2\mu}. \end{aligned} \quad (4)$$

Из дифференциальных уравнений (4) второе и третье служат для определения поля перемещений, а первое необходимо для последующего нахождения неизвестной функции $p(r, t)$.

Передними фронтами граничных возмущений (2) могут быть ударные волны – цилиндрические поверхности разрывов деформаций и напряжений. На них должны выполняться геометрические и кинематические условия совместности разрывов [9], а также законы сохранения, что приводит в рассматриваемом случае к соотношениям

$$[\sigma_{rr}] = 0, \quad [\sigma_{\psi r}] = -\rho G[v_{\psi}], \quad [\sigma_{zr}] = -\rho G[v_z]. \quad (5)$$

Квадратными скобками в (5) обозначен разрыв величины, заключенной в них, на ударной волне, G – скорость движения ударной волны в направлении единичной внешней нормали. В (5) первое соотношение служит краевым условием для вычисления добавочного гидростатического давления $p(r, t)$. Остальные условия системы (5) с учетом соотношений (1) и (3) позволяют записать

$$\begin{aligned} [H]\varphi_{,r} + \{H - [H] - \rho G^2\}[\varphi_{,r}] &= 0, \\ [H]u_{,r} + \{H - [H] - \rho G^2\}[u_{,r}] &= 0, \\ H = \frac{\partial W}{\partial I_2} - \frac{\partial W}{\partial I_1} + 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\tau &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \tau^k, \\ 2\tau = r^2(\varphi_{,r})^2 + (u_{,r})^2, \quad \beta_0 = \mu, \quad \beta_1 = 2(a+b+\kappa+d), \dots \end{aligned} \quad (6)$$

В формулах (6) многоточием обозначены невыписанные коэффициенты ряда для функции H , зависящие также от упругих модулей среды. Из системы (6) следует, что в несжимаемой упругой среде возможно распространение цилиндрических поверхностей разрывов двух типов. Если $[H] \neq 0$ ($[\tau] \neq 0$), приходим к возможности распространения по среде плоскополяризованного разрыва, для которого

$$\frac{\varphi_{,r}^-}{\varphi_{,r}^+} = \frac{u_{,r}^-}{u_{,r}^+}, \quad G_1 = \left\{ \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} (\tau^+)^k \left(\beta_k + \sum_{j=1}^{k+1} C_{k+1}^j (-1)^j (\tau^+)^{1-j} [\tau]^j \right) \right\}^{1/2}. \quad (7)$$

Следуя формулам (7), на цилиндрической поверхности разрывов, распространяющейся со скоростью G_1 , не меняется направление предварительного сдвига, а меняется только его интенсивность. Если провести термодинамический анализ ударного перехода на этой поверхности вполне аналогично [10], то возможно показать, что достаточным условием возникновения данного разрыва является увеличение на нем предварительного сдвига, т.е. на нем выполняется соотношение $[\tau] < 0$. Это требование вполне согласуется с условием эволюционности плоскополяризованного разрыва.

Следствием системы (6) будет возможность возникновения еще одного типа поверхности разрывов, для которого $[\tau] = 0$, т.е. на этой волне не меняется интенсивность предварительного сдвига, а меняется только его направление при $[\varphi_{,r}] \neq 0$ и $[u_{,r}] \neq 0$. А.Г. Куликовский называет такие поверхности разрывов ударными волнами круговой поляризации [6], т.к. направленность последующе-

го сдвига задается только граничным воздействием. Скорость движения этого разрыва определяется формулой

$$G_2 = \left\{ \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (\tau^+)^k \right\}^{1/2}.$$

Данная поверхность разрывов является изоэнтропической. Волна круговой поляризации, если ее присутствие диктуется краевыми условиями, распространяется вслед за плоскополяризованной волной, которая движется по недеформированной среде первой. Образование второй ударной волны зависит от отношения функций $\varphi'_0(t)$ и $u'_0(t)$. Именно оно определяет, как со временем изменяется направление сдвига на граничной поверхности. Передача по среде информации об изменении направления сдвига тоже является нелинейным волновым процессом. Одним из итогов этого процесса становится, в частности, появление второй ударной волны.

Для применения метода сращиваемых асимптотических разложений определим безразмерные переменные задачи:

$$s = \frac{r-r_0}{r_0} \varepsilon^{-4}, \quad m = \frac{r-r_0-Ct}{r_0} \varepsilon^{-3}, \quad v = \varphi \varepsilon^{-\frac{9}{2}}, \quad w = \frac{u}{r_0} \varepsilon^{-\frac{9}{2}}, \quad (8)$$

где ε – малый параметр задачи, определяемый характерными константами краевого условия (2). Запись уравнений (4) и краевого условия (2) в переменных (8) позволяет методом последовательных линейных приближений построить решение, задающее динамику среды в окрестности нагружаемой границы. Получение этого решения подробно рассмотрено в [10]. Данное решение назовем внешним. В области его неравномерности, где существенными становятся нелинейные эффекты, необходимо определить дополнительное, внутреннее решение. Переход к области внутреннего решения задается переменными $n = \varepsilon^4 s$, $m, v(n, m), w(n, m)$. В рассматриваемом случае искомые функции $v(n, m)$ и $w(n, m)$ достаточно представить рядами по степеням малого параметра, кратным трем:

$$v(n, m) = v_0(n, m) + \varepsilon^3 v_3(n, m) + \dots, \quad w(n, m) = w_0(n, m) + \varepsilon^3 w_3(n, m) + \dots$$

Во внутренних переменных на нулевом шаге метода из системы (4) получим систему эволюционных уравнений задачи

$$\begin{aligned} 2g_{,n} + \alpha \left(3(1+n)^2 g^2 + h^2 \right) g_{,m} + 2\alpha h h_{,m} + \frac{3g}{1+n} &= 0, \\ 2h_{,n} + \alpha \left((1+n)^2 g^2 + 3h^2 \right) h_{,m} + 2\alpha (1+n)^2 g h g_{,m} + \frac{h}{1+n} &= 0, \quad g = v_{0,m}, \quad h = w_{0,m}. \end{aligned} \quad (9)$$

Важно отметить следующее обстоятельство: когда $g \equiv 0$ либо $h \equiv 0$, то есть движение среды было бы только вращательным или антиплоским соответственно, тогда из системы уравнений (9) следовало бы эволюционное уравнение, отличное от уравнения квазипростых волн, например для антиплоского движения, в виде

$$h_{,n} + \frac{3}{2} \alpha h^2 h_{,m} + \frac{h}{1+n} = 0.$$

Отличие здесь заключается только в том, что h во втором слагаемом правой части имеет вторую степень, а не первую, как в классическом уравнении Хопфа (квазипростых волн). Именно в этом заключается отличие в нелинейных закономерностях распространения по среде деформаций изменения формы от закономерностей в распространении деформаций изменения объема. Последние слагаемые в уравнениях (9) отражают затухание интенсивности для цилиндрических волн за счет изменения в геометрии поверхностей разрывов. Для системы (9) на плоскости переменных m, n получаем два семейства характеристик и соответствующие инварианты Римана:

$$\frac{dm}{dn} = \frac{3\alpha}{2} \left((1+n)^2 g^2 + h^2 \right), \quad (1+n) \left((1+n)^2 g^2 + h^2 \right) = const, \quad (10)$$

или

$$\frac{dm}{dn} = \frac{\alpha}{2} \left((1+n)^2 g^2 + h^2 \right), \quad h g^{-1} (1+n)^{-1} = const. \quad (11)$$

Вдоль характеристик (10) распространяется информация о квадрате интенсивности удара и последующего воздействия. Вдоль характеристик (11) передается информация о направлении сдвигового воздействия.

Опрокидывание решения для характеристик (10) приводит к образованию плоскополяризованной ударной волны. Вдоль направлений (10) решение представим в виде

$$m - \frac{3\alpha}{2} \xi \ln(1+n) = F(\xi), \quad \xi = (1+n) \left((1+n)^2 g^2 + h^2 \right), \quad (12)$$

где вид функции $F(\xi)$ полностью определяется краевыми условиями при $n \rightarrow 0$, т.е. уравнениями (2), записанными в безразмерном виде. Решение (12) справедливо как для условий (2), где плоскополяризованная ударная волна возникает сразу, так и для условий, приводящих к запаздыванию в образовании ударной волны. Отметим, что угол наклона ударной волны (7) отличен от угла наклона соответствующих ей характеристик (10).

Для линий (11) и решения вдоль них следует

$$\xi^{3/2} \ln(1+n) = -\alpha \xi^{1/2} F(\xi) + \frac{\alpha}{2} \int \frac{F(\xi)}{\sqrt{\xi}} d\xi + P(\eta), \quad \eta = hg^{-1}(1+n)^{-1} = const, \quad (13)$$

где $P(\eta)$ – функция, полностью определяемая краевыми условиями при $n \rightarrow 0$.

Характеристики (13) зависят сложным образом от строящегося решения, поэтому в общем случае нельзя сделать предварительное заключение об их геометрии, тогда как характеристики первого семейства, задаваемые уравнениями (13), при $\xi = const$ определяют логарифмические кривые в плоскости координат m, n . Опрокидывание непрерывного решения вдоль характеристик (13) происходит, когда производные η_m и η_n обращаются в бесконечность, то есть при минимальных значениях m и n , для которых $P'(\eta) = 0$. Особый характер данной ударной волны состоит в том, что ее положение входит в число характеристических поверхностей. Это следует и из приближенного анализа, и при точной формулировке уравнений характеристик системы (4) и их сопоставлении с возможными скоростями ударных волн. На данной ударной волне сохраняется значение переменной ξ , то есть $\xi^+ = \xi^-$, поэтому не возникает изменений в геометрии характеристик (12).

Рассмотренные механизмы поведения осесимметричных сдвиговых волн в наиболее простых случаях краевых условий (2) позволяют построить приближенное аналитическое решение. Для более общих краевых условий они становятся основой для численных расчетов, например, для интегрирования шагами вдоль характеристик. Кроме того, полученное решение может найти применение для задач с большей размерностью, так как известно, что в малых областях в окрестности ударной волны многомерные волны ведут себя локально как одномерные [7, 12].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (12-01-90004-Бел_а, 11-01-00360-а, 11-01-98514-р_восток_а).

Резюме

Рассматривается решение одномерной задачи с осевой симметрией о движении поперечных ударных волн от цилиндрической полости в нелинейно-упругом несжимаемом пространстве. Применение метода сращиваемых асимптотических разложений приводит к системе двух эволюционных уравнений. Для этих уравнений строится непрерывное решение в виде инвариантов Римана вдоль характеристических направлений. Полученное решение согласуется с возможностью образования двух ударных волн, плоскополяризованной и нейтральной.

Литература

1. Гельфанд И.М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений / И.М. Гельфанд // Успехи математических наук. – 1959. – Т. 14. – № 9. – С. 87-158.
2. Рождественский Б.Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко – М.: Наука, 1978. – 688 с.

3. Руденко О.В. Теоретические основы нелинейной акустики / О.В. Руденко, С.И. Солуян – М.: Наука, 1975. – 288 с.
4. Чигарев А.В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред / А.В. Чигарев – Минск: Технопринт, 2000. – 426 с.
5. Пелиновский Е.Н. Нелинейные эволюционные уравнения / Е.Н. Пелиновский, В.Е. Фридман, Ю.К. Энгельбрехт – Таллин.: Валгус, 1984. – 156 с.
6. Куликовский А.Г. Нелинейные волны в упругих средах / А.Г. Куликовский, Е.И. Свешникова – М.: Московский лицей, 1998. – 412с.
7. Куликовский А.Г. Современные проблемы механики. Вып. 7: Классические и неклассические разрывы и их структуры в нелинейно-упругих средах с дисперсией и диссипацией / А.Г. Куликовский, А.П. Чугайнова – М.: МИАН, 2007. – 150 с.
8. Буренин А.А. Эволюционное уравнение для волновых процессов формоизменения / А.А. Буренин, В.Е. Рагозина, Ю.Е. Иванова // Известия СГУ. Серия «Математика. Механика. Информатика». – 2009. – Т. 9. – Вып. 4. – Ч. 2. – С. 14 – 24.
9. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности / Г.И. Быковцев, Д.Д. Ивлев – Владивосток: Дальнаука, 1998. – 528с.
10. Буренин А.А. Об ударном деформировании несжимаемого упругого полупространства / А.А. Буренин // Прикладная механика. – 1985. – Т. 21. – № 5. – С. 3-8.
11. Иванова Ю.Е. Об ударных осесимметрических движениях несжимаемой упругой среды при ударных воздействиях / Ю.Е. Иванова, В.Е. Рагозина // Прикладная механика и техническая физика. – 2006. – Т. 47. – № 6. – С. 144-151.
12. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем – М.: Мир, 1977. – 622 с.

Summary

The solution of one-dimensional problem with axial symmetry of transverse shock waves motion from the cylindrical cavity in the nonlinear elastic incompressible space is considered. Application of the matched asymptotic expansions method leads to the system of two evolution equations. Its continuous solution in the Riemann invariants form along characteristic directions is constructed. The resulting solution is consistent with the possible formation of two shock waves: plane polarized wave and wave of circle polarisation.

Поступила в редакцию 26.11.2012

**НЕЛИНЕЙНОЕ ВЯЗКОУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПЛАСТИН
ПРИ СТАЦИОНАРНОМ НАГРЕВЕ И ОБЛУЧЕНИИ
ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ ЧАСТИЦАМИ**

Костюк Д.М., Ширвель П.И.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Экспериментальному изучению воздействия высокоэнергетического излучения на металлические, бетонные, полимербетонные, железобетонные конструкции (например, защитные элементы реактора, емкости, резервуары для хранения радиоактивных отходов и т.д.) посвящено определенное количество работ [1-3]. В последнее время появились работы, посвященные математическому моделированию поведения этих конструкций в условиях радиационных сред. Однако работ по моделированию работы пластинчатых конструкций из полимерных материалов при неравномерном нагреве и облучении в условиях ползучести весьма мало, а используемые модели взаимодействия не всегда корректно описывают реальную работу таких элементов конструкций. Поэтому проблема математического моделирования поведения полимерных конструкций с учетом физически нелинейных температурных и радиационных полей является актуальной, так как прогнозирование прочности и долговечности конструкций, длительное время находящихся в радиационной среде, имеет первостепенное значение для нормальной безаварийной эксплуатации ответственных конструктивных элементов.

Рассмотрим задачу определения напряженно-деформированного состояния (НДС) пластин из нелинейного вязкоупругого материала при нестационарном одностороннем нагреве в условиях нейтронного облучения. При силовом действии нагрузки полагаем, что в материале развиваются упругие деформации, описываемые законом Гука в предположении гипотезы об объемном изменении материала Франца Неймана [4] и деформаций ползучести [5].

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \delta_{ij} \varepsilon_{ij}^v + \varepsilon_{ij}^c$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (1)$$

$i, j = 1, 2, 3.$

Таким образом, обобщенный закон Гука с учетом тепловых деформаций и радиационного расширения имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_x^{(z)} = \frac{\sigma_x - \nu \sigma_y}{E(T, \Phi)} + \alpha(T, \Phi) \cdot T(x, y, z, t) + \frac{S(T, \Phi)}{3}, \\ \varepsilon_y^{(z)} = \frac{\sigma_y - \nu \sigma_x}{E(T, \Phi)} + \alpha(T, \Phi) \cdot T(x, y, z, t) + \frac{S(T, \Phi)}{3}, \\ \varepsilon_{xy}^{(z)} = \frac{(1 + \nu) \sigma_{xy}}{E(T, \Phi)}. \end{cases} \quad (2)$$

$i, j = x, y.$

Деформации ползучести будем описывать нелинейными уравнениями, обобщенными на случай сложного напряженного состояния.

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \frac{3}{2} \cdot \frac{S_{ij}}{\sigma_u} \left\{ C_0 e^{\eta \sigma_u + P \varepsilon_u} - g_0 e^{\alpha' \sigma_u \varepsilon_u} \right\} \quad (3)$$

где $\sigma_u = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}}$, $\varepsilon_u = \sqrt{\frac{3}{2} \varepsilon_{ij}^c \varepsilon_{ij}^c}$ – интенсивность напряжений и деформаций ползучести соответственно.

$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma$ – девиатор напряжений.

$\sigma = \frac{\sigma_{ii}}{3}$ – среднее гидростатическое давление.

Данное выражение позволяет описывать область устойчивой и неустойчивой ползучести вплоть до разрушения, процесс развития деформации при ступенчатом нагружении и процесс упругого последействия.

Параметры $C_0(T)$, $P(T)$, $g_0(T)$, η , α – определяются исходя из исследований ползучести материалов на необлученном материале (как правило при одноосном напряженном состоянии).

Подставляя, получим для полных деформаций:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^{(z)} &= \frac{\sigma_x - \langle v \rangle \sigma_y}{E(T)} + \langle \alpha \rangle (T) + \frac{S(T, \Phi)}{3} + \varepsilon_x^{c(z)}, \\ \varepsilon_y^{(z)} &= \frac{\sigma_y - \langle v \rangle \sigma_x}{E(T)} + \langle \alpha \rangle (T) + \frac{S(T, \Phi)}{3} + \varepsilon_y^{c(z)}, \\ \varepsilon_{xy}^{(z)} &= \frac{(1 + \langle v \rangle) \sigma_{xy}}{E(T)} + \varepsilon_{xy}^{c(z)}.\end{aligned}\tag{4}$$

где

$$\begin{aligned}v &= \frac{1}{T - T_0} \cdot \frac{1}{\Phi_H - \Phi_0} \cdot \int_{\Phi_0}^{\Phi_H} \int_{T_0}^T v(\Phi, T) d\Phi dT \\ \alpha &= \frac{1}{T - T_0} \cdot \frac{1}{\Phi_H - \Phi_0} \cdot \int_{\Phi_0}^{\Phi_H} \int_{T_0}^T \alpha(\Phi, T) d\Phi dT\end{aligned}\tag{5}$$

– средние параметры для рассчитываемой области (считаем, что для данной модели облучение мало влияет на изменение теплофизических характеристик, а перепады температуры незначительные).

В силу гипотезы недеформируемых нормалей (Кирхгофа-Лява) получаем:

$$\varepsilon_x^{(z)} = -z \square \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y^{(z)} = -z \square \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \quad \varepsilon_{xy}^{(z)} = -z \square \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}.\tag{6}$$

Из (4) с учетом (6) находим σ_x , σ_y , σ_{xy} :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \left(-\alpha T - \frac{S}{3} - \varepsilon_x^c + \varepsilon_x \right) E + v \sigma_y \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y - v \left[\left(-\alpha T - \frac{S}{3} - \varepsilon_x^c + \varepsilon_x \right) E + v \sigma_y \right]}{E} + \alpha T + \frac{S}{3} + \varepsilon_y^c \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - v \left(-\alpha T - \frac{S}{3} - \varepsilon_x^c + \varepsilon_x \right) - \frac{v^2 \sigma_y}{E} + \alpha T + \frac{S}{3} + \varepsilon_y^c \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y - v^2 \sigma_y}{E} + \alpha T + v \alpha T + \frac{S}{3} + v \frac{S}{3} + v \varepsilon_x^c + \varepsilon_y^c - v \varepsilon_x \\ \sigma_y &= \frac{\left(\alpha T + v \alpha T + \frac{S}{3} + v \frac{S}{3} + v \varepsilon_x^c + \varepsilon_y^c - v \varepsilon_x - \varepsilon_y \right) E}{1 - v^2} \\ \sigma_y &= \frac{\alpha T}{1 - v} E + \frac{S}{1 - v} E + \frac{v(\varepsilon_x^c - \varepsilon_x)}{1 - v^2} E + \frac{\varepsilon_y^c - \varepsilon_y}{1 - v^2} E \\ \sigma_y &= \frac{\alpha T}{1 - v} E + \frac{S}{1 - v} E + \frac{v \left(\varepsilon_x^c + z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)}{1 - v^2} E + \frac{\varepsilon_y^c + z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}}{1 - v^2} E \\ \sigma_y &= \frac{E}{1 - v} \left(\alpha T + \frac{S}{3} \right) + \frac{zE}{1 - v^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) + \frac{E}{1 - v^2} (\varepsilon_y^c + v \varepsilon_x^c)\end{aligned}$$

Аналогично

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - v} \left(\alpha T + \frac{S}{3} \right) + \frac{zE}{1 - v^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + \frac{E}{1 - v^2} (\varepsilon_x^c + v \varepsilon_y^c)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{-E(T)}{2(1+\nu)} \left(z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \varepsilon_{xy}^c(z) \right).$$

Выражения для моментов имеют вид:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) - M^{th} - M_x^c - M^s; \\ M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y dz = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) - M^{th} - M_y^c - M^s; \\ M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xy} dz = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} - M_{xy}^c. \\ D &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{z^2 E}{1-\nu^2} dz. \end{aligned} \quad (7)$$

$\nu = \text{const}$ (принимается независимо от $T(x, y, z, t)$ и $\Phi(\varphi, t)$).

Внося выражения M_x, M_y, M_{xy} в уравнение равновесия пластин в моментах, для прогиба получим следующее дифференциальное уравнение в частных производных (уравнение Софи-Жермен):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \\ &= \frac{q}{D} - \frac{1}{D} \left(\frac{\partial^2 M^{th}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_x^c}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^c}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M^{th}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_y^c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M^s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M^s}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Решение выражения (10) ищется для каждого момента времени, для которого известен закон распределения температуры, определяемый либо из решения уравнения теплопроводности, либо измеряемый экспериментально, а также деформации ползучести.

Вычисление деформации ползучести ищется численно. Исходя из уравнения закона ползучести при начальном условии $t = 0$ и $\varepsilon^c = 0$ или конечной величине. Для первого шага по времени Δt деформация ползучести определяется по формуле разложения в ряд Тейлора с удержанием первых трех членов.

$$\varepsilon_1^c = \varepsilon_{t=0}^c + \Delta t \dot{\varepsilon}_{t=0}^c + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\varepsilon}_{t=0}^c \quad (9)$$

Для последующих шагов по времени деформация ползучести определяется по формуле:

$$\varepsilon_{i+1}^c = \varepsilon_{i-1}^c + 2\Delta t \dot{\varepsilon}_i^c \quad (10)$$

Постоянные, входящие в решение (10), определяются из граничных условий.

По предложенной выше схеме, моделирование поведения пластины в условиях радиационного облучения можно проводить при разных программах и схемах нагружения. Здесь приняты следующие обозначения. Схема нагружения определяет закон распределения внешней нагрузки по верхней или нижней поверхности пластины, а также величину нормальных усилий на ее торцевых гранях. Программа нагружения определяет характер (кинетику) изменения нагрузки, действующей на пластину во времени.

Рассмотрим следующий вариант программы работы тонкой пластины:

1. Пластина нагружается распределенной статической нагрузкой по верхней поверхности до определенного уровня. Воздействие внешних усилий на торцевые грани пластины отсутствуют. Влияние радиационного поля отсутствует. В этом случае в пластине устанавливается определенное вполне конкретное (постоянное) НДС.

2. Пластина нагружается распределенной статической нагрузкой по верхней поверхности до определенного уровня. Воздействие внешних усилий на торцевые грани пластины отсутствуют. Влияние радиационного поля отсутствует. В этом случае в пластине устанавливается постоянное во времени НДС. Вдобавок присутствует температурная нагрузка по всей поверхности (неравномерная).

3. По всей поверхности пластины действует радиационное облучение, в результате с течением времени доза облучения в каждой точке пластины изменяется, приводя к появлению наведенной неоднородности механических свойств и радиационному распуханию материала пластины. Под влиянием этих факторов происходит перераспределение напряжений и деформаций по объему пластины.

4. При достижении напряжениями или деформациями опасного уровня (при наступлении предельного состояния какого-либо вида) считается, что пластина выходит из строя.

Предлагаемые схемы расчетов пластины:

1) однонаправленное действие нагрузки и радиационного облучения

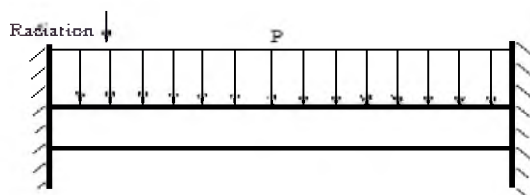


Рисунок 1. – Схема для исследования №1

2) разнонаправленное действие нагрузки и радиационного облучения

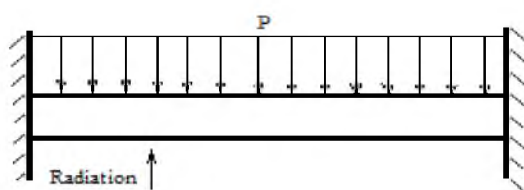


Рисунок 2. – Схема для исследования №2

3) пластина, лежащая на упругом основании под действием нагрузки и радиационного облучения

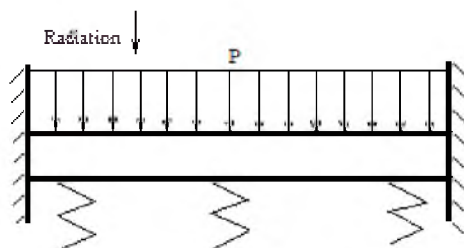


Рисунок 3. – Схема для исследования №3

4) пластина находится под действием неравномерной нагрузки и радиационной среды

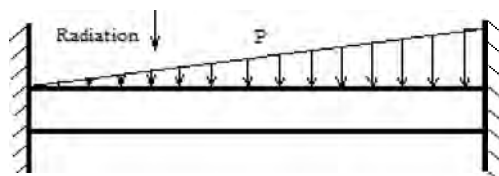


Рисунок 4. – Схема для исследования №4

5) однонаправленное действие нагрузки, радиационного облучения и неравномерный нагрев

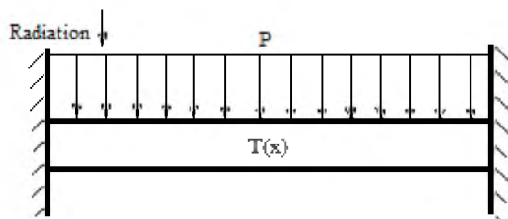


Рисунок 5. – Схема для исследования №5

6) разнонаправленное действие нагрузки и радиационного облучения, а также неравномерный нагрев

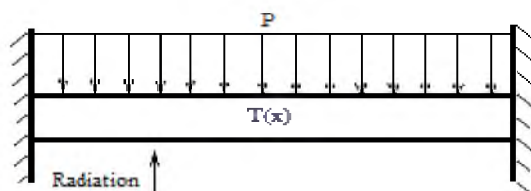


Рисунок 6. – Схема для исследования №6

7) пластина, лежащая на упругом основании под действием нагрузки и радиационного облучения и неравномерного нагрева

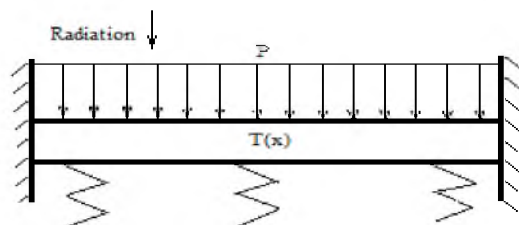


Рисунок 7. – Схема для исследования №7

8) пластина находится под действием неравномерной нагрузки, радиационной среды и неравномерного нагрева

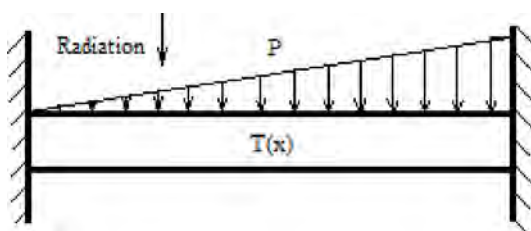


Рисунок 8. – Схема для исследования №8

Схемы воздействия радиационного поля, температурного воздействия и внешней приложенной нагрузки могут быть следующими: радиация и нагрузка действуют совместно на верхнюю сторону пластины; радиация действует на нижнюю сторону пластины, а нагрузка – на верхнюю; пластина лежит на упругом основании и находится под совместным действием нагрузки и радиационного облучения; пластина подвергается воздействию неравномерно распределенной нагрузки и радиационного облучения. Случаи 5, 6, 7, 8 дублируют случаи 1, 2, 3, 4 с добавлением неравномерного нагрева.

Алгоритм расчета пластины будет включать несколько блоков: блок задания исходных данных; блок силового расчета пластины на действие нагрузки без учета радиационного облучения; блок определения НДС и проверки прочности пластины; блок расчета пластины с учетом облучения и температурного воздействия; блок определения НДС при совместном действии нагрузки, температуры и облучения; блок проверки выполнения условий прочности и долговечности.

В предлагаемом алгоритме может быть заложена процедура итерационного уточнения, позволяющая получать достаточно точные результаты при ограниченном числе циклов. При определении закона распределения дозы по толщине (объему) пластины используется зависимость:

$$\Phi(x, y, z) = \Phi_0 \exp\left(-\frac{\frac{h}{L} - z}{L}\right),$$

которая отнесена к системе координат, связанной со срединной поверхностью пластины. В этой формуле значение дозы Φ_0 в поверхностных слоях пластины определяется в соответствии с зависимостью:

$$\Phi_0 = I_{(t)} \cdot t$$

где $I_{(t)}$ – интенсивность облучения, t – время.

С использованием данного алгоритма планируется разработать программный комплекс, реализованный на базе пакета математических и инженерных задач MatLab и предназначенный для выпол-

нения статических расчетов плоских элементов конструкций (расчетная схема которых сводится к прямоугольной пластине) на действие механических, температурных и радиационных нагрузок.

В качестве примера исследовано поведение тонкой пластины из полимерного материала при длительном действии растягивающей нагрузки в условиях нейтронного облучения потоком быстрых нейтронов ($E > 0,1 \text{ МэВ}$), когда температура стационарна и линейно изменяется по ширине пластины.

Уравнение, описывающее кривые ползучести данной композиции при одноосном растяжении с учетом численных значений параметров, записывается в следующем виде:

$$\frac{d\varepsilon^c}{dt} = 1,25 \cdot 10^{-21} \exp(0,10125T + 0,7\sigma + 16500e^{-0,48T} \varepsilon^c) - 4 \cdot 10^{-8} \exp(0,04T + 0,2\sigma) \varepsilon^c \quad (11)$$

Закон изменения температуры по ширине образца примем:

$$T(\xi) = 350 - 55 \cdot \xi \quad (12)$$

где $\xi = x/b$ – безразмерная величина (координата).

Изменение модуля упругости в связи с облучением незначительно [1], а с ростом температуры задается следующей эмпирической зависимостью:

$$E(T) = E_0 e^{-\beta T(\xi)} = 48,5 \cdot 10^2 \cdot 9,8 e^{-0,00925T(\xi)} \text{ МПа} \quad (13)$$

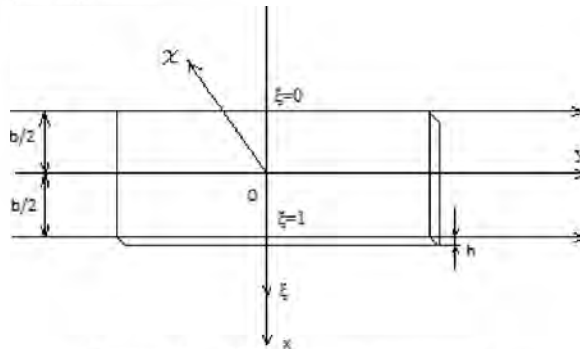


Рисунок 9. – Параметры пластины

Зависимость, описывающая изменение радиационного распухания задается соотношением:

$$S = \begin{cases} 0, & \Phi < \Phi_0 \\ 3\delta \cdot \frac{\varepsilon_{\max} [\exp(\nu(\Phi - \Phi_0)) - 1]}{[\varepsilon_{\max} + \delta \exp(\nu(\Phi - \Phi_0))]}, & \Phi > \Phi_0 \end{cases} \quad (14)$$

где Φ – текущий флюенс нейтронов (доза облучения),

Φ_0 – некоторая пороговая доза облучения,

ε_{\max} – максимальное значение радиационной деформации для материала,

S – радиационное распухание (объемное изменение),

δ, ν – эмпирические коэффициенты, зависящие от энергетического спектра нейтронов.

$\Phi_0 \approx 2 \cdot 10^{26}$ нейтрон/ м^2 ($E > 0,1 \text{ МэВ}$).

Кривые распределения напряжений по ширине пластины во времени представлены на рисунке 10. Кривые 1,2,3 соответствуют распределению напряжений при $t = 0, 15, 30$ ч. соответственно.

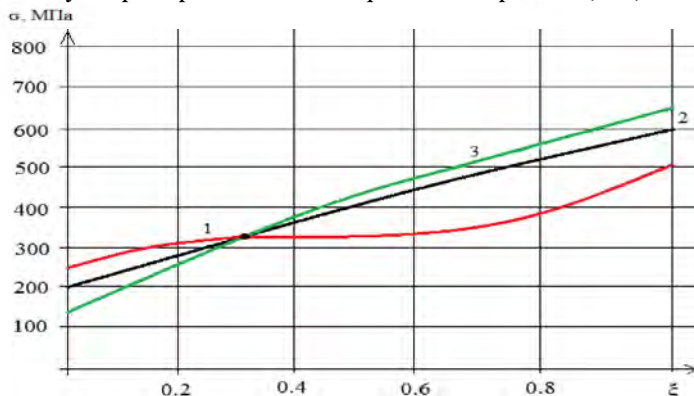


Рисунок 10. – Кривые распределения напряжений по ширине пластины во времени

Анализ кривых распределения напряжений по сечению образца показывает, что со временем происходит их «перетекание» с более нагретой стороны пластины на менее нагретую, а в последующем при возникновении области неустойчивой ползучести, в зоне менее нагретой стороны процесс протекания нагрузки возвращается в зону более нагретой стороны и повторяется несколько раз вплоть до разрушения образца. В ходе численных экспериментов, в целях иллюстрации эффективности метода решения системы нелинейных дифференциальных уравнений, определяющих деформирование модельных тел в зависимости от термомеханических и радиационных воздействий в условиях ползучести, проведена проверка достоверности полученных результатов. Последняя подтверждается на ряду с использованием классических соотношений и методов механики деформируемого твердого тела, вычислительной механики и математики; сравнением полученных численных решений ряда тестовых задач с их аналитическими решениями, частично результатами экспериментов, опубликованными в открытой печати, сопоставлением с решениями, полученными по независимой от предложенной методики других авторов, а также исследованием сходимости конечноразностных аппроксимаций с изменением (уменьшением) шага разбиения.

Резюме

Предложена математическая модель поведения тонких пластин с учетом влияния радиационного облучения на примере деформирования прямоугольной пластины из полимерного материала. В работе на основе нелинейного уравнения, описывающего область устойчивой и не устойчивой ползучести, записано уравнение тонких пластин с учетом вязко-упругих деформаций при нестационарном нагреве. Предложены модели НДС пластины различных схемах воздействия и приложенной нагрузки. Показано, что под влиянием радиационной среды происходит существенное изменение механических характеристик пластины. Определяющее уравнение позволяет описать процесс перераспределения напряжений по сечению материала при любом законе изменения температуры $T(\xi)$, флюенса нейтронов и нагрузки.

Благодарности

- Авторы работы считают приятным долгом выразить благодарность профессорам А.В. Чигареву и И.С. Куликову за плодотворные обсуждения и дискуссии в Белорусском национальном техническом университете на кафедре «Теоретическая механика».
- Работа выполнялась при финансовой поддержке БРФФИ и Минобразования РБ (проект №Т12МВ-038).

Литература

1. Куликов, И.С. Прочность элементов конструкций при облучении / И.С. Куликов, В.Б. Нестеренко, Б.Е. Тверковкин. – Минск: Наука и техника, 1990. – 144с.
2. Куликов, И.С. Прочность тепловыделяющих элементов быстрых газоохлаждаемых реакторов/И.С.Куликов, Б.Е. Тверковкин. – Минск: Наука и техника, 1984. – 104с.
3. Зайцев, В. Н. Напряженно-деформированное состояние железобетонных защитных оболочек АЭС с учетом трещинообразования : Автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. техн. наук : (05.23.11). - Л., 1984. - 20 с.
4. Шевченко, Ю. Н. Физические уравнения термовязкопластичности. - Киев : Наук. думка, 1982. - 238 с.
5. Писаренко, Г. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести : Справ. пособие. - Киев : Наук. думка, 1981. - 493 с.
6. Бойл, Д. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести / Пер. с англ. А. С. Кравчука. - М.: Мир, 1986. - 360 с.

Summary

A mathematical model of the behavior of thin plates with the influence of radiation exposure was propounded on the example of a rectangular polymer plate deformation. Based on a nonlinear equation describing the areas of stable and unstable creep was recorded the equation of thin plates considering the viscoelastic deformation under unsteady heating. The models of stress state of plate under the different impact schemes and the applied load was propounded. It is shown that under the influence of radiation the mechanical properties of the plate is change.

Поступила в редакцию 12.11.2012

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ В СФЕРИЧЕСКОМ ДИФфуЗОРЕ С ИДЕАЛЬНО ГЛАДКИМИ СТЕНКАМИ

¹Полоник М.В., ²Рогачев Е.Е.

¹Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, Владивосток

²Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Дальневосточный федеральный университет», Владивосток

В настоящей статье рассматривается течение материала в сферическом диффузоре при стационарной упругопластической границе. Для технологий волочения такая ситуация является оптимальной и ее добиваются при разработке технологических режимов. В качестве основных математических моделей при моделировании и расчетах таких технологических процессов (прокатка, волочение) выступают либо теория идеального пластического течения [1-3], либо теория упругопластических процессов [4,5]. Здесь используется теория больших упругопластических деформаций [6–10], построенная в рамках теории пластического течения [11-15]. Отметим, что в рамках данной модели были получены решения задач теории больших упругопластических и упруговязкопластических деформаций таких как: формирование остаточных напряжений у дефектов сплошности [9, 10, 16-19], о прямолинейном [20,21] и вискозиметрическом [22,23] течениях. Именно в рамках данной модели удастся построить точное решение задачи теории больших упругопластических деформаций о стационарном течении материала в сферическом диффузоре. Основными допущениями, принимаемыми в данной статье, являются предположение об идеальной гладкости стенок и несжимаемости материала.

В [6, 8] приводится подробное описание математической модели больших упругопластических деформаций. Здесь представим только необходимые зависимости:

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}), \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial d_{ij}} (\delta_{kj} - 2d_{kj}), \quad (2)$$

$$W = (\alpha - \mu)J_1 + aJ_2 + bJ_1^2 - \gamma J_1 J_2 - \chi J_1^2, \quad J_1 = d_{kk}, \quad J_2 = d_{km}d_{mk}. \quad (3)$$

Движения сплошной среды осуществляется в координатах Эйлера; в качестве тензора деформаций используется тензор Альманси d_{ij} , компоненты которого в прямоугольной системе координат $x_j \quad j = (1,2,3)$ определены согласно (1); u_i – компоненты вектора перемещений. При обратимом деформировании, когда пластические деформации отсутствуют, связь между компонентами тензора напряжений и деформаций в изотермическом приближении задается формулой Мурнагана [8] – (2); $W = W(d_{ij})$ – упругий потенциал (плотность распределения свободной энергии); ρ, ρ_0 – плотность среды в текущем и свободном состоянии соответственно.

Считая, что $\rho = \rho_0 = \text{const}$, то есть тело несжимаемо не только необратимо, но и обратимо, получим точное решение рассматриваемой задачи. В этом случае зависимость (2) принимает форму

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial d_{ij}} (\delta_{kj} - 2d_{kj}) \quad (4)$$

где p – добавочное гидростатическое давление.

В качестве упругого потенциала принимаем (3), считая деформируемую среду изотропной, где μ – модуль сдвига, a, b, γ, χ – упругие модули более высокого порядка. Так как в несжимаемой среде всегда $J_1 \leq 0$ и $J_2 \geq 0$, перед некоторыми слагаемыми в (3) выбран знак минус для того, чтобы все упругие постоянные были положительными.

В [6, 8] было показано, что если принять условие неизменности тензора необратимых деформаций при разгрузке, разделить диссипативный и консервативный механизм деформирования так, чтобы последний не зависел от уровня и распределения необратимых деформаций, то в областях, где необратимые деформации накапливались или постоянны, возможен аналог (3) и (4) в форме

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ij}}(\delta_{kj} - 2e_{kj}), \\ d_{ij} &= c_{ij} + p_{ij} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{km}e_{mj}, \quad c_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj}, \\ W &= (\alpha - \mu)I_1 + aI_2 + bI_1^2 - \gamma I_1 I_2 - \chi I_1^2, \quad I_1 = e_{kk}, \quad I_2 = c_{km}c_{mk}. \end{aligned} \quad (5)$$

Если в среде деформирование осуществляется таким образом, что нет необратимого деформирования, т.е. компоненты тензора пластических деформаций $p_{ij} = 0$, а компоненты тензора упругих деформаций c_{ij} отличны от нуля, то осуществляется предельный переход от (5) к (3)–(4).

При активном нагружении $\frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \varepsilon_{ij}^p > 0$, считая пластическое течение идеальным,

в условиях принципа максимума Мизеса $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \varepsilon_{ij}^p > 0$, следует ассоциированный закон пластического течения. Здесь σ_{ij} – действительные компоненты напряжения, σ_{ij}^* – компоненты тензора напряжений в любом допустимом заданной неподвижной поверхностью нагружения ($f(\sigma_{ij}) = \text{const}$) в напряженном состоянии.

Полагаем, что движение среды осуществляется в сферической матрице с идеально гладкой поверхностью $\theta \equiv \theta_0$ в сферической системе координат (r, φ, θ) . Считаем, что такое движение обеспечивают усилия на границах матрицы $r = R$ и $r = s$ ($R \gg s$) такие, что

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = -P_*, \quad \sigma_{rr}|_{r=s} = \sigma_*. \quad (6)$$

Далее, будем считать, что в материале существует некоторая стационарная поверхность $r = R_1$, разделяющая его на две, образовавшиеся в процессе деформирования, области: упругую $R_1 \leq r \leq R$ (I) и упругопластическую $s \leq r \leq R_1$ (II).

Во II области (с необратимыми деформациями) напряжения определяются из уравнения равновесия

$$\sigma_{rr,r} + 2(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})/r = 0, \quad (7)$$

в условиях пластичности Треска ($\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 2k$, где k – предел текучести) [3–4]:

$$\sigma_{rr} = -4k \ln(r/s) + \sigma_*, \quad \sigma_{\theta\theta} = -2k(1 + 2 \ln(r/s)) + \sigma_*. \quad (8)$$

В области I (упругая область) неизвестной является функция перемещения. Так как решение строится для несжимаемой среды $(1 - \partial u / \partial r)(1 - u/r) = 1$, единственная отличная от нуля компонента вектора перемещений $u_r = u$ определяется зависимостью:

$$u = r - (r^3 + \xi)^{1/3}, \quad \xi = R_0^3 - R^3, \quad (9)$$

где $r = R_0$ верхняя граница материала в недеформированном состоянии.

Тогда компоненты тензора деформаций Альманси (1) d_{rr} и $d_{\theta\theta}$ с учетом перемещений (9) и $\eta = 1 + \xi/r^3$ приобретают следующий вид:

$$d_{rr} = \frac{1}{2} \left(1 - r^4 (r^3 + R_0^3 - R^3)^{-4/3} \right) = \frac{1}{2} (1 - \eta^{-4/3}),$$

$$d_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \left(1 - r^{-2} (r^3 + R_0^3 - R^3)^{2/3} \right) = \frac{1}{2} (1 - \eta^{2/3}).$$
(10)

Учитывая (10), согласно зависимостям (2) и (4), интегрируя уравнение равновесия (7) при условии

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = -c_3 \eta^{-4} - c_4 \eta^{-8/3} - c_5 \eta^{-2} - c_6 (\eta^{-4/3} - \eta^{2/3}) - c_7 \eta^{-2/3} + c_8 \eta^{4/3} + c_9 \eta^{-2}. \quad (11)$$

определим компоненты напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_2 - b_8 \eta^{-3} - b_9 \eta^{-2} - b_{10} \eta^{-5/3} - b_{11} \eta^{-1} - b_{12} \eta^{-2/3} - b_{13} \eta^{-1/3} \\ &\quad - b_{14} \ln \left| \eta^{-1/3} \right| + b_{15} \eta^{1/3} + b_{16} \eta^{2/3} + b_{17} \eta + b_{19} \eta^2, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{rr} - c_3 \eta^{-4} - c_4 \eta^{-8/3} - c_5 \eta^{-2} - c_6 (\eta^{-4/3} - \eta^{2/3}) - c_7 \eta^{-2/3} + c_8 \eta^{4/3} + c_9 \eta^{-2}, \\ b_8 &= \frac{1}{6} (\gamma + \chi), \quad b_9 = \frac{1}{4} (\gamma + \chi), \quad b_{10} = \frac{2}{5} (a + b - \gamma - \frac{9}{5} \chi), \quad b_{11} = \gamma + 2\chi, \\ b_{12} &= a + b - \frac{1}{2} (5\gamma + 9\chi), \quad b_{14} = 3b_{11}, \quad b_{13} = 2\mu - 4a - 6b + \frac{9}{4} (\gamma + 3\chi), \\ b_{15} &= 2a + 4b - 7\gamma - 18\chi, \quad b_{16} = \frac{1}{2} b_{13}, \quad b_{17} = b_{11}, \quad b_{18} = \frac{1}{4} b_{15}, \quad b_{19} = \frac{1}{2} b_{11}, \\ c_3 &= \frac{3}{4} (\gamma + \chi), \quad c_4 = a + b - \frac{5}{2} \gamma - \frac{9}{2} \chi, \quad c_5 = \frac{3}{4} \gamma + \frac{9}{4} \chi, \quad c_7 = b - \gamma + \frac{9}{2} \chi, \\ c_6 &= \mu - 2a - 3b + \frac{9}{4} \gamma + \frac{27}{4} \chi, \quad c_8 = a + 2b - \frac{7}{2} \gamma - 9\chi, \quad c_9 = \frac{3}{2} \gamma + 3\chi. \end{aligned} \quad (12)$$

Постоянная интегрирования c_2 определяется из первого граничного условия (6). Таким образом, получим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -b_8 (\eta^{-3} - \eta_1^{-3}) - b_9 (\eta^{-2} - \eta_1^{-2}) - b_{10} (\eta^{-5/3} - \eta_1^{-5/3}) - b_{11} (\eta^{-1} - \eta_1^{-1}) - \\ &\quad - b_{12} (\eta^{-2/3} - \eta_1^{-2/3}) - b_{13} (\eta^{-1/3} - \eta_1^{-1/3}) - b_{14} \ln \left| (\eta / \eta_1)^{1/3} \right| + b_{15} (\eta^{1/3} - \eta_1^{1/3}) + \\ &\quad + b_{16} (\eta^{2/3} - \eta_1^{2/3}) + b_{17} (\eta - \eta_1) + b_{19} (\eta^2 - \eta_1^2) - P_*, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{rr} - c_3 \eta^{-4} - c_4 \eta^{-8/3} - c_5 \eta^{-2} - c_6 (\eta^{-4/3} - \eta^{2/3}) - c_7 \eta^{-2/3} + c_8 \eta^{4/3} + c_9 \eta, \\ \eta &= 1 + \xi / r^3, \quad \eta_1 = 1 + \xi / R_1^3. \end{aligned} \quad (13)$$

На стационарной границе $r = R_1$, разделяющей упругую и упругопластическую области, значения σ_{rr} , вычисляемые согласно (8) и (13) должны совпадать. Отсюда следует нелинейное уравнение

$$\begin{aligned} &-b_8 (\eta_2^{-3} - \eta_1^{-3}) - b_9 (\eta_2^{-2} - \eta_1^{-2}) - b_{10} (\eta_2^{-5/3} - \eta_1^{-5/3}) - b_{11} (\eta_2^{-1} - \eta_1^{-1}) - \\ &-b_{12} (\eta_2^{-2/3} - \eta_1^{-2/3}) - b_{13} (\eta_2^{-1/3} - \eta_1^{-1/3}) - b_{14} \ln \left| (\eta_2 / \eta_1)^{1/3} \right| + b_{15} (\eta_2^{1/3} - \eta_1^{1/3}) + \\ &+ b_{16} (\eta_2^{2/3} - \eta_1^{2/3}) + b_{17} (\eta_2 - \eta_1) + b_{19} (\eta_2^2 - \eta_1^2) - P_* + 4k \ln(R_1 / s) - \sigma_* = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

в котором $\eta_2 = 1 + \xi / R_1^3$.

Условие (11) на границе $r = R_1$

$$-c_3 \eta^{-4} - c_4 \eta^{-8/3} - c_5 \eta^{-2} - c_6 (\eta^{-4/3} - \eta^{2/3}) - c_7 \eta^{-2/3} + c_8 \eta^{4/3} + c_9 \eta^{-2} = 2k \quad (15)$$

позволяет определить η_2 , а, следовательно, и ξ .

Таким образом, уравнения (14) и (15) при заданных параметрах P_* , R_1 и s , позволяют определить перемещения в упругой области и напряжение σ_* на внутренней поверхности матрицы.

Расчеты показывают, что движение среды в сферическом диффузоре зависит от нагружающего усилия P_*/μ , заданных параметров стационарной границы R_1/R_0 и размеров самого диффузора. Таким образом, изменяя параметры диффузора и прилагаемые к формуемому материалу на входе и выходе из диффузора усилия, можно добиться необходимого оптимального режима движения упругопластической среды по сферическому диффузору при стационарной упругопластической границе. При этом имеется возможность использовать конструктивные особенности сферической матрицы и разные способы создания вытягивающих или проталкивающих усилий.

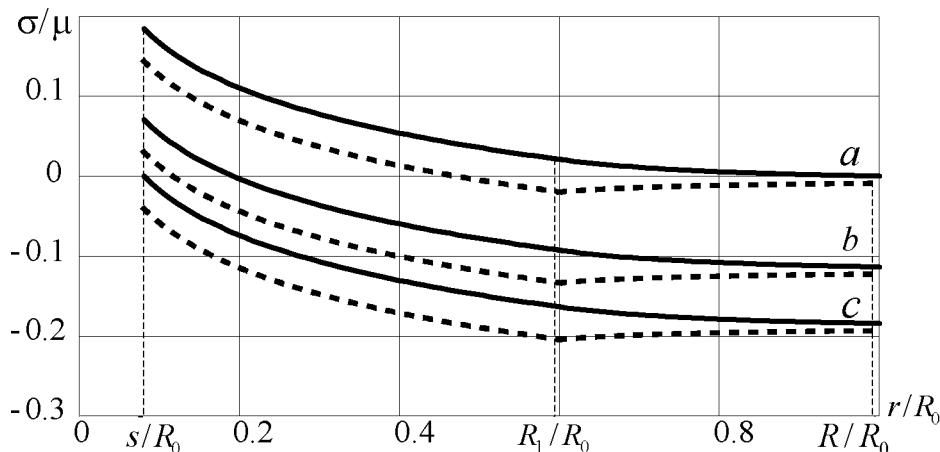


Рисунок 1. – Распределение напряжений в сферическом диффузоре с размерами $s/R_0 = 0.08$, $R/R_0 = 0.9999$ и заданной стационарной границей $R_1/R_0 = 0.6$ при нагружающих усилиях соответственно: а) $P_*/\mu = 0$, $\sigma_*/\mu = 0.1845$; б) $P_*/\mu = 0.1137$, $\sigma_*/\mu = 0.0709$; в) $P_*/\mu = 0.1845$, $\sigma_*/\mu = 0$

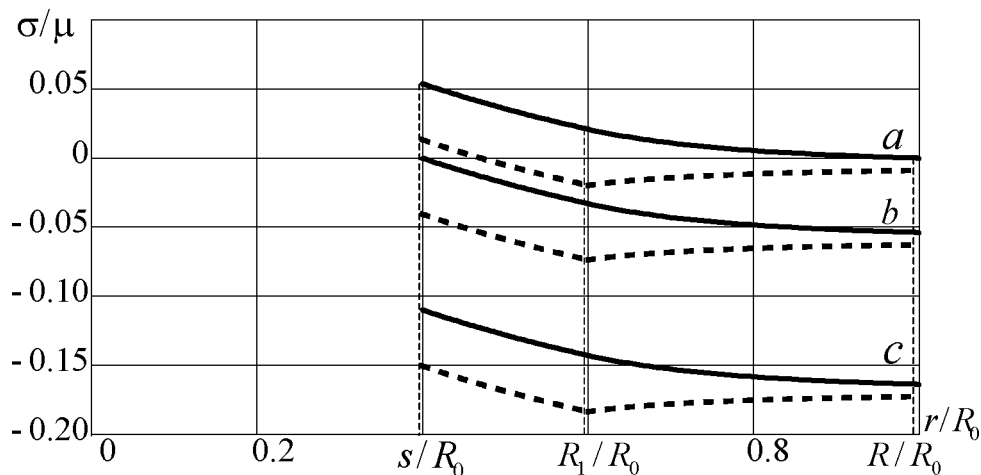


Рисунок 2. – Распределение напряжений в сферическом диффузоре с размерами $s/R_0 = 0.4$, $R/R_0 = 0.9999$ и заданной стационарной границей $R_1/R_0 = 0.6$ при нагружающих усилиях соответственно: а) $P_*/\mu = 0$, $\sigma_*/\mu = 0.5385$; б) $P_*/\mu = 0.5385$, $\sigma_*/\mu = 0$; в) $P_*/\mu = 0.1637$, $\sigma_*/\mu = -0.1098$

Результаты численных расчетов представлены на рис. 1, 2 для алюминиевого сплава В95оч ГОСТ 4784-97: $a/\mu = 6.09$, $b/\mu = 27.07$, $\gamma/\mu = 135.33$, $\chi/\mu = 541.33$, $k/\mu = 0.0203$, модуль сдвига $\mu = 27 \cdot 10^9$ Па. На рисунках σ/μ представлены в зависимости от значений r/R_0 (σ_{rr}/μ – показаны сплошной, $\sigma_{\theta\theta}/\mu$ – пунктирной линиями).

Резюме

В рамках модели больших упругопластических деформаций рассматривается течение несжимаемой упругопластической среды в сферическом диффузоре с идеально гладкими стенками. Принятое предположение о недопустимости обратимой сжимаемости среды позволяет получить точное решение краевой задачи.

Литература

1. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
2. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
3. Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Украинский математический журнал 1954. Т. 6, вып. 3. С. 314–324.
4. Ильющин А.А. Пластичность. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.
5. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука. 1986. 232 с.
6. Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтанюк Л.В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Доклады РАН. 1996. Т. 347, № 2. С. 199–201.
7. Мясников В.П. Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестник ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–13.
8. Ковтанюк Л.В. Моделирование больших упругопластических деформаций в неизотермическом случае // Дальневосточный математический журнал. 2004. Т. 5, № 1. С. 107–117.
9. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В. Упругие эффекты при интенсивном необратимом деформировании. Владивосток: Изд-во ДВГТУ, 2010. 280 с.
10. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Полоник М.В. О пластическом течении материала около сферического концентратора напряжений при конечных обратимых и необратимых деформациях // Известия РАН. Механика твердого тела. 1999. № 4. С. 150–156.
11. Lee E.H. Elastic-plastic deformation at finite strains // Trans ASME: J. Appl. Mech. 1969. 36. № 1. P. 1–6.
12. Левитас В.И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев.: Наукова думка, 1987. 232 с.
13. Быковцев Г.И., Шитиков А.В. Конечные деформации упругопластических сред // Доклады АН СССР. 1990. Т. 311, № 1. С. 59–62.
14. Роговой А.А. Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т. 46, № 5. С. 138–149.
15. Чернышов А.Д. Определяющие уравнения для упругопластического тела при конечных деформациях // Известия РАН. Механика твердого тела. 2000. № 1. С. 120–128.
16. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Полоник М.В. Возможность повторного пластического течения при общей разгрузке упругопластической среды // Доклады РАН. 2000. Т. 375, №6. С. 767–769.
17. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Полоник М.В. Формирование одномерного поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности упругопластической среды // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 2. С. 316–325.
18. Полоник М.В., Ермоленко А.В. О возможности повышения эксплуатационных характеристик материалов за счет предварительной импульсной или ударной обработки // Известия РАН. Механика твердого тела. 2007. Т. 42. № 4. С. 183–192.
19. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Мурашкин Е.В. Об остаточных напряжениях в окрестности цилиндрического дефекта сплошности вязкоупругопластического материала // Прикладная механика и техническая физика. 2006. Т. 47, № 2. С. 110–119.

20. Ковтанюк Л.В. О продавливании упруговязкопластического материала через жесткую круговую цилиндрическую матрицу // Доклады РАН. 2005. Т. 400, № 6. С. 764–767.
21. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Мазелис А.Л. Продавливание упруговязкопластического материала между жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70, вып. 3. С. 481–489.
22. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Устинова А.С. Об учете упругих свойств неньютоновского материала при его вискозиметрическом течении // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49, № 2. С. 143–151.
23. Буренин А.А., Устинова А.С. Развитие и торможение винтового вязкопластического течения с расчетом упругого отклика после остановки течения и разгрузки // Успехи механики сплошных сред: к 70-летию академика В.А. Левина: сб. науч. тр. Владивосток: Дальнаука, 2009. С. 91–102.

Summary

Within the model of large elastic-plastic deformations an incompressible elastic-plastic medium in a spherical diffuser with a perfectly smooth walls is examined. The adopted assumption of non-reversible compressibility of the medium leads to an exact solution to the boundary problem.

Поступила в редакцию 15.11.2012

ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ И ФОРМ СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПРИ НЕОДНОРОДНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ.

Мелешко И.Н., Пронкевич С.А.

УО «Белорусский национальный технический университет»

Пластины применяются в различных областях современной техники – строительном деле, авиастроении, машиностроении, судостроении, ядерных энергетических установок и т.д. Во многих случаях использования пластин связано с различными условиями закрепления на отдельных участках контура пластины [1]. В связи с этим решение задач теории пластин со смешанными граничными условиями является весьма актуальной. В настоящее время широко используются численные методы основанные на использовании метода конечных элементов.

Рассмотрим круглую пластинку единичного радиуса постоянной толщины. Требуется определить собственные колебания круглой пластины.

Дифференциальное уравнение изгиба круглой пластины постоянной толщины в полярных координатах имеет вид:

$$\Delta \Delta w + \frac{\gamma h}{gD} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad \text{или} \quad \Delta \Delta \bar{w} + k^4 \bar{w} = 0, \quad (1)$$

где Δ – оператор Лапласа в полярных координатах r и θ ; $\gamma h / g$ – масса пластины, отнесенная к единице поверхности, D – цилиндрическая жесткость пластины.

Решение дифференциального уравнения для собственных колебаний имеет вид:

$$w(r, \theta, t) = \bar{w}(r, \theta) (A \cos pt + B \sin pt), \quad (2)$$

где

$$\bar{w}(\xi, \theta) = [AJ_n(k, \xi) + BN_n(k, \xi) + CI_n(k, \xi) + DK_n(k, \xi)] \cos n\theta \quad (3)$$

С учетом граничных условий:

Для жесткого закрепления контура: $w = 0$; $\frac{dw}{dr} = 0$

Для шарнирного закрепления контура: $w = 0$; $M_r = 0$;

Для свободной пластины: $M_r = 0$; $Q_r = 0$

Частота собственных колебаний круглой пластины постоянной толщины определяется следующим образом

$$f = \frac{k^2}{2\pi b^2} \sqrt{\frac{gD}{\gamma h}}$$

Колебания круглой пластины (диска) удобно описывать с помощью функций, зависящих от цилиндрических координат. Оператор Лапласа в цилиндрических координатах определяется выражением

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

И уравнение (2) примет вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) - \alpha^4 W = 0 \quad (4)$$

Решение этого уравнения соответствует колебанию с n узловыми диаметрами и его можно представить в виде:

$$W = f(r) \cos n\varphi \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4) получим для функции $f(r)$ обыкновенное дифференциальное уравнение 4-го порядка

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \left(\frac{n^2}{r^2} - \alpha^2\right)\right) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \left(\alpha^2 + \frac{n^2}{r^2}\right)\right) f(r) = 0$$

Решением этого уравнения, не обращающимся в бесконечность при $r = 0$ является выражение

$$f(r) = C_1 J_n(\alpha r) + C_2 I_n(\alpha r),$$

где J_n – функция Бесселя n -го порядка, а $I_n(\alpha r) = i^{-1} J_n(i\alpha r)$ – гиперболическая функция Бесселя.

Граничные условия в каждом отдельном случае закрепления краев пластины приводят к системе однородных уравнений относительно постоянных C_1 и C_2 . Уравнение частот получается путем приравнивания нулю определителя этих уравнений.

Определим собственные частоты круглой пластины радиуса R , жестко заделанной по контуру.

Граничные условия имеют вид:

$$f(R) = 0; \frac{d}{dr} f(R) = 0$$

Эти условия при $r = R$ приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} C_1 J_n(\alpha R) + C_2 I_n(\alpha R) &= 0 \\ C_1 \frac{d}{dr} J_n(\alpha R) + C_2 \frac{d}{dr} I_n(\alpha R) &= 0 \end{aligned}$$

Уравнения частот примет вид:

$$\begin{vmatrix} J_n(\alpha R) & I_n(\alpha R) \\ J_{n-1}(\alpha R) - J_{n+1}(\alpha R) & I_{n-1}(\alpha R) + I_{n+1}(\alpha R) \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

При каждом числе узловых диаметров n (значение $n=0$ соответствует осесимметричным колебаниям пластины) уравнение (6) имеет бесконечное множество корней соответствующее формам колебаний с различным числом (m) окружностей.

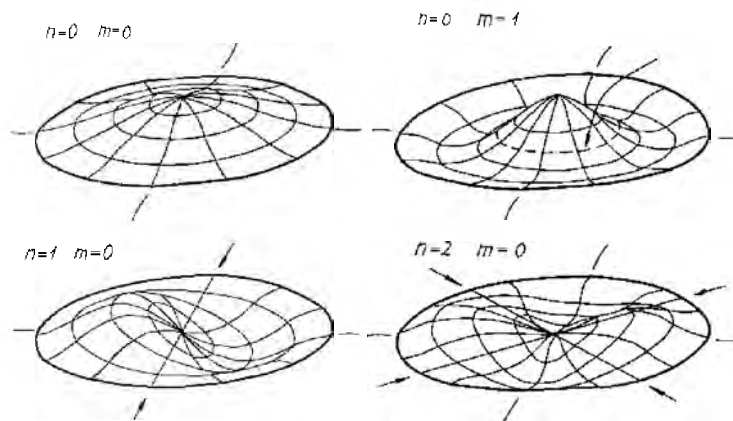


Рисунок 1. – Формы собственных колебаний круглой пластины при жестком закреплении по контуру

Для круглой пластины $R = 1$, Модуль Юнга $E = 2 \times 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, плотность $\rho = 7800$ кг/м³ первые четыре частоты составляют:

Таблица 1

№	Частота
1	155.933 Гц
2	325.655 Гц
3	367.916 Гц
4	608.187 Гц

На рис. 1 показаны формы колебаний, соответствующие данным частотам.

Рассмотрим численное решение данной задачи методом конечных элементов в системе ANSYS.

В программе ANSYS расчет частот и форм собственных колебаний (т.н. модальный анализ) является линейной процедурой. Любые нелинейности вроде пластичности или элементов зазора-

контакта игнорируются, даже если они и заданы. Доступны четыре метода выявления собственных форм колебаний, в том числе и с учетом демпфирования.

Модальный анализ может проводиться для предварительно напряженных конструкций, таких, как лопадки вращающегося турбинного диска. Еще одной полезной особенностью является учет модальной циклической симметрии, что дает возможность свести анализ всей конструкции к анализу ее части. Кроме того, он используется как исходный для других, более подробных динамических расчетов, таких, как нестационарный динамический анализ или отклик системы на гармоническое воздействие.

Нелинейные конечные элементы, если таковые используются в модели, трактуются как линейные. Например, жесткость элементов контакта рассчитывается, исходя из их начального положения, и затем не изменяется.

При выполнении модального анализа задаются модуль Юнга и плотность материала, который предполагается линейным, изотропным или ортотропным, со свойствами, зависящими или независимыми от температуры.

Для приведенных выше примеров (круглая пластина) частоты и формы колебаний представлены на рисунке. Круглая пластина единичного радиуса, модуль Юнга $E=2 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu=0.3$, плотность $\rho = 7800$ кг/м³

Таблица 1. – Распределение собственных частот, полученных в системе Ansys.

№	Ansys, Гц	№	Ansys, Гц
1	156.225	4	534.573
2	325.595	5	535.302
3	325.657	6	610.839

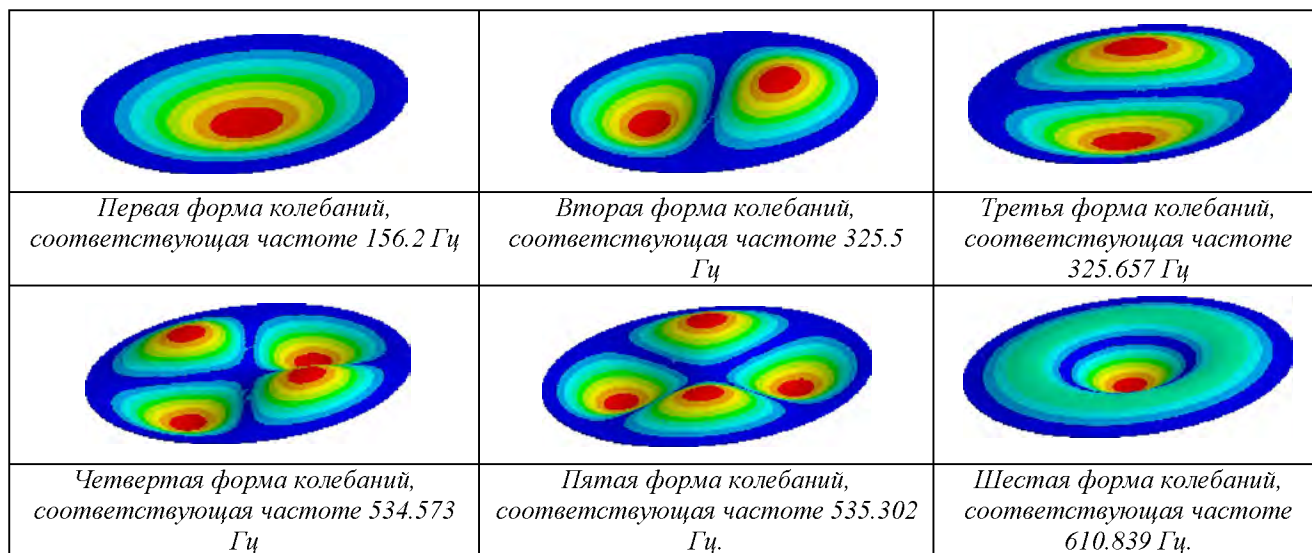


Рисунок 2. – Собственные частоты и соответствующие им формы колебаний, полученные в системе ANSYS.

При расчете в системе ANSYS появляются дублирующиеся формы собственных колебаний (например, вторая и третья, четвертая и пятая формы). По всей видимости, это связано с неравномерностью конечно-элементной модели и ее некоторой асимметричностью относительно центральной оси.

При решении краевой задачи со смешанными граничными условиями были рассмотрены следующие случаи:

1. – заземление по всему контуру.
2. – заземление на контуре $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, шарнирное закрепление $\pi/2 \leq \varphi \leq 2\pi$,
3. – заземление на контуре $0 \leq \varphi \leq \pi$, шарнирное закрепление $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$,
4. – заземление на контуре $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, $\pi \leq \varphi \leq 3\pi/2$, шарнирное закрепление $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$, $3\pi/2 \leq \varphi \leq 2\pi$,
5. – заземление на контуре $0 \leq \varphi \leq 3\pi/2$, шарнирное закрепление $3\pi/2 \leq \varphi \leq 2\pi$,

б. – шарнирное закрепление по всему контуру.

Решение задачи теории упругости при неоднородных граничных условиях рассмотрена достаточно подробно (Н.И. Мухелишвили, Г.Ф. Манджavidзе, Д.И. Шерман).

В работах Д. И. Шермана были построены вполне регулярные бесконечные алгебраические линейные системы для решения задачи изгиба равномерно нагруженной круглой пластинки, когда одна часть дуги круговой границы оперта, а по оставшейся части дуги пластинка заделана или свободна. В работах Х. Зорского (Zorski [1–4]) с помощью метода сингулярных интегральных уравнений и теории граничных задач линейного сопряжения решены задачи изгиба пластинок, когда пластинка имеет вид полуплоскости, квадрата или полуполосы и когда заданы смешанные граничные условия (край пластинки частично заделан, частично оперт или частично свободен).

При неоднородных граничных условиях (часть окружности закреплена, часть оперта) задача может быть решена только приближенными численными методами.

Ниже на рисунках показана эволюция формы четвертой частоты собственных колебаний при различных вариантах граничных условий.

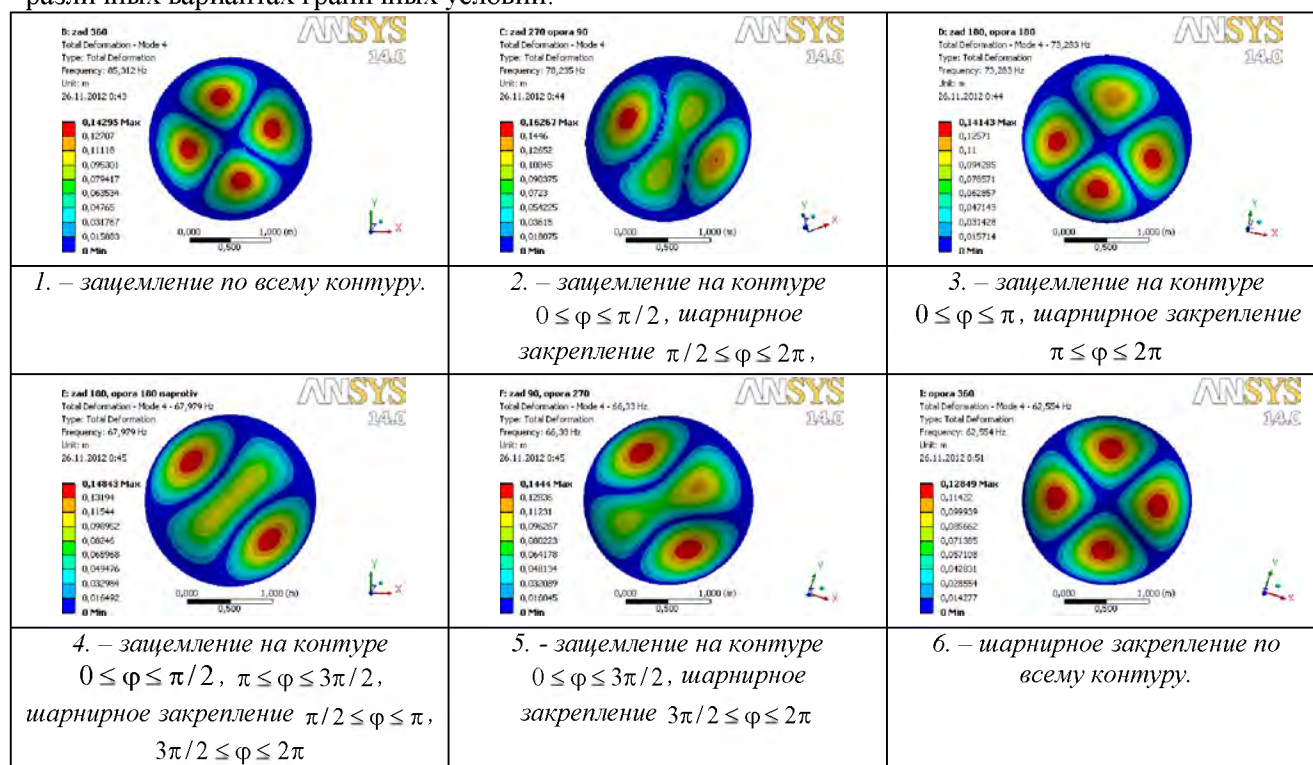
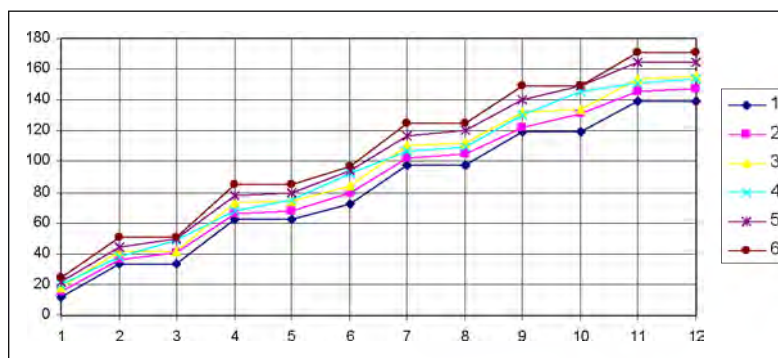


Рисунок 3. – Эволюция формы колебаний четвертой частоты собственных колебаний пластины при различных вариантах граничных условий.



1. – заземление по всему контуру. 2. – заземление на контуре $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, шарнирное закрепление $\pi/2 \leq \varphi \leq 2\pi$, 3. – заземление на контуре $0 \leq \varphi \leq \pi$, шарнирное закрепление $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$, 4. – заземление на контуре $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, $\pi \leq \varphi \leq 3\pi/2$, шарнирное закрепление $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$, $3\pi/2 \leq \varphi \leq 2\pi$, 5. – заземление на контуре $0 \leq \varphi \leq 3\pi/2$, шарнирное закрепление $3\pi/2 \leq \varphi \leq 2\pi$, 6. – шарнирное закрепление по всему контуру.

Рисунок 4.

Из графика видно, что частоты смещаются, но повторяют шаг колебаний. Форма колебаний в четвертом случае похожа на колебания пластины

Выводы. Полученные результаты свидетельствуют о том, что распределение спектра собственных частот при различных соотношениях заданных на контуре граничных условий лежит строго между случаями защемления и шарнирного закрепления по всему контуру. При моделировании в системе ANSYS сохраняется некоторое дублирование форм и частот собственных колебаний.

Резюме

В статье рассматривается решение задач собственных колебаний круглой пластины при неоднородных граничных условиях. Полученные результаты свидетельствуют о том, что распределение спектра собственных частот при различных соотношениях заданных на контуре граничных условий лежит строго между случаями защемления и шарнирного закрепления по всему контуру. При моделировании в системе ANSYS сохраняется некоторое дублирование форм и частот собственных колебаний.

Литература

1. Смирнов В.А. Расчет пластин сложного очертания. – М.: Стройиздат, 1978. – 303 с.
2. Чижевский К.Г. Расчет круглых и кольцевых пластин. Справочное пособие. - Л., «Машиностроение», 1977. – 184 с.
3. Маневич А.И., Пономаренко Е.А. Устойчивость круглых пластин при неравномерном сжатии. / Методы розв'язування прикладних задач механіки доформірованого твердого тіла, 2010, вип. 11
4. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: «Наука», 1967. – 964 с.
5. Расчеты на прочность в машиностроении: в 3 т. Т. 3/ под ред С.Д. Пономарева – М.: Mashgiz. 1959. – 1118 с.
6. Шерман Д.И. Об изгибе круглой пластинки, частично защемленной и частично опертой по контуру. Докл. АН СССР, т. 101, №4, 1955.
7. Zorski H. Plates with discontinuous supports. I. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci Techn. VI, N. 3, 1958.

Summery

The article deals with the tasks of natural oscillations of a circular plate with inhomogeneous boundary conditions. The results indicate that the distribution of the spectrum of frequencies for different ratios given boundary conditions on the contour lies strictly between the cases of entrapment and simply supported around the circuit. In modeling the system ANSYS retained some overlapping shapes and natural frequencies.

Поступила в редакцию 26.11.2012

АВТОМОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Манцыбора А.А., Русанов М.М.

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматизации и процессов
управления Дальневосточного отделения Российской академии наук,
Владивосток*

Потребность инженерной практики в расчётах технологических приёмов, связанных с импульсными или ударными воздействиями необратимо деформируемых материалов (скоростная штамповка, пробивание отверстий и др.), важность оценки последствий взрывов и землетрясений обуславливают актуальность развития теории упругопластических сред.

При построении упругопластической теории, допускающей большие деформации, одной из принципиальных трудностей является выбор разделения опытно наблюдаемых полных деформаций на экспериментально не измеряемые обратимую (упругую) и необратимую (пластическую) составляющие. До сих пор не существует общепринятого мнения по этому поводу, и модели больших упругопластических деформаций принципиально различаются именно таким разделением.

Здесь будет использоваться теория больших упругопластических деформаций, построенная в рамках теории пластического течения. Подобных моделей создано за последнюю половину века достаточно много [6–10], хотя общепринятой модели до настоящего времени не существует. Будем использовать в дальнейшем модель, разработанную на Дальнем востоке, представленную в статьях Г.И. Быковцева, В.П. Мясникова, А.А. Буренина, Л.В. Ковтанюк [11–14].

В данной работе на примере одномерной автомодельной задачи рассматривается процесс деформирования упругопластической среды допускающей большие деформации. Следует отметить, что, несмотря на упрощения, допускаемые в автомодельных задачах, они позволяют получить качественную картину описания происходящих процессов. Так же необходимо отметить, что в случае автомодельных постановок, несмотря на кажущуюся простоту, найти решение конкретной краевой задачи является существенной проблемой со своими сложностями.

Математическая модель больших упругопластических деформаций, которая далее будет использоваться, подробно описана в [11, 13]. Приведем необходимые итоговые модельные зависимости. Деформирование сплошной среды будем описывать в пространственных переменных Эйлера $x_i (i = 1, 2, 3)$ так, что если a_i начальные (материальные) координаты точки материала, то $a_i = a_i(x_1, x_2, x_3, t)$. В качестве тензора деформаций выберем тензор деформаций Альманси:

$$\begin{aligned} d_{i,j} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}), \\ d_{ij} &= e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{ks}e_{sj}. \end{aligned} \quad (1)$$

где u_i – компоненты вектора перемещений; индексом после запятой обозначена производная по данной пространственной переменной, e_{ij} и p_{ij} – упругие и пластические деформации соответственно. Связь между компонентами тензора напряжения и упругими деформациями задаётся с помощью формулы Мурнагана:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - 2e_{kj}), \\ W &= \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 + l I_1 I_2 + m I_1^3 + n I_3 + \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

где $W = W(e)$ – упругий потенциал, I_1, I_2, I_3 – инварианты тензора упругих деформаций e_{ij} , λ и μ – параметры Ламе, l, m, n – упругие модули третьего порядка, ρ и ρ_0 – плотность среды в текущем и свободном состоянии.

Для того чтобы описать изменение напряжения на простой волне мы воспользуемся законом сохранения импульса:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \frac{dV_i}{dt}, \quad V_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + V_j u_{i,j} \quad (3)$$

Здесь V_i – компоненты вектора скорости. Изменение тензоров обратимых и необратимых деформаций в области пластического течения:

$$\begin{aligned} \frac{dp_{ij}}{dt} &= \varepsilon_{ij}^p - \varepsilon_{ik}^p p_{kj} - p_{ik} \varepsilon_{kj}^p + r_{ik} p_{kj} - p_{ik} r_{kj}, \\ \frac{de_{ij}}{dt} &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2} (e_{ij} v_{k,j} + v_{k,i} e_{kj} - r_{ij} e_{kj} + e_{ik} r_{kj} - \varepsilon_{ij}^p e_{kj} + e_{ik} \varepsilon_{kj}^p), \end{aligned} \quad (4)$$

где r_{ij} – кососимметричный тензор с компонентами:

$$\begin{aligned} r_{ij} &= w_{ij} + A^{-1} \left\{ B^2 (\varepsilon_{ik} e_{kj} - e_{ik} \varepsilon_{kj}) + B^2 (\varepsilon_{ik} e_{km} e_{mj} - e_{ik} e_{km} \varepsilon_{mj}) + e_{ik} \varepsilon_{km} e_{ms} e_{sj} - e_{ik} e_{km} e_{ms} \varepsilon_{sj} \right\} \\ A &= 8 - 8L_1 + 3L_1^2 - L_2 - \frac{1}{3}L_1^3 + \frac{1}{2}L_3, \quad B = 2 - L_1, \\ L_1 &= e_{ii}, \quad L_2 = e_{ij} e_{ji}, \quad L_3 = e_{ij} e_{jk} e_{ki}, \\ w_{ij} &= \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}). \end{aligned} \quad (5)$$

Скорости пластического деформирования согласно ассоциированному закону пластического течения:

$$\varepsilon_{ij}^p = \psi \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f(\sigma_{ij}, p_{ij}, \chi_{ij}) = k, \quad (6)$$

χ_{ij} – параметры истории деформирования.

Рассмотрим задачу об ударе жёстким телом по упругопластическому полупространству. Выберем систему координат таким образом, что ось x_2 будет направлена по границе полупространства, а ось x_1 направлена вглубь тела по направлению нормали к границе (рис. 1)

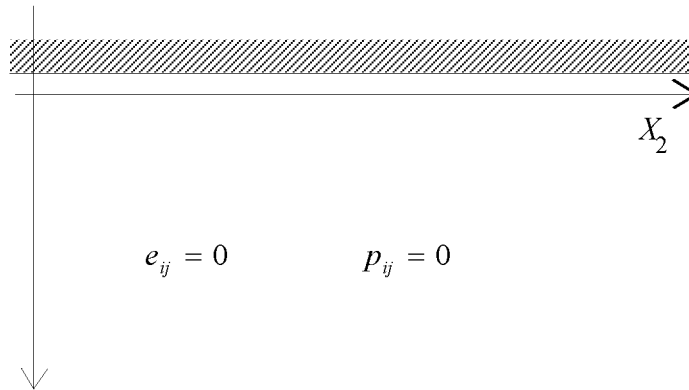


Рисунок 1

Полагается что среда изначально находится в свободном состоянии при $x_1 > 0$. Далее происходит удар по границе $x_1 = 0$, соответственно на границе мгновенно изменяются напряжённое состояние, в результате чего по среде начинают распространяться возмущения (рисунки 2, 3).

Изменение упругих деформаций будет происходить на ударных волнах причём скорость одной из них будет совпадать со скоростью движения безвихревой волны на которой имеют место следующие соотношения:

$$G_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (7)$$

$$-G_1[\sigma_{ij}] = (\lambda\delta_{ij} + 2\mu n_i n_j)w, \quad [v_i] = wn_i,$$

здесь w – интенсивность безвихревой волны, n_i – компоненты вектора нормали к поверхности волны, G_1 – скорость распространения волны, $[\sigma_{ij}]$ и $[v_i]$ скачки величин σ_{ij} и v_i соответственно.

Скорость движения другой волны совпадает со скоростью распространения эквиволлюминальной волны, где выполняются следующие равенства:

$$G_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad [v_i]n_i = 0, \quad -G_2[\sigma_{ij}] = \mu([v_i]n_j + [v_j]n_i). \quad (8)$$

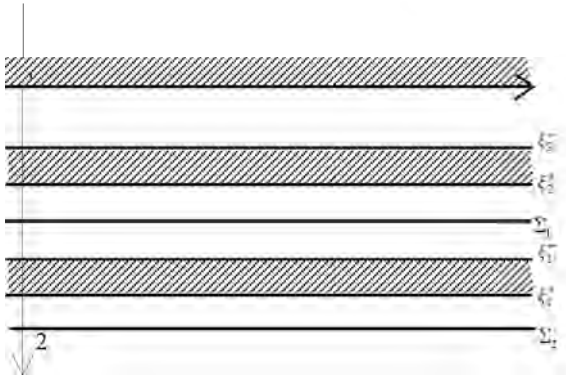


Рисунок 2

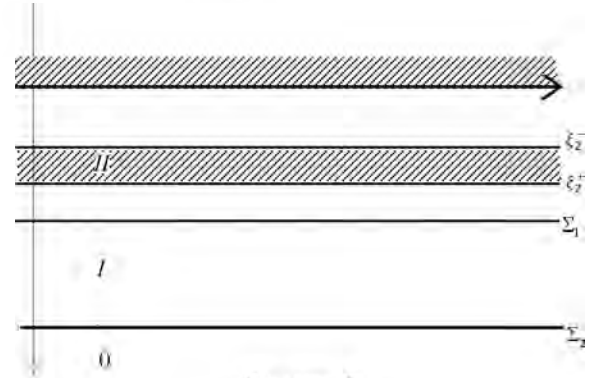


Рисунок 3

Изменение пластических деформаций будет осуществляться на простых волнах Римана, то есть, в некотором слое, на рисунке 2 это области $(\xi_1^+; \xi_1^-)$. Из полученных результатов следует, что возможно существование двух простых волн: одна из них располагается между безвихревой и эквиволлюминальной ударными волнами $(\xi_1^+; \xi_1^-)$, а другая между эквиволлюминальной ударной волной и границей упругопластического полупространства $(\xi_2^+; \xi_2^-)$.

В процессе решения конкретной краевой задачи возможны случаи, когда одновременно два слоя с пластическими деформациями, или только один (в зависимости от выполнения условия пластичности в соответствующей области).

Приведём пример, когда пластическое течение возникает в одном слое расположенном между эквиволлюминальной ударной волной и границей полупространства (рисунок 3). В рассматриваемом случае движение среды одномерно, т.е.

$$u_1 = u_1(x_1, t), \quad u_2 = u_2(x_1, t), \quad u_3 = 0. \quad (9)$$

Введём автомодельную переменную следующего вида:

$$\xi = \frac{x_1}{c_1 t}. \quad (10)$$

Здесь $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ и положим, что компоненты вектора перемещения выражаются зависимостями:

$$u_1 = c_1 t T(\xi), \quad u_2 = c_1 t \Theta(\xi), \quad u_3 = 0, \quad (11)$$

где T и Θ – компоненты безразмерного вектора перемещений в координатном пространстве. Отметим, что согласно соотношениям (10) и (11)

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= T'(\xi), \quad u_{2,1} = \Theta'(\xi) \\ v_1 = \dot{u}_1 &= \dot{c}_1 (T - T\xi), \\ v_2 = \dot{u}_2 &= \dot{c}_1 (\Theta - \Theta\xi). \end{aligned} \quad (12)$$

Рассматривается плоская деформация среды, т.е. σ_3 является главным напряжением. Тогда для главных напряжений, имеем:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}, \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}, \\ \sigma_3 &= \sigma_{33}.\end{aligned}\quad (13)$$

Предел текучести запишем, используя условие пластичности треска $f = \frac{1}{2} \max |\sigma_i - \sigma_j| = k$, в нашем случае это:

$$f = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (14)$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2k. \quad (15)$$

Используя соотношения (4) найдём зависимость $\psi = f(e_{ij}, T', T'', \Theta', \Theta'', e'_{ij})$.

Для этого распишем, $\frac{de_{11}}{dt} - \frac{de_{22}}{dt}$, заменяя ε_{ij}^p , используя формулу (6) и (14) и (13), расписав

напряжения используя формулу Мурнагана, r_{ij} , по формуле (5) и заменяя производную по времени на производную по автомодельной переменной. Таким образом, получаем $\psi = f(e_{ij}, T', T'', \Theta', \Theta'', e'_{ij})$. Расписать её в явном виде не представляется возможным из-за её объёма.

Используя продифференцированный тензор деформации Альманси, заменяя производные пластических деформаций по формуле (2) и уравнение движения получаем систему пяти дифференциальных уравнений с пятью неизвестными вида:

$$\begin{pmatrix} F_1(e_{11}, e_{21}, e_{22}, T', \Theta') \\ \dots \\ F_5(e_{11}, e_{21}, e_{22}, T', \Theta') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T'' \\ \Theta'' \\ e'_{11} \\ e'_{21} \\ e'_{22} \end{pmatrix} = 0. \quad (16)$$

Система имеет тривиальное решение, когда $T'', \Theta'', e'_{11}, e'_{21}, e'_{22}$, в этом случае деформации и скорости будут постоянными величинами. Нетривиальное решение система допускает если $\det \begin{pmatrix} F_1(e_{11}, e_{21}, e_{22}, T', \Theta') \\ \dots \\ F_5(e_{11}, e_{21}, e_{22}, T', \Theta') \end{pmatrix} = 0$. Такое решение описывает слой пластического течения, в котором деформации, напряжения, скорости перемещений точек среды не являются постоянными.

Согласно проведённым численным расчётам, было установлено, что возможно существование двух решений, каждое из которых описывает слой пластического течения. Причём, большая скорость распространения слоя находится между значениями скоростей безвихревой и эквиволлюминальной упругими волнами, а меньшая за скоростью эквиволлюминальной упругой волны.

$$\begin{cases} \det \begin{pmatrix} F_1(e_{11}, e_{21}, e_{22}, T', \Theta') \\ \dots \\ F_5(e_{11}, e_{21}, e_{22}, T', \Theta') \end{pmatrix} = 0, \\ d'_1 = T'' - (T'' + \Theta''), \\ \sigma'_1 - \sigma'_2 = 0, \\ \sigma_{11,1} = \rho \frac{dv_1}{dt}, \\ \sigma_{21,1} = \rho \frac{dv_2}{dt}. \end{cases} \quad (17)$$

Здесь второе уравнение – производная от тензора деформации Альманси, треть-производная от предела текучести, а четвёртое и пятое – уравнения движения. Таким образом, получается замкнутая система. Нетривиальное решение описывает область, в которой напряжение, деформации и скорости изменяются непрерывно. Данные области называются простыми волнами. Согласно полученным вычислениям возможны две центрированные волны.

До начала ударного воздействия на границу тело находится в свободном состоянии. Положим, что в начальный момент времени граница тела начинает подвергаться нагружению, вследствие чего деформации на границе начинают удовлетворять следующим равенствам.

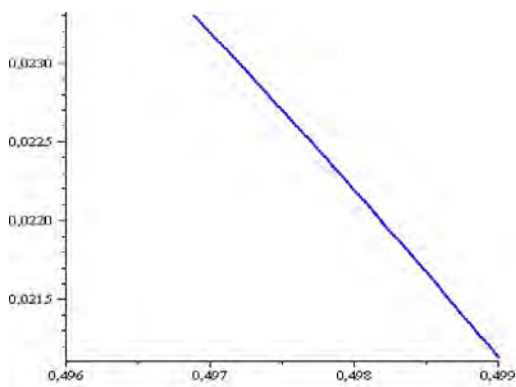
В качестве начальных параметров системы нам известны $u_{1,1} = 0.02$, и $u_{1,1} = 0.03$, $\lambda = 0.5$, $\mu = 0.25$ здесь параметры Ламэ безразмерны. Для удобства выберем предварительные пластические деформации равными нулю.

Используя данные параметры, решая уравнение $\det \begin{pmatrix} F_1(e_{11}, e_{21}, e_{22}, T', \Theta') \\ \dots \\ F_5(e_{11}, e_{21}, e_{22}, T', \Theta') \end{pmatrix} = 0$, из (16) мы получаем $\xi = 4.9999999999$

Для полученного ξ решаем систему (17), решения данной системы представлены ниже. На рисунке 4 изображена зависимость компонент градиента вектора перемещений на простой волне.

На рис. 5 и 6 приводится зависимость компонент тензора обратимых деформаций e_{ij} от автономной переменной внутри простой волны.

$U_{1,1}(\xi)$:



$U_{2,1}(\xi)$:

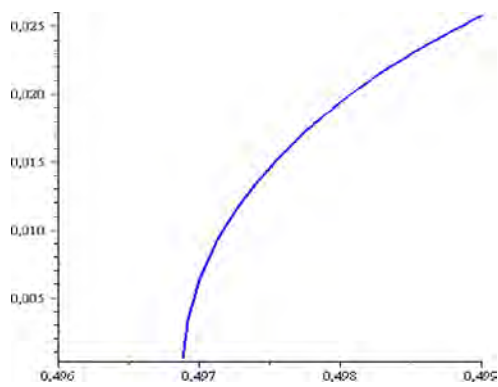
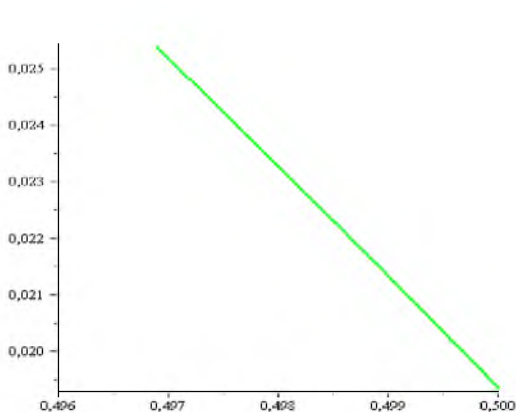


Рисунок 4

$e_{11}(\xi)$:



$e_{21}(\xi)$:

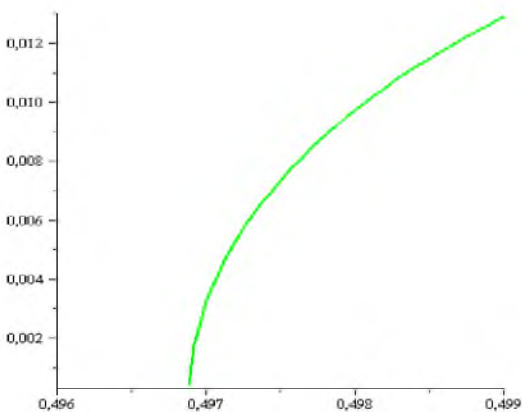


Рисунок 5

$e_{22}(\xi)$:

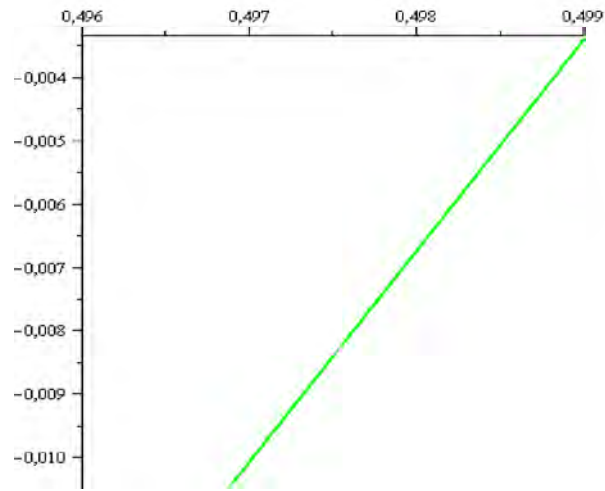
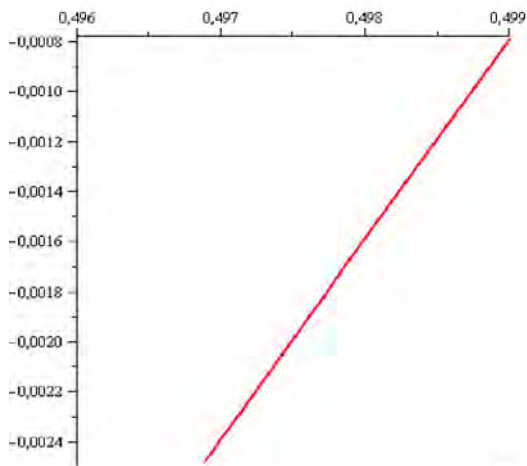


Рисунок 6

$p_{11}(\xi)$:



$p_{21}(\xi)$:

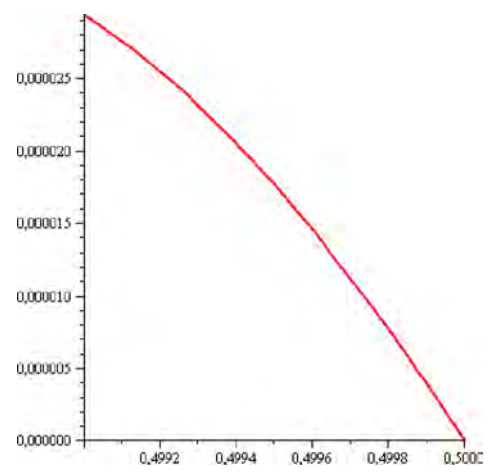


Рисунок 7

$p_{22}(\xi)$:

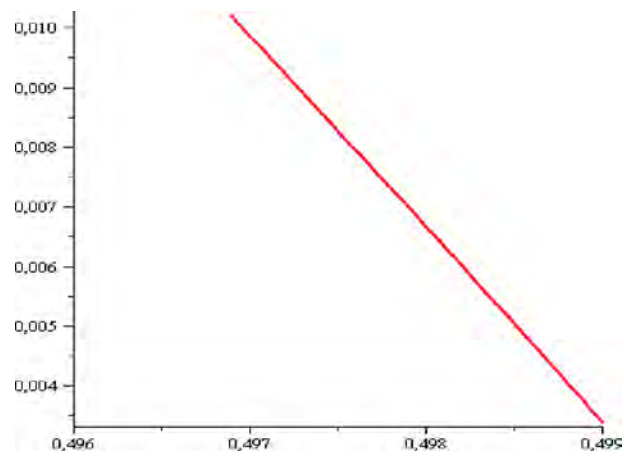


Рисунок 8

На рис. 7 и 8 приводится зависимость компонент тензора необратимых деформаций p_{ij} от автомодельной переменной внутри простой волны. Из представленных результатов видно, что пластические деформации накапливаются внутри простых волн, причем скорости распространения их меньше, чем скорости соответствующих им упругих ударных волн, что согласуется с классическими результатами.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, гранты 12-01-90004-Бел_а, 11-01-00360-а.

Заключение. В рамках модели больших упругопластических деформаций, рассматривается одномерная автомодельная задача ударного деформирования полупространства. Получено, что в данной постановке задачи, пластические деформации могут изменяться на двух простых волнах Римана. Из полученных численных расчетов видно, что скорости распространения пластических волн меньше скорости распространения соответствующих им упругих ударных волн.

Литература

1. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232с.
2. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528с.
3. Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Украинский математический журнал 1954. Т. 6, вып. 3 С. 314–324.
4. Ильющин А.А. Пластичность. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.
5. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука. 1986. 232 с.
6. Lee E.H. Elastic-plastic deformation at finite strains // Trans ASME: J. Appl. Mech. 1969. 36. № 1. P. 1–6.
7. Левитас В.И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев.: Наукова думка, 1987. 232 с.
8. Быковцев Г.И., Шитиков А.В. Конечные деформации упругопластических сред // Доклады АН СССР. 1990. Т. 311, №1. С. 59–62.
9. Роговой А.А. Определяющие соотношения для конечных упруго–неупругих деформаций // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т. 46, №5. С. 138–149.
10. Чернышов А.Д. Определяющие уравнения для упругопластического тела при конечных деформациях // Известия РАН. Механика твердого тела. 2000. №1. С. 120–128.
11. Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтанюк Л.В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Доклады РАН. 1996. Т. 347, №2. С. 199–201.
12. Мясников В.П. Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестник ДВО РАН. 1996. №4. С. 8–13.
13. Ковтанюк Л.В. Моделирование больших упругопластических деформаций в неизотермическом случае // Дальневосточный математический журнал. 2004. Т. 5, №1. С. 107–117.

Summary

The one-dimensional automodel problem, about deforming elastic-plastic half-space with large deformation, was considered. It was obtained, that the plastic deformations can change in two type of simple Riman waves. The sped of plastic waves are less then velocity of elastic shock waves, was shown in numerical calculations.

Поступила в редакцию 15.11.2012

СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ РЕКОНСТРУИРОВАННОГО СРЕДНЕГО УХА, ПОДВЕРГНУТОГО ТИМПАНОПЛАСТИКЕ И СТАПЕДОТОМИИ

Славашевич И. Л., Михасев Г. И., Ботогова М.Г.

УО «Белорусский государственный университет», Минск

Введение. Поражение и нарушение функций звукопроводящих структур среднего уха чаще всего возникают в связи с перенесенным ранее или текущим воспалительным процессом в барабанной полости. При этом обычно наступает значительная потеря слуха. В ряде случаев для улучшения слуха прибегают к хирургическому вмешательству и, в частности, к тотальной реконструкции, предполагающей одновременно тимпаноластику и полную оссикулопластику. Тимпаноластика – это операция, выполняемая для восстановления барабанной перепонки после перфорации или разрыва, либо на ее полную реставрацию с использованием хрящевого трансплантата. Тотальная оссикулопластика – замена всей цепи косточек на протез типа TORP [1]. При распространении отосклеротического процесса на кольцевидную связку и подножную пластинку стремени, т. е. когда наступает анкилоз стремени (клиническое проявление отосклероза), в хирургической практике часто выполняют стапедотомию, которая заключается в перфорации подножной пластинки с последующим вводом ствола протеза через отверстие в кохлеарную жидкость улитки. Одним из негативных последствий данной операции является снижение общей жесткости всей системы [2], а также искажение спектра собственных частот реконструированного среднего уха (PCY) по сравнению с частотами СУ в норме [3].

Целью работы является построение динамической модели звукопроводящей системы реконструированного среднего уха (PCY) с учетом тангенциальных деформаций тимпанальной мембраны (TM) и, соответственно, мембранных усилий.

Постановка задачи. Разрешающие уравнения. TM будем моделировать как круглую упругую изотропную пластинку радиуса a , изготовленной из хрящевого трансплантата. [4] Протез типа TORP состоит из недеформируемой пластинки (основания) радиуса b и стержня, жестко сопряженного с ней (рис. 1а). Пусть l – длина ствола протеза, а l_0 – расстояние между центрами TM и точкой перфорации подножной пластины стремени. В работе [5] показано, что наиболее предпочтительной техникой установки протеза, с точки зрения минимизации начальных напряжений, является техника, когда основание протеза размещается на восстановленной TM как можно ближе к центру, а его ствол изгибается на некоторый угол γ . Рассмотрим здесь случай, когда центры восстановленной TM и основания протеза совпадают. Будем считать, что основание протеза и хрящевой трансплантат жестко склеены, тогда TM рассматриваем как кольцевую пластинку с внутренним и внешним радиусами b и a соответственно.

Пусть перфорация подножной пластинки стремени выполняется в месте, где ее толщина минимальна. Тогда, протез имеет две степени свободы, перемещение и поворот (рис. 1б).

В качестве уравнений, описывающих движение PCY, примем уравнения [6]:

$$D\Delta^2 W - \lambda W = 0. \quad (1)$$

$$r \frac{\partial T_1}{\partial r} + T_1 - T_2 + \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0, \quad r \frac{\partial S}{\partial r} + 2S + \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} = 0. \quad (2)$$

где $T_1 = K \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\nu}{r} U + \frac{\nu}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)$, $T_2 = K \left(\nu \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r} U + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)$, $S = \frac{K(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{r} V + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right)$ – мем-

бранные усилия, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, $K = \frac{Eh}{1-\nu^2}$ – жесткости пластины, E , ν и ρ – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность хрящевой ткани соответственно, h – толщина пластины, λ – частотный параметр, связанный с частотой собственных колебаний ω соотношением $\lambda = \rho h \omega^2 / D$, W и U , V – нормальное и тангенциальные перемещения соответственно, точек срединной поверхности пластины, а Δ – оператор Лапласа в полярной системе координат r , φ (рис. 2).

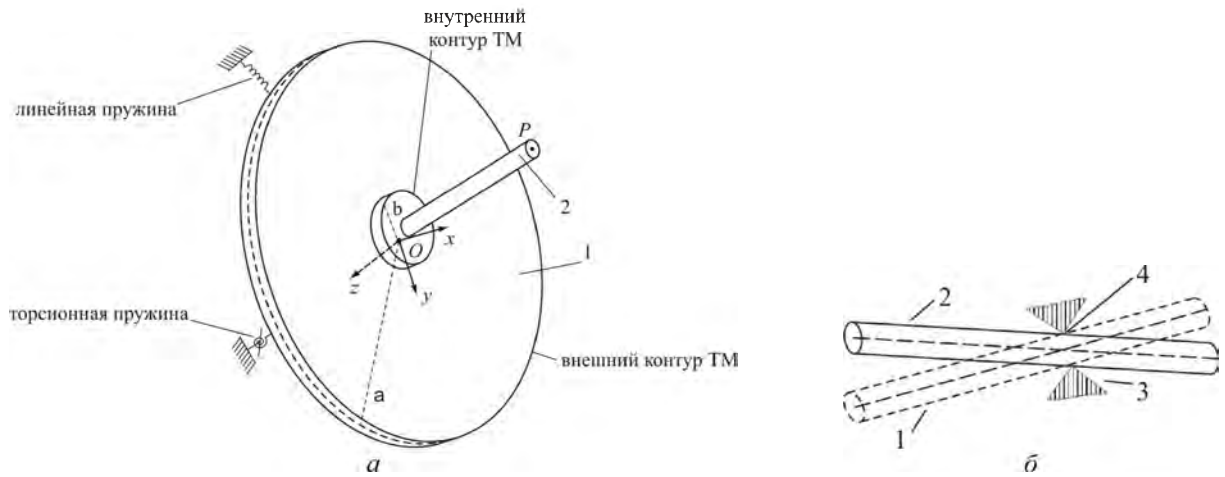


Рисунок 1. а) реконструированная ТМ радиуса a (1) и протез типа TORP (2); б) ствол протеза, введенный в отверстие (перфорацию) подножной пластинки стремени, его начальное положение (1), 2 – конечное положение протеза, 3 – остатки ножек стремени, 4 – перфорация в подножной пластинке

Граничные условия на внутреннем контуре сопряжения пластины с основанием протеза ($r=b$) в случае жесткой заделки примут вид:

$$W|_{r=b} = W_p + b \sin \alpha \cos \varphi, \quad \left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=b} = \sin \alpha \cos \varphi. \quad (3)$$

$$U|_{r=b} = U_p \cos \varphi + b(1 - \cos \alpha) \cos \varphi, \quad V|_{r=b} = U_p \sin \varphi. \quad (4)$$

где W_p, U_p – перемещение основания протеза вдоль осей Ox и Oy соответственно.

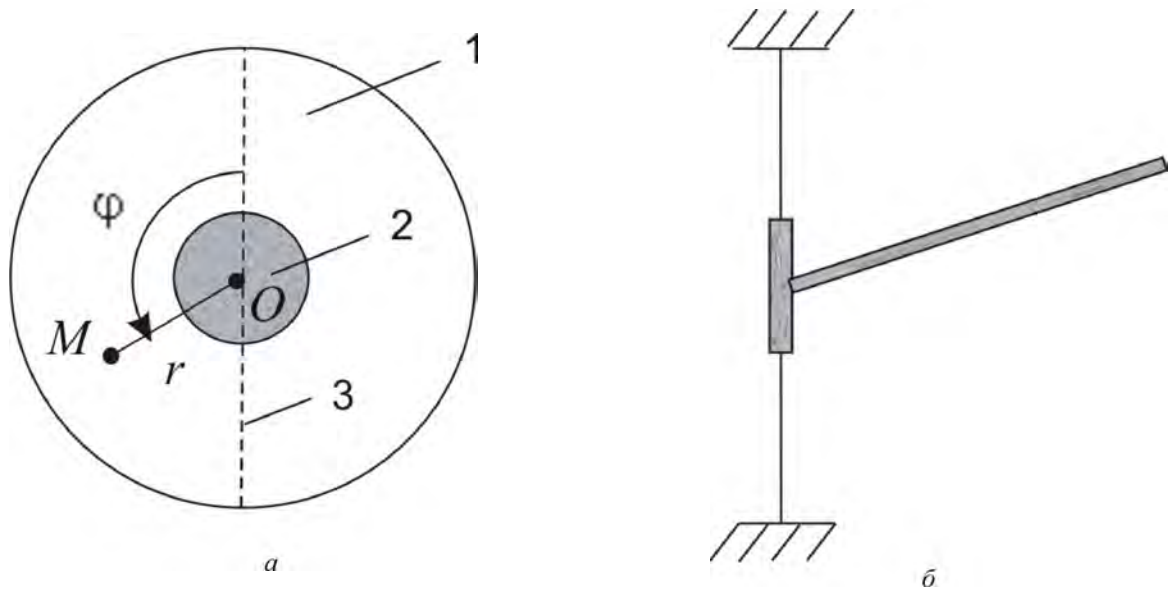


Рисунок 2. а) Полярная система координат с центром в точке O : 1 – ТМ; 2 – основание протеза; 3 – линия, вдоль которой происходит тангенциальное смещение основания протеза; б) поперечное сечение системы “ТМ-протез”

На внешнем контуре ТМ рассмотрим условия [5, 7]:

$$W|_{r=a} = \left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=a} = 0. \quad (5)$$

$$U|_{r=a} = 0, \quad V|_{r=a} = 0. \quad (6)$$

Выберем в качестве обобщенных координат перемещение s и угол поворота протеза α , то есть $q_1 = s$, а $q_2 = \alpha$ (рис. 3) и выпишем уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_1, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = Q_2. \quad (7)$$

Кинетическую энергию системы T можно представить как поступательное движение центра масс и вращение вокруг центра масс, то

$$T = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} J_{C\omega} \dot{\alpha}^2. \quad (8)$$

где V_c – абсолютная скорость центра масс протеза, $\dot{\alpha}$ – абсолютная угловая скорость протеза, $J_{C\omega}$ – момент инерции протеза относительно оси вращения, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, равный

$$J_{C\omega} = \frac{m_2 l^2}{12} + \frac{1}{4} m_1 b^2 + m s^2 + \frac{m_1 m_2 l^2}{4m}. \quad (9)$$

где m_1, m_2 – массы основания и стержня протеза соответственно.

Подставляя в (8) значения скоростей, выраженные через обобщенные координаты и значение $J_{C\omega}$, имеем

$$T = \frac{m \dot{s}^2}{2} + \frac{m}{2} \left(2s + l_0 - \frac{m_2 l}{2m} \right)^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{m_2 l^2}{12} + \frac{1}{4} m_1 b^2 + m s^2 + \frac{m_1 m_2 l^2}{4m} \right] \dot{\alpha}^2. \quad (10)$$

Находим частные производные от кинетической энергии по уравнениям (7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = m \dot{s}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = m \left(2s + l_0 - \frac{m_2 l}{2m} \right) \dot{\alpha} + \left[\frac{m_2 l^2}{12} + \frac{1}{4} m_1 b^2 + m s^2 + \frac{m_1 m_2 l^2}{4m} \right] \dot{\alpha}, \\ \frac{\partial T}{\partial s} = 2m \left(2s + l_0 - \frac{m_2 l}{2m} \right) \dot{\alpha}^2 + m s \dot{\alpha}^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь определим обобщенные силы Q_1 и Q_2 . Изображаем действующие на систему активные силы: Q_p, T_p, F_{st} и момент M_p (рис. 3).

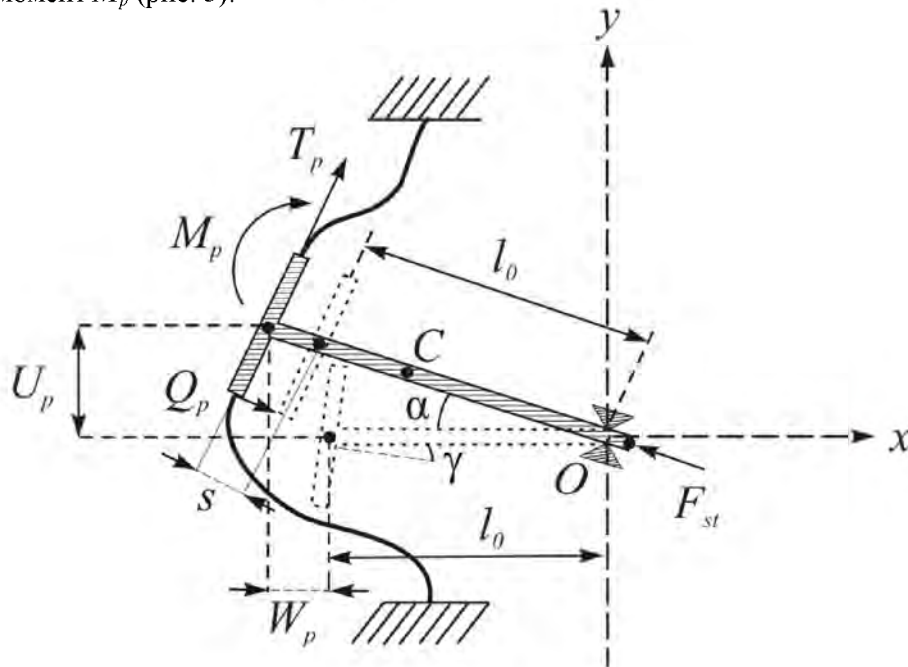


Рисунок 3. – Механическая модель колебательной системы “ТМ-протез”

а) Для определения Q_1 сообщим системе возможное перемещение, при котором координата s получает приращение $\delta s > 0$, а α не изменяется, т.е. $\delta \alpha = 0$ (протез при таком перемещении не поворачивается). Тогда элементарная работа всех действующих сил будет равна

$$\delta A_1 = (-Q_p \cos \gamma - T_p \sin \gamma + F_{st}) \delta s. \quad (12)$$

Здесь Q_p, M_p – равнодействующие перерезывающих сил и изгибающих моментов, возникающих вдоль внутреннего контура $r = b$ со стороны ТМ, а

$$F_{st} = ks \quad (13)$$

– сила, являющаяся мерой взаимодействия внутреннего уха и основания стремени и возникающая в результате деформации мембраны круглого окна, k – коэффициент жесткости системы «кохлеарная жидкость – мембрана круглого окна» [8].

б) Для определения Q_2 сообщим системе возможное перемещение, при котором координата α получает приращение $\delta\alpha > 0$, а s не изменяется, т.е. $\delta s = 0$ (протез при таком перемещении системы не смещается). Тогда

$$\delta A_2 = (-Q_p b - Q_p(l_0 + s)\sin\gamma + M_p)\delta\alpha. \quad (14)$$

Коэффициенты при δs и $\delta\alpha$ в равенствах (13) и (14) и будут искомыми обобщенными силами. Отсюда

$$\begin{aligned} Q_1 &= -Q_p \cos\gamma - T_p \sin\gamma + F_{st}, \\ Q_2 &= -Q_p b - Q_p(l_0 + s)\sin\gamma + M_p, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} Q_p &= -bD \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) \Big|_{r=b} d\varphi, \\ T_p &= b \int_0^{2\pi} [T_1 \cos\varphi + S \sin\varphi] \Big|_{r=b} d\varphi, \\ M_p &= bD \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{v}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{v}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) \Big|_{r=b} d\varphi. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставим выражения обобщенных сил (15) и частные производные от кинетической энергии (10) в уравнения Лагранжа (7). После несложных преобразований получаем дифференциальные уравнения движения протеза:

$$\begin{aligned} m\ddot{s} - 2m \left(2s + l_0 - \frac{m_2 l}{2m} \right)^2 \dot{\alpha}^2 - m s \dot{\alpha}^2 &= -Q_p \cos\gamma - T_p \sin\gamma + F_{st}, \\ \left[\frac{m_2 l^2}{12} + \frac{1}{4} m_1 b^2 + 5m s^2 + \frac{m_1 m_2 l^2}{4m} + 4m s l_0 + m l_0^2 + \frac{m_2^2 l^2}{4m} - (2s + l_0) m_2 l \right] \ddot{\alpha} + \\ + 8m s \dot{s} \dot{\alpha} + 4m l_0 \dot{s} \dot{\alpha} + 2m \dot{s} \dot{\alpha} - 2m_2 l \dot{s} \dot{\alpha} &= -[b + (l_0 + s)\sin\gamma] Q_p + M_p. \end{aligned} \quad (17)$$

Решение краевой задачи. Получили замкнутую краевую задачу (1) – (6), (17) на собственные значения λ . Решение неоднородной краевой задачи (1), (3) и (5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} W &= \frac{W_p}{|M|} \left\{ \bar{M}_{31} J_0(\sqrt[4]{\lambda} r) + \bar{M}_{32} Y_0(\sqrt[4]{\lambda} r) + \bar{M}_{33} I_0(\sqrt[4]{\lambda} r) + \bar{M}_{34} K_0(\sqrt[4]{\lambda} r) \right\} + \\ &+ \frac{\sin\alpha}{|N|} \left\{ (b\bar{N}_{31} - \bar{N}_{41}) J_1(\sqrt[4]{\lambda} r) + (b\bar{N}_{32} - \bar{N}_{42}) Y_1(\sqrt[4]{\lambda} r) + \right. \\ &\left. + (b\bar{N}_{33} - \bar{N}_{43}) I_1(\sqrt[4]{\lambda} r) + (b\bar{N}_{34} - \bar{N}_{44}) K_1(\sqrt[4]{\lambda} r) \right\} \cos\varphi \end{aligned} \quad (18)$$

где J_0, Y_0, J_1, Y_1 – функции Бесселя первого и второго рода нулевого и первого порядков, I_0, K_0, I_1, K_1 – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого и первого порядков, M, N – матрицы размерности 4×4 , элементы которых находятся из граничных условий (3), (5) и ввиду их громоздкости здесь не выписываются, а $\bar{M}_{3j}, \bar{N}_{3j}, \bar{N}_{4j}$ ($j=1, \dots, 4$) – соответствующие миноры матриц M и N .

Принимая во внимание функциональную зависимость (4) тангенциальных перемещений u и v ТМ от окружной координаты φ на линии контакта с основанием протеза (при $r = b$), решение уравнений (2) ищем в виде:

$$u = u_0^c(r) \cos\varphi + u_0^s(r) \sin\varphi, \quad v = v_0^c(r) \cos\varphi + v_0^s(r) \sin\varphi,$$

$$\begin{aligned}
u_0^c(r) &= (1-3\nu)C_{1,1}r^2 + C_{1,2}\frac{1}{r^2} + C_{1,3}(3-\nu)^2 \ln r - C_{1,3}(1-\nu^2) - C_{1,4}, \\
v_0^c(r) &= -(5+\nu)C_{1,5}r^2 - C_{1,6}\frac{1}{r^2} + C_{1,7}(3-\nu)^2 \ln r + 2C_{1,7}(1+\nu) - C_{1,8}, \\
u_0^s(r) &= (1-3\nu)C_{1,5}r^2 + C_{1,6}\frac{1}{r^2} + C_{1,7}(3-\nu)^2 \ln r - C_{1,7}(1-\nu^2) - C_{1,8}, \\
v_0^s(r) &= (5+\nu)C_{1,1}r^2 + C_{1,2}\frac{1}{r^2} - C_{1,3}(3-\nu)^2 \ln r - 2C_{1,3}(1+\nu) + C_{1,4},
\end{aligned} \tag{19}$$

а постоянные C_{ij} находятся из граничных условий (4), (6) и в силу их громоздкости также не приводятся. Заметим лишь, что C_{ij} – линейные функции параметра α .

Выразим нормальное и тангенциальные перемещения точек пластины через обобщенные координаты s и α . В итоге получаем:

$$W_p = (s + l_0)\cos \alpha - l_0, \quad U_p = (s + l_0)\sin \alpha, \tag{20}$$

Найденные перемещения (18), (19), с учетом (20), позволяют определить силы Q_p и T_p , действующие на протез со стороны ТМ. Система уравнений (17) является нелинейной относительно s и α . После линеаризации приходим к системе линейных уравнений

$$\begin{aligned}
m\ddot{s} &= -Q_p(s)\cos \gamma - T_p(\alpha)\sin \gamma + F_{st}(s), \\
\left[\frac{m_2 l^2}{12} + \frac{1}{4}m_1 b^2 + \frac{m_1 m_2 l^2}{4m} + ml_0^2 + \frac{m_2^2 l^2}{4m} - l_0 m_2 l \right] \ddot{\alpha} &= \\
&= -[b + l_0 \sin \gamma]Q_p(s) + M_p(s),
\end{aligned} \tag{21}$$

где

$$Q_p = A \cdot s, \quad T_p = B \cdot \alpha, \quad M_p = N \cdot s. \tag{22}$$

Проведем разделение переменных по формулам:

$$s = S e^{i\omega t}, \quad \alpha = \Lambda e^{i\omega t}, \tag{23}$$

где ω – искомая частота колебаний.

Принимая во внимание (22)-(23), приходим к системе уравнений относительно искомой частоты ω :

$$\begin{aligned}
m\omega^2 S &= -AS \cos \gamma - B\Lambda \sin \gamma + kS \\
\left[\frac{m_2 l^2}{12} + \frac{1}{4}m_1 b^2 + \frac{m_1 m_2 l^2}{4m} + ml_0^2 + \frac{m_2^2 l^2}{4m} - m_2 l l_0 \right] \omega^2 \Lambda &= \\
&= -[b + l_0 \sin \gamma]AS + NS,
\end{aligned} \tag{24}$$

где A, B, N в силу громоздкости здесь не приводятся.

Численный анализ. Численное решение полученной системы уравнений позволяет исследовать влияние геометрических и физических параметров трансплантата, а также протеза на частотные характеристики РСУ. В таблице 1 представлены зависимости первых пяти собственных частот от массы протеза, при $a=5$ мм, $b=1.5$ мм, $E=3.4$ Н/мм², $\nu=0.4$, $h=0.5$, $T_0=10^{-5}$ Н/м [2,6].

Таблица 1 – Зависимость собственных частот ω_i (Гц) от массы протеза m

$10^{-6} m$, кг	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
4.00	118.63	319.39	968.28	2264.05	4005.59
6.00	106.59	306.78	1088.55	2401.23	4129.39
8.00	98.55	324.82	1159.57	2463.48	4184.09

Приведенные в табл. 1 результаты указывают на то, что увеличение массы протеза приводит к заметному уменьшению первых двух частот. Объясняется это тем, что для соответствующих мод определяющим является движение протеза, а частоты ω_j , при $j \geq 3$ отвечают интенсивным колебаниям барабанной перепонки. Табл. 2 показывает сильную зависимость собственных частот от параметров трансплантата: увеличение толщины пластины приводит к росту собственных частот.

Таблица 2 – Зависимость собственных частот ω_i (Гц) от толщины h пластины.

h , мм	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
0.3	68.53	237.4	723.346	1999.22	2528.86
0.5	106.59	306.78	1088.55	2401.23	4129.39
0.7	146.67	371.66	1369.07	3205.75	5643.48

Значительное влияние на динамические характеристики РСУ оказывает модуль упругости хрящевой ткани, замещающей барабанную перепонку. Из таблицы 3 видно, что все собственные частоты РСУ возрастают вместе с модулем упругости хрящевого трансплантата.

Таблица 3 – Зависимость собственных частот ω_i (Гц) от модуля Юнга E

E , Н/мм ²	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
1,2	65.09	188.2	647.62	1426.71	2453.27
3,4	106.59	306.78	1088.55	2401.23	4129.39
5,2	135.5	391.77	1343.13	2970.0	5106.89

В табл. 4 приведены первые пять частот колебательной системы среднего уха, при тотальной реконструкции в случае ограниченной подвижности протеза, когда он имеет лишь одну степень свободы, определяемую направляющей перфорации [3]. Сравнивая частоты, приведенные в последних двух строчках из табл. 1 и 4, приходим к выводу: придание протезу дополнительной подвижности приводит к снижению всего спектра собственных частот системы.

Таблица 4 – Зависимость собственных частот ω_i (Гц) от массы протеза m при $h=0.15$

$10^{-6} m$, кг	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
2.00	114.34	342.45	674.28	1090.72	1566.66
6.00	107.1	327.36	657.49	1074.39	1550.84
8.00	105.40	324.78	654.92	1072.01	1548.6

Для сравнения в табл. 5 приведены первые восемь частот колебательной системы среднего уха в норме, найденные с использованием метода МКЭ [9] с учетом влияния всех связок и мышц барабанной полости.

Таблица 5 – Собственные частоты среднего уха в норме

Номер моды, □	1	2	3	4	5	6	7	8
$\omega^{(□)}$, Гц	91	172	228	271	483	647	857	1189

Из таблиц 1-2 и 5 видно, что варьирование массы протеза и хрящевого трансплантата позволяет приблизить первую частоту РСУ к частоте СУ в норме.

Построенная здесь динамическая модель может быть использована для прогнозирования динамических характеристик РСУ при тимпанопластике и стапедотомии при различных характеристиках вводимого протеза TORP и хрящевого трансплантата.

Резюме

Предложена биомеханическая модель реконструированного среднего уха, подвергнутого тимпанопластике и стапедотомии. Основной целью данного исследования является изучение влияния тангенциальных перемещений в барабанной перепонке на собственные частоты и формы колебаний реконструированного среднего уха. Реконструированная тимпанальная мембрана моделируется как упругая изотропная кольцевая пластина.

Литература

1. Hüttenbrink, K. Titanium clip prosthesis / T. Zahnert, E.G. Wüstenberg // *Audiology and Neuro-Otology*. 2004. Vol. 25. – P. 436–442.
2. Вульштейн, Х. Слухулучшающие операции / Х. Вульштейн – М.: Медицина, 1972. – 423с.
3. Михасев, Г.И. Собственные частоты колебательной системы среднего уха после тотальной реконструкции / Г.И. Михасев, И.Л. Славашевич // *Вестник СПбГУ. Сер. 1*. 2012. Вып. 3. – С. 107-116.
4. Zahnert, Th. Experimental investigations of the use of cartilage in tympanic membrane reconstruction / Th. Zahnert, K.-B. Hüttenbrink, D. Murbe, M. Bornitz // *The American Journal of Otology*. 2000. Vol. 21. – P. 322–328.
5. Mikhasev, G. I. On the strain-stress state of the reconstructed middle ear after inserting a malleus-incus prosthesis / G. I. Mikhasev, S. A. Ermochenko, M. Bornitz // *Mathematical Medicine and Biology*. 2010. Vol. 27 (4). – P. 289–312.
6. Михасев, Г.И. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках: Асимптотические методы / Г.И. Михасев, П.Е. Товстик – М.: Физматлит, 2009. – 290с.
7. Wada, H. Three-dimensional finite-element method (FEM) analysis of the human middle ear / H. Wada, T. Koike, T. Kobayashi // *Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery* (Eds. K.-B. Hüttenbrink). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology, 1997. – P. 76–81.
8. Чигарев, А.В. Биомеханика: Учебник / А.В. Чигарев, Г.И. Михасев, А.В. Борисов. – Мн.: Изд-во Гревцова, 2010. – 284с.
9. Beer, H.-J. Finite element modeling of the human eardrum and applications / M. Bornitz, H.-J. Hardke, R. Schmidt, G. Hofman, V. Vogel, T. Zahnert, K.-B. Hüttenbrink // *Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery*. (Eds. K.-B. Hüttenbrink). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology. 1977. – P. 40–47.

Summary

Biomechanical model of the reconstructed middle ear subjected to tympanoplasty and stapedotomy is proposed. The basic goal of this study is to clear up the influence of the tangential displacements in an eardrum at modes and fundamental frequencies of the reconstructed middle ear. The reconstructed tympanic membrane is modeled as an isotropic elastic annular plate.

Поступила в редакцию 20.11.2012

ДОЛГОВЕЧНОСТЬ МАТЕРИАЛА ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ И ПЕРЕМЕННЫХ НАГРУЗКАХ

Холодарь Б.Г.

УО «Брестский государственный технический университет», Брест

Описание длительной прочности материалов при сложном напряженном состоянии является достаточно сложным и актуальным вопросом, поскольку при его решении необходим учет большого числа параметров, характеризующих свойства материалов, характер поля напряжений и распределение его по объему тела, изменение напряжений во времени, наличие предварительной истории нагружения. Вопрос усложняется, если речь идет о переменных нагрузках. Одним из способов решения является использование кинетических уравнений, описывающих рост дефектности структуры материала в процессе его эксплуатации.

1. Долговечность материала при сложном напряженном состоянии и нагрузках, постоянных во времени. При сложном напряженном состоянии даже для нагрузок, постоянных во времени, не всегда удастся привести задачу к применению выражений, устанавливающих связь долговечности с некоторым эквивалентным напряжением, учитывающим многокомпонентный характер поля напряжений. В общем случае для решения задачи необходимо использовать дифференциальные уравнения, описывающие процесс развития поврежденности материала $0 \leq \omega \leq 1$, под которой понимается мера его деструкции в данной точке тела.

Разделив ω на девиаторную ω_d и гидростатическую ω_g компоненты и рассматривая только необратимую часть поврежденности, можно описать ее рост дифференциальными уравнениями:

$$\omega = \omega_0 + \omega_d$$

$$\dot{\omega}_0 = v_0(1 - \omega) \frac{|\sigma_g|}{\sigma_{bg}} \exp(\Delta U_g(\alpha, \sigma_0, \sigma_i, \omega)), \quad \dot{\omega}_d = v_d(1 - \omega) \frac{\sigma_i}{\sigma_{bi}} \exp(\Delta U_d(\alpha, \sigma_0, \sigma_i, \omega)), \quad (1)$$

где σ_0 – гидростатическое напряжение, $\sigma_i > 0$ – интенсивность напряжений, v и α – структурные параметры материала (константы при фиксированной температуре), связанные соответственно с частотой появления актов необратимого нарушения структуры и с влиянием напряженного состояния на энергию активации этих процессов.

Сомножители $|\sigma_g| / \sigma_{bg}$, σ_i / σ_{bi} отражают уровень упругого искажения исходной структуры материала при напряжениях σ_g , σ_i сравнительно с предельно возможным (σ_b – характеристика прочности материала, т.е. предел прочности, предел текучести), сомножители $\exp(\Delta U)$ учитывают активационный характер разрушения связей внутри структуры тела, сомножитель $(1 - \omega)$ учитывает остаточную сплошность материала (исключает из рассмотрения поврежденный материал).

Аргументы экспоненциальных членов уравнений (1) выражают влияние напряженного состояния на снижение энергии активации процессов деструкции материала $\Delta U(\sigma, \omega)$. Далее зависимости $\Delta U(\omega)$ приняты в виде функции $(1 - \omega)^{-1}$, а зависимости $\Delta U(\sigma)$ – линейными:

$$\Delta U_g = x_g / (1 - \omega) = (\alpha_g \sigma_g + \alpha_{dg} \sigma_i) / (1 - \omega), \quad \Delta U_{dev} = x_{dev} / (1 - \omega) = (\alpha_{gd} \sigma_g + \alpha_d \sigma_i) / (1 - \omega). \quad (2)$$

Коэффициенты α_{gd} , α_{dg} характеризуют взаимовлияние двух видов деформированного состояния (изменение объема и изменение формы) при локальных перестройках структуры. Поскольку поврежденность рассматривается как величина скалярная, ее влияние на внутренние напряжения в точке тела приближенно учитывается сомножителем $1/(1 - \omega)$.

Октаэдрические касательные и гидростатические нормальные напряжения (или соответствующие им упругие деформации) в среднем наиболее полно отражают искажение исходной равновесной структуры материала в точке, поэтому выделение двух компонент поврежденности и присутствие коэффициентов α_g , α_{dg} в матрице структурных параметров материала представляется оправданным.

Обозначив дополнительно $\tau = v_d t$, решение этих уравнений для случая постоянных напряжений графически можно представить в виде поверхности долговечности, показанной ниже (рис. 2) для случая нулевой начальной поврежденности. Вдоль горизонтальных координатных осей отложено изменение

энергии активации (аргументы x_{dev} и x_g), вдоль вертикальной оси – логарифм долговечности $\lg t_p$. Ввиду линейности соотношений (2), форма поверхности сохраняется, если вместо осей x_{dev} и x_g использовать парциальные оси $\alpha_g \sigma_0$ и $\alpha_d \sigma_i$.

Для проверки соответствия расчета результатам конкретного эксперимента используем опыты [1] по длительной прочности трубчатых образцов жесткого изотропного поливинилхлорида при плоском и близких к нему напряженным состояниям (рис.1).

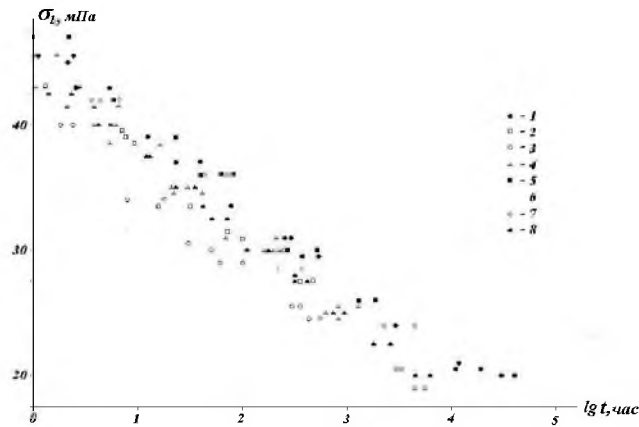


Рисунок 1 – Длительная прочность жесткого поливинилхлорида

Напряжение создавалось путем сочетания осевых нагрузок, крутящего момента и внутреннего давления с обеспечением режима простого нагружения $\theta = \text{const}$ вплоть до момента выхода на заданный уровень. При $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ под углом θ в [1] подразумевается угол, тангенс которого определяется как $\text{tg} \theta = \sigma_2 / \sigma_1$ или $\text{tg} \theta = \sigma_3 / \sigma_1$.

Наименьшей долговечностью, как указано в [1], обладают образцы при двухосном растяжении, наибольшей – при одноосном. Это, отметим, находится в определенном противоречии с понятием “критерия текучести” в теории пластичности, в соответствии с которым при $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\sigma_3 = 0$ текучесть наступает, если одно любое из главных напряжений σ_1 , σ_2 достигают предела текучести материала. Другими словами, эквивалентное напряжение при деформировании и разрушении неодинаково [2]. я

Для приведенных опытов значения средних напряжений $\sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3$ и интенсивности напряжений $\sigma_i = \sqrt{(y_1 - y_1)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (y_3 - y_1)^2} / \sqrt{2}$, выраженные через наибольшее напряжение опыта σ_1 , составляют:

$$\begin{aligned}
 j = 1: & \quad \sigma_0 = 0.333\sigma_1 & \sigma_i = 1.000\sigma_1 & \varphi = 18.42^\circ \\
 j = 2: & \quad \sigma_0 = 0.477\sigma_1 & \sigma_i = 0.927\sigma_1 & \varphi = 27.25^\circ \\
 j = 3: & \quad \sigma_0 = 0.621\sigma_1 & \sigma_i = 1.136\sigma_1 & \varphi = 28.81^\circ \\
 j = 4: & \quad \sigma_0 = 0.454\sigma_1 & \sigma_i = 0.988\sigma_1 & \varphi = 24.70^\circ \\
 j = 5: & \quad \sigma_0 = 0.300\sigma_1 & \sigma_i = 1.054\sigma_1 & \varphi = 15.91^\circ \\
 j = 6: & \quad \sigma_0 = 0.129\sigma_1 & \sigma_i = 1.349\sigma_1 & \varphi = 5.48^\circ \\
 j = 7: & \quad \sigma_0 = 0.299\sigma_1 & \sigma_i = 1.055\sigma_1 & \varphi = 15.80^\circ \\
 j = 8: & \quad \sigma_0 = 0.014\sigma_1 & \sigma_i = 1.696\sigma_1 & \varphi = 0.46^\circ
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

При определении σ_0 , σ_i в отличие от [1] принято, что $\sigma_3 = q$ вместо $\sigma_3 = q / 2$, где q – величина внутреннего давления в образцах. Кроме того, $\text{tg} \varphi = \sigma_0 / \sigma_i$.

Опыты 8 соответствуют сдвиговому нагружению, опыты 3 в наибольшей степени зависят от гидростатической составляющей, опыты 5 и 7 по своим параметрам практически совпадают. С учетом разброса экспериментальных данных результаты испытаний для серий 5, 7 и 1 трудно-различимы между собой. Если пренебречь гидростатической частью поврежденности ω_g , то опытные данные не удастся сгруппировать вдоль одной обобщенной кривой долговечности. Поэтому для структурных параметров уравнений (1) были подобраны интервалы, в пределах которых опытные точки располагаются вблизи поверхности долговечности (рис.2, рис.3). При этом было принято, что для изотропного тела выполняется условие $\alpha_{gd} = \alpha_{dg}$. Кроме того, принято $v_g / S_{bg} = v_d / S_{bdew}$. Данные предположения не вполне очевидны и

могут быть уточнены при обработке результатов испытаний для других материалов и условий нагружения. На рис.3 показаны отклонения точек от соответствующих кривых, являющихся радиальными сечениями поверхности долговечности для серий опытов с $\theta_j = \text{const}$ при выбранных значениях структурных параметров материала. Ориентируясь на (3), можно сказать, что взаимное положение построенных по данным эксперимента кривых на поверхности долговечности соответствует исходным физическим представлениям, а оба аргумента x_g и x_{dev} оказывают соизмеримое влияние на долговечность материала.

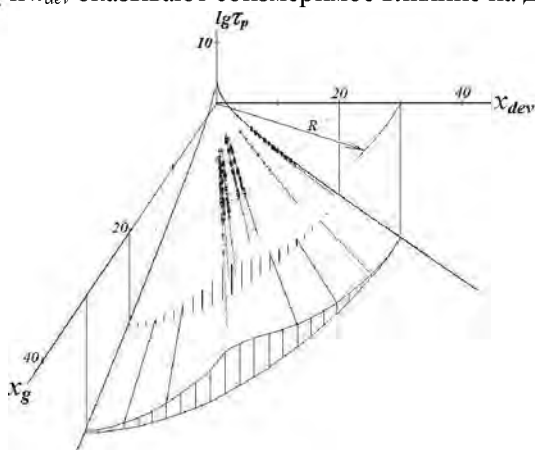


Рисунок 2 – Поверхность долговечности и расположение экспериментальных точек (номера серий слева направо 3,2,4,1,5 и 7,6,8)

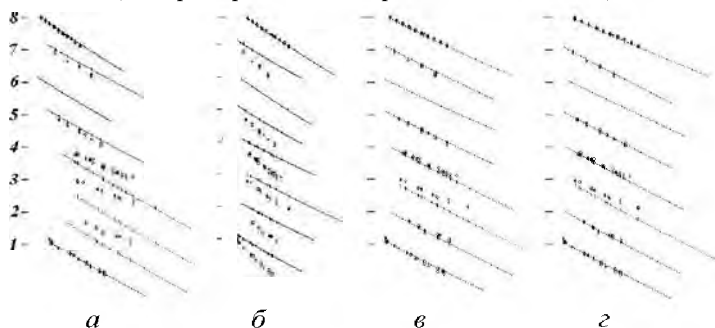


Рисунок 3 – Влияние структурных параметров на положение точек эксперимента относительно поверхности долговечности по сечениям 1-8 (а – $\alpha_g=0.9$, $\alpha_d=0.16$, $\alpha_{gd}=\alpha_{dg}=0$; б – $\alpha_g=0.38$, $\alpha_d=0.17$, $\alpha_{gd}=\alpha_{dg}=0$; в – $\alpha_g=0.38$, $\alpha_d=0.17$, $\alpha_{gd}=\alpha_{dg}=0.16$; г – $\alpha_g=0.28$, $\alpha_d=0.17$, $\alpha_{gd}=0.1$, $\alpha_{dg}=0.2$, МПа⁻¹), $v_g/S_{bg}=v_d/S_{bdev}=6.5 \cdot 10^{-5}$

Как видно из рис.3, по приведенным в [1] данным не удалось положить все экспериментальные точки на построенную поверхность долговечности, – результаты расчета для случая двухосного растяжения ($j=3$) выпадают из общей совокупности. Более плотная группировка достигается, если подобрать структурные параметры при условии $\alpha_{gd} \neq \alpha_{dg}$ (рис. 3г). Однако опыты серии 3 и в этом случае выделяются среди других. Поэтому можно предположить, что в процессе длительного нагружения материала имело место перераспределение напряжений σ_1 , σ_2 по толщине стенки, которое, как известно [3], может быть весьма существенным и происходит с уменьшением максимальных напряжений. В нашем случае при уменьшении исходных напряжений серии 3 примерно в 1.2 раза данные экспериментов точно ложатся на расчетную поверхность.

Опыты были обработаны также с учетом указанного в [1] ступенчатого характера нагружения образцов при выходе на заданный уровень. Это фактически не дало изменения результатов, хотя для больших уровней напряжений в сериях наклон поверхности долговечности начинает заметно изменяться (уменьшается).

При построении сечений поверхности долговечности, соответствующих $\theta_j = \text{const}$, вдоль каждого луча откладывается аргумент $R_j = \sqrt{x_{gj}^2 + x_{devj}^2} = r_j y_1$. При $\sigma_1 = 30$ расчетная долговечность $\lg \tau_p$ для $j = 1, \dots, 8$ соответственно равна $-3.852, -4.520, -5.861, -4.526, -3.803, -3.853, -3.802, -4.479$ при $\alpha_{gd} = \alpha_{dg}$ и

–3.857, –4.348, –5.617, –4.412, –3.8457, –3.840, –3.84565, –4.257 при $\alpha_{gd} \neq \alpha_{dg}$, так что по убыванию долговечности серии испытаний располагаются в порядке 7,5,1,6,8,2,4,3 и 6,7,5,1,8,2,4,3. Таким образом, при одинаковых значениях растягивающего напряжения σ_1 наибольшей долговечностью материал обладает в сериях 7,5,1,6, наименьшей – в серии 3, что с учетом разброса экспериментальных данных не противоречит указанному в [1]. Полученные последовательности не соответствуют реализовавшимся последовательностям значений аргумента R_j , который в связи с этим не представляет собой величину эквивалентного напряжения для исследуемого материала, – при одинаковых R долговечность меняется, следуя форме поверхности.

На рис.4 для фиксированных уровней долговечности, соответствующих аргументу $x_{dev} = 3, 5, 10, 20$ при $x_g = 0$, построены горизонтальные сечения $x_{dev}(x_g)$ поверхности долговечности и соответствующие им по (2) при $\sigma_i > 0$ зависимости $\sigma_i(\sigma_0)$. На их основе построены также зависимости между главными напряжениями σ_1, σ_2 в предположении $\sigma_3 = 0$. Кривые приведены в относительных координатах, масштаб построения – одинаковый, внешние кривые – при $x_{dev} = 20$, структурные параметры – по рис.3а,в,г (слева направо).

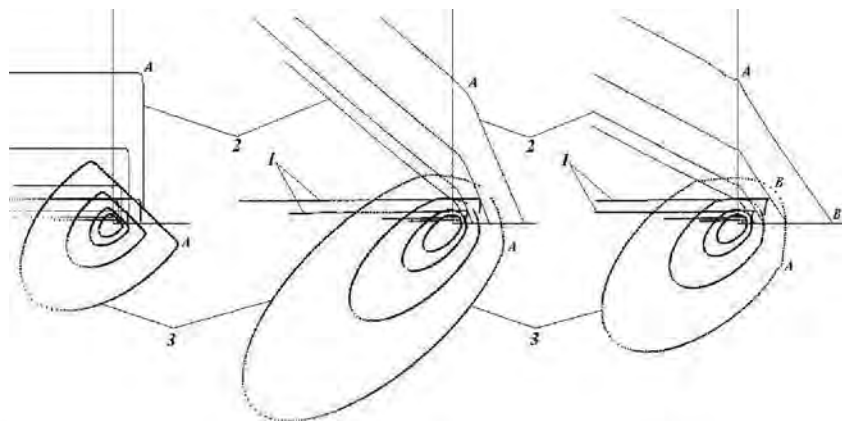


Рисунок 4 – Форма кривых 1– $x_{dev}(x_g)$, 2– $\sigma_i(\sigma_0)$, 3– $\sigma_2(\sigma_1)$ при заданных уровнях долговечности (A, B– точки соответствия)

Как видно из графиков, форма кривых зависит от величин структурных параметров материала и уровня напряжений. Кривые $\sigma_2(\sigma_1)$ не соответствуют эллиптической форме кривых, описывающих критерий прочности склерономного материала (критерий Мизеса). Из рассмотренного следует также, что в условиях пространственного напряженного состояния не существует общего для всех материалов “критерия долговечности” (другими словами, выражения для эквивалентного напряжения). При этом имеет значение и факт различия структурных параметров для разных материалов и температур. С точки зрения реологии аналогичное заключение можно сделать и относительно критерия текучести материалов, поскольку роль напряженного состояния в изменении энергии активации процессов деформирования и разрушения аналогична [4].

С учетом формы поверхности $lg\tau_p(x_{dev}, x_g)$ нетрудно рассмотреть вопрос о долговечности материала, находящегося в сложном напряженном состоянии под действием последовательности нагрузок со ступенчато изменяющимся уровнем (блоковые нагрузки, в том числе циклические) при выполнении условий прямого нагружения. Очевидно, что результат рассмотрения здесь даст вывод, аналогичный случаю одномерного нагружения – для всякой последовательности нагрузок с увеличивающимися уровнями напряжений σ_1 долговечность будет ниже, чем это дается гипотезой линейного суммирования поврежденности, и наоборот для последовательности с уменьшающимися значениями σ_1 .

2. Поверхность долговечности при сложном напряженном состоянии и нагрузках, переменных во времени. С учетом того, что при монотонно увеличивающейся или постоянной нагрузке основной вклад в рост поврежденности дают исходные дефекты, уравнения (1) можно обобщить на случай, когда имеет место размножение числа дефектов структуры в процессе нагружения, что наблюдается при циклических воздействиях. Если нагружение сопровождается разгрузками, то рассеяние энергии в материале вызывает появление дополнительных центров дефектности структуры, что влечет рост частотного

параметра v . Это обстоятельство может быть учтено введением в (1) дополнительного множителя вида $1 + F(\sigma, \varepsilon, t)$, который зависит от напряжений, деформаций и времени. При многоцикловых нагрузках одинакового вида функция F не равна нулю на интервале напряжений $\sigma_s \leq \sigma \leq \sigma_b$ (здесь σ_s – предел усталости), а зависимость от времени линейна. Для случая одномерного растяжения-сжатия соответствующее уравнение рассмотрено и проанализировано в [5] для нескольких возможных форм функции $F(\sigma, t)$. Здесь для нее используется предельный случай в виде функции Хевисайда, что дает скачек на поверхности долговечности.

Для случая многоциклового усталости при гармонической форме нагрузки уравнения запишутся в виде:

$$\omega = \omega_g + \omega_d$$

$$\dot{\omega}_g = v_g(1 - \omega) \frac{|\sigma_g(r+1)|}{\sigma_{bg}} (1 + K_g F_s f t) \exp((\alpha_g \sigma_g (r + \sin(2\pi f t)) + \alpha_{dg} \sigma_i |r + \sin(2\pi f t)|) / (1 - \omega)) \quad (4)$$

$$\dot{\omega}_d = v_d(1 - \omega) \frac{|\sigma_d(r+1)|}{\sigma_{bi}} (1 + K_d F_s f t) \exp((\alpha_{gd} \sigma_g (r + \sin(2\pi f t)) + \alpha_d \sigma_i |r + \sin(2\pi f t)|) / (1 - \omega)),$$

где σ_g, σ_d – амплитудная величина соответствующих напряжений, r – доля постоянной составляющей цикла сравнительно с вибрационной (при прямом нагружении), K_g и K_d – коэффициенты зарождения наведенных дефектов, функция $F_s = 1$ при $\sigma_s \leq \sigma \leq \sigma_b$ и $F_s = 0$ в других случаях, f – частота цикла, t – время ($N = ft$ – число циклов).

Решение уравнений (1)-(4) позволяет построить поверхность долговечности, иллюстрирующую связь логарифма приведенного времени $\tau_p = v_d t_p$ достижения поврежденностью уровня $\omega = 1$ с аргументами функций снижения энергии активации x_g и x_{dev} . На рис.5 показаны рассмотренные режимы нагружения и соответствующие им фрагменты поверхностей для исходно-неповрежденного материала ($\omega(0) = 0$) при выполнении условий прямого нагружения. Для одномерного случая связь долговечности с формой воздействия прослеживается по кривым, расположенным на плоскости $\lg \tau_p - x_{dev}$.

Построения выполнены со следующими значениями числовых параметров: $\alpha_g = 2.8e - 2$, $\alpha_d = 1.7e - 2$, $\alpha_{gd} = 1.0e - 2$, $\alpha_{dg} = 2.0e - 2$, $v_g = v_d = 1.0e - 6.5$, $\sigma_s = 300$, $\sigma_{bg} = \sigma_{bi} = 1000$, $r = 0.5$, $f = 100$, $K_g = K_d = 10$.

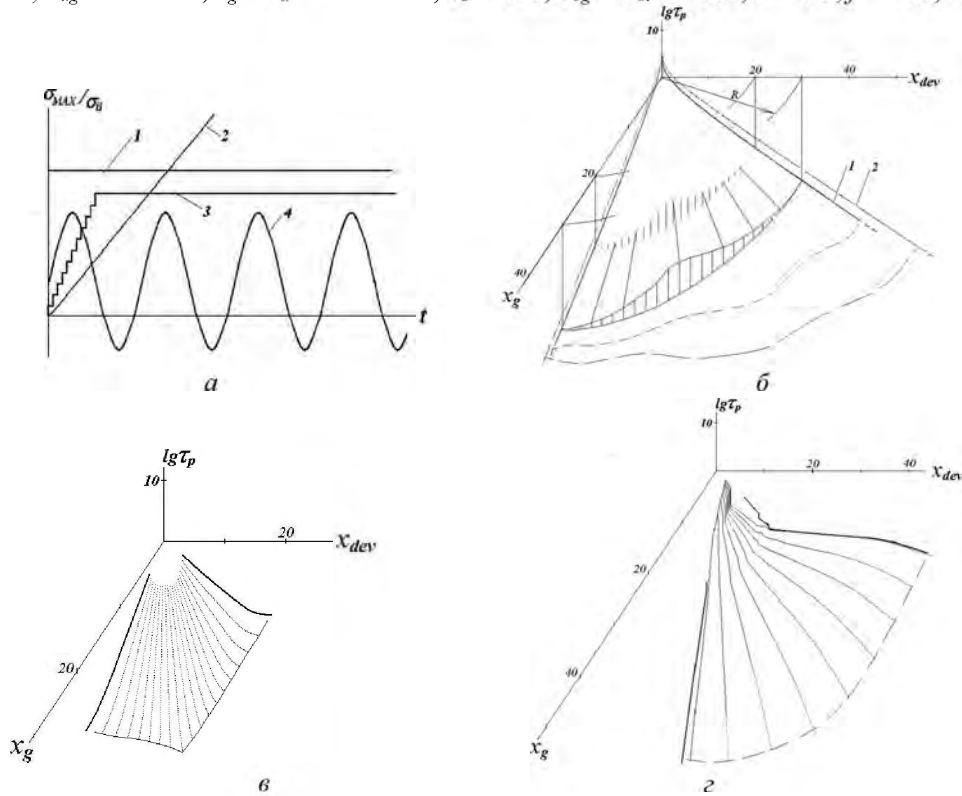


Рисунок 5 – Режимы нагружения (А) и поверхности долговечности для режимов 1 и 2 (Б), 3 (В) и 4 (Г)

В первых трех случаях поверхности долговечности гладкие. Для ступенчатого режима характерным является обрыв поверхности долговечности, соответствующий времени начала последней ступеньки нагружения. Важное влияние здесь играет время выдержки на каждом шаге – с ее увеличением зона обрыва поверхности смещается вверх по оси lgt . Высота ступеньки влияет менее существенно. На поверхности циклической долговечности возникает скачек при напряжениях, соответствующих пределу усталости материала, а также крутой изгиб при подходе к нагрузкам, вызывающим разрушение за время, не превышающее четверти периода цикла заданной частоты (около предела прочности). Для режима гармонической догрузки форма поверхности существенно зависит от структурных параметров материала, уровней вибрационных и средних напряжений цикла. С увеличением гидростатической составляющей воздействия поверхность становится более гладкой, а величина скачка долговечности при переходе через напряжения предела усталости уменьшается, что соответствует результатам анализа для одномерного случая [5]. В расчетах предполагалась независимость свойств материала от времени, но подобные особенности поведения материалов могут быть учтены при совместном решении уравнений течения и поврежденности [4,6]. Роль реологических факторов при испытаниях на долговечность повышается при приближении напряжений к пределу прочности материала, так как при этом время выхода напряжений на предельный уровень составляет значительную долю от общей долговечности.

Резюме

Кинетические уравнения развития поврежденности применены к вопросу о связи долговечности материала с его напряженным состоянием. Поврежденность рассматривается как сумма гидростатической и девиаторной компонент. Проведена обработка экспериментальных данных для жесткого поливинилхлорида при напряжениях, постоянных во времени. Уравнения использованы для описания накопления поврежденности при других режимах нагружения. Построены поверхности долговечности для рассмотренных режимов.

Литература

1. Смотровин Н.Т., Чебанов В.М. Длительная прочность жесткого поливинилхлорида при плоском напряженном состоянии. Механика полимеров, 1970, 3. С.453-457.
2. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. –752 с.
3. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1968 – 400 с.
4. Холодарь Б.Г. Поведение реономного упруго-пластического материала в режимах нагружения с постоянной скоростью. Деформация и разрушение материалов, 2009, №8. – С.14-22
5. Холодарь Б.Г. Модель циклической долговечности стержня при растяжении-сжатии / Теоретическая и прикладная механика. Межд. научно-техн. журнал. – Вып. 27. – Мн.: БНТУ, 2012. – С.177-183.
6. Холодарь Б.Г. Описание поведения реономного упруго-пластического материала при скоростном и ударном нагружении. /Перспективные технологии. Под редакцией В.В. Клубовича – Витебск: Изд-во УО “ВГТУ”, 2011. – С. 567-595.

Summary

The kinetic equations for damage development are applied to investigate the connection of material longevity with its stress state. Damage is considered as the sum of hydrostatic and deviatoric components. Analysis of the experimental data is carried out for rigid polyvinylchloride with time-constant stresses. The equations can be applied to describe the damage accumulation for other load regimes. Surfaces of durability for the considered modes are constructed.

Поступила в редакцию 16.11.2012

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАГРУЖЕННОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАР

Авсиевич А.М., Пронкевич С.А., Бальшева Н.О., Хват А.В., Иванов А.Ю.

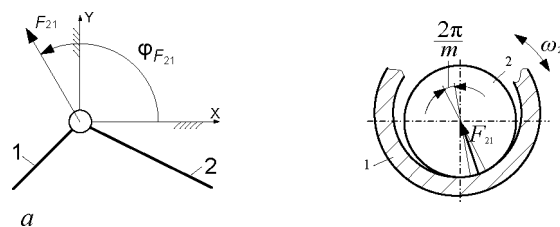
Белорусский национальный технический университет, Минск

Процессом, определяющим ресурс и энергоэффективность машин, является трение в подвижных сопряжениях. Известно, что сила трения зависит от сил реакций в кинематических парах, которые являются переменными величинами и существенно изменяются за один цикл работы машины. Это во многом обусловлено конструктивными особенностями машин. Влияние механических характеристик и особенностей строения рычажных механизмов на нагруженность вращательных кинематических пар доказано в [1]. Все связанные с процессом трения явления: энергетические потери, нагрев, изнашивание, образование вторичных структур и фазовые превращения обусловлены выделением энергии на участках непосредственного контакта трущихся поверхностей. Переменные силы реакции приводят к тому, что в различных положениях механизма работа сил трения будет существенно различаться, а наличие распределения напряжений по номинальной поверхности контакта приводит к тому, что выделение энергии в результате трения на различных участках контактирующих поверхностей в некоторый момент времени также будет неодинаковым.

Работа сил трения (или потери энергии в результате трения) на j -м элементе поверхности звена 1 или 2 вращательной кинематической пары, представленной на рис. 1, за один цикл работы механизма равна

$$A_{\text{тр}j} = \int_0^{\varphi_{\text{тр}}^{\text{II}}} M_{\text{тр}} d\varphi_{\text{тр}}, \quad (1)$$

где $M_{\text{тр}}$ – момент трения, $\varphi_{\text{тр}}^{\text{II}}$ – угловой путь трения за цикл для j -го элемента поверхности.



*а – схематическое изображение; б – конструктивный вид
Рисунок 1 – Вращательная кинематическая пара*

Подставляя известную формулу для момента трения [2], получим

$$A_{\text{тр}j} = \int_0^{\varphi_{\text{тр}}^{\text{II}}} f F r d\varphi_{\text{тр}}, \quad (2)$$

где f – коэффициент трения, F – сила реакции между звеньями, образующими кинематическую пару, r – радиус кинематической пары.

Так как полная сила реакции вызывает напряжения на множестве элементов цилиндрической поверхности в пределах угла контакта α , ее доля, приходящаяся на j -й элемент, может быть представлена как

$$F_j = \sigma_j b r \frac{2\pi}{m}, \quad (3)$$

где σ_j – напряжение (контактное давление) на j -м элементе поверхности, b – ширина цилиндрической поверхности, $r \frac{2\pi}{m}$ – длина дуги j -го элемента, m – число разбиений цилиндрической поверхности.

Подставляя в (1) и вынося постоянные величины за знак интеграла, получим

$$A_{\text{тр}j} = \int_0^{\varphi_{\text{тр}}^{\text{п}}} f \sigma_j b r \frac{2\pi}{m} r d\varphi_{\text{тр}} = f b r^2 \frac{2\pi}{m} \int_0^{\varphi_{\text{тр}}^{\text{п}}} \sigma_j d\varphi_{\text{тр}} \quad (4)$$

Сопоставление работ $A_{\text{тр}j}$ на разных элементах поверхности позволит спрогнозировать относительную интенсивность изнашивания элементов, выявить наиболее нагруженные элементы, изнашивание которых предопределяет ресурс работы всей пары трения. Расчет суммы работ сил трения на всех элементах всех кинематических пар, выполненный для разных вариантов конструктивных схем механических характеристик машины и материалов пар трения, позволит создать конструкцию с наибольшим возможным КПД. Решение данной задачи связано с большим количеством вычислений и может быть реализовано только с созданием программного комплекса, реализуемого на современных ЭВМ.

Определение нагруженности рабочих поверхностей вращательных кинематических пар основано на динамическом анализе механизма, в котором эти пары функционируют [2]. Основное требование к программе заключается в визуализации значений указанных показателей при задаваемом пользователем расчетном шаге по обобщенной координате механизма (массивы с переменной i) и угловой координате элемента исследуемых поверхностей (массивы с переменной j).

Исходными данными программы, рабочее окно которой представлено на рис. 2, являются: основные размеры механизма, массы подвижных звеньев, средняя угловая скорость начального звена. Закон изменения внешних сил задается из текстового файла, данные в который передаются отдельной программой, рассчитывающей математическую зависимость силы от перемещения звена по конечному числу экспериментально полученных точек. Программа реализуется на языке С# и включает в себя четыре основных блока расчетов. Первый блок включает определение угловой скорости и углового ускорения начального звена. Далее производится вычисление скоростей и ускорений точек и звеньев, инерционных нагрузок, реакций в кинематических парах и угловых скоростей поворота их векторов. В последнем блоке выполняется пересчет углов направлений векторов реакций в системы координат, связанные с подвижными звеньями. Результаты расчетов представляют собой пары значений «угол – сила реакции» для множества положений механизма с заданным шагом $\Delta\varphi$ по обобщенной координате и сохраняются в текстовых файлах, как показано на рис. 3.

Математической моделью для построения напряжений, возникающих от давления одной цилиндрической поверхности на другую является задача Штаермана о поиске контактных напряжений при внутреннем контакте цилиндра с круговой полостью [4]. Определение напряжений, возникающих во вращательной паре, выполняется для каждого i -го момента за цикл работы механизма с последующим их векторным суммированием для каждого элемента поверхности.

Введите параметры кривошипно-ползунного механизма

Выберите способ задания Γ_1

ввести значение

рассчитать программой

Задать значения сил $\Gamma_{\text{ис}}$

n - количество разбиений

Произвести расчеты

Кинематические характеристики

Определить скорости и ускорения для кривошипно-ползунных механизмов

Выборить значения

Силовой расчет

Определение значений сил реакций относительно подвижных звеньев

Выберите расположение ползуна

сверху снизу

L1=Loa

L2=Lab

L3=Las2

Γ_0

коэф. неравномер

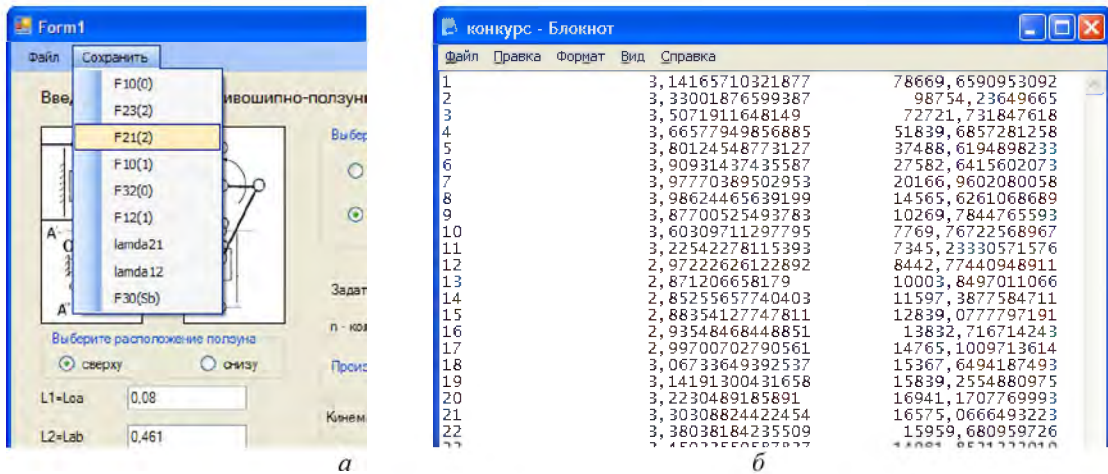
m_2

m_3

ls_2

$w_{1\text{ср}}$

Рисунок 2 – Окно программы расчета сил реакции в кинематических парах



а – выбор сохраняемого параметра; б – текстовый файл значений
 Рисунок 3 – Результаты расчета сил реакций:

Программой, предусмотрены два режима расчета: 1) для определения распределения напряжений и построения эпюры для поверхностей, сдавливаемых одной силой, 2) для построения суммарной эпюры напряжений за цикл вращения.

Окно ввода исходных данных и управления программой показано на рис. 4. Входными параметрами первого режима являются радиусы соприкасающихся поверхностей, материалы поверхностей и сила, с которой происходит вдавливание одной детали в другую. В качестве входных параметров второго режима необходимо также задать размеры и материалы деталей и выбрать файл с величинами и направлением сил реакций, действующих на поверхность элемента кинематической пары и за цикл работы механизма. Результаты расчетов могут быть представлены в виде эпюр напряжений или в виде текстового файла, содержащего значения напряжений для всех элементов цилиндрической поверхности (рис. 5 а, б). На эпюрах длины векторов пропорциональны значениям рассчитываемых параметров, а направления векторов, характеризующих нагруженность отдельных элементов поверхности, соответствуют угловой координате φ_j данного элемента. Визуализация осуществляется посредством библиотеки компьютерной графики OpenGL.

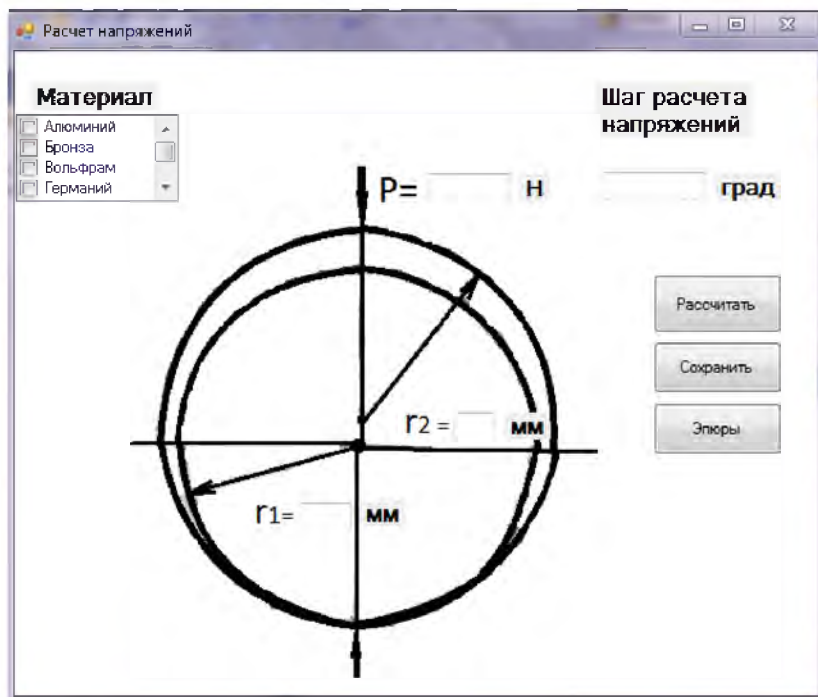
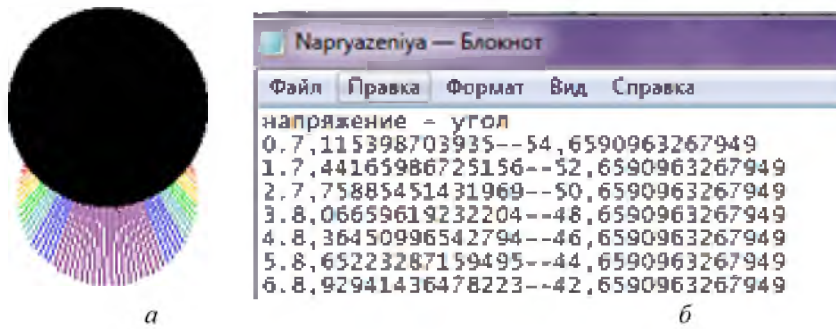


Рисунок 4 – Окно программы расчета распределения напряжений



а – этюра; б – таблица значений
Рисунок 5 – Результаты расчета напряжений.

Угловой путь трения за цикл $\Phi_{\text{тр}}^{\text{II}}$ для каждого j -го элемента поверхности неодинаков, и для его определения используются результаты кинематического анализа механизма, выполненного в первом блоке программы расчета напряжений. Он зависит от угловых перемещений звеньев 1 и 2, образующих кинематическую пару (рис. 1) и выражается формулой:

$$\Phi_{\text{тр}j}^{\text{II}} = \Phi_{2\text{тр}j}^{\text{II}} - \Phi_{1\text{тр}j}^{\text{II}}, \quad (5)$$

где $\Phi_{2\text{тр}}^{\text{II}}$ и $\Phi_{1\text{тр}}^{\text{II}}$ – соответственно угловой путь трения звеньев 2 и 1 при нахождении в контакте исследуемого j -го элемента поверхности звена с поверхностью парного звена за один цикл работы механизма.

В отличие от углового пути трения просто угловой путь k -го звена за цикл работы механизма Φ_k^{II} является одинаковым для всех элементов поверхности данного звена. В расчет пути трения входит та часть углового пути Φ_k^{II} , на протяжении которой j -й элемент поверхности воспринимает нагрузку, т. е. $\sigma_j \neq 0$. В программе расчета напряжений получены значения угловых координат звеньев и напряжений для множества значений обобщенной координаты механизма φ_i , ($i = 1 \dots n$, где n – количество разбиений цикла работы механизма по обобщенной координате). Т. е. известно, для каких значений φ_i имеем $\sigma_j \neq 0$. Поэтому для расчета углового пути трения создается подпрограмма, определяющая соответствующие значения переменной i (количество таких интервалов теоретически может приближаться к количеству разбиений n). В этих пределах для каждого значения φ_i вычисляем угловые координаты φ_{2j} и φ_{1j} звеньев, образующих кинематическую пару, определяем интервалы монотонного изменения угловых координат. В пределах каждого интервала угловой путь трения определяется по формуле

$$\Phi_{\text{тр}j}^{\text{инт}} = (\varphi_2^{\text{K}} - \varphi_2^{\text{H}}) - (\varphi_1^{\text{K}} - \varphi_1^{\text{H}}), \quad (6)$$

где φ_2^{K} и φ_1^{K} – угловые координаты звеньев в конце интервала, φ_2^{H} и φ_1^{H} – угловые координаты звеньев в начале интервала.

Далее для каждого интервала по формуле (4) вычисляем работу трения и суммируем значения по всем интервалам. Для удобства вычислений углового пути трения и численного интегрирования в пределах каждого интервала создается массив значений σ_j , φ_{2i} и φ_{1i} . Такой расчет производится для каждого j -го элемента обеих сопряженных поверхностей.

Таким образом, предлагаемые расчетные модели, программы и способы визуализации результатов расчетов позволяют пользователю, не обладающему специальными знаниями в программировании, исследовать влияние режимов работы, геометрических и массовых характеристик звеньев, материалов элементов кинематических пар на нагруженность изнашиваемых поверхностей, что позволяет оценить ресурс работы и механический КПД механизма. Концепция и отдельные модули разработанной программы могут быть применены для исследования нагруженности кинематических пар не только рычажных, но и зубчатых, кулачковых и иных видов механизмов.

Резюме

Описаны математический аппарат и компьютерная программа расчета распределения напряжений по поверхностям вращательных кинематических пар на основе динамического анализа механизма. Результаты расчета позволяют определить работу сил трения на локальных участках поверхностей, выявлять участки, наиболее подверженные износу, исследовать влияние режимов работы, геометрических и массовых характеристик звеньев, свойств материалов на нагруженность изнашиваемых поверхностей и КПД механизма.

Литература

1. Авсиевич А.М., Реут Л.Е., Девойно О.Г. Влияние конструктивных особенностей рычажных механизмов на изнашивание вращательных пар трения / А.М. Авсиевич, Л.Е. Реут, О.Г. Девойно // Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-тэхнічных навук. 2012, №1 – С. 51 – 57.
2. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин: Учебник для вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 640 с.
3. Авсиевич А.М., Реут Л.Е., Николаев В.А., Адаменко Д.В. Алгоритмизация расчетов факторов износа кинематических пар рычажных механизмов / А.М. Авсиевич и др. // Машиностроение: Респ. сб. научн. трудов. Вып. 25. Мн.: БНТУ, 2009. – С. 8 – 11.
4. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении / В.М. Александров, Б.Л. Ромалис – М.: Машиностроение, 1986. – 176 с.

Summary

The mathematical apparatus and computer program for calculating stress distribution over the surface of the rotational kinematics pairs are described. The calculations are based on the dynamic analysis of the mechanism. This calculation method allows to determine the friction work on the local surface sites, identify the more worn-out areas, to explore the influence of operation modes, parts characteristics, elements materials on the wear surfaces loading and mechanical efficiency of the mechanism.

Поступила в редакцию 27.11.2012

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ И РЕСУРСА БОЛТОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ РАБОЧИХ КОЛЕС ГИДРОТУРБИН НА ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМАХ

Водка А.А., Степченко А.С., Трубаев А.И.

*Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»,
Харьков*

Введение. Болтовые соединения являются одним из наиболее распространенных способов разъемного соединения деталей между собой. Они позволяют быстро и легко осуществлять соединение деталей, при этом, не повреждая их, что делает возможным обратный процесс – разбор/демонтаж конструкции. Однако, главное преимущество болтовых соединений является одним из их главных недостатков, т.к. такие соединения способны терять плотность смыкания в процессе эксплуатации. Этот факт приводит к перераспределению напряженно-деформированного состояния (НДС) и изменению жесткости конструкции. Очевидно, что дальнейшая эксплуатация болтовых соединений с такими отклонениями может существенно снизить надежность гидроагрегата и привести к выходу его из строя.

Широкое использование болтовых соединений вызывает повышенный интерес к оценке гарантированного ресурса их работы. В библиографической статье [1], посвященной различным видам соединений, в том числе и болтовым, представлены ссылки на более чем 700 работ, опубликованных в период с 1990 по 2002 год, посвященных применению метода конечных элементов (МКЭ) к анализу их прочности и надежности.

Особый интерес и актуальность представляет оценка ресурса болтовых соединений больших размеров используемых в энергетических машинах [2-4]. Так, авторами были проведены численные и экспериментальные исследования напряженно-деформированного состояния болтов гидротурбины на стационарном режиме работы [5-6], результаты которых показали необходимость анализа переходных процессов.

Оценка динамической прочности и надежности лопастей поворотно-лопастных гидротурбин в работах [7-9] проведена при приближенном моделировании колебаний ротора гидротурбины в целом. Переходной процесс может приводить к значительным изменениям в напряженном состоянии болтовых соединений ротора гидротурбины.

Постановка задачи. Предметом исследования в работе является оценка ресурса и НДС болтового соединения гидроагрегата ПЛ 40-В-700 (ДнепроГЭС-II, р. Днепр, Украина) с учетом различных режимов эксплуатации. Для оценки характера переходного процесса предлагается воспользоваться результатами натурных испытаний подобных гидроагрегатов Шардаринской ГЭС (турбоагрегаты ПЛ 661-ВБ-500, р. Сырдарья, Казахстан) [10], в процессе которых были измерены ряд параметров, среди которых осевое усилие и крутящий момент на валу турбины. Т.к. рассматриваемый в данной работе гидроагрегат также поворотно-лопастного типа, то на основании теории подобия между зависимостями осевого усилия и вращающего момента от времени на валу турбин выполняются соотношения:

$$M^D(t) = \frac{H^D}{H^III} \left(\frac{D^D}{D^III} \right)^3 M^III(t) \quad (1)$$

$$P_{oc}^D(t) = \frac{H^D}{H^III} \left(\frac{D^D}{D^III} \right)^2 P_{oc}^III(t), \quad (2)$$

где $M^III(t)$ – вращающий момент в гидроагрегате Шардаринской ГЭС; $M^D(t)$ – вращающий момент в гидроагрегате ДнепроГЭС-II; $P_{oc}^III(t)$ – осевое усилие в гидроагрегате Шардаринской ГЭС; $P_{oc}^D(t)$ – осевое усилие в гидроагрегате ДнепроГЭС-II; H^III – напор Шардаринской ГЭС; H^D – напор ДнепроГЭС-II; D^III – диаметр рабочего колеса Шардаринской ГЭС; D^D – диаметр рабочего колеса ДнепроГЭС-II.

График полученных зависимостей осевого усилия и вращающего момента на валу гидротурбины ПЛ 40-В-700 приведен на рис. 1

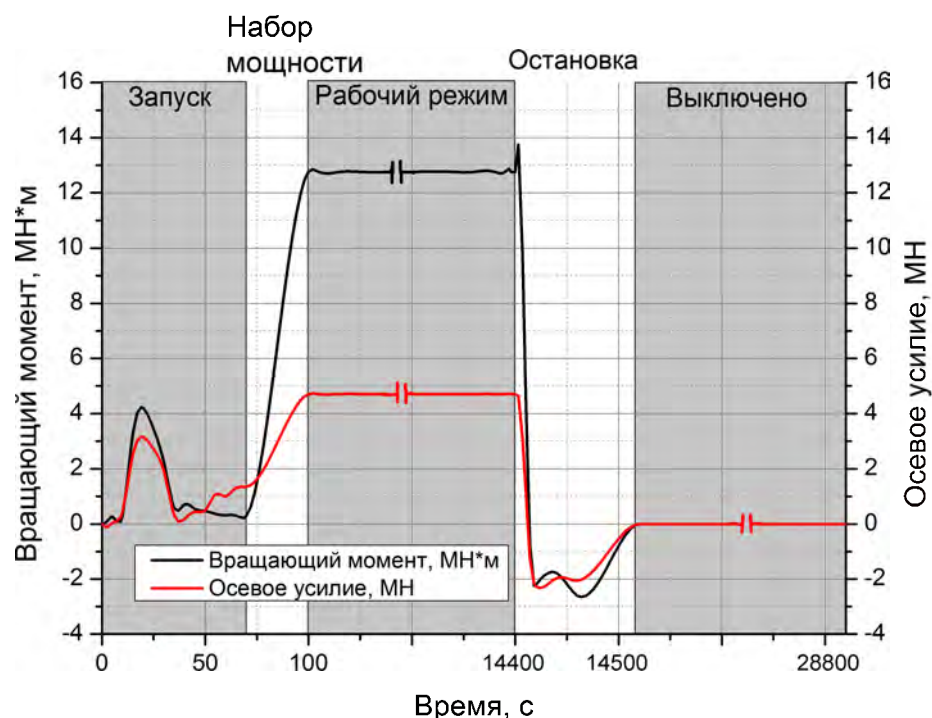
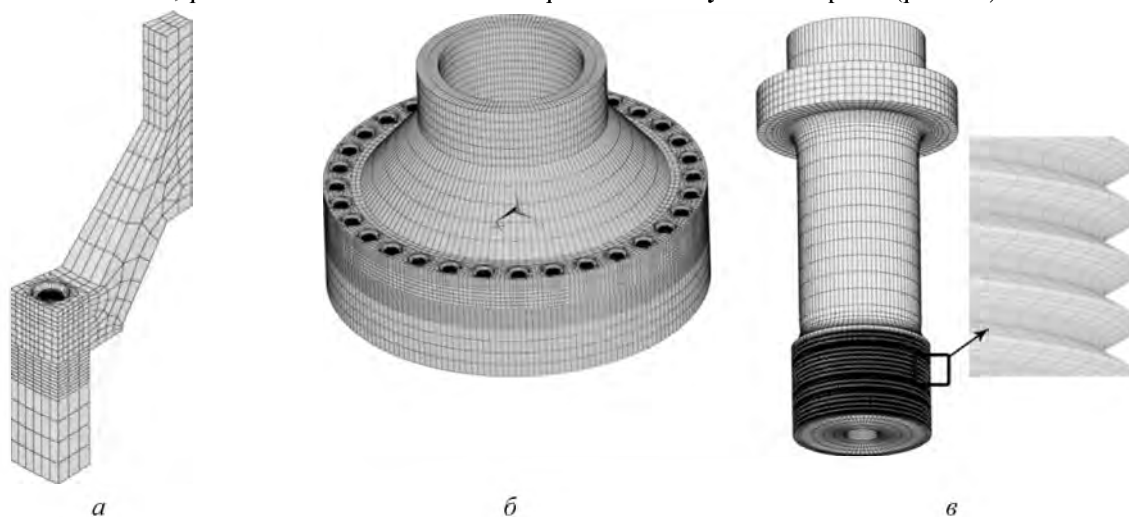


Рисунок 1 – График зависимости крутящего момента $M(t)$ и осевого усилия $P_{oc}(t)$ от времени в процессе работы гидроагрегата

В гидроагрегате могут реализоваться различные переходные процессы, такие как: пуск, остановка, смена рабочих режимов, сбросы нагрузки. Принимая за основу результаты натурных замеров параметров механического нагружения гидроагрегата [10], пересчитанных применительно к турбине ПЛ 40-В-700, в работе необходимо оценить динамическое НДС, возникающие при сбросах нагрузки, а также ресурс болтовых соединений рабочих колес при различных уровнях их затяжки.

Исследование НДС. Низкие частоты нагружения относительно собственных частот ротора позволяют проводить рассмотрение задачи об исследовании динамического НДС в квазистатической постановке, что значительно упрощает математическую модель. Так как осевое усилие и крутящий момент по валу ротора можно считать постоянными, то целесообразно выделить фрагмент фланца ротора и корпуса рабочего колеса соответствующие одному болту (рис. 2а) и учесть циклическую симметрию относительно оси вращения (рис. 2б). КЭ модель болта построена с учетом резьбы. Профиль резьбы построен согласно ГОСТ 9150-81, ГОСТ 8742-81 и ГОСТ 24705-81, однако, для упрощения нанесения КЭ сетки, резьба выполнена как тело вращения без учета спирали (рис. 2в).

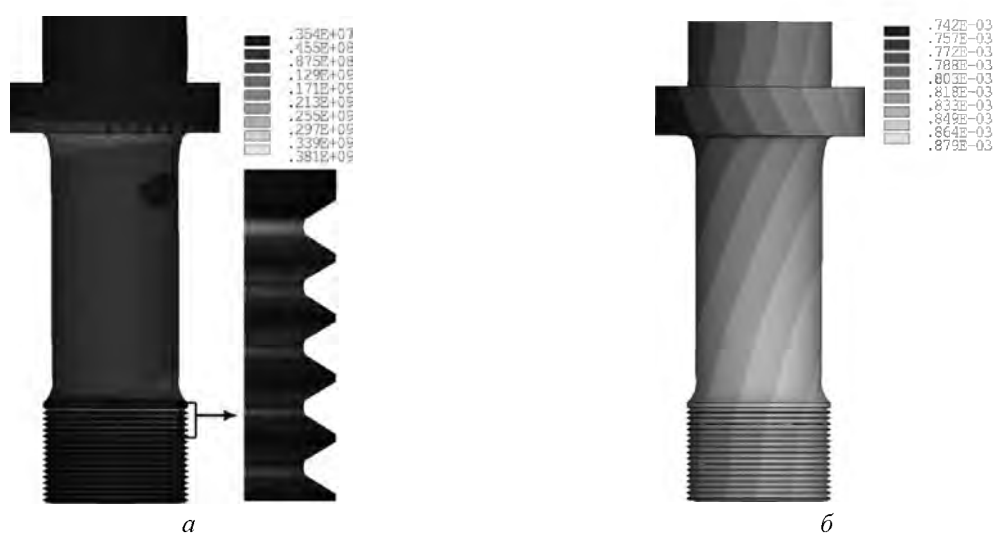


а – сектора вала, приходящегося на один болт;
 б – сектора вала с учетом циклической симметрии; в – болта
 Рисунок 2 – КЭ модели

Граничные условия реализованы следующим образом: верхний край вала защемлялся, а на нижнем краю прикладывалось усилие, эквивалентное действующему осевому и крутящему моменту. Также следует отметить, что между фланцем вала, корпусом рабочего колеса и болтом в КЭ модели учтено контактное взаимодействие. Для ускорения сходимости численного метода и предотвращения движения фрагментов конструкции как жесткого целого использовались упругие двухузловые КЭ.

В качестве граничного условия, моделирующего затяжку болта, задавалось начальное смещение (натяг) головки болта относительно опорной поверхности на величину Δ . Этот параметр является удобным с инженерной точки зрения, так как в дальнейшем его можно легко пересчитать как в температуру нагрева болта при тепловой затяжке, так и в угол поворота болта при использовании силовой затяжки холодным способом.

На рис. 3 показаны распределения перемещений и напряжений по болту в момент времени $t = 90$ при начальном натяге $\Delta = 0,15$ мм, который соответствует удлинению при затяжке $\delta = 0,106$ мм (табл. 1). Зонами концентрации напряжений являются первый виток резьбы и галтель меньшего радиуса под головкой болта [5], что хорошо согласуется с результатами полученными методами тензометрии и фотоупругости [2-6,13]. Абсолютный максимум эквивалентных напряжений по Мизесу в проведенных расчетах всегда наблюдается на первом витке резьбы.



а – эквивалентные напряжения по Мизесу, Па; б – суммарные перемещения, м
Рисунок 3 – Напряженное состояние, возникающее в болте в момент времени $t = 90$ с

Таблица 1 – Соответствие между начальным натягом и удлинением при затяжке

Δ , мм	δ , мм
0,10	0,069
0,15	0,106
0,20	0,141
0,25	0,176
0,30	0,216

Результаты расчетов НДС, возникающего на первом витке резьбы в процессе работы гидроагрегата в зависимости от величины начального натяга, показаны на рис. 4.

В результате проведенных расчетов видно, что между начальным натягом и удлинением при затяжке наблюдается зависимость близкая к линейной, и ее линейное приближение может быть записано в виде: $\delta=0,728\Delta$ (табл. 1).

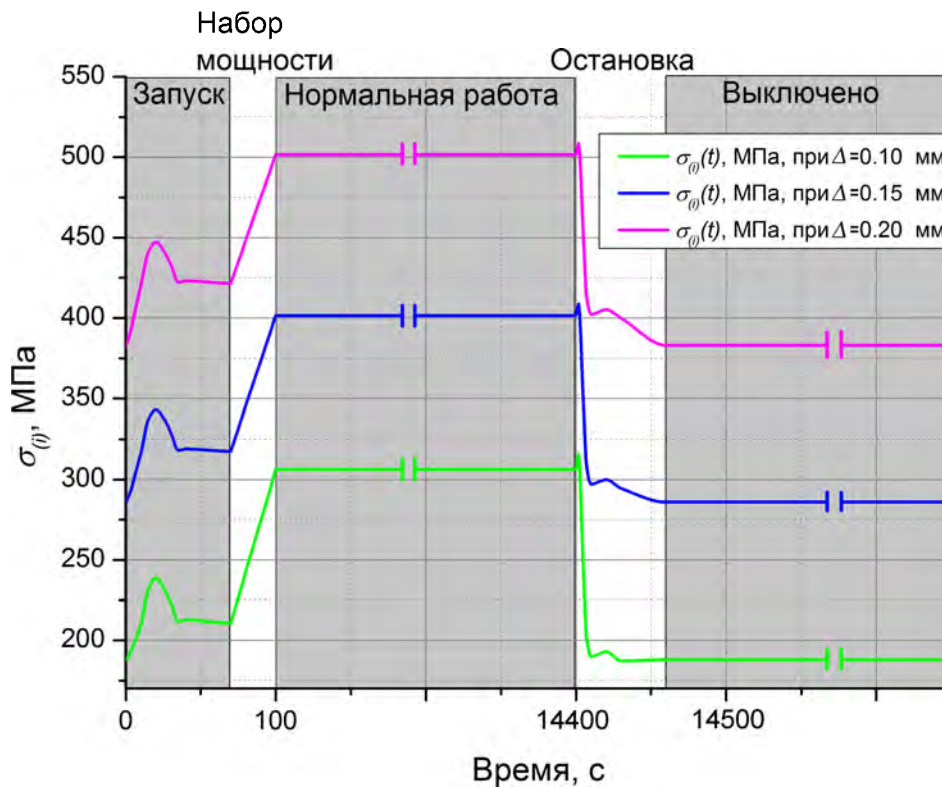


Рисунок 4 – График зависимости эквивалентных напряжений по Мизесу от времени при различных уровнях начального натяга Δ в процессе работы гидроагрегата

Оценка ресурса. Один из методов оценки ресурса, получивший широкое распространение, был предложен Веллером на основе составленных им диаграмм (кривых усталости), с помощью которых можно определить число циклов до возникновения макротрещины при заданном уровне напряжений. Параметры кривой усталости определяются на основе испытания образцов на усталость, которые регламентированы ГОСТ 25.502-79. Уравнение кривой Веллера может быть записано в виде

$$N = N_0 \left(\frac{\sigma_R}{\sigma_a} \right)^m, \sigma_a > \sigma_R \quad (3)$$

где N – число циклов до разрушения; N_0 – база испытания, σ_R – предел выносливости материала при коэффициенте асимметрии цикла $R = \sigma_{max}/\sigma_{min}$; σ_a – амплитуда напряжений цикла, $\sigma_a = (\sigma_{max} - \sigma_{min})/2$; m – параметр наклона кривой. Так же известны подходы, когда кривая усталости строится не для образца, а для детали (в т. ч. болтов) [13-14]. Однако о существовании таких кривых для силовых болтов гидротурбин авторам не известно, поэтому к болтам применена стандартная методика.

В рассматриваемом болте вследствие геометрической формы и внешних нагрузок реализуется сложное напряженное состояние. На сегодняшний день, известно несколько моделей эквивалентного напряжения [15-16]. В виду простоты применения в работе в качестве эквивалентного напряжения были приняты напряжения по Мизесу.

При оценке ресурса важным фактом является то, что пределы выносливости деталей в значительной мере отличаются от пределов стандартных образцов. Это обусловлено влиянием различных конструкционных, технологических и эксплуатационных факторов, которые могут приводить как к повышению, так и к снижению сопротивления усталости. Наиболее существенное влияние оказывают следующие факторы: абсолютные размеры поперечного сечения (масштабный фактор); качество обработки поверхности; состояние поверхностного слоя; эксплуатационные факторы (коррозия, температура, частота нагружения и др.) [14, 17-18].

На предел выносливости рассматриваемого болтового соединения в процессе эксплуатации влияют практически все выше перечисленные факторы: масштабный фактор ($\epsilon = 0,55$), состояние поверхности ($\beta = 0,8$), коррозионная среда – пресная вода ($\gamma = 0,46$), фреттинг коррозия в резьбе ($\alpha = 0,35$). Таким образом, предел выносливости болта при симметричном цикле ($R = -1$) может быть записан в виде (4).

$$\sigma_{-1\theta} = \alpha\beta\gamma\epsilon\sigma_{-1} \quad (4)$$

В виду того, что рассматриваемые болтовые соединения имеют существенную предварительную затяжку, в болтах реализуются циклы со значительными положительными коэффициентами асимметрии. Для оценки долговечности при таких циклах, в общем случае, необходимо экспериментально определить σ_R , однако на сегодняшний день существует ряд моделей, позволяющих учесть влияния асимметрии цикла (модели: Гудмана (5), Гербера (6), Петерсона (7), Биргера (8)):

$$\sigma_{R\theta} = \sigma_{-1\theta} \left[1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_B} \right] \quad (5)$$

$$\sigma_{R\theta} = \sigma_{-1\theta} \left[1 - \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_B} \right)^2 \right] \quad (6)$$

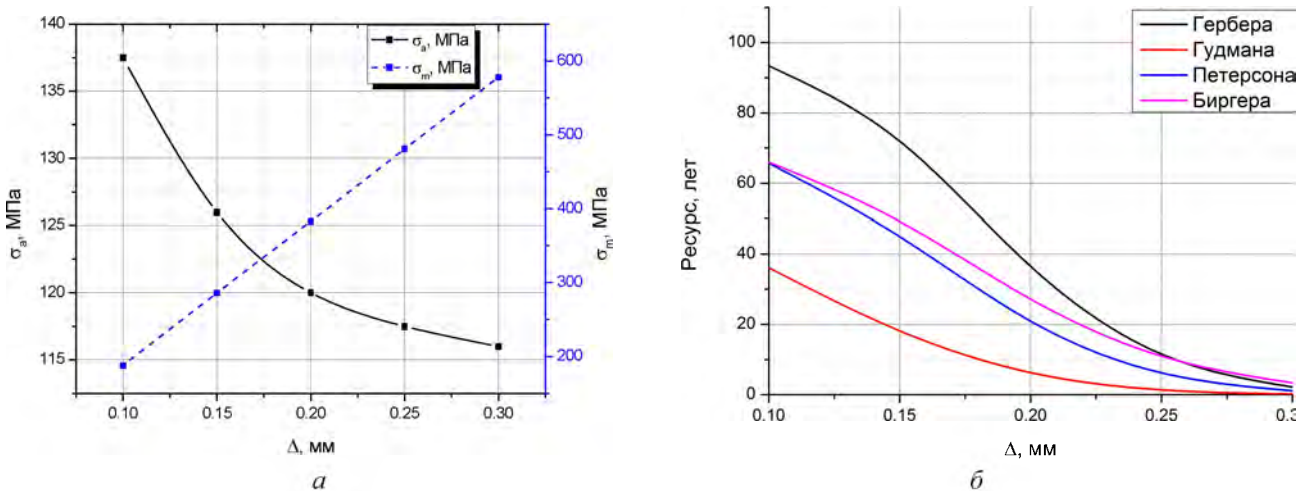
$$\sigma_{R\theta} = \frac{\sigma_{-1\theta}}{7} \left[8 - \left(1 + \frac{\sigma_m}{\sigma_B} \right)^3 \right] \quad (7)$$

$$\sigma_{R\theta} = \sigma_{-1\theta} \sqrt{1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_B}} \quad (8)$$

где $\sigma_{R\theta}$ – предел выносливости детали при коэффициенте асимметрии цикла R , σ_m – среднее напряжение цикла, σ_B – предел временной прочности материала. Таким образом, уравнение кривой усталости может быть записано в виде:

$$N = N_0 \left(\frac{\sigma_{R\theta}}{\sigma_a} \right)^m, \sigma_a > \sigma_{R\theta} \quad (9)$$

В результате проведенных численных исследований определена зависимость величины средних напряжений цикла σ_m и амплитуды напряжений цикла σ_a от величины затяжки болта (рис. 5а). С помощью этой зависимости и уравнения (5-9) получено число циклов до возникновения макротрещины (рис. 5б). Как известно [17-18] увеличение среднего напряжения цикла приводит к снижению числа циклов до возникновения макротрещины, что хорошо согласуется с полученными результатами.



а – зависимость средних напряжений цикла σ_m и амплитуды напряжений цикла σ_a от величины затяжки болта;

б – зависимость числа лет до возникновения макротрещины от величины начального натяга

Рисунок 5

Выводы. В работе определено НДС, возникающее в болтовом соединении в процессе работы гидроагрегата. Дана оценка ресурса болтового соединения в зависимости от затяжки. Уменьшение затяжки болта приводит к увеличению ресурса соединения, поэтому важным является выбор рациональной затяжки болтов. Полученные результаты свидетельствуют о необходимости дальнейших ис-

следований по оценке ресурса с учетом совместного влияния различных типов переходных процессов.

Литература

1. Mackerle J. Finite element analysis of fastening and joining: A bibliography (1990–2002) / Jaroslav Mackerle // International Journal of Pressure Vessels and Piping. — 2003. — № 80. — pp. 253–271
2. Libin Z. 3D Numerical Simulation and Fatigue life prediction of high strength threaded bolt / Zhao Libin, Liu Fengrui, Zhang Jianyu // Key Engineering Materials. — 2010. — Vol. 417-418. — pp. 885-888.
3. Cetin A. Fatigue life prediction for large threaded components / Ali Cetin, Gunnar Härkegård // Procedia Engineering. — 2010. — Vol. 2. — pp. 1225-1233.
4. Fenghui W. Fatigue life of thread connection for casing drilling under tension and torsion / Wang Fenghui, Wu Qiong, Wu Yingxi, Song Shengyin // Advanced Materials Research. — 2008. — Vols. 33-37. — pp. 255-260.
5. Водка А. А. Исследование напряженно-деформированного состояния болтовых соединений рабочего колеса гидротурбины / А. И. Трубаев, А. С. Степченко, А. А. Водка // Вісник НТУ «ХП». Тематичний випуск: Динаміка і міцність машин. – Харків: НТУ «ХП». – 2011. – №52. С.34-41.
6. Водка А. А. Исследование напряженно-деформированного состояния болтовых соединений рабочего колеса гидротурбины в условиях лабораторного эксперимента / А.И. Трубаев, А.С. Степченко, А.А. Водка // Надежность и долговечность машин и сооружений. – 2011. – №34. – сс. 155-162
7. Курков С. В. Методика расчета частот и форм собственных колебаний в воде лопасти рабочего колеса поворотной-лопастной гидротурбины / С. В. Курков, И. Е. Гутковский // Материалы Международной научно-практической конференции «Современное машиностроение. Наука и образование» 14-15 июня г. Санкт-Петербург. — 2011. — С. 177-185.
8. Стрельникова Е.А. Прочность, динамика и ресурс лопасти рабочего колеса поворотной-лопастной гидротурбины / Е.А. Стрельникова, И.Е. Ржевская, Е. В. Ганчин // Авиационно-космическая техника и технология. — 2009. — №4. — С. 91-94
9. Медведовская Т. Ф. Оценка ресурса и долговечности элементов циклически симметричных конструкций / Т. Ф. Медведовская, И. Е. Ржевская, Е. В. Еселева, Е. А. Стрельникова [и др.] // Вестник двигателестроения. — 2009. — №2. — С. 143-147
10. Гидромеханические переходные процессы в гидроэнергетических установках / Под ред. Г.И. Кривченко, М.: Энергия, 1975. – 367 с
11. Справочник по гидротурбинам / Под ред. Н. Н. Ковалева. – Л. : Машиностроение. – 1984. – 496 с.
12. Владиславлев Л. А. Вибрация гидроагрегатов гидроэлектрических станций / Лев Алексеевич Владиславлев. — М.: – Энергия. – 1972.— 176 с
13. Bickford J. Introduction to the Design and Behavior of Bolted Joints // John H. Bickford. – CRC Press. — 2007. — 515 P
14. Schijve, J. Fatigue of Structures and Materials / Jaap Schijve. – Springer, 2009. – 626 p.
15. Manson S. S. Fatigue and Durability of Structural Materials / S. S. Manson, G. R. Halford. — ASM International, 2006. — 456 p.
16. Biaxial/Multiaxial Fatigue and Fracture / [editors A. Carpinteri, M. de Freitas, A. Spagnoli]. — Oxford, UK. — Elsevier Science Ltd. — 2003. — 522 p.
17. Серенсен С. В. Несущая способность и расчет деталей машин на прочность. Руководство и справочное пособие / С. В. Серенсен, В. П. Когаев, Р. М. Шнейдерович — М. : Машиностроение, 1975. — 488 с.
18. Трошенко В. Т. Сопротивление усталости металлов и сплавов : справочник в 2 ч. / Трошенко В. Т., Сосновский Л. А. – К. : Наук.думка, 1987. – Ч. 1.– 504 с. – Ч. 2.– 1302 с.

Summary

Bolted joints are widespread detachable connections, thus the question of evaluation of the strength and reliability of such compounds being a part of the water turbines has great practical significance. This paper deals with assessing the life time prediction and strength determination of the bolted joints in turbine impellers taking into account transient modes.

Поступила в редакцию 15.11.2012

МЕЗОМЕХАНИКА БИОТКАНЕЙ И ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ ТЕХНИЧЕСКОГО И МЕДИЦИНСКОГО НАЗНАЧЕНИЯ

Шилько С.В.

ГНУ Институт механики металлополимерных систем им. В.А. Белого НАНБ, Гомель

Введение. Разработка конструкционных, антифрикционных, биосовместимых и др. функциональных композитов – одно из приоритетных научных направлений. При всей важности и распространенности традиционного, к сожалению, во многом эмпирического, подхода к поиску оптимальных рецептур и схем армирования материалов, новой тенденцией является активное применение в материаловедении методов механики деформируемого твердого тела для прогнозирования структурных параметров, обеспечивающих желаемые деформационно-прочностные характеристики.

Моделирование, «компьютерный дизайн» и виртуальные испытания материалов представляются наиболее эффективными при создании ответственных изделий для медицины, атомного машиностроения, космической и авиационной техники. В названных приложениях критическим является достижение максимальных показателей надежности и ресурса, поскольку отказ одного конструктивного элемента может привести к значительным экономическим и социальным потерям. В последние годы для повышения работоспособности указанных изделий разработчики пытаются реализовать в них эффекты адаптации (приспособления) и ремоделирования (рациональной перестройки) структуры, свойственные живым организмам. Действительно, биотрибосопряжения (суставы), костные и мышечные ткани опорно-двигательной, сердечно-сосудистой, зубочелюстной и других систем демонстрируют уникальные характеристики равнопрочности, безысности, сверхнизкого трения, самозалечивания и т.д.).

В связи с этим, целесообразно создавать материалы и конструкции технического и медицинского назначения, исходя из биомеханических принципов в макроскопическом (на уровне изделия) и мезоскопическом (на уровне структурных единиц материала) масштабе.

Поскольку процессы регулирования и адаптации любой физической природы являются переходными, принципиальное значение имеет описание поверхностного и объемного деформирования, трения и разрушения при изменяющихся граничных условиях. Так, в условиях изнашивания или нестационарной нагрузки в трибосопряжениях существенно изменяются размеры области контакта, а при инициации скольжения в ней формируются зоны проскальзывания и сцепления, оказывая определяющее влияние на износ, силу трения, жесткость и диссипацию энергии в контакте качения и в условно-неподвижных соединениях. Аналогично, диссипация энергии при внутреннем трении зависит от локализации зон пластического течения. Анализ подобных ситуаций приводит к формулировке и решению активно изучаемых в настоящее время задач механики о подвижной (свободной) границе.

С одной стороны, это позволяет управлять триботехническими характеристиками в широком диапазоне внешних воздействий, используя физически нелинейные, например, аномально-упругие материалы.

С другой стороны, процессы межфазного взаимодействия и внешнего трения, локализованные, соответственно, на поверхностях раздела структурных элементов композитов и контактной поверхности трибосопряжений, оказывают существенное влияние на макроскопические характеристики указанных материалов (пределы прочности и пластичности, упругие модули) и изделий (контактную жесткость, силу трения, формостабильность и т.д.).

В итоге, актуально развитие методов мезомеханики [1], позволяющих описать реальную структуру композитов на уровне отдельных армирующих включений и межфазных слоев, устанавливая связь эксплуатационных характеристик материалов и изделий с рецептурами и технологическими режимами переработки.

Целью настоящего сообщения является обоснование эффективности мезомеханического исследования структурно неоднородных и физически нелинейных биологических тканей и полимерных композитов технического и медицинского назначения.

Методы исследования. Существующие методы прочностного анализа композитных конструкций, как правило, базируются на компактных математических зависимостях, полученных на основе

модельных представлений механики неоднородной среды [2]; например, расчет контактных трибосопряжений [3] выполняется на основе решения контактных задач с учетом специфики фрикционного взаимодействия твердых тел [4,5]. Во многих случаях эти подходы дают приемлемую точность оценки практически важных параметров жесткости, прочности, а также трибомеханических характеристик.

Однако для анализа напряженно-деформированного состояния конструкций сложной формы из структурно неоднородных и физически нелинейных материалов (например, полимерных композитов) приходится использовать пространственную дискретизацию тел сопряжения конечными и граничными элементами, чтобы снять геометрические ограничения аналитических методов, а также учесть нелинейные и краевые эффекты. Весьма актуальной также является обратная задача оптимизации состава материала (главным образом, содержания армирующего наполнителя) трибосопряжений по заданному критерию, исходя из заданной геометрии и условий нагружения.

По нашему мнению, реализация адекватного расчетного подхода дополнила бы обычно практикуемый экспериментальный поиск оптимальных составов композиционных материалов по общим критериям.

Вместе с тем, при использовании указанных весьма эффективных численных методов существует проблема получения исходных данных в виде модулей упругости, вязкости, пределов прочности, параметров скоростной чувствительности композитов для различных соотношений матричного и армирующего компонентов. Их экспериментальное получение является дорогостоящей и длительной процедурой.

В этой связи необходимы методы расчетного определения искомых параметров неоднородных материалов, в частности, пористых, гранулированных, дисперсно-армированных (частицами и короткими волокнами) полимеров. Применение данного класса материалов в технике мотивируется тем, что армирование полимерной матрицы высокопрочными частицами или короткими волокнами, в т.ч. наноразмерного уровня, весьма технологично и обеспечивает существенное повышение прочностных и антифрикционных характеристик [6].

Однако в настоящее время отсутствует общепризнанная расчетная методика, позволяющая прогнозировать триботехнические характеристики тел сопряжения из неоднородных материалов, включая микро- и нанокompозиты. Прямое моделирование композитов конечными элементами практически невозможно из-за разнообразия внутренней структуры, сложности физико-химических процессов межфазного взаимодействия и нелинейности деформирования полимерной матрицы.

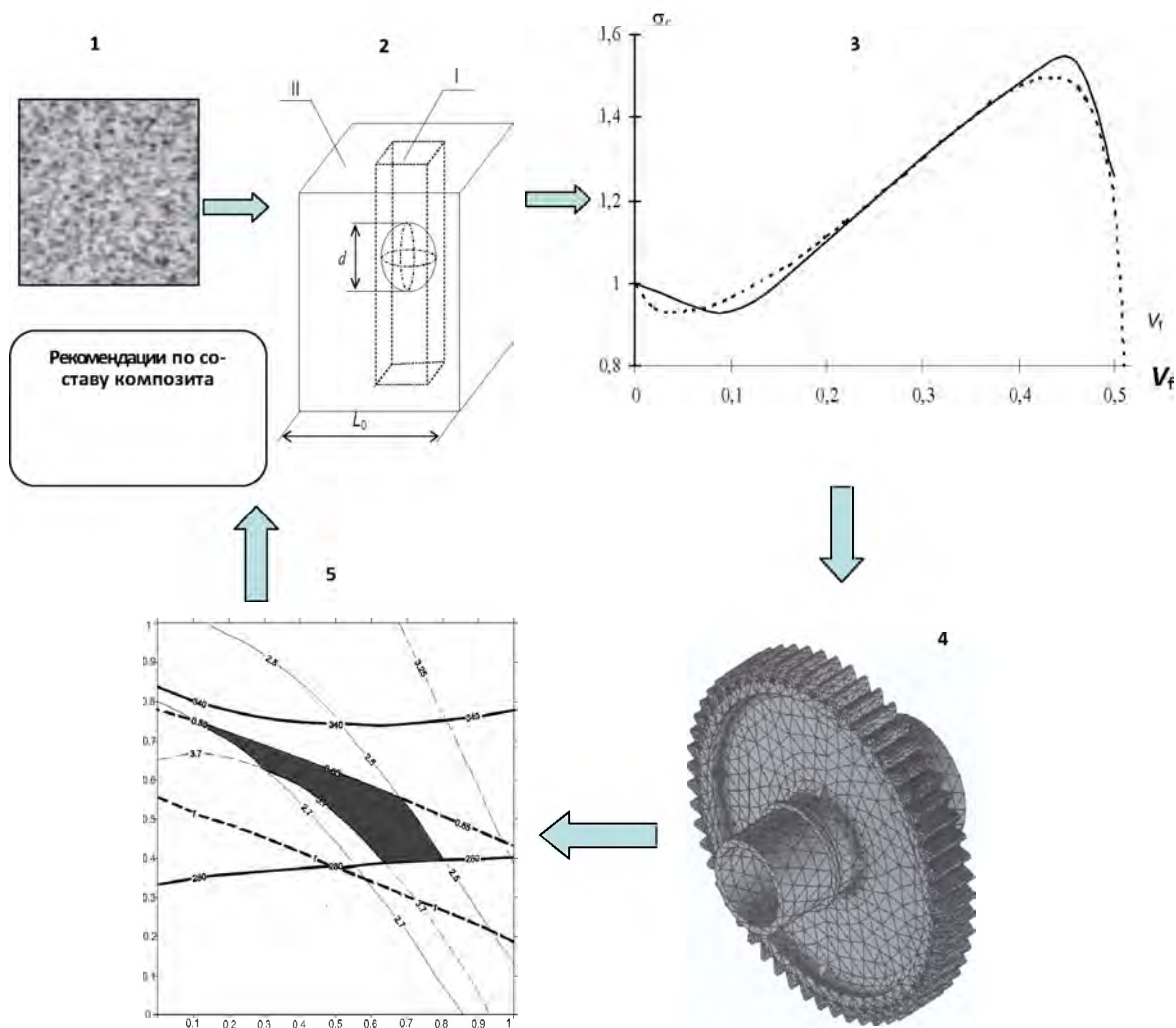
Аналогичная проблема возникает при описании биологических тканей при разработке диагностических процедур и адекватных средств протезирования, а также, как отмечено выше, адаптивных материалов и конструкций.

Рассмотрим применение двухуровневого расчетного метода (рис. 1) для анализа влияния наполнителя на напряженное состояние подповерхностных слоев материала и в зоне контакта зубчатых колес из дисперсно-армированных композитов при оценке износостойкости, контактной и изгибной прочности.

На 1-м (мезомеханическом) уровне постулируется повторяющийся и минимальный по размеру структурный элемент (ячейка периодичности) материала, в основном характеризующий свойства исследуемого материала (рис. 2). Для структурного элемента записываются определяющие соотношения, учитывающие свойства отдельных компонент и структуру композита (размеры и форму армирующих включений, толщину межфазного слоя, плотность микродефектов и т.д.). Выбор мезомеханической модели определяется следующими критериями:

- 1) Расчетные оценки, полученные на основе математической модели, должны наилучшим образом соответствовать экспериментальным данным для рассматриваемого композита.
- 2) Модель должна учитывать характерные особенности структуры и деформационного поведения данного композита.
- 3) При прочих равных условиях предпочтение следует отдать модели, основанной на более простом математическом описании.

Ввиду ограниченного объема статьи приходится отсылать читателя к обобщающим публикациям и цитируемым в них источникам [7-11], в которых дано подробное описание мезомеханических моделей различных материалов.



1) расчет механических характеристик композитного материала: структура дисперсно-армированного композита (1), структурный элемент (2), расчетная зависимость характеристики от содержания наполнителя (3); 2) расчет изделия: результаты конечноэлементного моделирования зубчатого колеса (4) в виде области значений параметров матрицы и наполнителя (5) для получения заданных характеристик композита позволяют корректировать модель 1-го уровня

Рисунок 1 – Схема двухуровневого анализа

Определенные на 1-м уровне эффективные механические характеристики используют в дальнейшем в качестве исходных данных для расчета на 2-м масштабном уровне.

При решении ряда научно-технических задач, включая медицинские приложения, показано, что развиваемая методология равноэффективна в широком диапазоне дисперсности наполнителя, от нано- и микрометров (ультрадисперсные наполнители, макромолекулы полимеров, биологические клетки) до миллиметров и сантиметров (гравий, щебень). Учет реальной геометрии, деформационных свойств и взаимодействия компонентов методами физической мезомеханики позволяют адекватно моделировать деформирование и разрушение микро- и наномпозитов, а затем прогнозировать прочностные и триботехнические характеристики изделия на его основе.

Таким образом, использование современных аналитических и экспериментальных методов оценки свойств и выбора состава композитов для конкретного применения, в отличие от традиционного длительного и приблизительного подбора материала по справочникам, а также непосредственный выход на оптимальные рецептуры материала и управление свойствами является решающим преимуществом мезомеханического подхода.

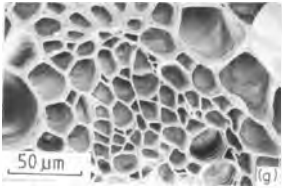



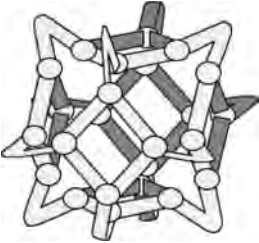
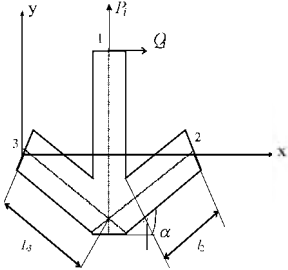
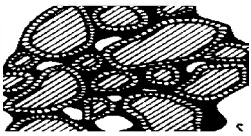
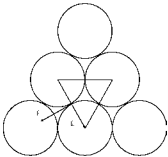
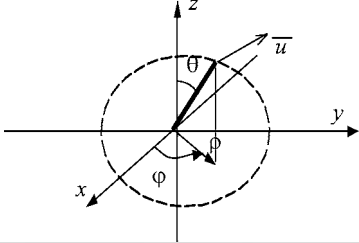
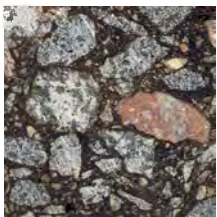
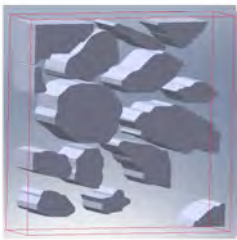
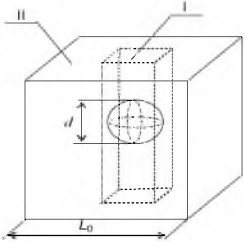
Тип материала	Схема структуры	Структурный элемент (ячейка периодичности)
<p>Закрытопористый</p> 		
<p>Открытопористый</p> 		
<p>Гранулированный</p> 		
<p>Дисперсно-наполненный</p> 		

Рисунок 2 – Мезоструктуры и ячейки периодичности структурно-неоднородных материалов

Заключение. В результате проведенных исследований получило развитие актуальное научное направление на стыке механики деформируемого твердого тела и биомеханики, а именно, мезомеханика биотканей и полимерных композитов технического и медицинского назначения, включающая:

1. создание мезомеханических моделей различных классов структурно-неоднородных материалов;
2. разработку и модификацию методов моделирования и экспериментального исследования композитов и контактных сопряжений;
3. установление новых закономерностей процессов деформирования, разрушения и трения, включая прогнозирование эффектов адаптации к силовому воздействию;
4. разработку новых технических решений в области экспериментальной механики, протезирования и биомеханической диагностики.

Резюме

С использованием мезомеханического описания и оригинальных экспериментальных методов проведены исследования композитов, как физически нелинейных и структурно-неоднородных деформируемых тел. На основе моделей пористых, гранулированных и дисперсно-армированных материалов разработан двухуровневый метод анализа напряженно-деформированного состояния элементов конструкций и контактных сопряжений, предложены оптимальные составы полимерных композитов технического и медицинского назначения, диагностические технологии для медицины и спорта. Исходя из биомеханических аналогий и анализа явлений деформирования, разрушения и контактного трения, рассматривается возможность создания адаптивных материалов и конструкций. Прогнозируются процессы ремоделирования и актуации биологических тканей, эффекты самосборки наноразмерных ауксетиков и упрочнения фрикционных соединений на их основе.

Литература

1. Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов / Под ред. В. Е. Панина. Новосибирск, Наука. – 1995, Т. 1. – 298 с., Т. 2. – 320 с.
2. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. – 334 с.
3. Справочник по триботехнике / Под общ. ред. М. Хебды, А.В. Чичинадзе. В 3 т.– М.: Машиностроение, 1989. – 400 с.
4. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989.– 509 с.
5. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. – М.: Наука, 2001. – 478 с.
6. Старжинский В.Е., Шалобаев Е.В., Шилько С.В. и др. Элементы привода приборов. Расчет, конструирование, технологии / Под общ. ред. Ю.М. Плескачевского. – Минск: Бел. наука. – 2012. – 769 с.
7. Шилько С.В., Плескачевский Ю.М. Механика адаптивных композитов и биоматериалов // Материалы, технологии, инструмент. – 2003. – № 4. – С. 5–16.
8. Плескачевский Ю.М., Чигарев А.В., Шилько С.В. Биологические и технические системы – конкуренция и синтез // Механика машин, механизмов и материалов.– 2007.– Т. 1, № 1.– С. 78–89.
9. Шилько С.В. Аномально упругие материалы как компоненты адаптивных систем / В кн. Перспективные материалы. – Витебск: УО ВГТУ, 2009.– С. 419–448.
10. Shilko S. Adaptive Composite Materials: Bionics Principles, Abnormal Elasticity, Moving Interfaces, Advances in Composite Materials – Analysis of Natural and Man-Made Materials / Ed. P.Тe□s□inova, InTech, 2011.– P. 497-526.
11. Плескачевский Ю.М., Шилько С.В., Панин С.В. Микро- и наноструктурные полимерные композиты технического и медицинского назначения: компьютерный дизайн, эксперимент, внедрение // Двадцать конкурсных лет (БРФФИ: 1991-2011 гг.) / БРФФИ; под ред. В.А. Орловича. – Минск: Бел. наука, 2012. – С. 334–356.

Summary

Using mesomechanical description and original experimental techniques the studies of composites as physically non-linear and non-homogeneous deforming media have been performed. Based on the models of porous, granular and disperse-reinforced materials, a two-level calculating method for stress-strain analysis of structural elements and contact joints has been developed, the optimal structures of polymer composites for technical and medical applications, as well as diagnostic procedures for medicine and sport have been proposed. In accordance to biomechanical analogies and analysis of deforming, failure and contact friction phenomena, the possibility of adaptive materials and structures creation has been assumed. The remodeling and actuation processes in biotissues, the effects of self-structuring of nanosized auxetics and strengthening of frictional joints on their base are predicted.

Поступила в редакцию 28.10.2012

ИССЛЕДОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА В ДВУХСЛОЙНЫХ ДЫМОВЫХ ТРУБАХ

Конон П.Н., Докукова Н.А.

УО «Белорусский государственный университет», Минск

В энергетике в последние годы большее внимание уделяется экономичным режимам работы оборудования и их маневренным мощностям. Становится очевидной необходимость решения проблемы создания надежных дымовых труб в условиях частых пусков и остановок котельного оборудования, работы агрегатов в нестационарном тепловом режиме. Многократные циклы «нагрев-выдержка-охлаждение» оказывают наиболее существенное влияние на параметры напряженно-деформированного состояния конструкции. Вследствие этого требуется рассматривать нестационарные условия тепло- и массообмена, учитывающие перенос влаги в конструкциях футеровки и интенсивные фазовые превращения [1-4].

В работе рассмотрена наиболее используемая в эксплуатации двухслойная конструкция дымовой трубы, изображенная на рисунке 1. Она включает футеровку и примыкающий к ней вплотную железобетонный ствол. Температура и давление дымовых газов считаются известными функциями времени.

Проведенные предварительные количественные оценки тепло- и массообменных процессов в трубах в нестационарном режиме позволили заключить:

- ❖ перепад температур и концентрации пара в потоке дымовых газов по высоте трубы незначительный; градиент температур в стволе трубы по высоте на два – три порядка ниже, чем по толщине конструкции, и им можно пренебречь;
- ❖ при температуре дымовых газов ниже точки росы, когда давление водяных паров превышает давление насыщения на внутренней поверхности футеровки, происходит конденсация водяных паров. Образующийся конденсат частично проникает в поры футеровки, основная же часть стекает в виде сплошной пленки по вертикальной стенке. Оценка влияния пленки конденсата на теплообмен дает возможность ею пренебречь;
- ❖ поток влаги через внутреннюю поверхность футеровки обычно не превышает интенсивности конденсации на этой поверхности;
- ❖ потоки серной кислоты при конденсации через поверхность футеровки составляют незначительную величину по сравнению с потоками конденсирующихся водяных паров, и их влияние на температурно-влажностный режим не учитывается;
- ❖ предполагается, что процесс испарения в перегретой футеровке незначительно влияет на теплообмен;
- ❖ в силу того, что радиус трубы достаточно большой, процессы тепло- и массообмена рассматриваются в декартовой прямоугольной системе координат ОХУ (рис. 1).

При указанных допущениях модель тепло- и массообмена в двухслойной трубе можно представить следующей системой уравнений в частных производных с переменными коэффициентами:

$$c\gamma \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T, U) \frac{\partial T}{\partial x} \right], \quad (1)$$

$$\lambda(T, u) = \begin{cases} \lambda_1(T, U), & 0 \leq x \leq \delta_1 \\ \lambda_2(T), & \delta_1 \leq x \leq \delta_1 + \delta_2 \end{cases}, \quad c\gamma = \begin{cases} c_1\gamma_1, & 0 \leq x \leq \delta_1 \\ c_2\gamma_2, & \delta_1 \leq x \leq \delta_1 + \delta_2 \end{cases},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[a_m(U) \frac{\partial U}{\partial x} \right], \quad 0 \leq x \leq \delta_1. \quad (2)$$

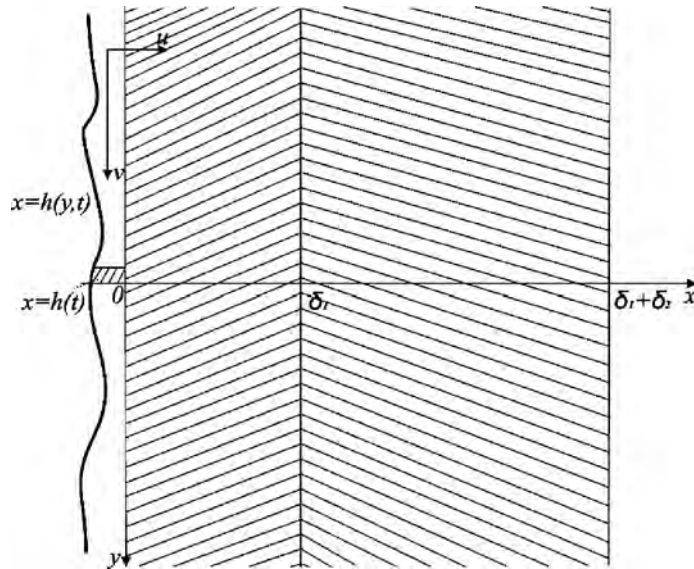


Рисунок 1 – Схема двухслойной дымовой трубы: несущий железобетонный ствол толщиной δ_2 и футеровка толщиной δ_1 , стекающая пленка конденсата $x=h(x,t)$

На границе $x = 0$ задаются граничные условия третьего рода с учетом конденсации на свободной поверхности:

$$-\lambda_1(T, U) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha_1 [T_2(t) - T(0, t)] + g_k(t)r, \quad T_2 = T_0 + kt. \quad (3)$$

Интенсивность конденсации $g_k(t)$ определяется формулой:

$$g_k(t) = g_k(T(0, t)) = \beta \{P_n(t) - P_n[T(0, t)]\}, \quad P_n(t) = P_0 + k_n t, \quad (4)$$

где β – коэффициент массообмена, P_0, P_n – начальное и текущее давление паровоздушной смеси, $P_n(T)$ – давление насыщения, известная функция температуры. Если давление насыщения на стенке $x = 0$ сравнивается с давлением паровоздушной смеси P_n , то конденсация заканчивается. Из этого условия можно определить время конденсации t_k .

На поверхности соприкосновения двух слоев ставится условие равенства температур и потоков тепла:

$$\left[\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x=\delta_1} = 0, \quad [T]_{x=\delta_1} = 0. \quad (5)$$

В (5) прямые скобки $[]$ означают скачок потока тепла и температуры на границе $x = \delta_1$.

На границе $x = \delta_1 + \delta_2$ задаются условия третьего рода:

$$-\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\delta_1+\delta_2} = \alpha_2 [T(\delta_1 + \delta_2, t) - T_0]. \quad (6)$$

Граничные условия для определения влажностного поля определяются из следующих соображений. Считаем, что поле влаги распределяется в области футеровочного слоя толщиной δ_1 . Если поток влаги $-\alpha_m \partial U / \partial x$ не превосходит интенсивности конденсации $g_k(t)$, то на границе $x = 0$ задается значение влагосодержания $U_{нп}$, соответствующее полному насыщению. Если же поток влаги больше интенсивности конденсации, то на границе ставится условие равенства потока влаги и интенсивности конденсации.

$$\begin{cases} U(0, t) = U_{nn}, & \text{при } -a_m(U) \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0} \leq g_k(t) \\ -a_m(U) \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0} = g_k(t), & \text{при } -a_m(U) \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0} > g_k(t) \end{cases} \quad (7)$$

При $x = \delta_1$ значения влагосодержания равно равновесному

$$U \Big|_{x=\delta_1} = U_p \quad (8)$$

Кроме того, задаются начальные условия

$$T(x, 0) = T_e, \quad U(x, 0) = U_0 \quad (9)$$

Кроме указанных ранее в соотношениях (1)–(9) использованы следующие обозначения и размерности величин: δ_1, δ_2 – толщины футеровки и железобетонного ствола соответственно, м; $\lambda(T, U)$ – коэффициент теплопроводности, вообще говоря, функция температуры T ($^{\circ}\text{C}$) и влагосодержания U ($\text{кг}/\text{м}^3$), $\text{ккал}/(\text{м} \cdot \text{ч} \cdot ^{\circ}\text{C})$; c – теплоемкость материала, $\text{ккал}/(\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C})$; γ – объемная масса, $\text{кг}/\text{м}^3$; α_1, α_2 – коэффициенты теплоотдачи, соответственно, от газа к внутренней поверхности трубы и от наружной поверхности трубы к воздуху, $\text{ккал}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot ^{\circ}\text{C})$; r – теплота фазового перехода, $\text{ккал}/\text{кг}$; $a_m(U)$ – коэффициент диффузии влаги, известная функция влагосодержания, $\text{м}^2/\text{ч}$; T_e, T_e – температура, соответственно, дымовых газов в трубе и наружного воздуха, $^{\circ}\text{C}$; $g_k(t)$ – массовая скорость конденсации, $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч})$; β – коэффициент массоотдачи, $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{мм.рт.ст.})$; P_n – парциальное давление пара, мм.рт.ст. ; $P_n [T(0, t)]$ – давление насыщения, известная функция температуры, мм.рт.ст. ; k – скорость подъема температур дымовых газов, $^{\circ}\text{C}/\text{ч}$; k, k_n – скорость подъема температуры и парциального давления дымовых газов, $^{\circ}\text{C}/\text{ч}$, $\text{мм.рт.ст.}/\text{ч}$ $U_p = U_0$ – равновесное значение влагосодержания, $\text{кг}/\text{м}^3$.

Соотношения (1)–(9) определяют постановку задачи о совместном тепло- и массопереносе в конструкции двухслойной трубы.

Приведем результаты расчетов температурных, влажностных полей и интенсивности конденсации. Расчеты выполнены численным методом с использованием консервативных неявных разностных схем методом прогонки [5]. Результаты приведены в единицах измерения, удобных для практического использования.

Для расчета полей влаги в футеровке и температур в двухслойной трубе использовались приведенные ниже геометрические размеры и теплофизические характеристики материалов.

Несущий ствол – железобетон марки М300 с $\gamma_2 = 2200 \text{ кг}/\text{м}^3$; $\lambda_2 = 1,33 \text{ ккал}/(\text{м} \cdot \text{ч} \cdot ^{\circ}\text{C})$, $c_2 = 0,2 \text{ ккал}/(\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C})$, $\alpha_2 = 20 \text{ ккал}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot ^{\circ}\text{C})$, $\delta_2 = 0,30 \text{ м}$. Футеровочный слой трубы – полимер-силикатный бетон с $\gamma_1 = 1700 \text{ кг}/\text{м}^3$; $\lambda_1 = 0,33 \text{ ккал}/(\text{м} \cdot \text{ч} \cdot ^{\circ}\text{C})$, $c_1 = 0,2 \text{ ккал}/(\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C})$, $\alpha_1 = 24,1 \text{ ккал}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot ^{\circ}\text{C})$, $\delta_1 = 0,15 \text{ м}$. Характеристики массообмена следующие: $r = 540 \text{ ккал}/\text{кг}$; $u_{nn} = 200 \text{ кг}/\text{м}^3$; $u_p = 25 \text{ кг}/\text{м}^3$; $\beta = 0,71 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{мм.рт.ст.})$.

Для определения давления насыщения использовалась эмпирическая зависимость [2]:

$$P_n(T) = \begin{cases} 165914 \times e^{\frac{7.331 \times (T-374)}{T+273}}, & T > 100^{\circ}\text{C} \\ 760 \times e^{\frac{13.963 \times (T-100)}{T+273}}, & T < 100^{\circ}\text{C} \end{cases} \quad (10)$$

Для расчета поля влагосодержания применялась функция $a_m(U)$, заданная дискретными значениями. При проведении численных расчетов она аппроксимировалась линейной интерполяцией.

Режим работы трубы (нагрев-выдержка-охлаждение) задается следующим образом: подъем температуры дымовых газов T_2 от $T_0 = -20^\circ\text{C}$ до $T_m = 160^\circ\text{C}$ по линейному закону со скоростью $k = 10^\circ\text{C}/\text{ч}$, выдержка до стационарного режима при $T_2 = T_m$, охлаждение от $T_2 = T_m$ до $T_0 = -20^\circ\text{C}$ линейно со скоростью $k = 10^\circ\text{C}/\text{ч}$, дальнейшее охлаждение трубы при $T_2 = T_0$.

На рисунках 2-4 приведены результаты численных расчетов температурных полей двухслойной дымовой трубы при указанном выше режиме работы в одном из сечений. Наибольший градиент температуры наблюдается в футеровочном слое.

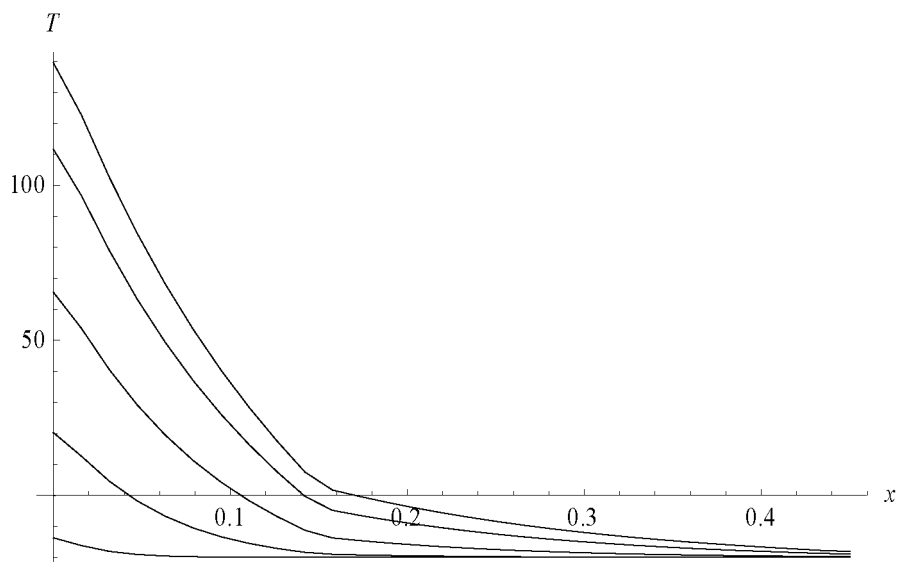


Рисунок 2 – Температурное поле двухслойной трубы в моменты времени $t=1\text{ч}$, $t=5\text{ч}$, $t=10\text{ч}$, $t=15\text{ч}$, $t=18\text{ч}$ в период подъема температуры дымовых газов

При расчете поля влагосодержания использовалась зависимость $\alpha_m(U)$, заданная дискретными значениями. В численных расчетах она аппроксимировалась линейной интерполяцией.

Расчет поля влаги в различные значения времени в футеровочном слое отображен на рис. 5.

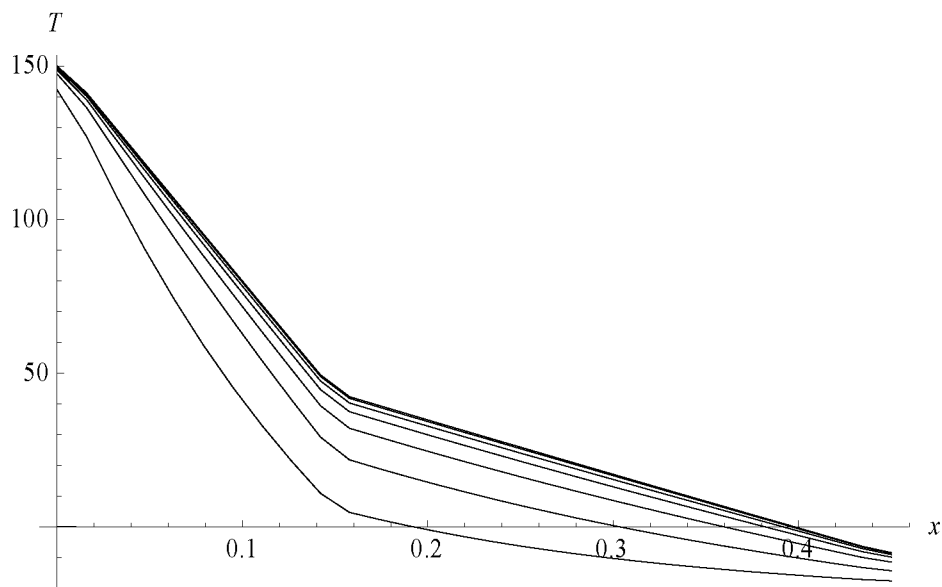


Рисунок 3 – Температурное поле двухслойной трубы в моменты времени $t=1\text{ч}$, $t=10\text{ч}$, $t=20\text{ч}$, $t=30\text{ч}$, $t=40\text{ч}$, $t=55\text{ч}$ в период неизменной температуры дымовых газов

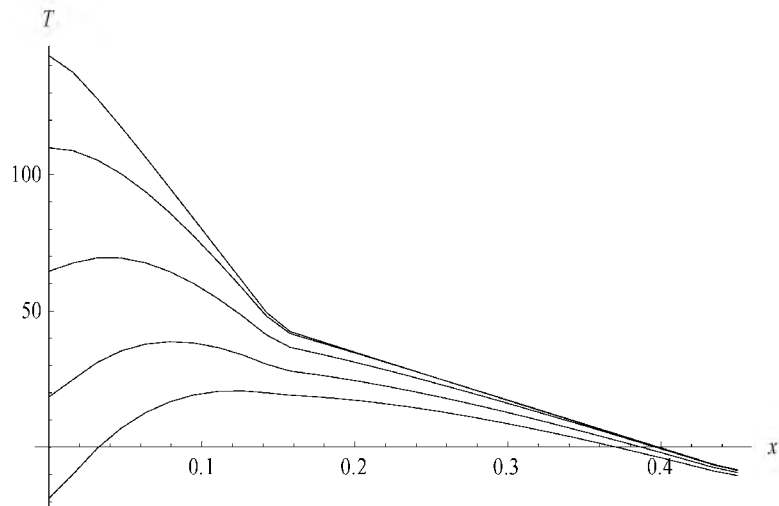


Рисунок 4 – Температурное поле двухслойной трубы в моменты времени $t=1ч$, $t=5ч$, $t=10ч$, $t=15ч$, $t=19ч$ с начала охлаждения температуры дымовых газов

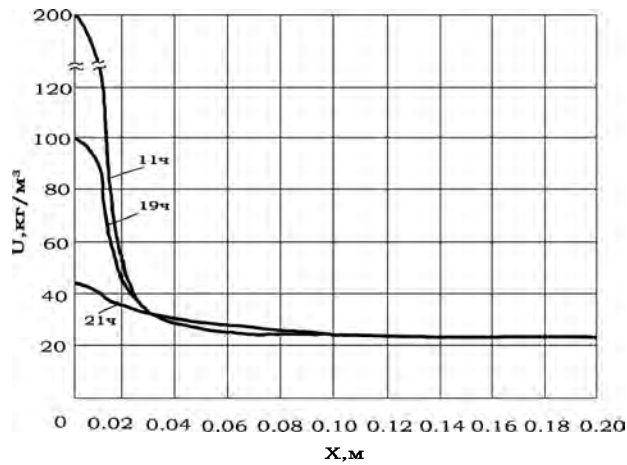


Рисунок 5 – Поле влаги в футеровочном слое в моменты времени $t=11ч$, $t=19ч$, $t=21ч$

В расчетах интенсивности нестационарной конденсации применяется соотношение (4). На рисунке 6 изображена интенсивность конденсации $g_k(t)$ при различных скоростях подъема температур дымовых газов $k = v = 30^\circ C/ч$, $k = v = 10^\circ C/ч$, а также зависимость потока влаги $-a_m \partial U / \partial x$ через стенку $x=0$ от времени.

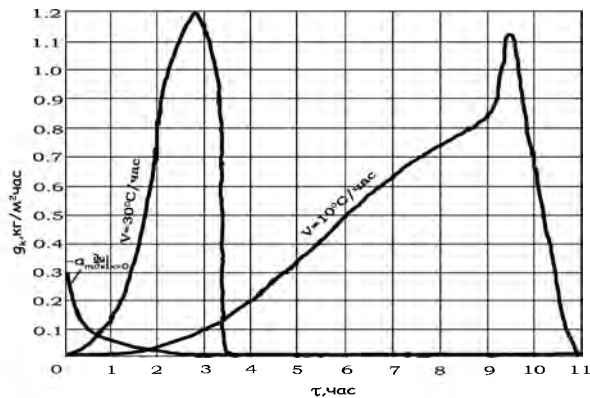


Рисунок 6 – Зависимость интенсивность конденсации g_k на внутренней поверхности футеровки и потока

влаги через нее от времени $g_{ном} = -a_m \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0}$

Оценка толщины пленки конденсата $h=h(t)$ с плотностью ρ' в определенный момент времени в заданном сечении трубы вычисляется при условии, что пленка образуется вследствие конденсации и часть жидкости проникает в футеровочный слой. Тогда

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\beta \{P_n(t) - P_n[T(0,t)]\}}{\rho'} + \frac{1}{\rho'} \left(a_m \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) \right). \quad (11)$$

Расчеты интенсивности конденсации показывают, что практически во все время подъема температуры дымовых газов вторым слагаемым можно пренебречь. Тогда максимальную толщину пленки конденсата на неподвижной поверхности можно определить из выражения

$$h_{\max} = \int_0^{t_k} \frac{g_k}{\rho'}(t) dt, \quad (12)$$

где t_k – время конденсации.

Вычисления показывают, что толщина пленки конденсата при скорости подъема температуры газов $k = 30^\circ C / ч$ не превышает $h_{\max} = 2 мм$, а при более длительной конденсации при $k = 10^\circ C / ч$ она равна $h_{\max} = 4 мм$, что согласуется с результатами Кутателадзе [6]. Зная величину интенсивности конденсации и площадь поверхности конденсации – внутреннюю поверхность трубы, можно определить общее количество выпавшего конденсата.

Резюме

Исследована задача нестационарного тепло- и массопереноса в двухслойной дымовой трубе. Численным расчетом найдено поле температур и влаги при маневренной работе трубы. Определена интенсивность конденсации на внутренней поверхности футеровки, проведен расчет пленки конденсата.

Литература

1. Петров-Денисов В.Г., Конон П.Н. // Процессы тепло- и массообмена в стволах дымовых труб в нестационарном режиме/ Всесоюзная конф. «Современные проблемы разработки, проектирования, возведения и эксплуатации монолитных железобетонных труб», М., 1983, с.66-68.
2. Матвеев Ю.В., Конон П.Н. Комплекс программ для расчета температурно-влажностных полей и напряженно-деформированного состояния дымовых труб с монолитной футеровкой при осесимметричных температурных и силовых воздействиях. – М.: Сб. трудов ВНИПИ Теплопроект, 1985.
3. Конон П. Н., Поддубная М. А.// Нестационарные процессы тепло- и массопереноса в конструкциях двуслойных дымовых труб/ АМАДЕ-2011,-Минск, 2011.
4. Конон П. Н., Докукова Н.А., Поддубная М.А.// Исследования нестационарных процессов тепло- и массообмена в многослойных дымовых трубах/ Международная научная конференция «XI Белорусская математическая конференция», Минск, 4-9 ноября 2012, Ч. 3, С. 70.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.- М.: Наука, 1977.-740 с.
6. Кутателадзе С.С. Основные теории теплообмена. – М.: Атомиздат, 1979. 659 с.

Summary

It was investigated the problem of unsteady heat and mass transfer in a two-layer stack. With help numerical calculations we obtain the measure of temperature and moisture of work of maneuvering. We found intensity of condensation on the inner surface of the lining, and calculated condensate film.

Поступила в редакцию 17.11.2012

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛОСКОЙ ОДНОМЕРНОЙ ВОЛНЫ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ РАЗНОМОДУЛЬНОГО УПРУГОГО СЛОЯ

¹Буренин А.А., ¹Дудко О.В., ¹Лаптева А.А. ²Чигарев А.В., ²Шукевич Т.В., ²Ручан М.В.

¹ Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения
Российской академии наук, Владивосток

² УО «Белорусский национальный технический университет, Минск»

Известно, что множество природных и конструкционных материалов сопротивляются процессам растяжения и сжатия по-разному. Так, приложение различной по знаку нагрузки к твердым горным породам дает неодинаковый по модулю деформационный отклик [1]. Это же свойство характерно для литых металлов и, что совсем очевидно, для сыпучих сред [2] и связных грунтов [3]. Следовательно, в математической модели деформирования реальных материалов свободное состояние может оказаться сингулярной точкой пространства деформаций. Даже в случае линеаризации модельных соотношений наличие такой особой точки приводит к возникновению принципиально нелинейных динамических эффектов, которые не отмечаются линейной теорией упругости – ударным волнам, сигнотонам, полусигнотонам и простым разрывам [4]. В настоящей работе на примере решения простейших нестационарных задач указаны особенности распространения граничных возмущений по среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию.

Определяющие соотношения динамического деформирования изотропной разномодульной упругой среды запишем в прямоугольной декартовой системе координат, вводя предположения о малости деформаций и отсутствии массовых сил:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} = \rho \dot{u}_i, \quad \sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - 2e_{kj}), \\ v_i = \dot{u}_i, \quad 2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}, \quad \rho = \rho_0^{-1} (1 - u_{k,k}). \end{aligned} \quad (1)$$

В уравнениях (1) σ_{ij} , e_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций; u_i , v_i – компоненты векторов перемещений и вектора скорости перемещений точек среды; ρ_0 , ρ – плотность среды в свободном и текущем состоянии; точкой обозначена частная производная функции по времени t , латинскими индексами после запятой – частная производная по независимым пространственным (эйлеровым) переменным x_i (для повторяющихся индексов проводится суммирование); δ_{ij} – символ Кронекера.

Упругий потенциал W является функцией состояния, замыкающей систему модельных соотношений (1). В принятом адиабатическом приближении он зависит только от деформаций e_{ij} , а в изотропной среде полностью определяется главными инвариантами тензора деформаций $I_1 = e_{kk}$, $I_2 = e_{ik}e_{ki}$. Для моделирования разномодульного поведения упругой среды воспользуемся подходом, подобным предложенному в [5, 6], добавив в упругий потенциал $W(I_1, I_2)$ слагаемое с модулем от первого инварианта I_1 :

$$W = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 - \nu I_1 |I_1|. \quad (2)$$

Коэффициенты λ , μ в зависимости (2) являются параметрами Ламэ, упругий модуль $\nu > 0$ характеризует наличие микродефектов в материале (или степень разрушенности материала, если рассматриваются горные породы). Функция (2) при $\nu = 0$ приводит соотношения (1) к известной линейной зависимости между напряжениями и деформациями – закону Гука. При ненулевом значении модуля ν в наиболее простом случае одноосного деформирования ($u_1 = u(x, t)$, $u_2 = u_3 = 0$) из соотношений (1), (2) получаем кусочно-линейную зависимость между напряжениями $\sigma_{11} = \sigma$ и деформациями $e_{11} = e$:

$$\sigma = \{\lambda + 2\mu - 2\nu \text{Sign}(e)\}e, \quad \text{Sign}(e) = \begin{cases} 1 & \text{при } e > 0 \text{ (растяжение)}, \\ -1 & \text{при } e < 0 \text{ (сжатие)}. \end{cases} \quad (3)$$

Очевидно, что в зависимости (3) коэффициент пропорциональности между σ и e имеет при растяжении и сжатии различные значения ($\rho a^2 = \lambda + 2\mu + 2\nu$ при $e < 0$, $\rho b^2 = \lambda + 2\mu - 2\nu$ при $e > 0$), а точка $e = 0$ – особая. Константы a и b ($a > b$ при $0 < \nu < \lambda/2 + \mu$) представляют собой фазовые скорости уравнения движения, записанного для одномерного случая:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (4)$$

Таким образом, в областях сжатия среды $c = a$, при растяжении среды $c = b$. Если решение уравнения движения (4) представить в форме Даламбера:

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right), \quad (5)$$

то неизвестные функции $f(\xi(x, t))$ и $g(\xi(x, t))$ могут быть определены для каждой конкретной краевой задачи в соответствии с заданными краевыми и начальными условиями.

Обобщенное решение системы определяющих соотношений (1), (2) может не являться непрерывным на некоторой движущейся поверхности $\Sigma(t)$, на которой необходимо потребовать выполнения условий совместности разрывов. В случае, когда при условии непрерывности перемещений на поверхности $\Sigma(t)$ рвутся их первые производные $u_{i,j}$, то по среде со скоростью G распространяется фронт сильного разрыва, на котором обязаны выполняться динамические и кинематические условия совместности первого порядка [7]:

$$[\sigma_{ij}]v_j = -\rho^+ G[v_i], \quad [v_i] = -G[u_{i,j}]v_j \quad \text{при} \quad [u_i] = 0. \quad (6)$$

В условиях (6) квадратными скобками обозначен скачок функции на поверхности разрывов $\Sigma(t)$: $[m] = m^+ - m^-$, m^+ – значение функции перед поверхностью, m^- – непосредственно за ней; v_j – компоненты единичного вектора нормали к поверхности $\Sigma(t)$.

Введем классификацию возможных разрывов решения уравнения движения (4), подобно принятому в [4]. Если в решении существует разрыв первых производных перемещений и при переходе через поверхность разрывов $\partial u / \partial x$ меняет свой знак, то имеет место плоская одномерная ударная волна со скоростью распространения G_α . Сигнотон со скоростью распространения G_β назовем плоскую одномерную поверхность разрыва первых производных перемещений, если при переходе через такую поверхность $\partial u / \partial x$ не меняет знак. Если же с одной стороны от поверхности разрывов $\partial u / \partial x = 0$, а с другой стороны $\partial u / \partial x \neq 0$, то такую поверхность называем полусигнотон со скоростью G_δ . Сигнотон и полусигнотон, со скоростью a назовем быстрым, а со скоростью b – медленным. Такая классификация определяет свойства плоских одномерных волн в кусочно-линейной упругой среде: ударная волна меняет значение фазовой скорости уравнения движения с b на a , сжимая предварительно растянутую среду (следует отметить, что обратный случай невозможен [8]); полусигнотон либо является передним фронтом распространения граничных возмущений по недеформированной среде (волной сжатия или волной разряжения в зависимости от вида граничного воздействия), либо возвращает ранее деформированную область среды в свободное состояние; сигнотон скачком изменяет величину уже существующих предварительных деформаций, не меняя при этом фазовой скорости уравнения движения.

Согласно соотношениям (6), на плоской одномерной ударной волне, сигнотоне и полусигнотоне необходимо выполнить условия

$$u^+ \Big|_{\Sigma(t)} = u^- \Big|_{\Sigma(t)}, \quad (\sigma^+ - \sigma^-) \Big|_{\Sigma(t)} = \rho^+ G^2 \left(\frac{\partial u^+}{\partial x} - \frac{\partial u^-}{\partial x} \right) \Big|_{\Sigma(t)}, \quad (7)$$

где G – скорость распространения соответствующей поверхности сильных разрывов.

Используя условия (7), можно показать, что модуль скорости ударной волны необходимо удовлетворяет неравенству $b < G_\alpha < a$, а скорости сигнотона (G_β) и полусигнотона (G_δ) постоянны и могут принимать значения a или b в зависимости от постановки задачи.

Описанные свойства плоских одномерных волн и соотношения для разрывов на них позволяют поставить ряд нестационарных краевых задач интенсивного одноосного деформирования и получить их аналитические решения.

Рассмотрим отражение плоской одномерной волны сжатия от свободной границы разномодульного упругого слоя. Пусть с момента времени $t = 0$ на граничную плоскость $x = 0$ упругого слоя начинает действовать сжимающая нагрузка, а вторая граница $x = H$ остается свободной на протяжении всего процесса деформирования. Условие свободной границы имеет вид:

$$\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=H} = 0. \quad (8)$$

Положим, что действие сжимающей нагрузки таково, что перемещения точек граничной плоскости $x = 0$ при $t \geq 0$ оказываются заданными положительной монотонно возрастающей функцией $u(0,t) = \varphi(t) : \varphi(t) \geq 0, \varphi(0) = 0, \varphi'(t) > 0$ (рис. 1а; рис. 2а). Тогда с момента времени $t = 0$ граничные возмущения распространяются в слой посредством быстрого полусигнотона $\Sigma_\delta(t)$ со скоростью a и координатой фронта $x = at$ (рис. 1б; рис. 2б).

Согласно условиям (7) на поверхности $\Sigma_\delta(t)$ и заданной на границе $x = 0$ функции перемещений $\varphi(t)$, решение задачи в этом случае до момента времени $t = H/a$ определяется соотношениями

$$u(x,t) = \begin{cases} \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) & \text{при } 0 \leq x \leq at, \\ 0 & \text{при } at \leq x \leq H. \end{cases} \quad (9)$$

В момент времени $t = H/a$ полусигнотон $\Sigma_\delta(t)$ отражается от свободной границы слоя $x = H$. Если для линейной среды решение аналогичной задачи после отражения известно, то в случае разномодульной среды возникает вопрос: сколько волновых фронтов отражается и какие они? Оказалось, что решающим фактором для ответа на данный вопрос является знак второй производной заданной на границе $x = 0$ функции перемещений $\varphi(t)$. Если $\varphi''(t) > 0$ (т. е. функция $\varphi(t)$ – вогнутая, положительная монотонно возрастающая (рис. 1а)), то от свободной границы слоя отражается одна волна – сигнотон $\Sigma_\beta(t)$ со скоростью a (рис. 1в), среда за фронтом $\Sigma_\beta(t)$ продолжает находиться в сжатом состоянии. Решение задачи при $t > H/a$ имеет вид

$$u(x,t) = \begin{cases} \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) + \varphi\left(t - 2\frac{H}{a} + \frac{x}{a}\right) & \text{при } 2H - at \leq x \leq H, \\ \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) & \text{при } 0 \leq x \leq 2H - at. \end{cases} \quad (10)$$

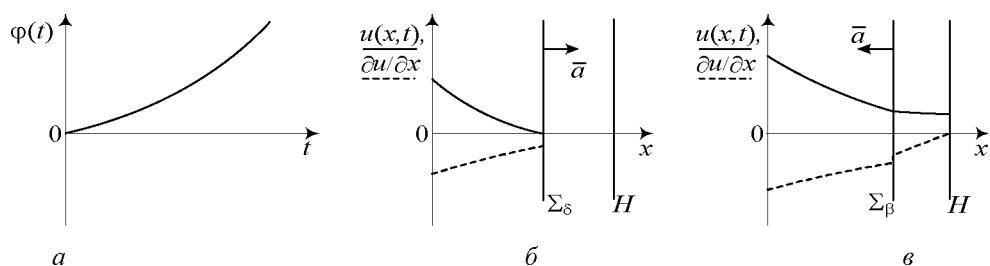


Рисунок 1 – Отражение волны сжатия от свободной границы слоя: решение задачи при вогнутой положительной функции $\varphi''(t)$ ($\varphi''(t) > 0$)

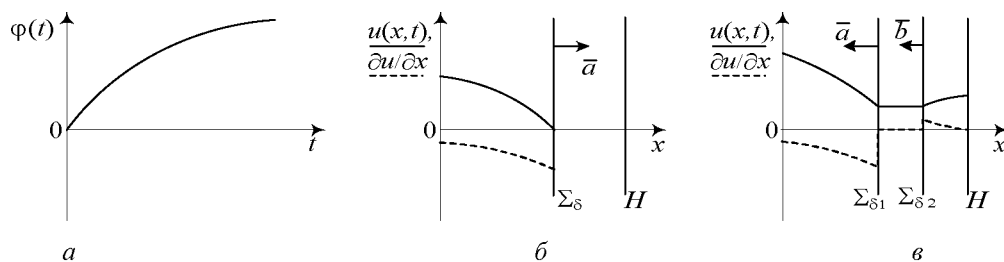


Рисунок 2 – Отражение волны сжатия от свободной границы слоя: решение задачи при выпуклой положительной функции $\varphi''(t)$ ($\varphi''(t) < 0$)

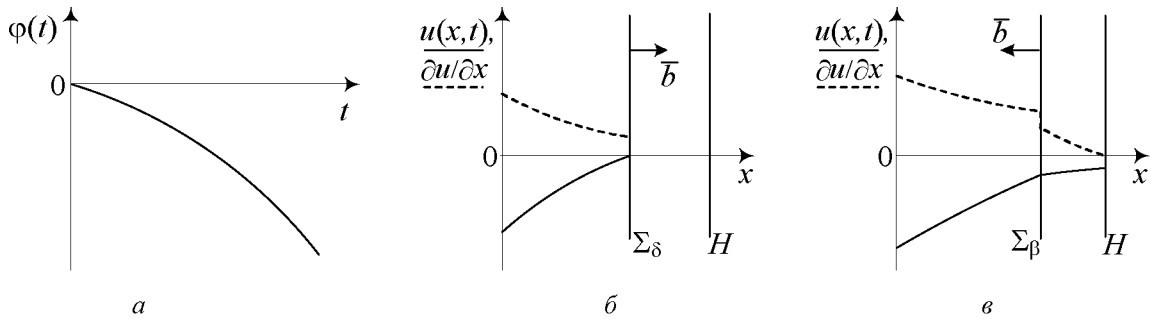


Рисунок 3 – Отражение волны разрежения от свободной границы слоя: решение задачи при выпуклой отрицательной функции $\varphi''(t)$ ($\varphi''(t) < 0$)

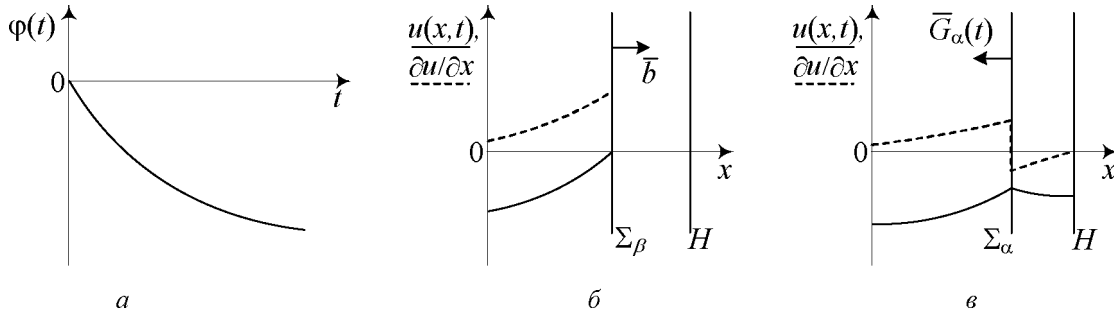


Рисунок 4 – Отражение волны разрежения от свободной границы слоя: решение задачи при вогнутой отрицательной функции $\varphi''(t)$ ($\varphi''(t) > 0$)

В случае, когда функция $\varphi(t)$ – выпуклая (т. е. $\varphi''(t) < 0$ (рис. 2а)), от свободной границы слоя при $t > H/a$ отражаются два волновых фронта (рис. 2в): быстрый полусигнотон $\Sigma_{\delta_1}(t)$ со скоростью распространения a и координатой фронта $x = 2H - at$ и медленный полусигнотон $\Sigma_{\delta_2}(t)$ с координатой фронта $x = (1 + b/a)H - bt$, движущийся со скоростью b .

Решение задачи, соответствующее случаю $\varphi''(t) < 0$, до момента $t = H/a$ также имеет вид (9), а при $t > H/a$ выражается соотношениями

$$u(x,t) = \begin{cases} \varphi\left(t - \frac{H}{a} + \frac{H-x}{b}\right) + \varphi\left(t - \frac{H}{a} - \frac{H-x}{b}\right) & \text{при } \left(1 + \frac{b}{a}\right)H - bt \leq x \leq H, \\ \varphi\left(2\left(t - \frac{H}{a}\right)\right) & \text{при } 2H - at \leq x \leq \left(1 + \frac{b}{a}\right)H - bt, \\ \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) & \text{при } 0 \leq x \leq 2H - at. \end{cases}$$

Таким образом, упругий слой оказывается поделенным двумя отраженными волновыми фронтами на три области (рис. 2в). В зоне $0 \leq x \leq 2H - at$ между нагружаемой границей слоя и передним отраженным волновым фронтом $\Sigma_{\delta_1}(t)$ продолжается сжатие среды под действием приложенной на границу $x = 0$ нагрузки. Область $(1 + b/a) \leq x \leq H$ между последним отраженным волновым фронтом $\Sigma_{\delta_2}(t)$ и свободной границей слоя подвергается растяжению, в ней $\partial u / \partial x > 0$ и фазовая скорость уравнения движения равна b . Зона $2H - at \leq x \leq (1 + b/a)H - bt$ между фронтами $\Sigma_{\delta_1}(t)$ и $\Sigma_{\delta_2}(t)$ оказывается областью постоянных перемещений, в которой среда недеформирована и движется как жесткое целое. Скорость перемещений точек среды в этой зоне, согласно полученному решению, не зависит от пространственной координаты x : $v(x,t) = 2\varphi'(2(t - H/a))$.

Рассмотрим теперь случай, когда начиная с момента времени $t = 0$ на одну из границ разномодульного упругого слоя толщины H действует одноосная растягивающая нагрузка, а вторая граница остается свободной. Такая постановка при $t \geq 0$ имеет место, если перемещения точек граничной плоскости $x = 0$ заданы отрицательной монотонно убывающей функцией $u(0, t) = \varphi(t) : \varphi(t) \leq 0, \varphi(0) = 0, \varphi'(t) < 0$ (рис. 3а; рис. 4а). Отсутствие нагрузки на границе $x = H$ задано условием (8). Тогда до момента времени $t = H/b$ деформации в слой распространяются посредством медленного полусигнона $\Sigma_\delta(t)$ – волны разряжения со скоростью b (рис. 3б; рис. 4б).

Среда за фронтом $\Sigma_\delta(t)$ подвергается растяжению. Поле перемещений при $0 \leq t \leq bt$ определяется в форме (5) аналогично предыдущему случаю, отличие состоит лишь в значении фазовой скорости уравнения движения ($c = b$):

$$u(x, t) = \begin{cases} \varphi\left(t - \frac{x}{b}\right) & \text{при } 0 \leq x \leq bt, \\ 0 & \text{при } bt \leq x \leq H. \end{cases}$$

Так же, как и при сжатии слоя, решение при $t > H/b$ зависит от знака второй производной $\varphi''(t)$ заданной на границе $x = 0$ функции перемещений. Если $\varphi''(t) < 0$, т.е. $\varphi(t)$ – отрицательная выпуклая функция (рис. 3а), то от свободной границы $x = H$ отражается один волновой фронт – медленный сигнон $\Sigma_\beta(t)$ со скоростью b (рис. 3в), за которым деформации уменьшаются, но среда продолжает находиться в растянутом состоянии. Перемещения точек среды при $t > H/b$ будут иметь вид

$$u(x, t) = \begin{cases} \varphi\left(t - \frac{x}{b}\right) + \varphi\left(t - 2\frac{H}{b} + \frac{x}{b}\right) & \text{при } 2H - bt \leq x \leq H, \\ \varphi\left(t - \frac{x}{b}\right) & \text{при } 0 \leq x \leq 2H - bt. \end{cases}$$

Большой интерес в данной задаче представляет случай, когда заданная на границе $x = 0$ функция $\varphi(t)$ – отрицательная вогнутая (рис. 4а), т.е. $\varphi''(t) > 0$. При таком воздействии на разномодульный упругий слой от свободной границы $x = H$ отражается ударная волна $\Sigma_\alpha(t)$ (рис. 4в). Скорость ее движения оказывается зависимой от времени:

$$G_\alpha(t) = b + F(a, b, \varphi(t), \varphi'(t))\Big|_{t=H/b} \cdot t + \dots, \quad (11)$$

где $F(a, b, \varphi(t), \varphi'(t)) \geq 0$ – положительная функция, не приведенная здесь из-за ее громоздкости в общем случае. В момент отражения ($t = H/b$) скорость ударной волны $G_\alpha(t)$ равна b , а в последующие моменты времени начинает увеличиваться, стремясь достигнуть значения a . Появление такого эффекта объясняется тем, что перед фронтом $\Sigma_\alpha(t)$ фазовая скорость уравнения движения меньше, чем за ним ($b < a$), т.е. ударная волна движется из сжатой области слоя в растянутую. Фронт ударной волны $\Sigma_\alpha(t)$ в соответствии с полученным выражением (11) для скорости $G_\alpha(t)$ будет иметь координату $x = H - \int_{H/b}^t G(\xi) d\xi$. Решение задачи при $t > H/b$ в случае вогнутой отрицательной функции $\varphi(t)$ можно записать в виде:

$$u(x, t) = \begin{cases} \Phi(x, t, G_\alpha(t)) & \text{при } H - \int_{H/b}^t G(\xi) d\xi \leq x \leq H, \\ \varphi\left(t - \frac{x}{b}\right) & \text{при } 0 \leq x \leq H - \int_{H/b}^t G(\xi) d\xi, \end{cases}$$

где функция $\Phi(x, t, G_\alpha(t))$ такова, что $\partial u / \partial x < 0$ при $H - \int_{H/b}^t G(\xi) d\xi \leq x \leq H$.

Таким образом, показано, что решения, полученные для разномодульной изотропной упругой среды с кусочно-линейной зависимостью между напряжениями и деформациями, существенным образом отличаются от решений аналогичных краевых задач линейной нормально изотропной упругой среды. Описанные результаты демонстрируют возможность возникновения нелинейных эффектов (сильных разрывов первых производных перемещений, областей постоянных перемещений) при описании динамического деформирования среды в рамках линейного приближения определяющих соотношений (1). Для этого оказалось достаточным выбрать упругий потенциал материала в виде кусочно-гладкой функции (2) с особенностью в области свободного состояния. Подобные результаты, полученные в рамках математической модели В.П. Мясникова и А.И. Олейникова, были представлены в [9], где рассматривался более широкий класс нестационарных краевых задач, в том числе возникновение ударной волны и области постоянных перемещений при одноосном ударном деформировании разномодульного упругого полупространства.

- Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 11-01-00360-а.

Резюме

В рамках кусочно-линейной модели динамического деформирования изотропной упругой среды с различным сопротивлением растяжению и сжатию изучаются процессы распространения граничных возмущений. Показана возможность возникновения нелинейных эффектов (ударных волн, движущихся слоев недеформированной среды) при отражении плоских одномерных фронтов нагрузки и разгрузки от свободной границы разномодульного упругого слоя.

Литература

1. Капустянский С.М. Анизотропия геоматериалов // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. 1987. Т. 18. С. 53–113.
2. Садовская О.В., Садовский В.М. Математическое моделирование и механике сыпучих сред. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 368 с. ISBN 978-5-9221-0906-2.
3. Лушников В.В., Вулис П.Д., Литвинов Б.М. О соотношении модулей деформации при сжатии и растяжении грунтов // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1973. № 6. С. 18–19.
4. Маслов В.П., Мосолов П.П. Общая теория уравнений движения разномодульной упругой среды // Прикладная математика и механика. 1985. Т. 49, вып. 3. С. 419–437.
5. Мясников В.П. Геофизические модели сплошных сред // Материалы V Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике: тезисы докладов. М.: Наука, 1981. С. 263–264.
6. Олейников А.И. Основные общие соотношения модели изотропно-упругой разномодульной среды // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57, вып. 5. С. 153–159.
7. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. – Владивосток: Дальнаука, 1998. – 528с. ISBN 5-7442-0586-1.
8. Буренин А.А., Чернышов А.Д. Ударные волны в изотропном упругом пространстве // Прикладная математика и механика. 1978. Т. 42, вып. 4. С. 711–717.
9. Дудко О.В., Лаптева А.А., Семенов К.Т. О распространении плоских одномерных волн и их взаимодействии с преградами в среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию // Дальневосточный математический журнал. 2005. Т. 6. № 1–2. С. 94–105. ISSN 1608-845X.

Summary

Within the piecewise linear model of dynamic deformation of an isotropic elastic medium with different resistance to tension and compression the propagation of boundary disturbances are studied. The possibility of occurrence of nonlinear effects (shock waves, moving layers of undeformed media) at reflection flat one-dimensional front of loading and unloading from the free boundary of multimodulus elastic layer are shown.

Поступила в редакцию 15.11.2012

ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕМАТИКИ МАНИПУЛЯТОРА В АППАРАТЕ КВАТЕРНИОНОВ И ИХ ДУАЛЬНЫХ АНАЛОГОВ

Громько О.В., Царева А.А.

Белорусский государственный университет, Минск

Задачи кинематики и динамики манипуляторов приходится решать на различных этапах проектирования и при управлении роботами. Проектирование промышленного робота начинается с исследования операций и условий производства, в которых предполагается использовать робот. Для формулировки требований к манипулятору возникает необходимость решения прямой и обратной задачи кинематики.

Решение прямой задачи кинематики с использованием нетрадиционных кинематических параметров, таких как кватернионы и их дуальные аналоги, выполнено для робота-манипулятора M710-iC с шестью вращательными парами семейства Fanuc. Изображение и кинематическая схема рассматриваемого манипулятора представлена ниже на рис. 1.

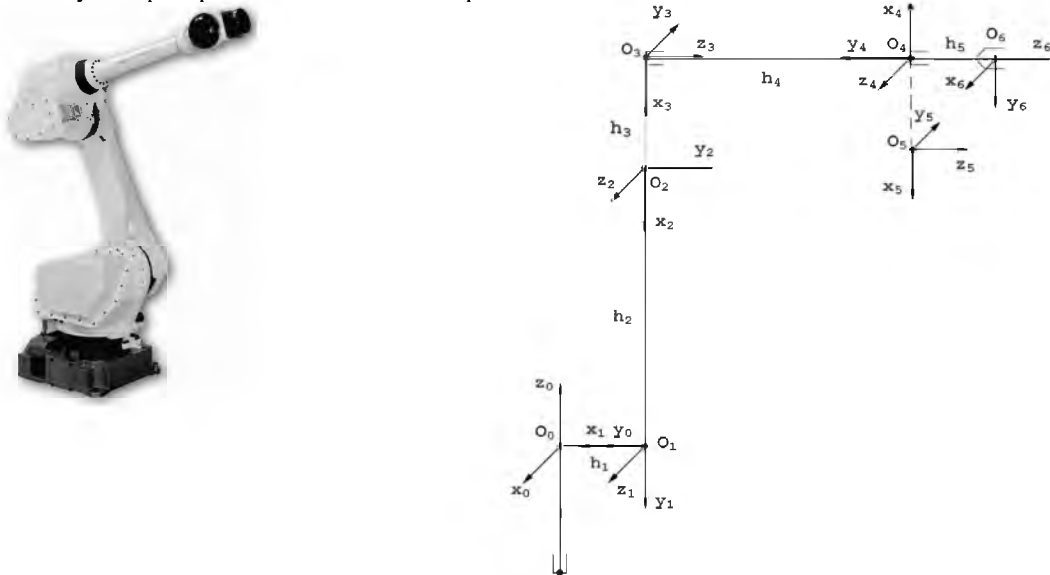


Рисунок 1 Вид и кинематическая схема манипулятора M-710iC/70

Свяжем с каждым звеном системы координат, как показано на рис. 1, составим таблицу параметров Денави-Хартенберга:

Таблица 1

N	Тип	θ	S	a	α
1	R	q_1	0	$-h_1$	$-\pi/2$
2	R	q_2	0	$-h_2$	0
3	R	q_3	0	$-h_3$	$-\pi/2$
4	R	q_4	h_4	0	$-\pi/2$
5	R	q_5	0	0	$-\pi/2$
6	R	q_6	h_5	0	0

Матрицы дуальных направляющих косинусов. Согласно теории винтового исчисления дуальный угол позволяет одновременно описать поворот и смещение, т.е. для совмещения двух соседних систем координат звеньев по схеме Денави-Хартенберга требуется осуществить повороты на два дуальных угла $Q_i = q_i + s s_i$, $A_i = \alpha_i + s a_i$ вокруг осей Z_i и X_i ($s^2 = 0$ – комплексность Клиффорда). Описание пространственного положения рабочего органа рассматриваемого манипулятора требует 12 дуальных углов $Q_i, A_i, i = \overline{1, 6}$.

Используя аппарат матриц дуальных направляющих косинусов, переход между соседними звеньями опишем при помощи матриц вида C'_{i+1}, C''_{i+1} ,

$$C_{i+1} = C'_{i+1} \cdot C''_{i+1} = \begin{bmatrix} CQ_i & -SQ_i & 0 \\ SQ_i & CQ_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & CA_i & -SA_i \\ 0 & SA_i & CA_i \end{bmatrix}$$

Учитывая комплексность Клиффорда $s^2 = 0$, получим результаты для звеньев исследуемого манипулятора (решение приведем на примере первых трех звеньев манипулятора):

Для первого звена имеем: для перехода от системы координат $X_0Y_0Z_0$ к системе координат $X_1Y_1Z_1$ необходимо осуществить два поворота: на q_1 вокруг оси Z_0 и на $\alpha_1 = -\pi/2$ вокруг оси X_0 ; и два перемещения на $s_1 = 0$ и на $a_1 = -h_1$ согласно таблице параметров Денави-Хартенберга 1. С учетом правила умножения дуальных матриц и дуальных элементов получим:

$$C_{01} = C_{01} + sC_{01}^0 \quad C_{01} = \begin{bmatrix} Cq_1 & 0 & -Sq_1 \\ Sq_1 & 0 & Cq_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, C_{01}^0 = \begin{bmatrix} 0 & h_1Sq_1 & 0 \\ 0 & -h_1Cq_1 & 0 \\ 0 & 0 & -h_1 \end{bmatrix}$$

Аналогично для второго звена: переход от системы координат координат $X_1Y_1Z_1$ к системе координат $X_2Y_2Z_2$ получается посредством поворота системы координат $X_1Y_1Z_1$ вокруг оси Z_1 на угол q_2 и перемещений $s_2 = 0$ и $a_2 = -h_2$. Таким образом, получим:

$$C_{12} = C_{12} + sC_{12}^0, \quad \text{где:} \quad C_{12} = \begin{bmatrix} Cq_2 & -Sq_2 & 0 \\ Sq_2 & Cq_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_{12}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -h_2Sq_2 \\ 0 & 0 & h_2Cq_2 \\ 0 & -h_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Для третьего звена: смещение системы координат $X_2Y_2Z_2$ к $X_3Y_3Z_3$ получается при повороте системы координат $X_2Y_2Z_2$ вокруг оси Z_2 на q_3 , вокруг оси X_2 на $\alpha_3 = -\pi/2$, перемещений $s_3 = 0$ и $a_3 = -h_3$. Таким образом, получим:

$$C_{23} = C_{23} + sC_{23}^0, \quad C_{23} = \begin{bmatrix} Cq_3 & 0 & -Sq_3 \\ Sq_3 & 0 & Cq_3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, C_{23}^0 = \begin{bmatrix} 0 & h_3Sq_3 & 0 \\ 0 & -h_3Cq_3 & 0 \\ 0 & 0 & -h_3 \end{bmatrix}$$

После получения всех трех матриц C_{01} , C_{12} и C_{23} , последовательно перемножая их, в результате будем иметь результирующую дуальную матрицу направляющих косинусов, связывающую систему координат основания $X_0Y_0Z_0$ с системой координат последнего звена манипулятора $X_3Y_3Z_3$:

$$C_{03} = C_{03} + sC_{03}^0, \quad C_{03} = \begin{bmatrix} Cq_1C(q_2+q_3) & Sq_1 & -Cq_1S(q_2+q_3) \\ Sq_1C(q_2+q_3) & -Cq_1 & -Sq_1S(q_2+q_3) \\ -S(q_2+q_3) & 0 & -C(q_2+q_3) \end{bmatrix},$$

$$C_{03}^0 = \begin{bmatrix} Sq_1[h_2Sq_3 + h_1S(q_2+q_3)] & Cq_1[h_2Sq_2 + h_3S(q_2+q_3)] & Sq_1[h_3 + h_2Cq_3 + h_1C(q_2+q_3)] \\ -Cq_1[h_2Sq_3 + h_1S(q_2+q_3)] & Sq_1[h_2Sq_2 + h_3S(q_2+q_3)] & -Cq_1[h_3 + h_2Cq_3 + h_1C(q_2+q_3)] \\ 0 & h_1 + h_2Cq_2 + h_3C(q_2+q_3) & 0 \end{bmatrix}$$

Бикватернионы и бикватернионные матрицы. Теперь решим прямую задачу манипулятора Fanuc M710-iC, используя аппарат кватернионов и их дуальных аналогов. Каждый плоский поворот на дуальный угол можно описать бикватернионом вращения $\Lambda = \cos \Phi/2 + i \sin \Phi/2$, где i - единичный вектор оси вращения, $\Phi = \varphi + s\varphi^0$ - дуальный угол поворота. В результате составления матриц перехода получим ряд бикватернионов, характеризующих положение одного звена относительно другого.

Совмещая системы координат $X_0Y_0Z_0$ и $X_1Y_1Z_1$ для первого звена получим два бикватерниона:

1. $\Lambda'_{01} = CQ_1/2 + i_3SQ_1/2 = Cq_1/2 + i_3Sq_1/2$ – бикватернион поворота вокруг оси Z_0 на $Q_i = q_i + s s_i = q_1$
2. $\Lambda''_{01} = CA_1/2 + i_1SA_1/2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{h_1s}{2}\right) + \frac{i_1}{\sqrt{2}}\left(-1 - \frac{h_1s}{2}\right)$ – бикватернион поворота вокруг оси X_0 на $A_i = \alpha_i + s a_i = -\pi/2 - s h_1$.

Результирующий бикватернион получаем перемножением бикватернионов Λ'_{01} и Λ''_{01} в соответствии с правилами кватернионного произведения:

$$\begin{aligned}\Lambda_{01} &= \Lambda'_{01} \circ \Lambda''_{01} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(C\frac{q_1}{2} + i_3S\frac{q_1}{2}\right) \circ \left[\left(1 - \frac{h_1s}{2}\right) + i_1\left(-1 - \frac{h_1s}{2}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(C\frac{q_1}{2} - i_1C\frac{q_1}{2} - i_2S\frac{q_1}{2} + i_3S\frac{q_1}{2}\right) - \frac{sh_1}{2\sqrt{2}}\left(C\frac{q_1}{2} + i_1C\frac{q_1}{2} + i_2S\frac{q_1}{2} + i_3S\frac{q_1}{2}\right)\end{aligned}$$

Аналогичным образом, получим бикватернионы перехода для других звеньев.

Совмещая системы координат $X_1Y_1Z_1$ и $X_2Y_2Z_2$ для второго звена получим два бикватерниона:

1. $\Lambda'_{12} = \left(C\frac{q_1}{2} + i_3S\frac{q_1}{2}\right)$ – бикватернион поворота вокруг оси Z_1 на $Q_2 = q_2$
2. $\Lambda''_{12} = 1 - \frac{h_2i_1s}{2}$ – бикватернион поворота вокруг оси X_1 на $A_2 = \alpha_2 + s a_2 = -s h_2$.

Результирующий бикватернион имеет вид:
$$\Lambda_{12} = \left(C\frac{q_2}{2} + i_3S\frac{q_2}{2}\right) - \frac{s}{2}\left(h_2i_1C\frac{q_2}{2} + h_2i_2S\frac{q_2}{2}\right)$$

Совмещая системы координат $X_2Y_2Z_2$ и $X_3Y_3Z_3$ для третьего звена получим два бикватерниона:

1. $\Lambda'_{23} = \left(C\frac{q_3}{2} + i_3S\frac{q_3}{2}\right)$ – бикватернион поворота вокруг оси Z_2 на $Q_3 = q_3$
2. $\Lambda''_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{h_3s}{2}\right) + \frac{i_1}{\sqrt{2}}\left(-1 - \frac{h_3s}{2}\right)$ – бикватернион поворота вокруг оси X_2 на $A_3 = -\pi/2 - s h_3$.

Результирующий бикватернион имеет вид:

$$\Lambda_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(C\frac{q_3}{2} - i_1C\frac{q_3}{2} - i_2S\frac{q_3}{2} + i_3S\frac{q_3}{2}\right) - \frac{sh_3}{2\sqrt{2}}\left(C\frac{q_3}{2} + i_1C\frac{q_3}{2} + i_2S\frac{q_3}{2} + i_3S\frac{q_3}{2}\right)$$

Окончательно, результирующий бикватернион Λ_{03} , описывающий положение третьего звена относительно основания манипулятора, имеет вид:

$$\Lambda_{03} = \Lambda_{01} \circ \Lambda_{12} \circ \Lambda_{13} = \Lambda_{03} + s\Lambda_{03}^0,$$

где
$$\Lambda_{03} = -S\frac{q_1}{2}S\left(\frac{q_2+q_3}{2}\right) - i_1C\frac{q_1}{2}C\left(\frac{q_2+q_3}{2}\right) - i_2S\frac{q_1}{2}C\left(\frac{q_2+q_3}{2}\right) + i_3C\frac{q_1}{2}S\left(\frac{q_2+q_3}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{03}^0 &= \frac{1}{2}\left[-h_2C\frac{q_1}{2}C\frac{q_2-q_3}{2} - (h_1+h_3)C\frac{q_1}{2}C\frac{q_2+q_3}{2}\right] + \\ &+ \frac{1}{2}i_3\left[-h_2S\frac{q_1}{2}C\frac{q_2-q_3}{2} - (h_1+h_3)S\frac{q_1}{2}C\frac{q_2+q_3}{2}\right] + \\ &+ \frac{1}{2}i_2\left[-h_2C\frac{q_1}{2}S\frac{q_2-q_3}{2} + (h_1-h_3)C\frac{q_1}{2}S\frac{q_2+q_3}{2}\right] + \\ &+ \frac{1}{2}i_1\left[h_2S\frac{q_1}{2}S\frac{q_2-q_3}{2} + (-h_1+h_3)S\frac{q_1}{2}S\frac{q_2+q_3}{2}\right]\end{aligned}$$

Бикватерниону вращения можно поставить в соответствие кватернионную матрицу размерностью 4x4, составленную из дуальных параметров Родрига–Гамильтона, вида:

$$m(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{bmatrix},$$

а операция перемножения кватернионов будет соответствовать перемножению матриц, составленных из компонент соответствующих кватернионов.

Тогда для первого звена получим:

$$B'_{01} = B'_{01} + sB'^0_{01}, \quad B''_{01} = B''_{01} + sB''^0_{01}$$

$$B_{01} = B'_{01} B''_{01} = B_{01} + sB^0_{01}$$

$$B'_{01} = \begin{bmatrix} C \frac{q_1}{2} & 0 & 0 & -S \frac{q_1}{2} \\ 0 & C \frac{q_1}{2} & -S \frac{q_1}{2} & 0 \\ 0 & S \frac{q_1}{2} & C \frac{q_1}{2} & 0 \\ S \frac{q_1}{2} & & & C \frac{q_1}{2} \end{bmatrix}, \quad B'^0_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B''_{01} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad B''^0_{01} = \frac{h_1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$B_{01} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} C \frac{q_1}{2} & C \frac{q_1}{2} & S \frac{q_1}{2} & -S \frac{q_1}{2} \\ -C \frac{q_1}{2} & C \frac{q_1}{2} & -S \frac{q_1}{2} & -S \frac{q_1}{2} \\ -S \frac{q_1}{2} & S \frac{q_1}{2} & C \frac{q_1}{2} & C \frac{q_1}{2} \\ S \frac{q_1}{2} & S \frac{q_1}{2} & -C \frac{q_1}{2} & C \frac{q_1}{2} \end{bmatrix}; \quad B^0_{01} = \frac{h_1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -C \frac{q_1}{2} & C \frac{q_1}{2} & S \frac{q_1}{2} & S \frac{q_1}{2} \\ -C \frac{q_1}{2} & -C \frac{q_1}{2} & S \frac{q_1}{2} & -S \frac{q_1}{2} \\ -S \frac{q_1}{2} & -S \frac{q_1}{2} & -C \frac{q_1}{2} & C \frac{q_1}{2} \\ -S \frac{q_1}{2} & S \frac{q_1}{2} & -C \frac{q_1}{2} & -C \frac{q_1}{2} \end{bmatrix};$$

Переход между первым и вторым звеньями опишется матрицей B_{12} :

$$B'_{12} = B'_{12} + sB'^0_{12}, \quad B''_{12} = B''_{12} + sB''^0_{12}, \quad B_{12} = B'_{12} B''_{12} = B_{12} + sB^0_{12},$$

$$B'_{12} = \begin{bmatrix} C \frac{q_2}{2} & 0 & 0 & -S \frac{q_2}{2} \\ 0 & C \frac{q_2}{2} & -S \frac{q_2}{2} & 0 \\ 0 & S \frac{q_2}{2} & C \frac{q_2}{2} & 0 \\ S \frac{q_2}{2} & 0 & 0 & C \frac{q_2}{2} \end{bmatrix}, \quad B'^0_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B''_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B''^0_{12} = \frac{h_2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} C \frac{q_2}{2} & 0 & 0 & -S \frac{q_2}{2} \\ 0 & C \frac{q_2}{2} & -S \frac{q_2}{2} & 0 \\ 0 & S \frac{q_2}{2} & C \frac{q_2}{2} & 0 \\ S \frac{q_2}{2} & 0 & 0 & C \frac{q_2}{2} \end{bmatrix} \quad B_{12}^0 = \frac{h_2}{2} \begin{bmatrix} 0 & C \frac{q_2}{2} & S \frac{q_2}{2} & 0 \\ -C \frac{q_2}{2} & 0 & 0 & -S \frac{q_2}{2} \\ -S \frac{q_2}{2} & 0 & 0 & C \frac{q_2}{2} \\ 0 & S \frac{q_2}{2} & -C \frac{q_2}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Аналогично, переход между вторым и третьим звеньями опишется матрицей B_{23}

$$B'_{23} = B'_{23} + sB_{23}^0, \quad B''_{23} = B''_{23} + sB_{23}^0, \quad B_{23} = B'_{23}B''_{23} = B_{23} + sB_{23}^0$$

Тогда в итоге получим:

$$B_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} C \frac{q_3}{2} & C \frac{q_3}{2} & S \frac{q_3}{2} & -S \frac{q_3}{2} \\ -C \frac{q_3}{2} & C \frac{q_3}{2} & -S \frac{q_3}{2} & -S \frac{q_3}{2} \\ -S \frac{q_3}{2} & S \frac{q_3}{2} & C \frac{q_3}{2} & C \frac{q_3}{2} \\ S \frac{q_3}{2} & S \frac{q_3}{2} & -C \frac{q_3}{2} & C \frac{q_3}{2} \end{bmatrix}; \quad B_{23}^0 = \frac{h_3}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -C \frac{q_3}{2} & C \frac{q_3}{2} & S \frac{q_3}{2} & S \frac{q_3}{2} \\ -C \frac{q_3}{2} & -C \frac{q_3}{2} & S \frac{q_3}{2} & -S \frac{q_3}{2} \\ -S \frac{q_3}{2} & -S \frac{q_3}{2} & -C \frac{q_3}{2} & C \frac{q_3}{2} \\ -S \frac{q_3}{2} & S \frac{q_3}{2} & -C \frac{q_3}{2} & -C \frac{q_3}{2} \end{bmatrix};$$

Тогда результирующая бикватернионная матрица имеет вид: $B_{03} = B_{01}B_{12}B_{23} = B_{03} + sB_{03}^0$

$$B_{03} = \begin{bmatrix} -S \frac{q_1}{2} S \frac{q_2+q_3}{2} & C \frac{q_1}{2} C \frac{q_2+q_3}{2} & S \frac{q_1}{2} C \frac{q_2+q_3}{2} & -C \frac{q_1}{2} S \frac{q_2+q_3}{2} \\ -C \frac{q_1}{2} C \frac{q_2+q_3}{2} & -S \frac{q_1}{2} S \frac{q_2+q_3}{2} & -C \frac{q_1}{2} S \frac{q_2+q_3}{2} & -S \frac{q_1}{2} C \frac{q_2+q_3}{2} \\ -S \frac{q_1}{2} C \frac{q_2+q_3}{2} & C \frac{q_1}{2} S \frac{q_2+q_3}{2} & -S \frac{q_1}{2} S \frac{q_2+q_3}{2} & C \frac{q_1}{2} C \frac{q_2+q_3}{2} \\ C \frac{q_1}{2} S \frac{q_2+q_3}{2} & S \frac{q_1}{2} C \frac{q_2+q_3}{2} & -C \frac{q_1}{2} C \frac{q_2+q_3}{2} & -S \frac{q_1}{2} S \frac{q_2+q_3}{2} \end{bmatrix}$$

$$B_{03}^0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} C \frac{q_1}{2} \left[h_2 C \frac{q_2-q_3}{2} + (h_1+h_3) C \frac{q_2+q_3}{2} \right] & -\frac{1}{2} S \frac{q_1}{2} \left[h_2 S \frac{q_2-q_3}{2} + (-h_1+h_3) S \frac{q_2+q_3}{2} \right] \\ \frac{1}{2} S \frac{q_1}{2} \left[h_2 S \frac{q_2-q_3}{2} + (-h_1+h_3) S \frac{q_2+q_3}{2} \right] & -\frac{1}{2} C \frac{q_1}{2} \left[h_2 C \frac{q_2-q_3}{2} + (h_1+h_3) C \frac{q_2+q_3}{2} \right] \\ -\frac{1}{2} C \frac{q_1}{2} \left[h_2 S \frac{q_2-q_3}{2} + (-h_1+h_3) S \frac{q_2+q_3}{2} \right] & -\frac{1}{2} S \frac{q_1}{2} \left[h_2 C \frac{q_2-q_3}{2} + (h_1+h_3) C \frac{q_2+q_3}{2} \right] \\ -\frac{1}{2} S \frac{q_1}{2} \left[h_2 C \frac{q_2-q_3}{2} + (h_1+h_3) C \frac{q_2+q_3}{2} \right] & \frac{1}{2} C \frac{q_1}{2} \left[h_2 S \frac{q_2-q_3}{2} + (-h_1+h_3) S \frac{q_2+q_3}{2} \right] \\ \frac{1}{2} C \frac{q_1}{2} \left[h_2 S \frac{q_2-q_3}{2} + (-h_1+h_3) S \frac{q_2+q_3}{2} \right] & \frac{1}{2} S \frac{q_1}{2} \left[h_2 C \frac{q_2-q_3}{2} + (h_1+h_3) C \frac{q_2+q_3}{2} \right] \\ \frac{1}{2} S \frac{q_1}{2} \left[h_2 C \frac{q_2-q_3}{2} + (h_1+h_3) C \frac{q_2+q_3}{2} \right] & -\frac{1}{2} C \frac{q_1}{2} \left[h_2 S \frac{q_2-q_3}{2} + (-h_1+h_3) S \frac{q_2+q_3}{2} \right] \\ -\frac{1}{2} C \frac{q_1}{2} \left[h_2 S \frac{q_2-q_3}{2} + (-h_1+h_3) S \frac{q_2+q_3}{2} \right] & -\frac{1}{2} S \frac{q_1}{2} \left[h_2 C \frac{q_2-q_3}{2} + (h_1+h_3) C \frac{q_2+q_3}{2} \right] \\ \frac{1}{2} S \frac{q_1}{2} \left[h_2 S \frac{q_2-q_3}{2} + (-h_1+h_3) S \frac{q_2+q_3}{2} \right] & -\frac{1}{2} C \frac{q_1}{2} \left[h_2 C \frac{q_2-q_3}{2} + (h_1+h_3) C \frac{q_2+q_3}{2} \right] \end{bmatrix}$$

Параметры и матрицы параметров Кейли-Клейна. Дуальные параметры Кейли-Клейна являются комплексно-сопряженными комбинациями составляющих бикватерниона, а именно, дуальных параметров Родрига-Гамильтона, вида

$$\begin{aligned} A &= \Lambda_0 + i\Lambda_3, \quad \Delta = \Lambda_0 - i\Lambda_3, \\ B &= \Lambda_2 + i\Lambda_1, \quad \Gamma = i\Lambda_1 - \Lambda_2 \end{aligned}$$

Матрицей дуальных параметров Кейли-Клейна, составленной из этих элементов можно описать поворот на произвольный дуальный угол.

$$Q = \begin{bmatrix} A & B \\ \Gamma & \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_0 + i\Lambda_3 & \Lambda_2 + i\Lambda_1 \\ i\Lambda_1 - \Lambda_2 & \Lambda_0 - i\Lambda_3 \end{bmatrix}$$

Последовательное перемещение от одного звена к другому можно описать дуальными матрицами перехода вида (3.8), которые, если их перемножить между собой в том же порядке, позволят получить результирующую дуальную матрицу параметров Кейли-Клейна, связывающую основание манипулятора с последним звеном.

Учитывая вышесказанное для первого звена, совмещая системы координат $X_0Y_0Z_0$ и $X_1Y_1Z_1$, получим две матрицы параметров Кейли-Клейна:

1. $Q'_{01} = \begin{bmatrix} CQ_1/2 + iSQ_1/2 & 0 \\ 0 & CQ_1/2 - iSQ_1/2 \end{bmatrix}$ – матрица дуальных параметров Кейли-Клейна, описывающая поворот вокруг оси Z_0 на дуальный угол $Q_1 = q_1 + s s_1$

2. $Q''_{01} = \begin{bmatrix} CA_1/2 & iSA_1/2 \\ iSA_1/2 & CA_1/2 \end{bmatrix}$ – матрица дуальных параметров Кейли-Клейна, описывающая поворот вокруг оси X_0 на дуальный угол $A_1 = \alpha_1 + sa_1 = -\pi/2 - sh_1$.

Результирующую матрицу дуальных параметров Кейли-Клейна для первого звена получаем перемножением матрицы Q'_{01} и Q''_{01} в соответствии с правилами кватернионного произведения

$$\begin{aligned} Q_{01} &= Q'_{01} Q''_{01} = \begin{bmatrix} CQ_1/2 + iSQ_1/2 & 0 \\ 0 & CQ_1/2 - iSQ_1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CA_1/2 & iSA_1/2 \\ iSA_1/2 & CA_1/2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} C \frac{q_1}{2} + iS \frac{q_1}{2} & -iC \frac{q_1}{2} + S \frac{q_1}{2} \\ -iC \frac{q_1}{2} - S \frac{q_1}{2} & C \frac{q_1}{2} - iS \frac{q_1}{2} \end{pmatrix} + \frac{sh_1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -C \frac{q_1}{2} - iS \frac{q_1}{2} & -iC \frac{q_1}{2} + S \frac{q_1}{2} \\ -iC \frac{q_1}{2} - S \frac{q_1}{2} & -C \frac{q_1}{2} + iS \frac{q_1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Аналогичным образом получим бикватернионы перехода для других звеньев.

Результирующая матрица дуальных параметров Кейли-Клейна для второго звена манипулятора имеет вид:

$$Q_{12} = \begin{bmatrix} C \frac{q_2}{2} + iS \frac{q_2}{2} & 0 \\ 0 & C \frac{q_2}{2} - iS \frac{q_2}{2} \end{bmatrix} + \frac{sh_2}{2} \begin{bmatrix} 0 & -iC \frac{q_2}{2} + S \frac{q_2}{2} \\ -iC \frac{q_2}{2} - S \frac{q_2}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Совмещая системы координат $X_2Y_2Z_2$ и $X_3Y_3Z_3$ для третьего звена получим две матрицы параметров Кейли-Клейна:

1. $Q'_{23} = \begin{bmatrix} C \frac{q_3}{2} + iS \frac{q_3}{2} & 0 \\ 0 & C \frac{q_3}{2} - iS \frac{q_3}{2} \end{bmatrix}$ – матрица дуальных параметров Кейли-Клейна, описывающая по-

ворот вокруг оси Z_2 на дуальный угол $Q_3 = q_3$

2. $Q_{12}'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} - \frac{sh_3}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$ – матрица дуальных параметров Кейли-Клейна, описывающая поворот вокруг оси X_2 на дуальный угол $A_3 = -\pi/2 - sh_3$.

Резльтирующая матрица дуальных параметров Кейли-Клейна для третьего звена имеет вид:

$$Q_{01} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} C \frac{q_3}{2} + iS \frac{q_3}{2} & -iC \frac{q_3}{2} + S \frac{q_3}{2} \\ -iC \frac{q_3}{2} - S \frac{q_3}{2} & C \frac{q_3}{2} - iS \frac{q_3}{2} \end{bmatrix} + \frac{sh_3}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -C \frac{q_3}{2} - iS \frac{q_3}{2} & -iC \frac{q_3}{2} + S \frac{q_3}{2} \\ -iC \frac{q_3}{2} - S \frac{q_3}{2} & -C \frac{q_3}{2} + iS \frac{q_3}{2} \end{bmatrix}$$

Таким образом, результирующая дуальная матрица параметров Кейли-Клейна для первых трех звеньев имеет вид:

$$Q_{03} = Q_{01}Q_{12}Q_{23} = Q_{03} + sQ_{03}^0 = Q_{03} + \frac{s}{2} \begin{bmatrix} \alpha_{03}^0 & \beta_{03}^0 \\ \gamma_{03}^0 & \delta_{03}^0 \end{bmatrix}$$

где

$$Q_{03} = \begin{bmatrix} iS \left(\frac{q_2 + q_3}{2} \right) \left[C \frac{q_1}{2} + iS \frac{q_1}{2} \right] & C \left(\frac{q_2 + q_3}{2} \right) \left[-iC \frac{q_1}{2} + S \frac{q_1}{2} \right] \\ -iC \left(\frac{q_2 + q_3}{2} \right) \left[C \frac{q_1}{2} - iS \frac{q_1}{2} \right] & -iS \left(\frac{q_2 + q_3}{2} \right) \left[C \frac{q_1}{2} - iS \frac{q_1}{2} \right] \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{03}^0 = - \left[h_2 C \left(\frac{q_2 - q_3}{2} \right) + (h_1 + h_3) C \left(\frac{q_2 + q_3}{2} \right) \right] \left[C \frac{q_1}{2} + iS \frac{q_1}{2} \right]$$

$$\beta_{03}^0 = \left[h_2 S \left(\frac{q_2 - q_3}{2} \right) + (-h_1 + h_3) S \left(\frac{q_2 + q_3}{2} \right) \right] \left[C \frac{q_1}{2} + iS \frac{q_1}{2} \right]$$

$$\gamma_{03}^0 = - \left[h_2 S \left(\frac{q_2 - q_3}{2} \right) + (-h_1 + h_3) S \left(\frac{q_2 + q_3}{2} \right) \right] \left[C \frac{q_1}{2} - iS \frac{q_1}{2} \right]$$

$$\delta_{03}^0 = - \left[h_2 C \left(\frac{q_2 - q_3}{2} \right) + (h_1 + h_3) C \left(\frac{q_2 + q_3}{2} \right) \right] \left[C \frac{q_1}{2} - iS \frac{q_1}{2} \right]$$

Таким образом, была решена прямая задача кинематики манипулятора M710-iC семейства fanuc с использованием кватернионов, бикватернионов и их дуальных аналогов. Результаты, полученные разными методами, полностью совпадают для исследуемого манипулятора.

Резюме

В работе приводятся результаты решения прямой задачи кинематики с использованием нетрадиционных кинематических параметров, в частности, таких как кватернионы, бакватернионы, параметры Кейли-Клейна и их дуальные аналоги. Решение выполнено для робота-манипулятора M710-iC семейства Fanuc с шестью вращательными парами.

Литература

1. Аксельрод, Б.В. Описание динамики манипулятора с применением теории винтов / Б.В.Аксельрод // Известия АН СССР. Механика твердого тела.-1985.-№2,-С26-31.
2. Бранец, В.Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский. -М.: Наука, 1973.-320 с.
3. Глазков, В.П. Метод ускоренного умножения кватернионов/В.П.Глазков, С.К.Дауров // Математические методы в технике и технологиях: сб. трудов XII Междунар. науч. конф. - Великий Новгород, 1999.-С.91-94.

Summary

The paper presents the results of the direct kinematics problem using innovative kinematic parameters, in particular, such as quaternions, bakvaterniony, Kaylee-Klein parameters and their dual counterparts. The solution holds for robotic manipulator M710-iC Fanuc family with six rotary pairs.

Поступила в редакцию 16.11.2012

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ НЕУПРУГИХ ИЗГИБАЕМЫХ СТЕРЖНЕЙ НА ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Романова Т.П., Янковский А.П.

*Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

Настоящая работа продолжает исследования, опубликованные автором в [1, 2], где были разработаны численные методы интегрирования динамических задач изгиба стержней при линейно-упругом и упругопластическом поведении их материалов. На практике же часто встречаются ситуации, когда стержень покоится на упругом основании. При этом, как известно [3], разрешающее уравнение качественно отличается от уравнения динамического изгиба стержней, закрепленных лишь на опорах, поэтому актуальной является проблема разработки численных процедур расчета упругопластической динамики стержней на упругом основании. В силу этого данная работа посвящена построению численного алгоритма расчета таких стержней, покоящихся на двухпараметрическом основании [3], и анализу их динамического поведения.

Поперечные колебания рассматриваемых стержней, подчиняющихся гипотезам Бернулли, в предположении о малости прогибов w описываются следующим уравнением движения [2, 3]:

$$R_*(x)w_{,tt}(x, t) = p(x, t) - D(x; w) - k_p(x)w(x, t) + 2t_p(x)w_{,xx}(x, t), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1)$$

где

$$D(x; w) = \left[A(x, w_{,xx}, w_{,xx}^*)w_{,xx} - B(x, w_{,xx}, w_{,xx}^*, w_{,xx}^{**}) \right]_{,xx}, \quad R_*(x) = R(x) + m_0; \quad (2)$$

$$k_p = \frac{E_0 b}{1 - \nu_0^2} \int_0^H \psi'^2(y) dy, \quad t_p = \frac{E_0 b}{4(1 + \nu_0)} \int_0^H \psi^2(y) dy, \quad (3)$$

$$m_0 = \rho_{гр} b \int_0^H \psi^2(y) dy, \quad E_0 = \frac{E_{гр}}{1 - \nu_{гр}^2}, \quad \nu_0 = \frac{\nu_{гр}}{1 - \nu_{гр}};$$

$R(x)$ – погонная масса стержня; b – ширина стержня; $E_{гр}$, $\nu_{гр}$, $\rho_{гр}$ – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и объемная плотность грунта; H – глубина, на которой в грунте полностью рассеивается воздействие, приложенное к его поверхности; k_p – коэффициент постели по Винклеру [3] (первый параметр упругого основания); t_p – второй параметр упругого основания, учитывающий сопротивление грунта сдвигу; m_0 – инерционная характеристика основания; $p(x, t)$ – погонная динамическая поперечная нагрузка; t – время; x – координата вдоль оси стержня длиной l ; ψ – функция поперечного распределения перемещений в основании, которая может иметь разные выражения [3], в настоящем же исследовании будем ее задавать в виде (хотя это и не принципиально)

$$\psi(y) = (H - y)/H; \quad (4)$$

нижний индекс после запятой означает частное дифференцирование по соответствующей переменной t, x . Конкретный вид операторов A, B в (2) зависит от механического состояния материала стержня в сечении x (от наличия лишь упругих или упругопластических деформаций в этом сечении, от наличия разгрузки материала и т. п.). Для стержней прямоугольного поперечного сечения, материал которых имеет линейное упрочнение, выражения для A, B вплоть до состояния третичной знакопеременной пластичности приведены в [2]. (В (1)–(4) использованы те же обозначения, что и в [2, 3].)

Для однозначного интегрирования уравнения (1) к нему необходимо присоединить общеизвестные начальные и граничные условия (см., например, (26)–(29) в [2]).

Для приближенного интегрирования по времени t начально-краевой задачи, соответствующей уравнению (1), используем один из обобщенных методов Рунге – Кутты [4], а именно, метод трапе-

ций. Применяя к уравнению (1) рассуждения (31)–(40) из [2], получим следующий численный алгоритм: в каждый момент времени t_{n+1} прогиб $w^{n+1}(x)$ определяется уравнением

$$\tau^2 D(x; w^{n+1}(x)) - 2\tau^2 t_p w_{,xx}^{n+1}(x) + (4R_*(x) + \tau^2 k_p) w^{n+1}(x) = P_{n+1}(x), \quad (5)$$

где правая часть известна и определяется по рекуррентной формуле (см. (37)–(40) в [2], в которых следует $R(x)$ заменить на $R_*(x)$); τ – шаг интегрирования по времени, возможно, переменный ($t_{n+1} = t_n + \tau$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $t_0 = 0$).

Таким образом, для определения прогиба w^{n+1} в момент времени t_{n+1} необходимо проинтегрировать по x уравнение (5) с известной правой частью при граничных условиях, которые полностью соответствуют граничным условиям исходной начально-краевой задачи. (В частности, в граничных условиях (28), (29) из [2] необходимо заменить w на w^{n+1} .)

После деления на τ^2 уравнение (5) будет формально совпадать с уравнением статического упругопластического изгиба стержня на двухпараметрическом упругом основании с приведенным коэффициентом постели $\bar{k}_p(x) = k_p + 4\tau^{-2}R_*(x)$. Для интегрирования двухточечной граничной задачи, соответствующей уравнению (5), можно использовать известные методы статики (в частности, метод матричной прогонки [2, 5]).

Если в (2), (5) принять $t_p = 0$, $m_0 = 0$ ($R_*(x) \equiv R(x)$), то получим численный алгоритм решения задачи о динамическом изгибе стержня на упругом винклеровском основании [3], не учитывающем сопротивление грунта сдвигу и его инерционную характеристику.

З а м е ч а н и е. При $R_*(x) = 0$ и $p^0 = 0$, $p^1(x) = p(x)$ (см. (39), (40) в [2]) в момент времени $t_1 = \tau$ получаем из (5) решение задачи о статическом изгибе стержня на двухпараметрическом упругом основании под действием распределенной нагрузки $p(x)$.

Таблица 1 – Физико-механические характеристики материалов стержней [5, 6]

Материал	E , ГПа	σ_s , МПа	σ_B , МПа	δ , %	ρ , кг/м ³
Сплав Д16	71	380	520	11	2780
Сталь 45	210	360	610	19	7800

В качестве примеров исследуем статическое и динамическое упругопластическое поведение изгибаемых стержней прямоугольного поперечного сечения из стали 45 и алюминиевого сплава Д16. (Физико-механические характеристики этих материалов приведены в табл. 1.) Ширина $b(x)$ поперечных сечений стержней предполагается постоянной ($b(x) = b = \text{const}$) и одинаковой для всех рассматриваемых ниже конструкций, высота сечений $h(x)$ может быть постоянной ($h(x) = h_* = \text{const}$) или переменной и определяется формулой

$$h(x) = sh_* + \pi \sin(\pi x/l)(1-s)h_*/2 \quad (0 \leq x \leq l, \quad s \geq 0). \quad (6)$$

(При задании высоты сечения стержня в виде (6) его объем при любых s будет равен объему h_*lb эталонного стержня постоянного поперечного сечения. При $0 \leq s < 1$ из (6) следует, что высота концевых сечений стержня меньше, чем центрального сечения; при $s = 1$ получаем балку постоянного сечения высотой h_* .) Длина стержней $l = 3$ м, высота эталонных стержней постоянного сечения $h_* = 0,15$ м. Концы стержней могут быть шарнирно оперты или жестко защемлены. Внешняя распределенная нагрузка является нагрузкой взрывного типа, не зависит от x и затухает по экспоненциальному закону

$$p(x, t) = p(t) = p_0 \exp(-\alpha t), \quad \alpha = 12 \text{ с}^{-1}, \quad t \geq 0, \quad (7)$$

где p_0 – значение погонной нагрузки в начальный момент времени $t = t_0 = 0$, в который стержни находятся в покое. Стержни могут покоиться на песчаном или на гравийном основании. (Физико-механические характеристики этих грунтов приведены в табл. 2.)

Таблица 2 – Физико-механические характеристики упругого основания [8, 9]

Материал	$E_{гр}$, ГПа	$\nu_{гр}$	$\rho_{гр}$, кг/м ³	k_p , МПа/м
Песок	55	0,3	1600	5
Гравий	28	0,25	2600	100

После подстановки (4) в (3) из первого равенства (3) с учетом данных, приведенных в табл. 2, определим неизвестную пока величину H для того или иного типа грунта, а затем из второго и третьего соотношений (3) можно определить дополнительные (недостающие для расчета) характеристики t_p , m_0 этих грунтов.

Будем подбирать максимальные значения p_0 в (7) так, чтобы за характерный период времени $T > 0$, в течение которого исследуется процесс колебаний, напряженное состояние в стержне не превышало некоторого предельного состояния. Через p_s обозначим $\min p_0/b$, при котором напряжение в стержне впервые достигает предела текучести σ_s ; через p_{ss} обозначим $\min p_0/b$, при котором впервые достигается вторичная пластичность; через p_{sss} обозначим $\min p_0/b$, при котором впервые достигается знакопеременная третичная пластичность; через p_b обозначим значение $\min p_0/b$, при котором впервые напряжения достигают предела прочности σ_b (начальное разрушение) до появления третичной пластичности.

В качестве характерного периода T выберем время, в течение которого нагрузка (7) уменьшается в 1000 раз ($T = T_* = -\ln(0,001)/\alpha = 0,576 \text{ с}$). При $t > T_*$ внешняя нагрузка ничтожно мала ($p(t) < 0,001p_0$) и колебания можно считать установившимися.

В расчетах характерный период времени T будем разбивать на 1000 слоев ($\tau = T_*/1000$), а по длине стержня введем 401 узел.

В табл. 3 приведены значения p_s , p_b для стержней, нагруженных статически ($p(x, t) = p_0$,

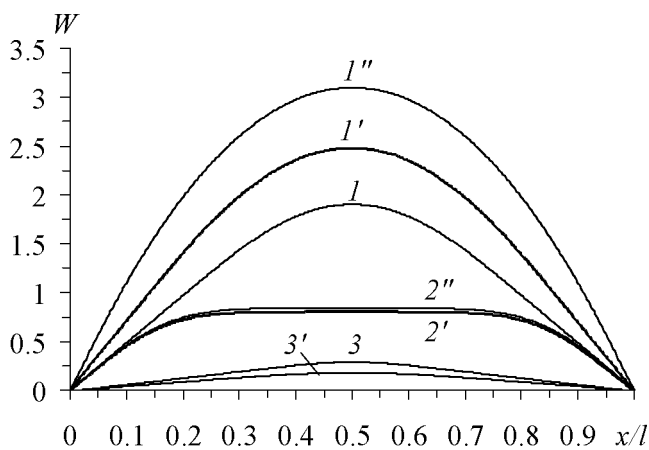


Рисунок 1 – Эпюры безразмерных прогибов

см. замечание), причем рассматриваются стержни постоянной ($s = 1$, см. (6)) или переменной ($s = 0,55$) высоты. Как показано в [2], при $s \approx 0,55$ и задании высоты стержня в виде (6) получаем рациональный, в смысле динамического поведения, шарнирно опертый стержень, не покоящийся на упругом основании. (В табл. 3–5 в числителях приведены результаты расчетов, полученных при использовании винклеровской модели основания ($t_p = 0$, $m_0 = 0$), а в знаменателях – двухпараметрической модели основания ($t_p \neq 0$, $m_0 \neq 0$)).

Так как значения пределов текучести σ_s для обоих рассматриваемых материалов стержней близки (см. табл. 1), то значения p_s для них при $k_p = 0$ также близки (различаются при-

мерно на 6 %, см. табл. 3). Однако при наличии упругого основания ($k_p \neq 0$) различие значений p_s , p_B , полученных для стержней из стали 45 и сплава Д16, становится существенным (эти значения могут различаться в разы, ср., например, значения p_s во втором столбце табл. 3 при $k_p = 100$ МПа/м). Кроме того, если при $k_p = 0$ значения p_s , p_B для стержней с защемленными концами больше тех же величин для шарнирно опертых стержней (как постоянной, так и переменной высоты), то при наличии упругого основания картина может поменяться на противоположную (см., например, в табл. 3 строки, соответствующие $k_p = 100$ МПа/м). Аналогично, рациональное профилирование стержня, полученное без учета работы упругого основания, может оказаться неэффективным при наличии такого основания (см. те же строки в табл. 3).

Таблица 3 – Предельные нагрузки при статическом деформировании балок

k_p , МПа/м	Шарнирное опирание				Жесткая заделка	
	$h = \text{const}$ ($s = 1$)		$h \neq \text{const}$ ($s = 0,55$)		$h = \text{const}$ ($s = 1$)	
	p_s , МПа	p_B , МПа	p_s , МПа	p_B , МПа	p_s , МПа	p_B , МПа
Сталь 45						
0	1,200	2,648	1,748	3,830	1,828	4,725
5	1,287	11,645	1,833	10,378	1,850	5,618
	3,350	275,8	3,990	230,8	2,30	15,20
100	3,017	69,834	3,411	45,976	2,265	16,870
	3,044	73,840	3,437	50,840	2,270	16,920
Алюминиевый сплав Д16						
0	1,266	2,355	1,844	3,429	1,929	4,304
5	1,539	6,693	2,115	7,164	1,999	4,734
	8,270	167,9	8,810	142,0	3,190	10,40
100	7,445	48,531	6,551	31,024	3,227	10,999
	7,540	50,830	6,637	33,590	3,240	11,040

Сопоставление значений, приведенных в числителях и знаменателях в строках табл. 3, соответствующих $k_p = 100$ МПа/м, показывает, что учет второго параметра t_p гравийного основания приводит к незначительному уточнению нагрузок p_s , p_B (не более 10 %); для песчаного же основания ($k_p = 5$ МПа/м) учет второго параметра t_p приводит к существенному (в разы и на порядки) увеличению расчетных значений p_s , p_B , причем для шарнирно опертых стержней значения нагрузки p_B в этом случае уже сопоставимы с напряжениями σ_s , σ_B материала стержня, т. е. в действительности такие стержни уже нельзя рассчитывать на основе теории Бернулли. Следовательно, для определенных типов упругих оснований (например, гравийных) с инженерной точки зрения вполне достаточно проводить расчет по винклеровской модели; для других же оснований (например, песчаных) модель Винклера оказывается недостаточной для проведения адекватных реальности расчетов, в этих случаях требуется использование более точных моделей упругого основания [3] (например, двухпараметрических).

Все эти обстоятельства объясняются особенностями деформирования стержней на упругом основании, которое качественно отличается от деформации таких же стержней, не контактирующих с упругим основанием. Так, на рис. 1 изображены эпюры безразмерных прогибов (формула обезразмеривания приведена в [2]) стержней из стали 45 постоянной высоты ($s = 1$) с учетом и без учета работы упругого основания при уровне нагрузок p_B . Кривые 1, 1', 1'', 2', 2'' соответствуют шарнирно

опертым стержням, а линии 3, 3' – заземленным; кривые 1, 3 получены при отсутствии упругого основания, линии 1', 1'' – при $k_p = 5$ МПа/м, а кривые 2', 2'', 3' – при $k_p = 100$ МПа/м. Линии 1', 2', 3' соответствуют винклеровскому основанию ($t_p = 0$), кривые 1'', 2'' – двухпараметрическому основанию ($t_p \neq 0$). Сравнение кривых на рис. 1 дает наглядное представление о качественно разном деформировании стержней при наличии и отсутствии упругого основания. Поведение кривых 1', 1'' указывает на то, что в шарнирно опертых стержнях, покоящихся на песчаном основании, производная $w'(x)$ на большей части отрезка $0 \leq x \leq l$ может иметь относительно большие по модулю значения, что вызывает значительные сдвиговые деформации в упругом основании, поэтому-то в случае песчаного грунта учет второго параметра основания t_p приводит к существенному уточнению решения по сравнению с винклеровской моделью. Кривые 2', 2'' различаются незначительно, причем для них на большей части отрезка $0 \leq x \leq l$ имеет место $|w'(x)| \approx 0$ (см. центральные горизонтальные участки линий 2', 2''), поэтому сдвиги в соответствующем гравийном основании здесь относительно малы и учет второго параметра t_p основания в этом случае несущественен (основное сопротивление оказывает упругий отпор грунта, определяемый коэффициентом постели k_p), в силу чего для расчета влияния гравийного основания достаточно использовать винклеровскую модель. К аналогичному выводу приводит и поведение кривых 3, 3' на рис. 1.

В табл. 4, 5 приведены предельные значения интенсивности нагрузки p_s , p_{ss} , p_{sss} , p_B для стержней из стали 45 и сплава Д16 соответственно при их динамическом деформировании (см. (7)).

Сравнение значений p_s , приведенных в этих таблицах, с соответствующими значениями в табл. 3, показывает: чтобы при упругом динамическом деформировании стержня достичь начального пластического состояния требуется начальная нагрузка в (7) примерно в два раза меньшая, чем при статическом нагружении. Если ввести понятие динамического коэффициента, то в упругом случае он будет равен примерно двум. Сопоставление же значений p_B в тех же таблицах, показывает, что при упругопластическом деформировании динамический коэффициент резко возрастает и может достигнуть значений 4–10 в зависимости от типа материала стержня и характеристик упругого основания.

Таблица 4 – Предельные нагрузки при динамическом деформировании стержней из стали 45

k_p , МПа/м	p_s , МПа	p_{ss} , МПа	p_{sss} , МПа	p_B , МПа
Шарнирное опирание ($h = \text{const}$, $s = 1$)				
0	0,620	0,890	1,180	2,033
5	0,666 / 1,757	0,943 / 2,209	1,285 / 2,730	2,545 / 27,45
100	1,529 / 1,517	1,982 / 1,971	2,483 / 2,49	17,032 / 17,041
Шарнирное опирание ($h \neq \text{const}$, $s = 0,55$)				
0	0,932	2,449	—	2,643
5	0,981 / 2,19	1,620 / 2,88	2,448 / 3,97	2,985 / 23,01
100	1,777 / 1,798	2,466 / 2,489	4,140 / 4,140	6,951 / 7,936
Жесткая заделка ($h = \text{const}$, $s = 1$)				
0	0,957	1,326	1,709	2,654
5	1,001 / 1,299	1,328 / 1,705	1,808 / 2,197	2,846 / 4,891
100	1,293 / 1,296	1,668 / 1,689	2,085 / 2,186	2,975 / 3,845

Таблица 5 – Предельные нагрузки при динамическом деформировании стержней из сплава Д16

k_p , МПа/м	p_s , МПа	p_{ss} , МПа	p_{sss} , МПа	p_B , МПа
Шарнирное опирание ($h = \text{const}$, $s = 1$)				
0	0,658	0,950	1,296	2,089
5	0,806 / 4,045	1,106 / 4,965	1,455 / 6,265	4,00 / 14,37
100	3,290 / 3,350	4,065 / 4,140	4,950 / 5,205	13,00 / 15,18
Шарнирное опирание ($h \neq \text{const}$, $s = 0,55$)				
0	0,984	1,708	—	2,692
5	1,132 / 4,290	1,721 / 5,320	2,998 / 7,245	6,199 / 15,00
100	3,598 / 3,628	4,729 / 4,820	6,881 / 6,950	10,55 / 10,24
Жесткая заделка ($h = \text{const}$, $s = 1$)				
0	1,008	1,391	—	1,921
5	1,091 / 1,931	1,431 / 2,489	1,960 / 3,219	1,981 / 6,838
100	1,715 / 1,808	2,433 / 2,403	3,288 / 3,238	4,877 / 4,895

Сравнение значений p_s , p_{ss} , p_{sss} , p_B , приведенных в табл. 4, 5, для шарнирно опертых стержней при $k_p = 0$ и $s = 1$ показывает, что соответствующие значения для стержней из двух рассматриваемых материалов близки. Однако при наличии упругого основания картина резко меняется. Так, для тех же стержней при $k_p = 100$ МПа/м предельные значения p_s , p_{ss} , p_{sss} для стержня из сплава Д16 примерно вдвое больше, чем для стержня из стали 45, а значение p_B , наоборот, меньше.

Согласно [2], рациональное значение $s = 0,55$ в (6) для профилированных стержней было получено без учета работы упругого основания. Если таким образом профилированные стержни контактируют с упругим основанием, то эффективность их работы может резко снизиться. Так, из табл. 4 видно, что для случая $s = 0,55$ значения p_B , полученные при $k_p \neq 0$, оказались существенно меньше аналогичных величин, рассчитанных для случая шарнирного опирания при $s = 1$. Следовательно, и при динамическом нагружении стержни, рационально спроектированные без учета работы упругого основания, могут оказаться малоэффективными при наличии такого основания.

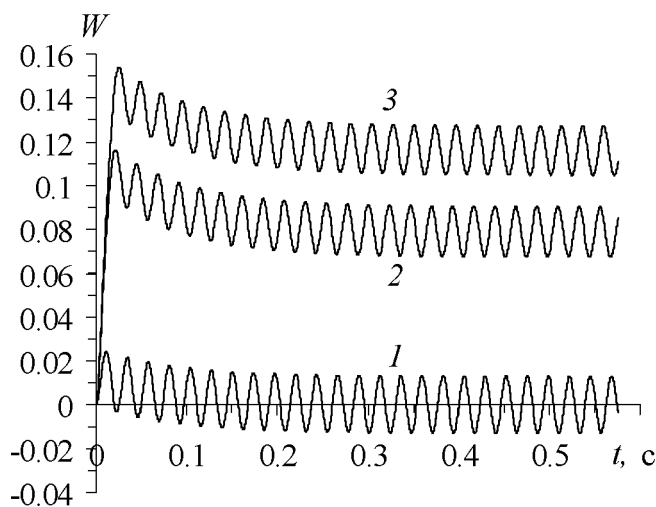


Рисунок 2 – Колебания центральных сечений балок без учета упругого основания

При уровнях нагрузок p_{ss} и p_{sss} максимальные по модулю деформации ε в стержнях примерно вдвое превышают значения соответствующих предельных упругих деформаций $\varepsilon_s = \sigma_s / E$, а при уровнях нагрузок p_B отношение $\max|\varepsilon|/\varepsilon_s$ составляет 21,94 для стержней из сплава Д16 и 112,6 для стержней из стали 45, что дает определенное количественное представление о степени развития пластических деформаций в рассматриваемых стержнях при их динамическом поведении.

Сопоставление значений, приведенных в знаменателях и числителях табл. 4, 5, показывает, что, как и в табл. 3, учет второго параметра t_p при моделировании работы песчаного основания дает существенные поправки при определении предельных динамических значений

нагрузок p_s , p_{ss} , p_{sss} , p_B по сравнению со случаем модели Винклера; в случае же гравийного основания эти поправки, как правило, незначительны.

Помимо количественного наблюдается и качественное различие динамического поведения стержней на упругом винклеровском и двухпараметрическом основаниях. Так, на рис. 2, 3 изображены кривые, характеризующие движение (прогиб безразмерен, см. [2]) во времени центральных сечений ($x = l/2$) профилированных стержней ($s = 0,55$) из стали 45 без учета работы упругого основания (рис. 2) и при наличии упругого основания с разными характеристиками (рис. 3).

На рис. 2 кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям p_s, p_{ss}, p_B (см. табл. 4). Поведение кривой 1 указывает на то, что после снижения динамической нагрузки начальной интенсивности bp_s до значений $p(t) < 0,01bp_s$ стержень колеблется в окрестности нулевого (начального) положения, а линии 2, 3 свидетельствуют о колебаниях в окрестности новых положений (отличных от нулевого), характеризующихся накопленными остаточными прогибами.

На рис. 3, а кривые получены для случая винклеровского основания ($t_p = 0$) с характеристиками $k_p = 100$ МПа/м (линии 1, 2) и $k_p = 5$ МПа/м (кривая 3), причем линия 1 рассчитана при уровне динамической нагрузки p_s , а кривые 2, 3 – при p_{sss} (см. табл. 4). Согласно поведению кривой 1 на этом рисунке, после снижения динамической нагрузки начальной интенсивности bp_s до значений $p(t) < 0,01bp_s$ стержень вновь колеблется в окрестности нулевого положения, а поведение линий 2, 3 указывает на наличие остаточных прогибов, которые, как и следовало ожидать, в случае $k_p = 5$ МПа/м (кривая 3) больше, чем при $k_p = 100$ МПа/м (линия 2), что обусловлено меньшим значением коэффициента постели, т. е. меньшей жесткостью основания.

Частота колебаний стержней, соответствующих кривым 1, 2 на рис. 3, а, больше, чем в случаях, соответствующих линиям на рис. 2, что также обусловлено большей жесткостью системы стержень – основание (рис. 3, а) по сравнению с системой, состоящей только из стержня (рис. 2). Однако в рамках винклеровской модели не учитывается не только сопротивление основания сдвигу ($t_p = 0$), но и его инерционные свойства ($m_0 = 0$), поэтому-то расчет на базе этой модели может оказаться неадекватным и количественно, и качественно. Действительно, на рис. 3, б приведены результаты расчетов динамического поведения того же стержня на двухпараметрическом песчаном основании ($k_p = 5$ МПа/м, $t_p \neq 0$, $m_0 \neq 0$). Кривые 1, 2, 3 на этом рисунке рассчитаны при интенсивностях нагрузки p_s, p_{ss}, p_{sss} соответственно (см. табл. 4). Сравнение кривых 3 на рис. 3а, б, построенных при одних и тех же условиях, но при использовании разных моделей основания, показывает, что, по

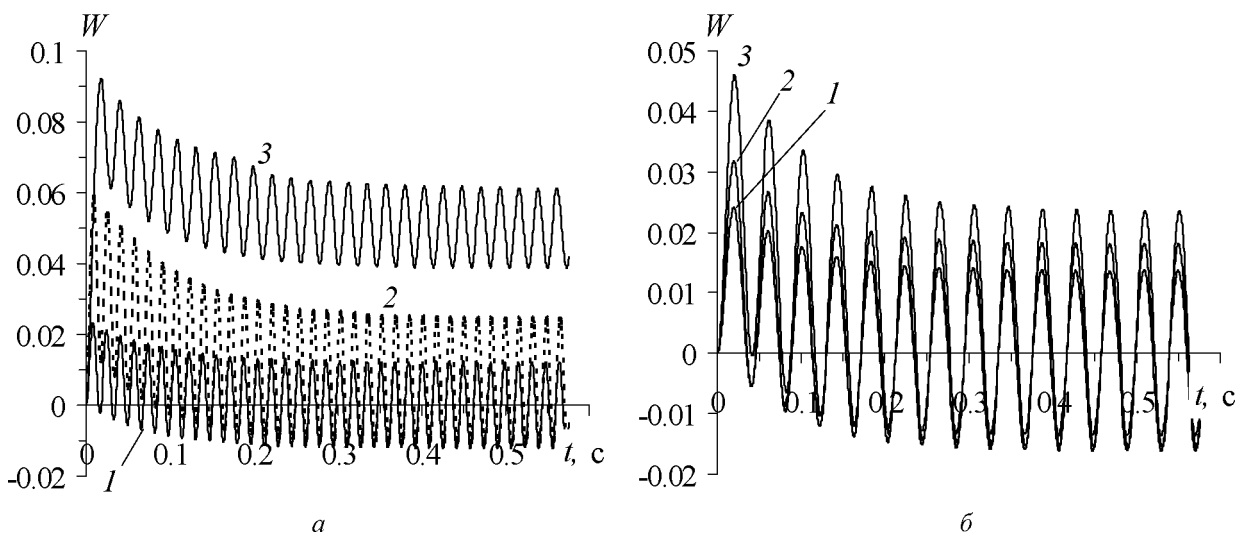


Рисунок 3 – Колебания центральных сечений балок на упругом основании

крайней мере для песчаного грунта, использование уточненной модели поведения упругого основания (рис. 3б) приводит к существенному уменьшению величины остаточных прогибов, увеличению

амплитуды колебаний и снижению частоты колебаний, которая, в отличие от рис. 3, а, меньше, чем при колебаниях стержня без упругого основания (рис. 2).

Таким образом, проведенные расчеты показывают, что недопустимо переносить результаты исследований о статическом и динамическом поведении стержней, полученные без учета работы упругого основания, на аналогичное поведение стержней, контактирующих с упругим основанием. Для некоторых типов упругих оснований (например, песчаных) использование винклеровской модели приводит к результатам, существенно отличающимся от полученных на базе более точной двухпараметрической модели основания. Для определенных типов грунтов (например, гравийных) использование винклеровской модели может быть вполне приемлемым. Кроме того, специфику поведения стержней при их упругом деформировании нельзя распространять и на их поведение при упругопластическом изгибе, особенно в состояниях, близких к предразрушению.

• Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00121-а).

Литература

1. Немировский, Ю.В. Эффективный метод расчета поперечно изгибаемых балок при динамических нагрузках и сейсмических колебаниях / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Известия вузов. Строительство. – 2007. – № 1. – С. 21–32.
2. Немировский, Ю.В. Интегрирование задачи динамического упругопластического изгиба армированных стержней переменного поперечного сечения обобщенными методами Рунге – Кутты / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Вычислительные технологии. – 2004. – Т. 9, № 4. – С. 77–95.
3. Власов, В.З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. – М.: Физматгиз, 1960. – 492 с.
4. Немировский, Ю.В. Обобщение методов Рунге – Кутты и их применение к интегрированию начально-краевых задач математической физики / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2005. – Т. 8, № 1. – С. 57–76.
5. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
6. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. Д. М. Карпиноса. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
7. Феодосьев, В.И. Соппротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1986. – 516 с.
8. Грунтоведение / Трофимов В.Т., Королев В.А., Вознесенский Е.А., Голодковская Г.А., Васильчук Ю.К., Зиангиров Р.С. Под ред. В.Т. Трофимова. – М.: Изд-во МГУ, 2005. – 1024 с.
9. Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений. Расчетно-теоретический. В 2-х кн. Кн. 1./Под ред. А.А.Уманского. – М.: Стройиздат, 1972. – 600с.

Summary

The problem of elasto-plastic dynamic bending rods on an elastic two-parameter basis is formulated. The method of numerical integration of the problem, based on a generalization of the Runge – Kutta method, is designed. The efficiency of the proposed numerical procedure is demonstrated by the calculations of inelastic dynamics of the isotropic bars with uniform and variable cross section. The analysis of the received results is made.

Поступила в редакцию 12.11.2012

ОПТИМИЗАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ДРОБЛЕНИЯ КАЛИЙНЫХ РУД

¹Василевич Ю.В., ¹Шпургалова М.Ю., ²Сапешко В.В.¹ УО «Белорусский национальный технический университет», Минск²ОАО «Белгорхимпром», Минск

Развитие компьютерных технологий оценки показателей технических процессов позволяет достаточно точно предсказать исход процесса, который поддается формализационному описанию.

В данной статье изложена задача разработанная компьютерная модель, позволяющая достаточно полно учесть основные технико-экономические характеристики процесса дробления калийных руд, что в конечном счёте, позволяет достичь наибольшей экономичности процесса.

Как установлено в работе [1] большинство прикладных оптимизационных задач промышленного производства могут быть формализованы в классическом представлении в виде:

$$\begin{cases} F_j(\bar{X}_N, \bar{A}, t) \rightarrow \text{extr} \\ \Phi_r(\bar{X}_N, \bar{A}, t) \leq 0 \quad r \in [1, R] \\ Q_s(\bar{X}_N, \bar{A}, t) = 0 \quad s = [1, S] \\ \bar{X}_N \in \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \\ x_i \in [x_{i \min}, x_{i \max}], i \in [1, N] \\ \bar{A} \in \{a_1, a_2, \dots, a_A\} \end{cases} \quad (1)$$

Выражение $F_j(\bar{X}_N, \bar{A})$ формализует достижение экстремальных значений критериями задачи; $\Phi_r(\bar{X}_N, \bar{A})$ и $Q_s(\bar{X}_N, \bar{A})$ соответственно R ограничений и S условий, которым должны удовлетворять переменные параметры модели. Параметр t указывает на то, что модель является динамической. \bar{X}_N неизвестные переменные, полно и однозначно характеризующие процесс дробления. Следует отметить, что формализованная в виде (1) модель является достаточно универсальной и описывает широкий круг практических задач.

Определим переменные, входящие в целевую функцию и ограничения, применительно к исследуемому процессу дробления калийных руд. В исходных данных целесообразно выделить следующие классы.

Первая группа переменных характеризует физико-механические свойства руды: γ – плотность (кг/м^3); l_{cp} – средний размер структурного образца, поступающего на дробление (мм); $\sigma_{\text{сж}}$ – предел прочности на сжатие (МПа); σ_p – предел прочности на растяжение (МПа); A – показатель абразивности руды; R_5 – процентное содержание класса +5мм; α_1 – процентное содержание класса –1мм; ν – коэффициент Пуассона.

Вторая группа переменных характеризует режим процесса дробления: k_u – коэффициент использования оборудования во времени за смену; $n_{\text{ссм}}$ – число рабочих смен; d_{cp} – средний диаметр кусков дробленой руды, по которому рассчитываются параметры дробления (м); K_d – число вариантов расчётов, которые нужно сделать при различных d_{cp} .

Третья группа переменных характеризует технические и экономические показатели дробильных установок: n – количество оборотов ротора дробилки; b – величина нагрузки (т/час); I – потребляемый ток (мощность) (кВт).

Преобразуем выражение (1) для установления зависимости между технико-экономическими показателями дробления калийной руды. Для построения аналитического вида целевой функции и ограничений нашей задачи были проанализированы экспериментальные данные работы молотковой дробилки СМ-170В при дроблении калийной руды на 4 рудоуправлении ОАО «Беларуськалий». Эти данные были взяты из отчёта о НИР [3]. Рассматривались экспериментальные данные следующего характера: измерялся потребляемый ток электродвигателя дробилки в зависимости от нагрузки по

руде для различных значений количества оборотов двигателя установки. Экспериментальные данные представлены в таблице:

Таблица 1 – Экспериментальные данные испытаний дробилки СМ-170В на 4 РУ

Количество оборотов ротора дробилки	Исходная нагрузка по руде	Содержание класса +5 мм в готовом дробленом продукте	Содержание класса -1 мм в готовом дробленом продукте	Потребляемый ток двигателя дробилки	Потребляемая мощность дробилки	Удельная потребляемая мощность дробилки
n , об/мин	b , т/ч	R_5 , %	α_1 , %	I , А	N , кВт·ч	η , кВт·ч/т
350	178	14,1	38,4	160	60,8	0,34
	333	21,9	31,3	210	79,8	0,24
	681	30,0	35,7	380	144,4	0,21
450	205	14,5	34,6	200	76	0,37
	392	17,2	36,1	250	95	0,24
	546	25,0	32,5	380	144,4	0,26
550	272	13,2	40,5	210	79,8	0,29
	427	15,7	39,3	290	110,2	0,26
	414	12,6	40,9	380	144,4	0,35
650	284	9,9	44,4	220	83,6	0,29
	362	10,9	42,2	260	98,8	0,27
	356	10,8	43,3	380	144,4	0,41
750	383	10,6	43,9	320	121,6	0,32
	467	8,6	45,7	380	144,4	0,31

Считая напряжение двигателя дробилки примерно постоянным, $U = \text{const} = 380$ В, рассчитаем значения мощности $N = \frac{380 \cdot I}{1000}$ кВт и удельной потребляемой мощности дробилки $\eta = \frac{N}{B}$ кВт·ч/т

Находим вид зависимости между удельной потребляемой мощностью η и исходной нагрузкой с помощью пакета Excel для вычислений по следующему алгоритму:

1. Строим график зависимости между исходными данными (функция «Графики» → «Точечная диаграмма»).
2. Добавляем на полученный график линию тренда – линию, аппроксимирующую исходную функцию к одной из шаблонных зависимостей, включенных в пакет Excel: экспоненциальной, линейной, логарифмической, полиномиальной или степенной.
3. Рассчитываем при помощи встроенных в Excel функций коэффициент корреляции полученной функции и выбираем из них ту, которая наиболее точно описывает соответствие между исходными параметрами (иными словами имеет коэффициент корреляции наиболее близкий к единице).

Ниже дан пример установления наиболее точной зависимости между параметрами, описывающими процесс дробления калийной руды для количества оборотов ротора $n = 350$:

Таблица 2 – Зависимость удельной потребляемой мощности η от исходной нагрузки b

Исходная нагрузка, b , т/ч	Удельная потребляемая мощность двигателя, η , кВт·ч/т
178	0,34
250	0,27
333	0,24
500	0,21
557	0,21
681	0,21

Таблица 3 – Подбор эмпирической формулы для определения зависимости между удельной потребляемой мощностью и исходной нагрузкой дробилки

Вид эмпирической зависимости	Формула	Коэффициент корреляции
Линейная	$y = 0,000001x + 0,344$	0,750
Экспоненциальная	$y = 0,353e^{0,000001x}$	0,791
Логарифмическая	$y = 0,09\ln(x) + 0,806$	0,882
Степенная	$y = 2,029x^{-0,35}$	0,912
Полиномиальная	$y = 0,000001x^2 + 0,000994x + 0,476731$	0,961

Поскольку наибольший коэффициент корреляции имеет квадратическая (полиномиальная) функция, то выбирается зависимость следующего вида:

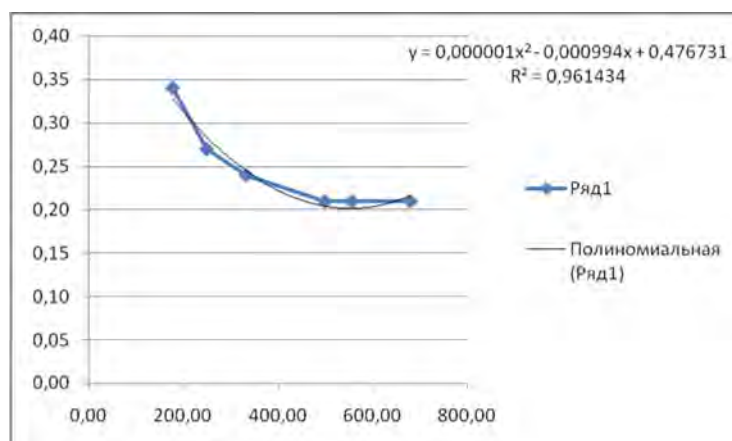


Рисунок 1 – График, выражающий квадратическую зависимость удельной потребляемой мощности от исходной нагрузки

Далее аналогичным образом установим зависимости между исходной нагрузкой и удельной потребляемой мощностью для оборотов ротора равных соответственно 450, 550, 650, 750:

$$\eta(b, n) = \begin{cases} 0,000001b^2 - 0,000994b + 0,476731, & n = 350 \\ 0,000002b^2 - 0,002139b + 0,706946, & n = 450 \\ -0,000047b^2 + 0,032774b - 5,136319, & n = 550 \\ -0,000321b^2 + 0,207427b - 32,688454, & n = 650 \end{cases}$$

Задача состоит в том, что требуется для каждого числа оборотов ротора n найти оптимальные (минимальные) значения удельной потребляемой мощности η при заданных ограничениях. Нахождение оптимальных точек велось с помощью встроенных функций пакета Excel.

Таблица 4 – Оптимальные значения нагрузки для различных оборотов ротора дробилки

Количество оборотов ротора, об/мин	Оптимальная нагрузка, т/ч	Минимальная удельная потребляемая мощность, кВт·ч/т
350	681,00	0,158
450	534,75	0,135
550	427,00	0,258
650	362,00	0,335

Литература

1. Шпургалов, Ю.А. Компьютерное моделирование принятия решений в производственных задачах: монография/ Ю.А. Шпургалов. – Минск: БНТУ, 2009. – 217 с.
2. Выполнить исследования и провести опытно-промышленные испытания замкнутого цикла дробления калийной руды на 4 РУ с использованием различных типов дробилок и модернизированного грохота ГИТ-71М с целью улучшения грансостава дробленого продукта: отчет о НИР/ОАО «Белгорхимпром»; рук. В.В Сапешко. – Минск, 2007. – 56 с. - №ГР 400.В.2005-2006.

Summary

Based on the experimental data the analytic functions that describe the relationship between the main parameters of the crushing process of potash ores. The optimal values of the original load at minimum specific power consumption for different rotor speed grinder. Comparing the optimal values with the experimental data, we conclude that the model adequately and accurately describe the process of fragmentation and can be further incorporated into the automated process control systems.

Поступила в редакцию 13.11.2012

ГРАНИЧНОЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ

Мармыш Д.Е.

УО «Белорусский государственный университет», Минск

Введение. Численно-аналитический метод граничных элементов (МГЭ) является эффективным методом решения задач теории упругости. При граничноэлементном моделировании размерность задачи уменьшается на единицу, что позволяет уменьшить порядок системы разрешающих алгебраических уравнений и повысить точность. Кроме того, предварительное аналитическое вычисление интегралов от фундаментальных решений для распределенных по граничному элементу усилий, позволяет провести распараллеливание вычислений.

Эффективность численно-аналитического варианта МГЭ особенно хорошо отражается при получении компонент напряженно-деформированного состояния в области приложения нагрузки.

Постановка задачи. Рассмотрим балку длиной $3a$ и высотой h , жестко закрепленную по обоим концам (см. рис.1). По верхней границе балки на отрезке $x \in [a, 2a]$ действует равномерно распределенная нормальная нагрузка p_0 .

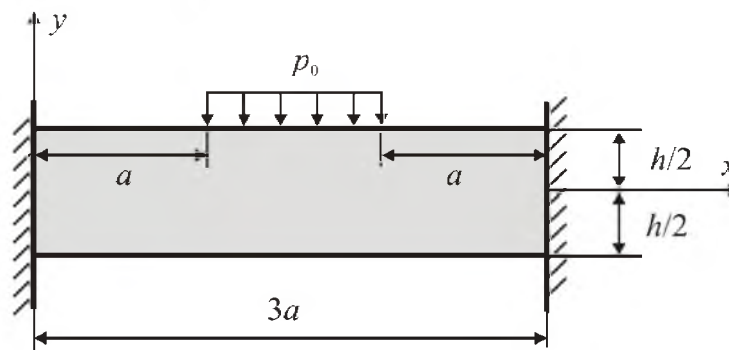


Рисунок 1 – Закрепленная жестко по обоим концам балка

Поставленной задаче соответствуют следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}
 y_y \Big|_{y=\frac{h}{2}} &= \begin{cases} -p_0, & x \in [a, 2a], \\ 0, & x \notin [a, 2a], \end{cases} \\
 u_x \Big|_{x=0} &= u_y \Big|_{x=3a} = 0, \\
 u_x \Big|_{x=0} &= u_y \Big|_{x=3a} = 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Аналитический расчет. Балка, показанная на рис. 1, может быть рассчитана известными методами теории упругости [1]. На рис. 2 представлена эпюра изгибающих моментов.

Уравнение линий, определяющих величину момента на верхней границе балки на каждом из трех участков, определяется следующим образом:

$$M(x) = \begin{cases} \frac{pa}{36}(18x - 13a), & 0 \leq x \leq a, \\ -\frac{P}{36}(18x^2 - 54ax + 31a^2), & a < x \leq 2a, \\ \frac{pa}{36}(41a - 18x), & 2a < x \leq 3a. \end{cases} \tag{2}$$

Учитывая, что в каждом сечении балки при изгибе нормальное напряжение $y_x(y)$ изменяется линейно, то, принимая единичной толщину балки при определении момента сопротивления сечения балки, в фиксированном сечении нормальное напряжение $y_x(y)$ определяется по формуле

$$y_x(y) = \frac{2M(x)}{h}y \quad (3)$$

Подставляя в (3) выражения (2), получим формулы для определения нормального напряжения y_x в каждой точке балки

$$y_x(x, y) = \begin{cases} \frac{pa}{18h}(18x - 13a)y, & 0 \leq x \leq a, \\ -\frac{P}{18h}(18x^2 - 54ax + 31a^2)y, & a < x \leq 2a, \\ \frac{pa}{18h}(41a - 18x)y, & 2a < x \leq 3a. \end{cases} \quad (4)$$

На рис. 3 представлена картина распределения знакопеременных нормальных напряжения y_x , построенная по формулам (4).

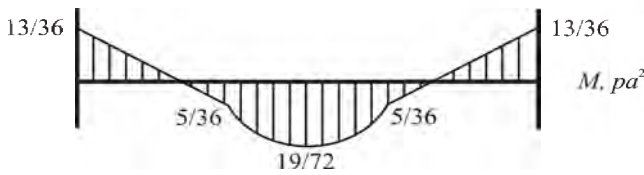


Рисунок 2 – Эпюра изгибающих моментов

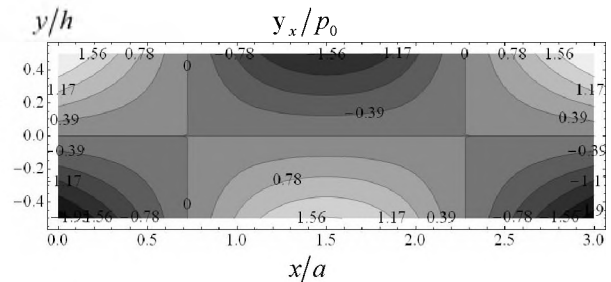


Рисунок 3 – Картина распределения напряжения y_x

Граничноэлементное моделирование. Процедура получения фундаментальных решений для распределенной нагрузки представлена в работе [2]. Для решений задачи (1) воспользуемся фундаментальным решением задачи Кельвина для плоскости в перемещениях и напряжениях [3] в случае действия сосредоточенных нормальной и касательной к некоторой линии в плоскости сил в перемещениях и напряжениях:

$$\begin{aligned} u_1^{(n)} &= p_n G_1^{(n,u)} = -\frac{p_n x_2}{2\mu} \Theta_1^K, \\ u_2^{(n)} &= p_n G_2^{(n,u)} = \frac{p_n}{2\mu} \left[(3 - 4\nu) \Theta_3^K - x_2 \Theta_2^K \right], \\ u_1^{(\tau)} &= p_\tau G_1^{(\tau,u)} = \frac{p_\tau}{2\mu} \left[(3 - 4\nu) \Theta_3^K + x_2 \Theta_2^K \right], \\ u_2^{(\tau)} &= p_\tau G_2^{(\tau,u)} = -\frac{p_\tau x_2}{2\mu} \Theta_1^K, \\ \sigma_{11}^{(q)} &= p_q G_{ij}^{(q,\sigma)} = p_q \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial G_1^{(q,u)}}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial G_2^{(q,u)}}{\partial x_2} \right], \\ \sigma_{22}^{(q)} &= p_q G_{ij}^{(q,\sigma)} = p_q \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial G_2^{(q,u)}}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial G_1^{(q,u)}}{\partial x_1} \right], \\ \sigma_{12}^{(q)} &= p_q G_{ij}^{(q,\sigma)} = p_q \mu \left(\frac{\partial G_1^{(q,u)}}{\partial x_2} - \frac{\partial G_2^{(q,u)}}{\partial x_1} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где $q = n, \phi$, $G_{ij}^{(n,\sigma)}$, $G_{ij}^{(\tau,\sigma)}$, $G_i^{(n,u)}$, $G_i^{(\tau,u)}$ – функции влияния и

$$\begin{aligned}\Theta_1^K &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[a_x \ln(a_x^2 + x_2^2) - b_x \ln(b_x^2 + x_2^2) \right], \\ \Theta_2^K &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\text{arctg}(b_x, x_2) - \text{arctg}(a_x, x_2) \right], \\ \Theta_3^K &= \Theta_1^K + \frac{x_2}{2} \Theta_2^K,\end{aligned}\quad (6)$$

где $a_x = x_1 - a$, $b_x = x_1 + a$.

Суперпозиция решений (5) с учетом (6) позволяет решать задачу для любого распределения усилий в пространстве. Условие нулевых напряжений на бесконечности выполняются автоматически, поскольку они выполняются для решений о действии сосредоточенной силы.

При граничноэлементном моделировании балки воспользуемся методологией и подходами, изложенными в [4,5].

Пусть $O^{lk}x_1^{lk}x_2^{lk}$ и $O^{ly}x_1^{ly}x_2^{ly}$ локальные системы координат связанные с граничными элементами κ и γ l -го тела и $a_{ij}^{ly\kappa} = \cos(x_i^{ly}x_j^{lk})$. Перемещения и напряжения в центре элемента γ O^{ly} в координатах x^{lk} , связанных с элементом κ будут следующими:

$$\begin{aligned}u_i^{lk} \left[O^{ly} \left(x^{lk} \right) \right] &= p_n^{lk} G_i^{(n,u)} \left[O^{ly} \left(x^{lk} \right) \right] + p_\tau^{lk} G_i^{(\tau,u)} \left[O^{ly} \left(x^{lk} \right) \right], \\ \sigma_{ij}^{lk} \left[O^{ly} \left(x^{lk} \right) \right] &= p_n^{lk} G_{ij}^{(n,\sigma)} \left[O^{ly} \left(x^{lk} \right) \right] + p_\tau^{lk} G_{ij}^{(\tau,\sigma)} \left[O^{ly} \left(x^{lk} \right) \right],\end{aligned}\quad (7)$$

где $l = 1, 2, 3$, $i = 1, 2$, N^l – количество граничных элементов.

Тогда граничные условия (1) для центра элемента γ в своих координатах x^{ly} с учетом (7) примут вид

$$u_i^{ly} \left[O^{ly} \left(x^{ly} \right) \right] = u_i^{ly} [0] = \sum_{\kappa=1}^{N^l} \sum_{j=1}^2 a_{ij}^{ly\kappa} u_j^{lk} \left[O^{ly} \left(x^{lk} \right) \right] = 0,\quad (8)$$

$$\sigma_{i2}^{ly} \left[O^{ly} \left(x^{ly} \right) \right] = \sigma_{i2}^{ly} [0] = \sum_{\kappa=1}^{N^l} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 a_{i\alpha}^{ly\kappa} a_{2\beta}^{ly\kappa} \sigma_{\alpha\beta}^{lk} \left[O^{ly} \left(x^{lk} \right) \right] = p_{i2}^{ly},$$

где $\gamma = 1, N_1^l$; $i, \alpha, \beta = 1, 2$, $p_{22}^{ly} = p_n^{ly}$, $p_{12}^{ly} = p_\tau^{ly}$, N_1^l – количество граничных элементов вне областей контактного взаимодействия.

Решение системы (8) относительно неизвестных $p_n^{lk} = p_{22}^{lk}$, $p_\tau^{lk} = p_{12}^{lk}$ позволяет определить контактные граничные условия и граничные условия в напряжениях, соответствующие условиям в перемещениях.

Пусть Ox_1x_2 глобальная система координат и $a_{ij}^k = \cos(x_i x_j^k)$. Тогда перемещения и напряжения в некоторой точке глобальной системы координат $M(x^k)$ в соответствии с (8) будут следующими:

$$\begin{aligned}u_i^l \left[M(\mathbf{x}) \right] &= \sum_{\kappa=1}^{N^l} a_{ij}^k \left\{ p_n^{lk} G_j^{(n,u)} \left[M(x^{lk}) \right] + p_\tau^{lk} G_j^{(\tau,u)} \left[M(x^{lk}) \right] \right\}, \\ \sigma_{ij}^l \left[M(\mathbf{x}) \right] &= \sum_{\kappa=1}^{N^l} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 a_{i\alpha}^k a_{j\beta}^k \left\{ p_n^{lk} G_{\alpha\beta}^{(n,\sigma)} \left[M(x^{lk}) \right] + p_\tau^{lk} G_{\alpha\beta}^{(\tau,\sigma)} \left[M(x^{lk}) \right] \right\}.\end{aligned}$$

На рис. 4 и 5 показаны картины распределения полей напряжений и перемещений возникающих в балке (E – модуль упругости).

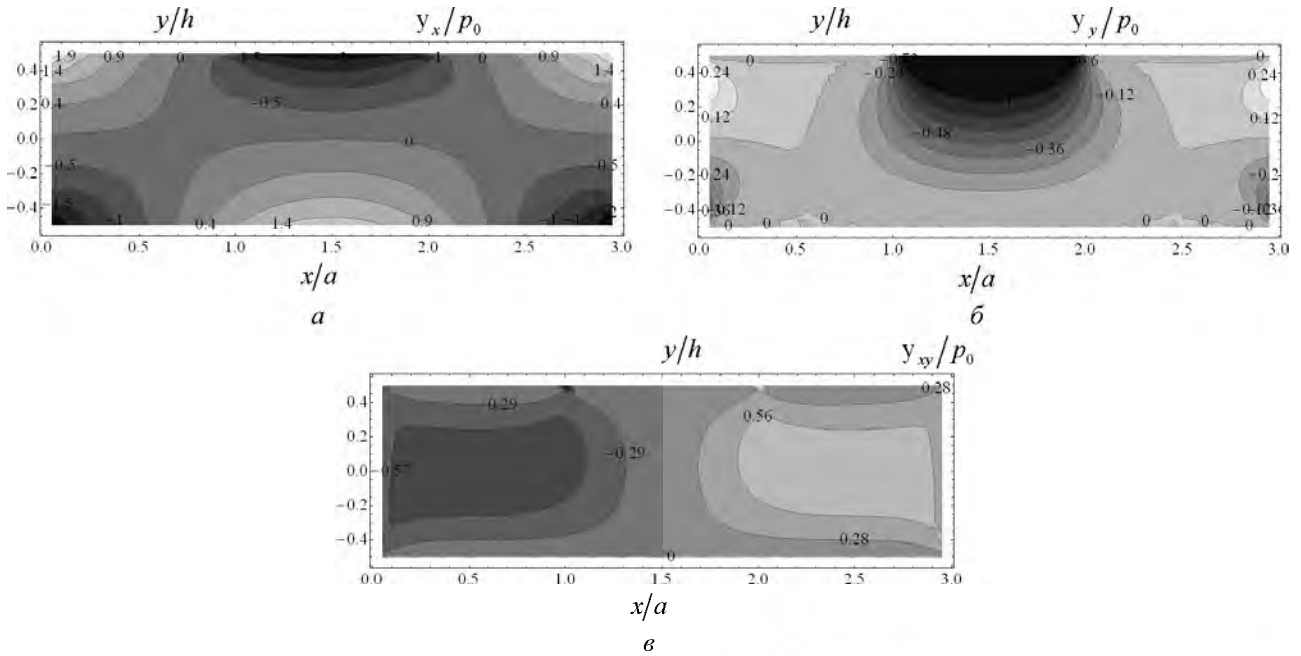


Рисунок 4 – Картины распределения нормальных напряжений а) y_x и б) y_y касательного напряжения y_{xy}

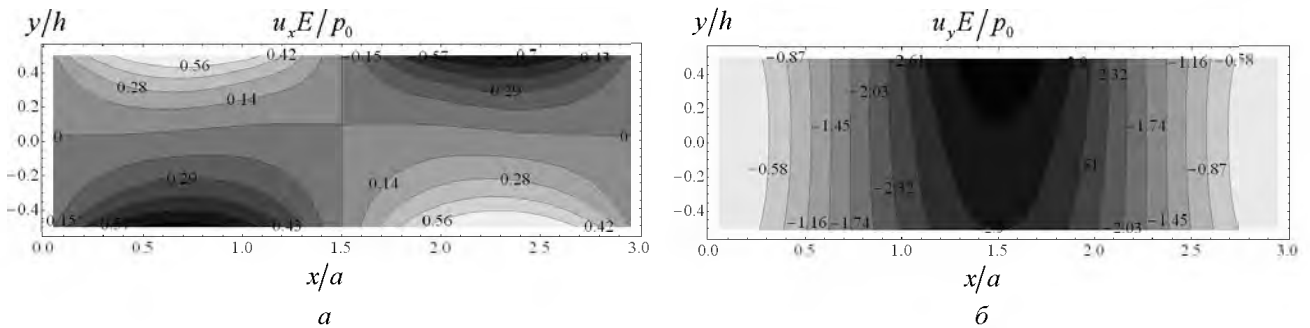


Рисунок 5 – Картины распределения перемещений а) u_x и б) u_y

Проведем сравнение распределений напряжений, полученных обоими методами. На рис. 6 показаны распределения нормальных напряжений y_x , полученных при граничноэлементном моделировании (штриховая линия) и аналитически (сплошная линия).

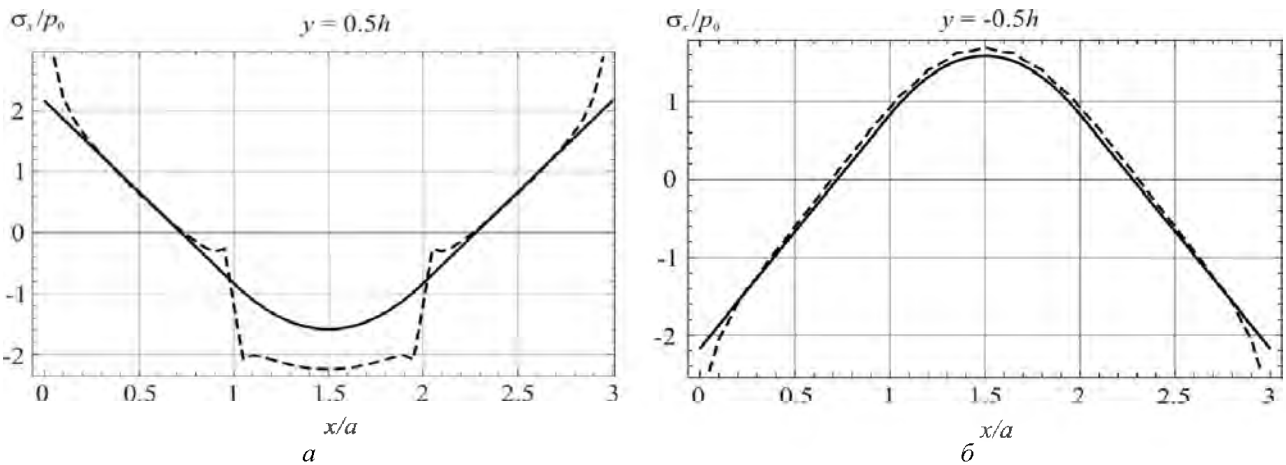


Рисунок 6 – Сравнение нормального напряжения y_x на а) верхней границе бруса и б) нижней.

На рис. 6а видно расхождение результатов в области приложения нагрузки и на концах, где балка жестко закреплена. Данный эффект обусловлен неточностью аналитического решения в окрестности приложения граничных, обусловленной особенностями теории плоского изгиба балки. Анализ рис. 6б показывает хорошее соответствие результатов граничноэлементного моделирования аналитическому решению на нижней поверхности балки, находящейся на удалении от приложенной нагрузки.

Таким образом, полученное методом аналитических граничных элементов решение позволяет проводить более детальный анализ влияния нагрузки на напряженное состояние балки в окрестности ее приложения, а не только на некотором удалении.

Резюме

Проведено исследование напряженно-деформированного состояния балки жестко закрепленной по обоим концам. Решения построены на основе методов сопротивления материалов и с помощью численно-аналитического метода граничных элементов. Проведено сравнение полученных решений. Описаны особенности распределения полей напряжений в балке при аналитическом и численном моделировании.

Литература

1. Горшков, А.Г. Сопротивление материалов: учеб. пос. / А.Г. Горшков, В.Н. Трошин, В.И. Шалашин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 544 с.
2. Мармыш, Д.Е. Моделирование напряжений в полуплоскости при действии распределенной нагрузки методом граничных элементов. Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник. Вып. 27. Мн.: БНТУ, 2012. – 374 с. С. 285 – 289.
3. Журавков, М.А. Фундаментальные решения теории упругости и некоторые их применения в геомеханике, механике грунтов и оснований: курс лекций / М.А. Журавков. – Минск: БГУ, 2008. – 247 с.
4. Щербаков, С.С. Напряженно-деформируемое состояние трибофатической системы прижим-нож-опора режущего инструмента комбайна с учетом контактного взаимодействия / С.С. Щербаков, А.В. Круподеров, Д.Е. Мармыш // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: зб. наук. праць / ред. кол.: А.П. Дзюба (відп. ред.) та ін. – Дніпропетровськ: Ліра, 2012. – Вип. 13. – С. 438–443.
5. Бенерджи, П. Методы граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М.: Мир, 1984. – 494 с.

Summary

The investigation of the stress-strain state of the beam rigidly fixed at both ends. Solutions are based on the strength of materials and methods of using the numerical-analytic method of boundary elements. A comparison of the solutions obtained. The features of the field distribution of stresses in the beam at the analytical and numerical simulation.

Поступила в редакцию 28.11.2012

КИНЕТОСТАТИЧЕСКИЙ СИЛОВОЙ АНАЛИЗ МАНИПУЛЯТОРА С 4 СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Анципорович П.П., Акулич В.К., Дубовская Е.М.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Задачами силового анализа манипулятора являются определение динамических нагрузок в кинематических парах (реактивных сил и моментов), а также движущих (управляющих) сил и моментов приводных двигателей, необходимых для осуществления программного движения (движения схвата вдоль заданной траектории по заданному закону).

Схема манипулятора $B//P \perp P \perp B$ показана на рис. 1. С каждым звеном связана правая система координат: $x_0 y_0 z_0$ – неподвижная; $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$ и $x_4 y_4 z_4$ – подвижные. Оси y_3 и y_1 параллельны, оси x_3 , x_2 , x_1 также параллельны. Обобщенные координаты: φ_{10} – угол поворота звена 1 относительно звена 0 вокруг оси z_0 ; S_{21} – линейное перемещение звена 2 относительно звена 1 вдоль оси z_1 ; S_{32} – линейное перемещение звена 3 относительно звена 2 вдоль оси x_3 ; φ_{43} – угол поворота звена 4 относительно звена 3 вокруг оси y_3 . Положительный отсчет углов – против часовой стрелки.

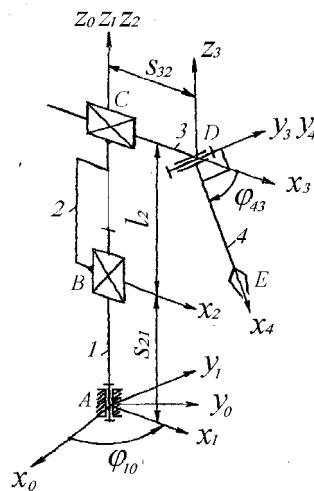


Рисунок 1 - Кинематическая схема манипулятора с 4 степенями свободы

Силовому анализу манипулятора предшествует его кинематический анализ (определение угловых скоростей и ускорений звеньев, линейных скоростей и ускорений центров масс, а также координат отдельных точек). Эта задача рассмотрена в работе авторов [1].

Кинестатический анализ предполагает введение в расчет сил инерции согласно принципу Даламбера. Силы инерции каждого звена приводятся к его центру масс и заменяются главным вектором и главным моментом.

Главный вектор сил инерции

$$\bar{F}_И = -m \bar{a}_S, \quad (1)$$

где \bar{a}_S – ускорение центра масс звена.

Главный момент сил инерции $\bar{M}_И$ определяется на основании векторно-матричной формулы [2]

$$\bar{M}_И = -[I_S] \bar{\epsilon} - \bar{\omega} \times [I_S] \bar{\omega}, \quad (2)$$

где $[I_S]$ – тензор инерции звена относительно его центра масс, $\bar{\omega}$ и $\bar{\epsilon}$ – соответственно угловая скорость и угловое ускорение,

$$[I_S] = \begin{bmatrix} I_X & -I_{XY} & -I_{XZ} \\ -I_{XY} & I_Y & -I_{YZ} \\ -I_{XZ} & -I_{YZ} & I_Z \end{bmatrix},$$

где I_X, I_Y, I_Z – осевые моменты инерции, I_{XY}, I_{XZ}, I_{YZ} – центробежные моменты инерции относительно осей системы координат с началом в центре масс звена.

Определение главного момента сил инерции по формуле (2) следует вести в локальной подвижной системе координат, жестко связанной с рассматриваемым звеном, так как тензор инерции $[I_S]$ остается постоянным только в этой системе координат. Если координатные оси совпадают с главными центральными осями инерции (это имеет место для осесимметричных звеньев), то $I_{XY} = I_{XZ} = I_{YZ} = 0$ и выражение (2) значительно упрощается и в проекциях на подвижные оси координат, связанные со звеном, принимает вид

$$\begin{aligned} M_{иX} &= -I_X \varepsilon_X - \omega_Y \omega_Z (I_Z - I_Y), & M_{иY} &= -I_Y \varepsilon_Y - \omega_Z \omega_X (I_X - I_Y), \\ M_{иZ} &= -I_Z \varepsilon_Z - \omega_X \omega_Y (I_Y - I_X). \end{aligned} \quad (3)$$

По формуле (1) находим силы инерции звеньев и транспортируемой детали в проекциях на оси x_0, y_0, z_0 неподвижной системы координат:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{и1} &= 0, & \bar{F}_{и2} & \{ F_{и2}^{X_0}, F_{и2}^{Y_0}, F_{и2}^{Z_0} \}, & \bar{F}_{и3} & \{ F_{и3}^{X_0}, F_{и3}^{Y_0}, F_{и3}^{Z_0} \}, \\ \bar{F}_{и4} & \{ F_{и4}^{X_0}, F_{и4}^{Y_0}, F_{и4}^{Z_0} \}, & \bar{F}_{иД} & \{ F_{иД}^{X_0}, F_{иД}^{Y_0}, F_{иД}^{Z_0} \}. \end{aligned}$$

На основании формул (3) получим моменты сил инерции звеньев в проекциях на оси подвижных систем координат:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{и1} & \{ M_{и1}^{X_1}, M_{и1}^{Y_1}, M_{и1}^{Z_1} \}, & \bar{M}_{и2} & \{ M_{и2}^{X_2}, M_{и2}^{Y_2}, M_{и2}^{Z_2} \}, \\ \bar{M}_{и3} & \{ M_{и3}^{X_3}, M_{и3}^{Y_3}, M_{и3}^{Z_3} \}, & \bar{M}_{и4} & \{ M_{и4}^{X_4}, M_{и4}^{Y_4}, M_{и4}^{Z_4} \}. \end{aligned}$$

При применении формул (3) следует учитывать, что I_{Xi}, I_{Yi}, I_{Zi} – это осевые моменты инерции относительно главных центральных осей инерции звена (с началом координат в центре масс), параллельных осям подвижной системы координат x_i, y_i, z_i , жестко связанной с данным звеном.

Расчет начинается с последнего звена 4 (рис. 2а), являющегося статически определимым. Для него уравнение равновесия сил имеет вид

$$\bar{G}_4 + \bar{G}_Д + \bar{F}_{и4} + \bar{F}_{иД} + \bar{R}_{43} = 0, \quad (4)$$

где G_4 и $G_Д$ – силы тяжести звена 4 и перемещаемой детали, R_{43} – реакция на звено 4 со стороны звена 3.

В проекциях на оси неподвижной системы координат уравнение (4) принимает вид

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G_Д \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{и4}^{X_0} \\ F_{и4}^{Y_0} \\ F_{и4}^{Z_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{иД}^{X_0} \\ F_{иД}^{Y_0} \\ F_{иД}^{Z_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{43}^{X_0} \\ R_{43}^{Y_0} \\ R_{43}^{Z_0} \end{bmatrix} = 0,$$

откуда находим $R_{43}^{X_0} = -F_{и4}^{X_0} - F_{иД}^{X_0}$; $R_{43}^{Y_0} = -F_{и4}^{Y_0} - F_{иД}^{Y_0}$; $R_{43}^{Z_0} = G_4 + G_Д - F_{и4}^{Z_0} - F_{иД}^{Z_0}$.

Для оценки динамической нагруженности подвижного соединения звеньев 3 и 4 необходимо получить проекции реакции \bar{R}_{43} на оси x_4, y_4, z_4 , жестко связанные со звеном 4. Для этого следует воспользоваться матричным выражением

$$\begin{bmatrix} R_{43}^{X_4} \\ R_{43}^{Y_4} \\ R_{43}^{Z_4} \end{bmatrix} = A_{40} \begin{bmatrix} R_{43}^{X_0} \\ R_{43}^{Y_0} \\ R_{43}^{Z_0} \end{bmatrix},$$

где A_{40} – матрица преобразования координат вектора из неподвижной системы $x_0 y_0 z_0$ в подвижную систему $x_4 y_4 z_4$ [1].

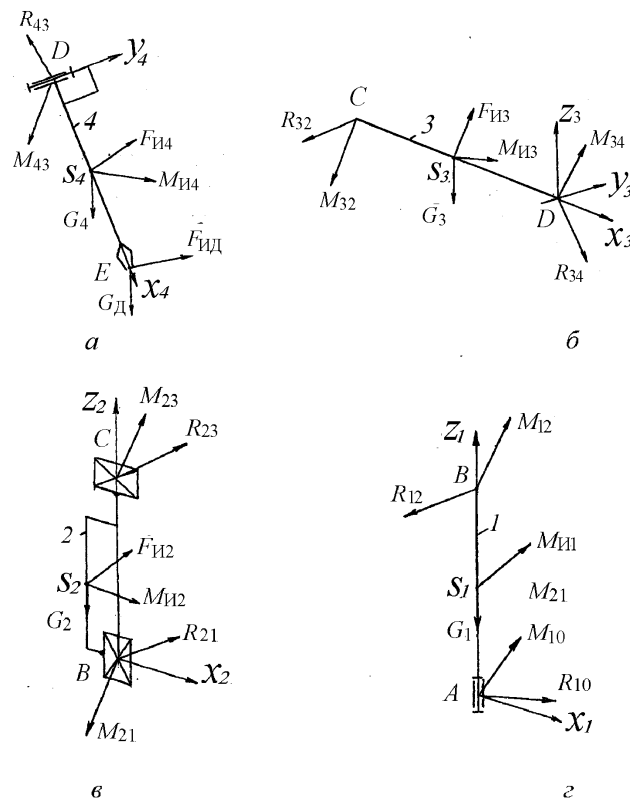


Рисунок 2 – Расчетные схемы звеньев манипулятора

Уравнение равновесия моментов сил относительно точки D для звена 4 имеет вид

$$(\bar{r}_{DE} \times \bar{F}_{ИД}) + (\bar{r}_{DE} \times \bar{G}_D) + (\bar{r}_{DS_4} \times \bar{F}_{И4}) + (\bar{r}_{DS_4} \times \bar{G}_4) + \bar{M}_{И4} + \bar{M}_{43} = 0, \quad (5)$$

где \bar{M}_{43} – реактивный момент, действующий на звено 4 со стороны звена 3, \bar{r}_{DE} и \bar{r}_{DS_4} – радиус-векторы точек E и S_4 относительно точки D (начала координат системы $x_4 y_4 z_4$).

$$\bar{r}_{DE} \{X_E^{(0)} - X_D^{(0)}, Y_E^{(0)} - Y_D^{(0)}, Z_E^{(0)} - Z_D^{(0)}\}, \quad \bar{r}_{DS_4} \{X_{S_4}^{(0)} - X_D^{(0)}, Y_{S_4}^{(0)} - Y_D^{(0)}, Z_{S_4}^{(0)} - Z_D^{(0)}\}.$$

В уравнении (5) момент $\bar{M}_{И4}$ должен быть представлен в проекциях на оси неподвижной системы координат $x_0 y_0 z_0$, но так как ранее он был получен в проекциях на оси подвижной системы координат $x_4 y_4 z_4$, то следует воспользоваться матричным выражением

$$\begin{bmatrix} M_{И4}^{X_0} \\ M_{И4}^{Y_0} \\ M_{И4}^{Z_0} \end{bmatrix} = A_{04} \begin{bmatrix} M_{И4}^{X_4} \\ M_{И4}^{Y_4} \\ M_{И4}^{Z_4} \end{bmatrix}, \quad \text{причем } A_{04} = A_{40}^T.$$

Следует иметь в виду, что при составлении уравнения равновесия (5) не рассматривается размер перемещаемой детали и поэтому не учитывается момент сил инерции детали $\bar{M}_{ИД}$.

Векторные произведения в уравнении (5) раскрываются известным способом. В результате векторное уравнение моментов (5) приводится к трем скалярным уравнениям, из которых определяются $M_{43}^{X_0}$, $M_{43}^{Y_0}$, $M_{43}^{Z_0}$. Для получения $M_{43}^{X_4}$, $M_{43}^{Y_4}$, $M_{43}^{Z_4}$ следует воспользоваться матричным выражением $M_{43}^{(4)} = A_{40} M_{43}^{(0)}$. Составляющая $M_{43}^{Y_4}$, направленная вдоль оси вращательной пары D , представляет собой движущий (управляющий) момент в этой паре.

Далее рассматривается звено 3 (рис. 2б). При этом реактивные усилия со стороны звена 4 являются известными: $\bar{R}_{34} = -\bar{R}_{43}$, $\bar{M}_{34} = -\bar{M}_{43}$, а реактивные усилия со стороны звена 2 \bar{R}_{32} и \bar{M}_{32} определяются аналогично тому, как это было сделано для звена 4. Для этого составляются уравнение равновесия сил и уравнение равновесия моментов относительно точки C . Составляющая $R_{32}^{X_3}$ представляет собой движущую силу (приводное усилие) в поступательной паре C .

Затем рассматривается звено 2 (рис. 2в). При этом реактивные усилия со стороны звена 3 являются известными: $\bar{R}_{23} = -\bar{R}_{32}$, $\bar{M}_{23} = -\bar{M}_{32}$, а реактивные усилия со стороны звена 1 \bar{R}_{21} и \bar{M}_{21} определяются из уравнения равновесия сил, действующих на звено 2, и уравнения равновесия моментов относительно точки B . Составляющая $R_{21}^{Z_2}$ представляет собой движущую силу (приводное усилие) в поступательной паре B .

Последним рассматривается звено 1 (рис. 2г). При этом реактивные усилия со стороны звена 2 являются известными: $\bar{R}_{12} = -\bar{R}_{21}$, $\bar{M}_{12} = -\bar{M}_{21}$, а реактивные усилия со стороны стойки O \bar{R}_{10} и \bar{M}_{10} определяются из уравнения равновесия сил, действующих на звено 1, и уравнения равновесия моментов относительно точки A . Составляющая $M_{10}^{Z_1}$ представляет собой движущий (приводной) момент во вращательной паре A .

На основании представленной методики разработаны алгоритмы и программы силового анализа манипуляторов, которые могут быть использованы при проектировании схем манипуляторов.

При определении реактивных нагрузок может быть использован иной подход. Так, в работе [3] при силовом анализе манипулятора $B \perp B \perp \Pi$ при составлении уравнения равновесия поочередно размыкается кинематическая цепь манипулятора в каждой кинематической паре, начиная с последней, и составляются уравнения равновесия сил и моментов сил, действующих на свободную часть цепи. По такой методике применительно к исследуемому в данной работе манипулятору следует последовательно рассматривать звено 4, далее кинематическую цепь 3 – 4, затем кинематическую цепь 2 – 3 – 4 и в заключении кинематическую цепь 1 – 2 – 3 – 4 с разомкнутой кинематической парой A .

Резюме

В статье применительно к манипулятору с 4 степенями свободы рассматривается задача определения динамических нагрузок в кинематических парах (реактивных сил и моментов), а также движущих (управляющих) сил и моментов приводных двигателей, необходимых для осуществления программного движения схвата.

Литература

1. Анципорович, П.П. Кинематический анализ манипулятора с 4 степенями свободы / П.П. Анципорович, В.К. Акулич, Е.М. Дубовская // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 2012. – Вып. 27. – С. 358 – 361.
2. Коловский, М.З. Основы динамики промышленных роботов / М.З. Коловский, А.В. Слоущ. – М.: Наука. Гл. ред. физ. - мат. лит., 1988. – 240 с.
3. Механика промышленных роботов: учебное пособие для вузов: в 3 кн. / Под ред. К.В. Фролова и Е.И. Воробьева. Кн. 1: Кинематика и динамика / Е.И. Воробьев, С.А. Попов, Г.И.Шевелева. – М.: Высш. шк., 1988. – 304 с.
4. Филонов, И.П. Исследование динамики манипуляторов с использованием ЭВМ / И.П. Филонов, П.П. Анципорович, В.К. Акулич. – Минск: БПИ, 1990. – 35 с.

Summary

In article with reference to the manipulator with 4 degrees of freedom the problem of definition of dynamic forces in kinematic pairs (reactive forces and the moments), and also of moving (operating) forces and the moments of the drive units necessary for program realisation of hand's movement is considered.

Поступила в редакцию 12.11.2012

КОЛЕСНО-ШАГАЮЩИЕ ДВИЖИТЕЛИ ДЛЯ ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА ВЫСОКОЙ ПРОХОДИМОСТИ

Скойбеда А.Т., Жуковец В.Н.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Разработанный в БНТУ опытный образец колесно-шагающего движителя (рис. 1) при испытаниях продемонстрировал преимущества в тяге и проходимости по сравнению с обычным колесом. Основной причиной более высокой тяги колесно-шагающего движителя является большее значение аналога скорости перемещения, чем у обычного колеса, при одинаковом расстоянии от опорной поверхности до оси ступицы. Это значит, что можно приложить большее значение крутящего момента и это не вызовет буксования, в отличие от круглого колеса. Таким образом, за один оборот колесно-шагающего движителя выполняется больше полезной работы, чем у колеса. Причиной высокой проходимости колесно-шагающего движителя является дискретность следов. Круглое колесо прокладывает сплошную колею и тратит больше энергии на смятие грунта, а также не может преодолеть относительно невысокие препятствия (бордюры, камни, бревна и прочее), которые колесно-шагающий движитель может легко перешагнуть.

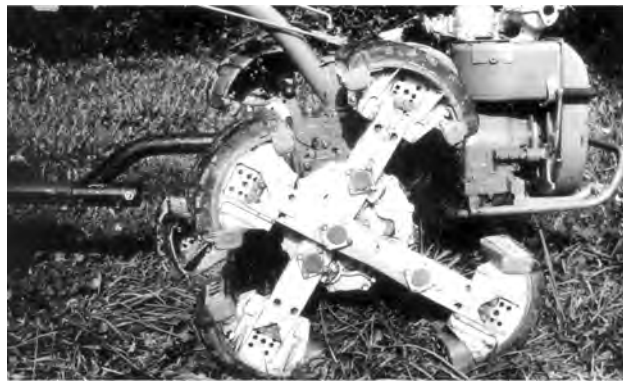


Рисунок 1 – Колесно-шагающий движитель

В работах [1, 2] были описаны кинематические и динамические характеристики данного движителя и обоснованы его преимущества перед колесом. Тем не менее, следует более подробно рассмотреть вопросы работы движителя в составе транспортного средства. В частности, как на его эффективность влияет совместное применение ведущих колесно-шагающих движителей и ведомых круглых колес. Именно такой была испытываемая ходовая система, где на мотоблоке были установлены колесно-шагающие движители, а прицеп перемещался на обычных колесах (рис. 2).



Рисунок 2 – Мотоблок с прицепом

В подобной системе ведомые обычные колеса уменьшают преимущества от применения ведущих колесно-шагающих движителей, так как по-прежнему происходит прокладка сплошной колеи и затруднено преодоление препятствий. Следовательно, целесообразно использовать в ходовой системе исключительно колесно-шагающие движители. В ряде случаев, когда это оправдано экономически, система может быть с полным приводом. Если же нет полного привода, то применение сложных и дорогостоящих движителей в качестве ведомых нерационально. Выходом из ситуации может быть совместное применение колесно-шагающих движителей двух типов: упомянутых выше, в качестве ведущих на оси O_1 , и движителей упрощенной конструкции, в качестве ведомых на оси O_2 . Тогда удастся совместить преимущества шагающих систем с приемлемыми экономическими затратами.

В состав колесно-шагающего движителя упрощенной конструкции (рис. 3) входят следующие звенья: жестко закрепленный на оси O_2 кулачок 1, совершающее вращение вокруг кулачка с угловой скоростью ω водило 2, перемещаемые водилом ноги 3, что обкатываются на роликах вокруг неподвижного кулачка. К ногам присоединены опорные башмаки. Башмаки могут не иметь надежного сцепления с грунтом, поэтому постоянное вращение водила желательно обеспечить за счет цепной передачи от ведущего движителя.

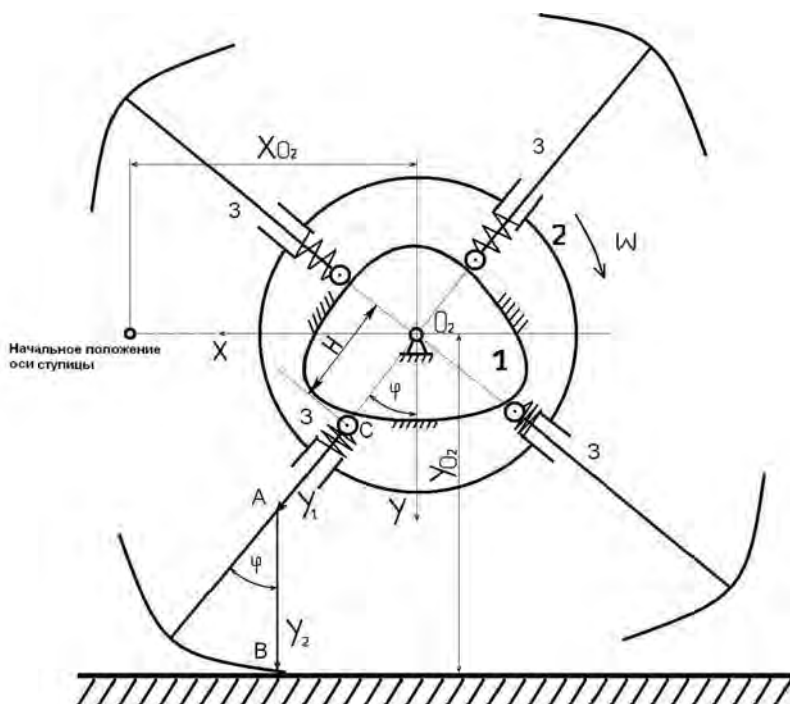


Рисунок 3 – Ведомый колесно-шагающий движитель

Таким образом, данный движитель представляет собой кулачковый механизм с четырьмя роликовыми толкателями. Для обеспечения постоянного контакта роликов с профилем кулачка предусмотрены прижимные пружины и направляющий канал на наружной поверхности кулачка. Что касается опорных башмаков, то для определения их профиля применяется методика анализа плоских кривых, изложенная в работах [2, 3].

Основная суть методики заключается в следующем. Профиль наружной поверхности опорного башмака описывается двумя радиус-векторами, являющимися функциями от угла φ поворота ступицы (рис. 3). Радиус-вектор Y_1 начинается в точке C оси ролика, направлен вдоль стойки ноги в сторону наружной поверхности башмака. Не доходя до наружной поверхности, радиус-вектор Y_1 дает в своей конечной точке A начало новому радиус-вектору Y_2 , который заканчивается в точке B на наружной поверхности башмака. Своей конечной точкой B радиус-вектор Y_2 обеспечивает контакт наружной поверхности башмака с опорной поверхностью. Радиус-вектор Y_2 всегда перпендикулярен к опорной поверхности, находится на нормали к наружной поверхности башмака, образуя с осью

стойки ноги угол φ , равный углу поворота ступицы. При этом соблюдается условие нормальности прямой:

$$\frac{dY_2}{d\varphi} = -\frac{dY_1}{d\varphi} \cdot \cos \varphi. \quad (1)$$

Вертикальное положение оси O_2 ступицы составит:

$$Y_{02} = (H + Y_1) \cdot \cos \varphi + Y_2. \quad (2)$$

Горизонтальное перемещение оси ступицы:

$$X_{02} = (H + Y_1) \cdot \sin \varphi + \int_0^{\varphi} \left(Y_2 - \frac{dY_1}{d\varphi} \cdot \sin \varphi \right) \cdot d\varphi. \quad (3)$$

С учетом формулы (1) далее найдем производную.

Аналог скорости по горизонтали:

$$\frac{dX_{02}}{d\varphi} = \frac{dH}{d\varphi} \cdot \sin \varphi + (H + Y_1) \cdot \cos \varphi + Y_2. \quad (4)$$

При условии движения по плоской поверхности, очень важно обеспечить постоянное значение вертикального положения оси O_2 ступицы:

$$Y_{02} = (H + Y_1) \cdot \cos \varphi + Y_2 = \text{const}. \quad (5)$$

При угле поворота $\varphi = 0^\circ$ вертикальное положение оси O_2 ступицы будет равно:

$$Y_{02} = H_0 + C = R_0 + r + C. \quad (6)$$

Где: $H_0 = R_0 + r$ – начальное расстояние между осями кулачка и ролика, м; C – длина стойки башмака, м; R_0 – радиус начальной окружности кулачка, м; r – радиус ролика, м.

Следовательно, получаем равенство:

$$(H + Y_1) \cdot \cos \varphi + Y_2 = R_0 + r + C. \quad (7)$$

После подстановки формулы (7) в выражение (4) получаем:

$$\frac{dX_{02}}{d\varphi} = \frac{dH}{d\varphi} \cdot \sin \varphi + R_0 + r + C. \quad (8)$$

Таким образом, задача заключается в том, чтобы определить функцию $H(\varphi)$, затем по формулам (1, 7) найти функции $Y_1(\varphi)$ и $Y_2(\varphi)$ при заданных величинах C , R_0 , r . По функции $H(\varphi)$ строим профиль неподвижного кулачка в координатах осей X и Y , приведенных на рис. 3. Для расчетов используем приведенные ниже формулы из работы [3]:

$$\begin{cases} X = H \cdot \sin \varphi - r \cdot \sin \psi, \\ Y = H \cdot \cos \varphi - r \cdot \cos \psi. \end{cases} \quad (9)$$

$$\psi = \varphi - \arctg \left(\left(\frac{dH}{d\varphi} \right) / H \right). \quad (10)$$

После этого, по значениям $Y_1(\varphi)$, $Y_2(\varphi)$ можно вычислить координаты X_B и Y_B точек профиля опорного башмака:

$$\begin{cases} X_B = Y_2 \cdot \sin \varphi, \\ Y_B = Y_1 + Y_2 \cdot \cos \varphi. \end{cases} \quad (11)$$

Затем координаты профиля выразим через радиус-вектор ρ и угол его поворота α , что отсчитывается от оси симметрии башмака:

$$\alpha = \arctg(X_B/Y_B), \quad (12)$$

$$\rho = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}. \quad (13)$$

Итак, описанные выше формулы позволяют определить основные геометрические параметры движителя, но открытым остается вопрос, на основании каких критериев следует искать функцию $H(\varphi)$, которая и задает, по сути дела, все характеристики механизма.

Поскольку движитель подвергается серьезным динамическим нагрузкам, возникает проблема обеспечения контактной прочности соприкасающихся поверхностей кулачка и роликов. Как известно, величина контактных напряжений вычисляется по формуле Герца [4]:

$$\sigma_K = 0,418 \cdot \sqrt{\frac{P_{\Sigma} \cdot E}{b \cdot \cos \gamma} \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right)}; \text{ МПа.} \quad (14)$$

Где: P_{Σ} – суммарная сила, действующая вдоль оси толкателя, Н; E – приведенный модуль упругости материалов кулачка и ролика, МПа; b – длина линии контакта кулачка с роликом, мм; γ – величина угла давления, радианы; r – радиус ролика, мм; R – радиус кривизны кулачкового профиля, мм.

Приведенный модуль упругости определяется как:

$$E = \frac{2 \cdot E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2}; \text{ МПа,} \quad (15)$$

а радиус кривизны кулачкового профиля можно вычислить по формуле [3]:

$$R = \frac{H}{\left(1 - \frac{d\gamma}{d\varphi} \right) \cdot \cos \gamma} - r; \text{ мм.} \quad (16)$$

Угол давления находится как:

$$\gamma = \arctg \left(\left(\frac{dH}{d\varphi} \right) / H \right); \text{ радианы.} \quad (17)$$

В выражениях (15 – 17): E_1 и E_2 – модули упругости материалов кулачка и ролика соответственно, МПа; H – расстояние между осями вращения кулачка и ролика, мм; r – радиус ролика, мм; γ – величина угла давления, радианы; φ – угол поворота ступицы, радианы.

Из зависимостей (14 – 17) можно сделать вывод, что кривизна профиля криволинейной цилиндрической поверхности неподвижного кулачка оказывает серьезное влияние на величину контактных напряжений. Таким образом, при определении функции $H(\varphi)$ будем придерживаться следующего подхода: зададимся некоторой функцией $K(\varphi)$ изменения кривизны линии, эквидистантной профилю кулачка и проходящей через ось вращения ролика при его движении вокруг кулачка. Данная функция должна обеспечивать допустимую величину контактных напряжений. Затем по заданной функции $K(\varphi)$ находим функцию $H(\varphi)$, что позволит в дальнейшем определить все остальные параметры движителя.

Исходя из известных в дифференциальной геометрии выражений [5], кривизна линии в полярных координатах определяется как:

$$K(\varphi) = \left| \rho^2 + 2 \cdot \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 - \rho \cdot \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} \right| / \left(\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (18)$$

Таким образом, задача заключается в том, чтобы получить выражение $\rho(\varphi)$, используя заданную в полярных координатах функцию кривизны $K(\varphi)$. Очевидно, что поиск решения дифференциального уравнения (18) в заданной форме крайне затруднителен. Задача может быть существенно облегчена, если использовать способ представления плоских кривых, изложенный в работе [3]. Там при решении задачи о вычислении радиуса кривизны профиля кулачка были получены следующие выражения:

$$\begin{cases} \frac{dH}{d\varphi} = H \cdot \operatorname{tg} \gamma, \\ R = \frac{H}{\left(1 - \frac{d\gamma}{d\varphi} \right) \cdot \cos \gamma} - r. \end{cases} \quad (19)$$

Где: $H(\varphi)$ – расстояние между осями кулачка и ролика, мм; $\gamma(\varphi)$ – угол давления кулачка на ролик, радианы; $R(\varphi)$ – радиус кривизны профиля кулачка, мм; r – радиус ролика, мм; φ – угол поворота ступицы, радианы. Примем обозначение: $K(\varphi) = 1/(R(\varphi) + r)$ – кривизна линии, описываемой

осью вращения ролика при его качении вокруг профиля кулачка, 1/мм. Для соответствия выражению (18) примем обозначение: $H(\varphi) = \rho(\varphi)$.

Тогда, после выполнения несложных преобразований системы (19), можно получить следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{d\varphi} = \rho \cdot \operatorname{tg} \gamma, \\ \frac{d\gamma}{d\varphi} = 1 - \frac{\rho \cdot K}{\cos \gamma}. \end{cases} \quad (20)$$

Данная система (20) из двух дифференциальных уравнений первого порядка полностью эквивалентна дифференциальному уравнению второго порядка (18). После преобразования, логарифмирования и дифференцирования второго уравнения системы (20) получаем:

$$\frac{-\gamma''_{\varphi\varphi} - \frac{\sin \gamma \cdot \gamma'_{\varphi}}{\cos \gamma}}{1 - \gamma'_{\varphi}} = \frac{\rho'_{\varphi}}{\rho} + \frac{K'_{\varphi}}{K}. \quad (21)$$

С учетом первого уравнения системы (20) произведем преобразования и получим:

$$K \cdot \gamma''_{\varphi\varphi} - K \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot (\gamma'^2_{\varphi} - 1) - K'_{\varphi} \cdot \gamma'_{\varphi} + K'_{\varphi} = 0. \quad (22)$$

Для решения уравнения (22) воспользуемся подстановкой вида: $\eta(\varphi) = \sin \gamma$. Таким образом:

$$\frac{d(\sin \gamma)}{d\varphi} = \frac{d\eta}{d\varphi} = \eta'_{\varphi}, \text{ а с другой стороны: } \frac{d(\sin \gamma)}{d\varphi} = \cos \gamma \cdot \frac{d\gamma}{d\varphi} = \cos \gamma \cdot \gamma'_{\varphi}.$$

Поскольку $\cos \gamma = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma} = \sqrt{1 - \eta^2}$, в итоге после подстановок и преобразований получаем нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$K \cdot \eta''_{\varphi\varphi} - K'_{\varphi} \cdot \eta'_{\varphi} + K \cdot \eta + K'_{\varphi} \cdot \sqrt{1 - \eta^2} = 0. \quad (23)$$

Таким образом, после интегрирования уравнения (23) получим функцию вида $\eta(\varphi)$. Поскольку $\eta(\varphi) = \sin \gamma$, можно затем найти функцию $\operatorname{tg} \gamma$ и воспользоваться первым уравнением системы (20). Однако, решение данного уравнения во всех практически значимых случаях будет затруднительно выразить в элементарных функциях. Тем не менее, можно использовать другой прием, позволяющий с минимальными усилиями получить приближенное аналитическое решение достаточно высокой точности. Для этого следует представить второе уравнением системы (20) в виде: $(1 - \gamma'_{\varphi}) \cdot \cos \gamma = \rho \cdot K$.

С учетом выражения $\cos \gamma = \sqrt{1 - \eta^2}$, а также $\eta'_{\varphi} = \cos \gamma \cdot \gamma'_{\varphi}$, получаем:

$$\rho = \frac{\sqrt{1 - \eta^2} - \eta'_{\varphi}}{K}. \quad (24)$$

С другой стороны, уравнение (23) можно представить в виде:

$$-\frac{(\eta''_{\varphi\varphi} + \eta)}{K'_{\varphi}} = \frac{\sqrt{1 - \eta^2} - \eta'_{\varphi}}{K}. \quad (25)$$

Очевидно, что в итоге получается выражение:

$$\rho = -\frac{(\eta''_{\varphi\varphi} + \eta)}{K'_{\varphi}}. \quad (26)$$

Таким образом, для нахождения уравнения $\rho(\varphi)$ плоской кривой в полярных координатах при известном выражении кривизны $K(\varphi)$ сначала следует из уравнения (23) найти функцию $\eta(\varphi)$, а затем воспользоваться либо выражением (24), либо (26). Различие между этими формулами будет проявляться в точности расчета. Следует ожидать, что вычисления согласно (24) будут точнее, чем по (26) из-за меньшего порядка производной.

Для расчета профиля кулачка с учетом допустимого уровня контактных напряжений зададимся функциями кривизны следующего вида:

1. $K(\varphi) = k_0 \cdot \varphi$; где k_0 – постоянный коэффициент. Уравнение (23) примет вид:

$$\varphi \cdot \eta_{\varphi\varphi}'' - \eta_{\varphi}' + \varphi \cdot \eta + \sqrt{1 - \eta^2} = 0. \quad (27)$$

2. $K(\varphi) = k_0 \cdot \varphi^2$; где k_0 – постоянный коэффициент. Уравнение (23) примет вид:

$$\varphi \cdot \eta_{\varphi\varphi}'' - 2 \cdot \eta_{\varphi}' + \varphi \cdot \eta + 2 \cdot \sqrt{1 - \eta^2} = 0. \quad (28)$$

3. $K = k_0 \cdot e^{k_1 \cdot \varphi}$; где k_0, k_1 – постоянные коэффициенты. Уравнение (23) примет вид:

$$\eta_{\varphi\varphi}'' - k_1 \cdot \eta_{\varphi}' + \eta + k_1 \cdot \sqrt{1 - \eta^2} = 0. \quad (29)$$

При решении уравнений (27 – 29) задаемся начальными условиями и различными значениями коэффициентов k_0, k_1 . Из множества полученных вариантов функции $H(\varphi)$ выберем тот, который обеспечивает допустимый уровень контактных напряжений при оптимальных значениях остальных параметров механизма движителя.

Резюме

Описаны преимущества в тяге и проходимости экспериментального образца колесно-шагающего движителя перед колесом. С целью улучшения характеристик ходовой системы выполнено обоснование принципиальной схемы колесно-шагающего движителя другого типа, предназначенного для совместной работы с уже разработанным образцом. Дана методика расчета основных параметров разрабатываемого движителя. При проведении расчетов применяются методы дифференциальной геометрии.

Литература

1. Скойбеда, А.Т. Кинематика колесно-шагающего движителя при опоре на башмаки круглого профиля / А.Т. Скойбеда, В.Н. Жуковец, О.А. Сонич // Современные методы проектирования машин: Республиканский межведомственный сборник научных трудов. Вып.2. В 7 томах. – Т. 3. Проектирование приводов машин / Под общ. ред. П.А. Витязя. – Минск, 2004. – с. 102–106.
2. Скойбеда, А.Т. Колесно-шагающий движитель и его динамические преимущества по сравнению с колесом / А.Т. Скойбеда, И.М. Комяк, В.Н. Жуковец / Механика-2011: сб. науч. тр. V Белорусского конгресса по теорет. и прикладной механике, Минск, 26 – 28 окт. 2011 г.: в 2 т. – Минск, 2011. – Том 1. – Стр. 138-144.
3. Жуковец, В.Н. Профиль плоского кулачка в виде замкнутой кривой, описанной системой уравнений в параметрическом виде. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. 2006. № 1. – с. 76–86.
4. Колчин, Н.И. Теория механизмов и машин. Структура и кинематика механизмов. Динамика машин и трение. / Н.И. Колчин, М.С. Мовнин. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 616 с.
5. Воднев В.Т., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. Основные математические формулы: Справочник. Под ред. Богданова Ю.С. – Мн.: Выш. шк., 1995. – 380 с.

Summary

The paper describes the benefits in traction and flotation experimental model of wheel-step mover in front of the wheel. In order to improve the performance of running system the substantiation of the principal scheme of wheel-step mover of another type, designed to work together with the already developed model has been performed. The method of calculation of the main parameters of the developed mover has been given. The methods of differential geometry have been used in the calculations.

Поступила в редакцию 26.11.2012

ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ КОНСОЛИДАЦИИ ЗАСАЛЕННЫХ ЗЕМЛЯНЫХ СРЕД

Алтынбеков Ш.А.

Южно-Казахстанский государственный педагогический институт, Шымкент

Введение. В строительстве промышленных, гражданских и гидротехнических сооружений, как известно, возникают задачи о прочности и увеличения срока эксплуатации этих сооружений. Решение этих задач во многом зависят от правильной оценки и определений осадки грунтовых оснований во времени, обусловленной консолидацией грунтов.

Теория фильтрационной консолидации грунтов, начиная с 25-го года прошлого столетия, интенсивно развивается, охватывая все новые области исследований. Причем, развитие идет фактически по всем направлениям, начиная с анализа физико-химических и механических свойств грунтов, кончая созданием универсальных различных физико-математических моделей, позволяющих с помощью мощных современных персональных компьютеров моделировать напряженно-деформированное состояния изучаемого объекта. Однако, несмотря на это, в этой области исследования достаточно много нерешенных вопросов. Один из них, процесс осадки засоленных грунтов недостаточно изучен. А ведь некоторые области Казахстана, Молдавии, России, Украины, Средней Азии имеют засоленные грунты. Этот вопрос в свое время поднял академик НАН РК Ш.М.Айталиев. В данной работе приводится частичное решение данного поставленного вопроса. Получено основное уравнение консолидации засоленных земляных сред.

Основное уравнение консолидации. Уравнение, рекомендуемое на рассмотрение в работе семинаре получено на основе законов неразрывности жидкой и твердой фаз, уравнение баланса для газообразной фазы, закона Генри и Дарси-Герсеванова, а также по предположению, что растворенная соль (солевой раствор) движется с водой, а пена газа и нерастворенная соль движется с твердой фазой.

1. Уравнение неразрывности фазы жидкой смеси. Выделим, как показано на рис. 1, элемент единичного объема засоленного грунта размерами $dx dy dz$. Обозначим объем воды в этом единичном объеме в момент времени t (или пористость засоленного грунта в момент времени t) через n' , твердой части грунта через m , объем нерастворенной части соли через m_1' , объем нерастворенной части соли через m_1'' , а объем газообразной фазы через s .

Тогда верно следующее соотношение

$$n'' + m + m_1' + m_1'' + s = 1 \quad (1)$$

Обозначим скорости фильтрации воды и солевого раствора через грансоответственно буквой u_{1z} и u_{2z} . Тогда скорости фильтрации этих жидкостей через грань 2 соответственно равны $u_{1z} + \frac{\partial u_{1z}}{\partial z} dz$ и $u_{2z} + \frac{\partial u_{2z}}{\partial z} dz$. Расход воды и солевого раствора за время dt через грань 1 соответственно равны: $u_{1z} dx dy dt$; $u_{2z} dx dy dt$, а через грань 2 равны: $\left(u_{1z} + \frac{\partial u_{1z}}{\partial z} dz\right) dx dy dt$; $\left(u_{2z} + \frac{\partial u_{2z}}{\partial z} dz\right) dx dy dt$. В результате, за время dt во внутрь рассматриваемого элементарного объема $dx dy dz$ вошли жидкости и солевые растворы:

$$u_{1z} dx dy dt - \left(u_{1z} + \frac{\partial u_{1z}}{\partial z} dz\right) dx dy dt = -\frac{\partial u_{1z}}{\partial z} dx dy dz dt$$

$$u_{2z} dx dy dt - \left(u_{2z} + \frac{\partial u_{2z}}{\partial z} dz\right) dx dy dt = -\frac{\partial u_{2z}}{\partial z} dx dy dz dt$$

Аналогично, также у остальных граней элемента:

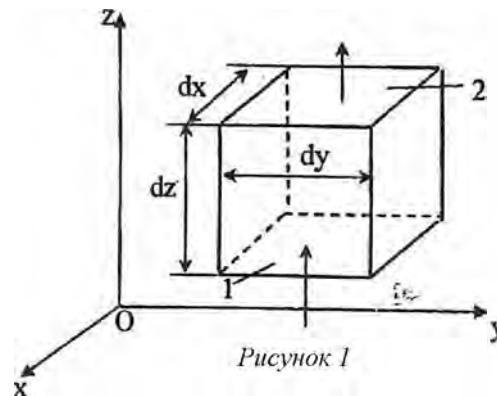


Рисунок 1

$$\begin{aligned}
u_{1x}dydzdt - \left(u_{1X} + \frac{\partial u_{1X}}{\partial x} dx \right) dydzdt &= -\frac{\partial u_{1x}}{\partial x} dx dy dz dt, \\
u_{2x}dydzdt - \left(u_{2X} + \frac{\partial u_{2X}}{\partial x} dx \right) dydzdt &= -\frac{\partial u_{2x}}{\partial x} dx dy dz dt \\
u_{1y}dxdzdt - \left(u_{1y} + \frac{\partial u_{1y}}{\partial y} dy \right) dxdzdt &= -\frac{\partial u_{1y}}{\partial y} dx dy dz dt \\
u_{2y}dxdzdt - \left(u_{2y} + \frac{\partial u_{2y}}{\partial y} dy \right) dxdzdt &= -\frac{\partial u_{2y}}{\partial y} dx dy dz dt
\end{aligned}$$

В результате:

$$-\left(\frac{\partial u_{1X}}{\partial x} + \frac{\partial u_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial u_{1z}}{\partial z} \right) dx dy dz dt; \quad -\left(\frac{\partial u_{2X}}{\partial x} + \frac{\partial u_{2y}}{\partial y} + \frac{\partial u_{2z}}{\partial z} \right) dx dy dz dt;$$

или

$$-\left(\frac{\partial u_{1X}}{\partial x} + \frac{\partial u_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial u_{1z}}{\partial z} + \frac{\partial u_{2X}}{\partial x} + \frac{\partial u_{2y}}{\partial y} + \frac{\partial u_{2z}}{\partial z} \right) dx dy dz dt;$$

Однако, количество фазы жидкой смеси, вошедшей внутрь элемента $dx dy dz$ за время dt можно найти и иначе. Действительно, если обозначить пористость рассматриваемого элементарного объема засаленного грунта в момент времени t через n' а пористость в котором расположен объем растворенной соли через m_1'' , то объемы воды и солевого раствора, находящихся в момент времени t в порах этого элементарного объема засаленного грунта, равен $(n' + m_1'') dx dy dz$. За время dt пористости (пористости расположенного объема воды и солевого раствора) засаленного грунта, заполняющего объем $dx dy dz$, изменится и ее можно принять равной $n' + \frac{\partial n'}{\partial t} dt + m_1'' \frac{\partial m_1''}{\partial t} dt$. Соответствующий объ-

ем жидкой смеси станет $\left(n' + \frac{\partial n'}{\partial t} dt + m_1'' \frac{\partial m_1''}{\partial t} dt \right) dx dy dz$. Отсюда следует, что за время dt жидкосмесьсодержание в рассматриваемом элементарном объеме $dx dy dz$ увеличится на

$$\left(n' + \frac{\partial n'}{\partial t} dt + m_1'' \frac{\partial m_1''}{\partial t} dt \right) dx dy dz - (n' + m_1'') dx dy dz = \left(\frac{\partial n'}{\partial t} + \frac{\partial m_1''}{\partial t} \right) dx dy dz dt$$

Условие неразрывности несжимаемой жидкой смеси заключается в том, что объем жидкости вошедшей внутрь элемента $dx dy dz$ за время dt равен изменению за время dt жидкосмесьсодержания в этом объеме, т.е.

$$-\left(\frac{\partial u_{1X}}{\partial x} + \frac{\partial u_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial u_{1z}}{\partial z} + \frac{\partial u_{2X}}{\partial x} + \frac{\partial u_{2y}}{\partial y} + \frac{\partial u_{2z}}{\partial z} \right) dx dy dz dt = \left(\frac{\partial n'}{\partial t} + \frac{\partial m_1''}{\partial t} \right) dx dy dz dt$$

или

$$\frac{\partial(n' + m_1'')}{\partial t} + \text{div}(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) = 0 \quad (2)$$

2. Уравнение неразрывности твердосмесной (твердая часть грунта и соли нерастворенной в воде) фазы. Обозначая по аналогии со скоростью фильтрации воды и солевого раствора объемный расход твердой части грунта и нерастворенной части соли через единицу площади v_{1z} и v_{2z} , а содержание твердых частиц в единице объема через m , нерастворенной части соли через m_1' , можно таким же путем получить уравнение неразрывности твердосмесной фазы засаленного грунта в виде

$$\frac{\partial(m + m_1')}{\partial t} + \text{div}(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = 0 \quad (3)$$

3. Уравнение баланса для газообразной фазы. Для газообразной фазы уплотняемой среды уравнение баланса выводится аналогично выше приведенным.

Вошедши за время dt внутрь элементарного объема $dx dy dz$ через его грани перпендикулярные оси x, y, z массы газа так как равны следующим

$$-\frac{\partial \rho w_z}{\partial z} dx dy dz dt \quad (\rho - \text{плотность газа}),$$

$$-\frac{\partial \rho w_x}{\partial x} dx dy dz dt, \quad -\frac{\partial \rho w_y}{\partial y} dx dy dz dt,$$

вошедши за этого же время dt внутрь элементарного объема полная масса газа определяется так

$$-\left(\frac{\partial \rho w_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho w_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho w_z}{\partial z} \right) dx dy dz dt;$$

а вышедши за время dt масса газа: $\mu(n' + m_1'') \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt$.

Изменение в элементарном объеме $dx dy dz$ масса газа за время dt : $\frac{\partial \rho s}{\partial t} dx dy dz dt$

Взяв во внимание выше изложенное, уравнение баланса газа можно записать так

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \mu(n' + m_1'') \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho w_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho w_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho w_z}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

4. Уравнение консолидации. Предполагая, что уравнение состояния газа изотермическом режиме, а матрицу коэффициентов фильтрации диагональной матрицей третьего порядка, и опираясь на законы Генри и Дарси-Герсеванова, и на предположение, что растворенная соль (солевой раствор) движется с водой, а пена газа и нерастворенная соль движется с твердой фазой, а так же взяв во внимание выше приведенное соотношение (1), зависимость между напором и давлением и следующие соотношения

$$\varepsilon = \frac{n' + m_1'}{m + m_1}, \quad n' + m_1'' = \frac{\varepsilon}{3 + \varepsilon - \eta^* - \mu_1}, \quad m + m_1' = \frac{1}{3 + \varepsilon - \eta^* - \mu_1},$$

$$n' = \frac{\varepsilon - \mu_1}{3 + \varepsilon - \eta^* - \mu_1}, \quad m = \frac{\mu_1}{3 + \varepsilon - \eta^* - \mu_1}, \quad m_1' = \frac{1 - \mu_1}{3 + \varepsilon - \eta^* - \mu_1}, \quad m_1'' = \frac{\mu_1}{3 + \varepsilon - \eta^* - \mu_1},$$

$$s = \frac{2 - \eta^* - \mu_1}{3 + \varepsilon - \eta^* - \mu_1},$$

из (2), (3) и (4) можно получить основное уравнение консолидации засоленных земляных сред:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \beta_v(\varepsilon, H)(3 + \varepsilon - \eta^* - \mu_1)\gamma \frac{\partial H}{\partial t} =$$

$$= (3 + \varepsilon - \eta^* - \mu_1) \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(K_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(K_2 \frac{\partial H}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(K_3 \frac{\partial H}{\partial x_3} \right) \right\} \quad (5)$$

Здесь: $\beta_v(\varepsilon, H) = \frac{2 - \eta^* - \mu_1 + \mu\varepsilon}{3 + \varepsilon - \eta^* - \mu_1} \cdot \frac{1}{\gamma(H - z - H_0)}$

– коэффициент объемной сжимаемости; μ – растворимость газа; η^* – коэффициент водонасыщенности уплотняемой среды ($\eta = 1, \mu_1 = 1, \mu = 0$); μ_1 – коэффициент растворимости соли ($0 \leq \mu_1 \leq 1$); γ – удельный вес жидкой солевой смеси; ε – коэффициент пористости.

При осимитричной деформации уравнение (5) можно записать в виде

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \beta_v(\varepsilon, H)(3 + \varepsilon - \eta^* - \mu_1)\gamma \frac{\partial H}{\partial t} = (3 + \varepsilon - \eta^* - \mu_1) \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial H}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(K_r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + K_r \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right\} \quad (6)$$

Свойство решений вышеприведенного уравнения (5) (или (6)) в прямом смысле зависят от гипотезы В.А. Флорина, реологического уравнения состояния уплотняемой среды и коэффициентов фильтрации. Эти вопросы подлежат масштабному исследованию для засоленных грунтов.

Summary

In base of laws indissoluble liquid and solid phase, equation balance for gaseous phase, Law's of Henry and Darsi-Hersevanova, and so suppose, that is mixed solid (dissolved) moving with water, and his foam gas and don't mixed salt moving by liquid phase, that given base level consolidation in salt ground sphere.

Поступила в редакцию 16.11.2012

ИЗГИБ БАЛКИ В УСЛОВИЯХ НЕРАВНОМЕРНОГО НАГРЕВА И НЕЙТРОННОГО ОБЛУЧЕНИЯ

Кулешов Р.А., Сабиров Н.М., Ширвель П.И.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Как известно [1], тепловыделяющая сборка является ответственным элементом оборудования, как для транспортных, так и для энергетических реакторов. С позиций теоретической механики рассмотрим простейшую механико-математическую модель тепловыделяющей сборки (ТВС) активной зоны ядерной энергетической установки (рис. 1) на примере массивной балки (длиной 2.25 м) прямоугольного поперечного сечения (0.04x0.16м). В дальнейшем, меняя профиль сечения, на стадии входных данных, и варьируя моментом инерции, получать результаты для тел, имеющих сечение отличное от сплошного (полого сечения, двусвязного с вырезами, многосвязного и т.д.) не составит особого труда.



Рисунок 1 – Тепловыделяющая сборка (ТВС)

На рис. 2 изображена балка, расположенная по длине в направлении оси Oz . Вообще говоря, для рассматриваемой задачи поперечное сечение может иметь любую форму симметричную относительно осей x и y , но для конкретики было выбрано прямоугольное сечение размерами $2h*b$. Постараемся в данной работе учесть все вышесказанное, но сначала сделаем несколько упрощающих предположений. Будем учитывать три основных фактора, приводящие к изгибу в плоскости $x-z$:

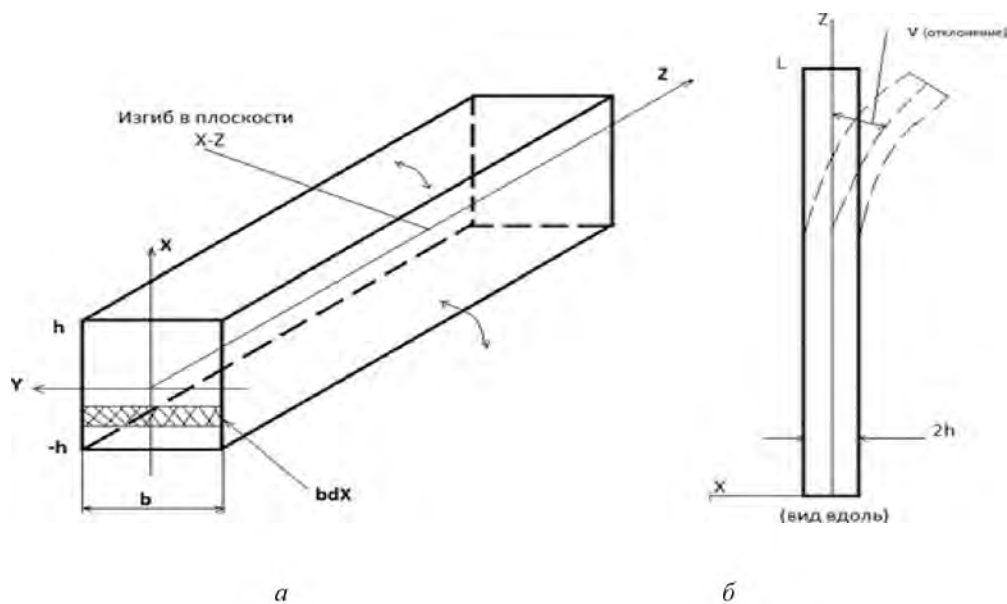
- приложение механических усилий к верхней поверхности балки в направлении оси x ;
- объемные термические деформации;
- необратимое радиационное распухание.

Считаем, что изгиб происходит в одной плоскости в результате воздействия одного из перечисленных факторов или их комбинации. Причем немеханические нагрузки зависят от текущей координаты x . Предполагается, что все эти деформации симметричны относительно плоскости $x=0$ и изменяются в пределах от $x = -h$ до $x = h$. Таким образом, балка (рис. 2) может изгибаться в плоскости $x-z$ как от действия указанных нагрузок по отдельности, так и от их совместного влияния.

Для определения характеристик напряженно-деформированного состояния балки запишем основные определяющие соотношения для рассматриваемого случая:

- уравнение, связывающее деформации и перемещения (геометрические соотношения);
- уравнения баланса (равновесия);
- уравнения состояния сплошной среды (соотношения для суммарной или полной деформации).

Для решения последних равенств также необходимо задать граничные условия. Все исходные соотношения будем подчинять законам теоретической механики.



а) общий вид; б) вид вдоль
Рисунок 2 – Изгиб бруса (балки).

Сформулируем общую взаимосвязь деформаций и перемещений для поставленной задачи. Геометрия искривленной балки показана на рис. 3. Радиус кривизны центральной плоскости ($x = 0$) обозначим через величину ρ . Назовем такую плоскость нейтральным сечением. В дальнейшем считаем, что деформации здесь нулевые (в отличие от соседних сечений), а длина балки в этой плоскости остается такой же, как в отсутствие изгиба. Тогда длина сечения в точке $\rho + x$ будет равна $(\rho + x) \cdot \theta$, что больше чем длина перед изгибом на величину $x \cdot \theta$. Следовательно, в осевом направлении возникнут деформации равные

$$\varepsilon_z = \frac{x\theta}{\rho\theta} = \frac{x}{\rho}. \quad (1)$$

Как известно, величина обратная радиусу кривизны равна второй производной функции, описывающей кривую (предполагается, что радиус ρ достаточно велик). Обозначим отклонение балки от оси x в плоскости x - z через w (см. рис. 2), запишем:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 w}{dz^2}. \quad (2)$$

Комбинируя двумя последними соотношениями, получим уравнение, связывающее осевую деформацию и продольные перемещения материальных точек модельного твердого тела

$$\varepsilon_z = x \frac{d^2 w}{dz^2}. \quad (3)$$



Рисунок 3 – Продольное сечение изогнутого бруса (плоскость x - z)

Составим уравнения баланса. На рис. 4 показаны силы и моменты, действующие на часть бруса длиной Δz . К его поверхностям приложена нагрузка (нормальное напряжение), распределение которой обозначим через $p(z)$. В поперечном сечении перпендикулярном оси z действует сила сдвига, обозначенная через τ и изгибающий момент относительно оси y , вызванные распределенным нормальным напряжением, изображенным на рис. 4. Считая момент, действующий на элемент поверхности $b\sigma dx$, произведением силы $b\sigma dx$ на плечо x , получим $dM = x\sigma b dx$. Интегрирование же по всему поперечному сечению даст суммарный момент, вызванный распределенными напряжениями

$$M = b \int_{-h}^h x \sigma dx \quad (4)$$

Чтобы сила, действующая в направлении положительных значений x на элемент, изображенный на рисунке 4, была равна нулю, должно выполняться условие

$$\frac{d\tau}{dz} = -p \quad (5)$$

Условие равновесия относительно вращения имеет вид

$$\frac{dM}{dz} = \tau \quad (6)$$

Исключая касательное напряжение τ из выражений (5) и (6), получим уравнение баланса

$$\frac{d^2 M}{dz^2} + p = 0 \quad (7)$$

которое и является главным соотношением равновесия балки представленной на рис. 3.

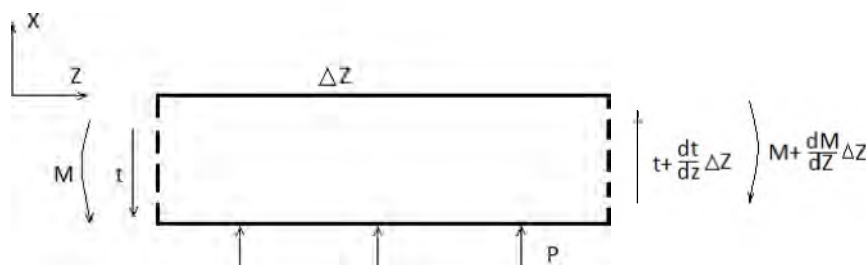


Рисунок 4 – Силы и моменты в сечении бруса

Запишем уравнение для суммарной (полной) деформации. Деформация в направлении z , является суммой упругой деформации вызванной распределением внутреннего напряжения, теплового расширения, распухания и ползучести. В пренебрежении ползучестью (ее можно будет ввести в модель отдельно), осевая деформация запишется в виде:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma}{E} + \alpha T + \varepsilon^s \quad (8)$$

где E – модуль Юнга, α – коэффициент линейного расширения, T – абсолютная температура (температура измеряется относительно вертикальной плоскости ($y-z$), рассекающей балку пополам), а ε^s представляет собой одну треть от полного объемного распухания, обусловленного ростом пор в металле. Заменяя левую часть (8) с помощью соотношения между деформациями и перемещениями (3), умножая результирующее уравнение на $x b dx$ и интегрируя по x получим:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} b \int_{-h}^h x^2 dx = \frac{1}{E} b \int_{-h}^h x \sigma dx + \alpha b \int_{-h}^h T x dx + b \int_{-h}^h \varepsilon^s x dx \quad (9)$$

Предполагаем линейное изменение температуры в поперечном сечении стержня (ось x соответствует отрицательному направлению от центральной линии):

$$T = \frac{\Delta T}{2h} x \quad (10)$$

где ΔT – разность температур между горячей и холодной сторонами бруса. Точно также предполагается, что деформация от распухания изменяется линейно с x :

$$\varepsilon^S = \frac{\Delta\varepsilon^S}{2h} x \quad (11)$$

где $\Delta\varepsilon^S$ – разность распухания в точках бруса ближайшей и наиболее удаленной от центральной линии, является функцией распределения интегрального потока нейтронов Φ (или флюенса нейтронов) и перепада температур (ΔT) по сечению. Заметим, что эта величина изменяется со временем, в то время как разность температур ΔT по сечению от времени не зависит (стационарная температура).

Известно, что момент инерции прямоугольного бруса относительно оси y определяется из формулы:

$$I = b \int_{-h}^h x^2 dx \quad (12)$$

Такой момент инерции является геометрической характеристикой сечения бруса. Уравнение (12) применимо к сплошному прямоугольному брусу. Аналогичные формулы могут быть получены для других форм и, в частности, для полого шестиугольника (конфигурация чехла ТВС активной зоны АЭС). Используя (10)–(12) и (4) ДУ изгиба бруса запишется в виде:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{M}{EI} + \frac{\alpha \Delta T}{2h} + \frac{\Delta\varepsilon^S}{2h} \quad (13)$$

Теперь для определения профиля изогнутого бруса необходимо определить момент M и проинтегрировать соотношение (13) при соответствующих ГУ. Изгиб бруса вызывается прямолинейной нагрузкой (первый член в правой части равенства), термическим расширением и распуханием. Поскольку, как было оговорено в начале задачи, общий прогиб может быть получен суммированием этих 3-ех компонент, исследуем каждую из них в отдельности.

1. Пусть $z = 0$ является осевой координатой верхней опорной плиты. Предположим, что поперечная сила приложена на расстоянии L от верхней плиты (модель ТВС, вставленной в опорные плиты). Т.к. приложенная сила равна нулю везде кроме точки $x = L$, то интегрирование (7) дает следующий результат

$$M = az + b \quad (14)$$

Здесь a и b константы, определяемые из условий на свободном конце.

Приложенная локальная сила F определяет сдвиговое напряжение τ на конце модели. Кроме того, на свободном конце объекта исследований (рис. 2) должен зануляться момент M . Таким образом ГУ при $z = L$ будут иметь вид

$$M = 0, \quad \tau = F, \quad (15)$$

т.к. нагрузка p равна нулю вдоль длины бруса уравнение (5) указывает на то, что τ при этом постоянно, или $\tau = F$ для всех z . Тогда Уравнение (6) дает

$$\frac{dM}{dz} = F. \quad (16)$$

С помощью последнего равенство можно определить одну из констант интегрирования: $a = F$. Определение второй константы может быть получено из условий равенства нулю момента при $z = L$. В таком случае момент, приложенный к брусу равен

$$M = -F(L - z) \quad (17)$$

Поскольку в реальности ТВС крепится в опорной плите, то справедливо равенство

$$v(0) = \left. \left(\frac{dv}{dz} \right) \right|_0 = 0 \quad (18)$$

Подставляя (17) в (16) (пренебрегая последними двумя членами в правой части), интегрируя и используя ГУ при $z = 0$ из уравнения (18), получим следующую величину прогиба

$$v = \frac{Fz^2}{2EI} \left(L - \frac{z}{3} \right) \quad (19)$$

2. При линейном распределении температуры вдоль оси z распределение температуры по брусу задается (10). В отсутствие приложенных механических нагрузок и радиационного облучения изгиб, вызванный неравномерностью температуры по ТВС, можно определить из решения уравнения

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{\alpha \Delta T}{2h} \quad (20)$$

Таким образом перепад температуры в сечении ΔT является функцией высоты и вычисляется из анализа температур в ТВС. Для частного модельного (но нереального в технологической практике) случая, когда ΔT не зависит от z , интегрирование (20) с учетом ГУ в соответствии с уравнением (18) даст

$$v = \frac{\alpha \Delta T}{4h} z^2 \quad (21)$$

3. Для линейного поперечного профиля распухания прогиб определяется из уравнения:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{\Delta \epsilon^S}{2h} \quad (22)$$

Последнее потребует знания осевого изменения $\Delta \epsilon^S$ и соответствующих ГУ для интегрирования расчетной области.

В отсутствии ползучести (термической и радиационной) несдерживаемый прогиб ТВС при наличии градиента температуры и радиационного распухания получается из решения уравнений (20) и (22) при использовании в обоих случаях условия (18). Профиль полного прогиба получается суммированием (суперпозицией) указанных двух немеханических компонент. Результаты такого вычисления показан ниже на графиках распределения перемещений, напряжений и деформаций (рис/ 5-7).

В качестве примеров тестовых (модельных) расчетов рассматривалась балка прямоугольного сечения 0.04×0.16 м общей длиной 2.25 м, которая находится в комплексных термосиловых и радиационных условиях нагружения: под действием приложенной силы F к верхней поверхности балки; объемно термического расширения и радиационное распухание. Материал рассматриваемого образца: нержавеющая сталь аустенитного класса 316 (по классификации AISI). В соответствии с данными работы [2] распухание указанной стали с ГЦК кристаллической решеткой хорошо описывается в интервале температур (вплоть до $0.5T_{\text{пл}}$) следующей эмпирической зависимостью

$$S(\Phi, T) = 4,9 \cdot 10^{-49} (\Phi t)^{1,71} \cdot 10^{\frac{15490}{T} - \frac{5,98 \cdot 10^6}{T^2}} \quad (23)$$

где Φ – плотность потока высокоэнергетических частиц, t – параметр времени, T – температура, задаваемая, например, функцией вида

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{2h} \quad (24)$$

Вообще говоря, эта функция для неоднородного поля температур может иметь любой вид (конечно, удовлетворяющий закону Фурье) т.е. даже может быть задана численно, например, по результатам теплового моделирования или по экспериментальным данным.

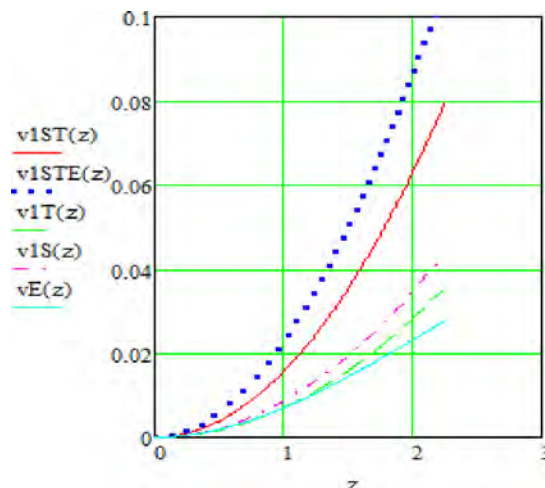


Рисунок 5 – Суммарные смещения для 1-го сечения ($x=0.04$ м).

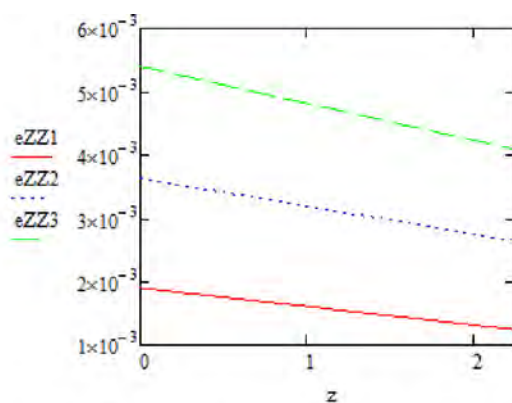


Рисунок 6 – Суммарные деформации для трёх сечений.

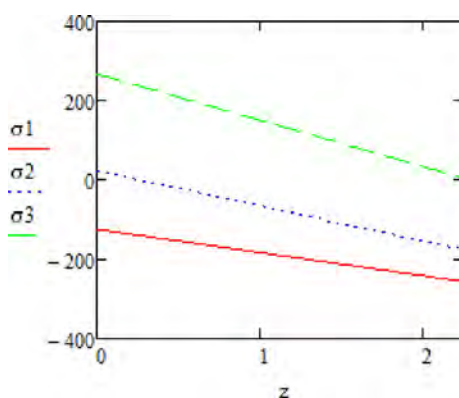


Рисунок 7 – Суммарные напряжения для трёх сечений.

Обсуждение полученных результатов. Как видно из представленных графиков, суммарный прогиб от термической нагрузки и радиационного распухания достигает величины 8 см в верхней части ТВС; суммарный прогиб от совместной термосиловой нагрузки и радиационного распухания достигает величины 11 см, а от радиационного распухания около 4 см. Причем, отметим, что если обратимая тепловая компонента прогиба исчезает при охлаждении, например при выключении реактора (для замены топлива или расхолаживания), то постоянная искривленность, вызванная необратимым радиационным распуханием, сохраняется. Графики, представленные на рис. 6–7, иллюстрируют общие трудности, возникающие при размещении головок сборки под теплоносителем, так как за время $t = 1000$ ч деформации достигают 0.5%, и указывают на немалые механические взаимодействия между ТВС соседних рядов (напряжения достигают по модулю 217 МПа). Несмотря на возникающие значительные напряжения, мгновенные пластические деформации в стальном материале не наблюдаются вследствие радиационного упрочнения сплошной среды. За счет последнего явления, предел текучести указанной стали (AISI 316) при плотности потока 10^{22} нейтрон/см²ч повышается до 570 МПа (по данным [3]). Поэтому разрушение указанной модели ТВС будет происходить со временем в области упругих напряжений за счет накоплений именно деформаций ползучести. Последние и будут отвечать за изменение длительных механических свойства твердого тела при облучении.

Вывод. В данной работе на основе классических подходов механики и современных численных методов даны теория и практика расчета объемных и необратимых деформаций при механических и немеханических условиях нагружения для структурных элементов типа балка, работающих, в первую очередь, на изгиб. Приведены формулы учета неоднородного термического расширения и радиационного распухания. На выполненном примере тестового расчета было показано влияние каждого из 3-ех факторов изгиба модели массивной балки. Создана универсальная основа для решения подобных задач в программном пакете MathCAD 15.0, где реализована возможность, изменения свойств материала и геометрии исследуемого образца, поперечного сечения, значения внешних факторов сразу

получить достоверную информацию о перемещениях точек ТВС, а также возникающих деформациях и напряжениях конструкции.

Резюме

Рассмотрена механико-математическая модель тепловыделяющей сборки (ТВС) активной зоны ядерного реактора, которая аппроксимировалась балкой сечением 0.04x0.16 м и длиной 2.25 м. Учитывались 3 фактора, приводящих к изгибу: 1) приложения силы к верхней поверхности балки; 2) объёмные термические деформации; 3) необратимое радиационное распухание. Изгиб происходит в одной плоскости в результате воздействия одного из этих факторов или их комбинации. В работе представлены графики результатов расчетов как от действия указанных нагрузок по отдельности, так и от их совместного влияния. Для определения напряжений и перемещений использованы следующие соотношения: 1) уравнение, связывающее деформации и перемещения; 2) уравнения равновесия; 3) уравнения для суммарной деформации. Полученные графики иллюстрируют трудности, возникающие при размещении головок сборки под теплоносителем, и указывает на немалые механические взаимодействия между ТВС соседних рядов.

Благодарности

- Авторы работы считают приятным долгом выразить благодарность профессорам А.В. Чигареву и И.С. Куликову за плодотворные обсуждения и дискуссии в Белорусском национальном техническом университете на кафедре «Теоретическая механика».
- Работа выполнялась при финансовой поддержке БРФФИ и Минобразования Республики Беларусь в рамках проекта №Т12МВ-038.

Литература

1. Конобеевский, С. Т. Действие облучения на материалы: Введ. в радиац. материаловедение. - М.: Атомиздат, 1967. - 401 с.
2. Куликов, И.С. Прочность элементов конструкций при облучении / И.С. Куликов, В.Б. Нестеренко, Б.Е. Тверковкин. - Минск: Наука и техника, 1990. - 144с
3. Зайцев, В. Н. Напряженно-деформированное состояние железобетонных защитных оболочек АЭС с учетом трещинообразования : Автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. техн. наук : (05.23.11). - Л., 1984. - 20 с.
4. Куликов, И.С. Прочность тепловыделяющих элементов быстрых газоохлаждаемых реакторов / И.С. Куликов, Б.Е. Тверковкин. - Минск: Наука и техника, 1984. - 104с
5. Писаренко, Г. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести: Справ. пособие. - Киев : Наук. думка, 1981. - 493 с.
6. Изменение механических свойств стали ОХ16Н15МЗБ в температурном интервале радиационного распухания / В. С. Неустроев, В. Н. Голованов, А. В. Поветянко и др. - М.: ЦНИИатоминформ, 1986. - 14 с.

Summary

This paper considers the problems of modern methods for calculating designs and materials in the nuclear industry. The long beam in the conditions of thermo power influence is considered in this article. The aim of the paper is to produce a model of solve stress/strain state for NPP's long assemblies. Mechanical model for describing steady stress/strain state of the NPP's fuel assemblies are proposed. A numerical solution has been proposed to solve stress/strain state problem under swelling and thermal mechanical strains. A mathematical model has been constructed. The computer program of decision of the thermo radiation task in package Mathcad has been programmed. A graphic distribution of displacements, stresses and strains have been received. All the obtained results have passed through checking procedures.

Поступила в редакцию 11.09.2012

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ РОБОТИЗИРОВАННОГО КОМПЛЕКСА В ПАКЕТЕ FANUC ROBOGUIDE

Бахмутский Ю.А., Громько О.В.

УО «Белорусский государственный университет», Минск

В современном производстве широко распространены робототехнические комплексы (РТК) на базе роботов Fanuc. Однако традиционное проектирование таких комплексов и наладка их работы занимают много времени и сопряжены с большими дополнительными расходами. При натурной отладке возможен также выход оборудования из строя, например, из-за неточностей при налаживании совместной работы устройств РТК. И, самое главное, в процессе отладки рабочих режимов для операторов может возникнуть опасность из-за неправильного или нерационального расположения объектов РТК (когда не учтены зоны досягаемости роботов, не выставлены ограждения и т.д.).

В настоящее время появились возможности моделирования и программирования РТК ещё до внедрения их в производство. Одну из таких возможностей предоставляет японская корпорация Fanuc - компания-производитель числового программного управления (ЧПУ) и систем промышленной автоматизации, а также промышленных роботов. Разработанное ею программное обеспечение Fanuc Roboguide позволяет создавать компьютерные модели РТК, налаживать совместную работу отдельных его объектов и использовать полученные результаты для всесторонней симуляции, виртуальных испытаний, исследования кинематики и динамики комплекса и программирования рабочих циклов при создании реального РТК.

Процесс создания компьютерной модели РТК с использованием пакета программ Fanuc Roboguide можно условно разделить на 2 этапа: непосредственно моделирование технологического комплекса и написание программ для созданной модели.

В работе рассматриваются описанные задачи на примере следующего практически реализованного технологического процесса: с входного конвейера "Fixture1" приходит продукция, которая представляет собой заготовки "Part1". Первый робот R-2000iA/165F занимается подготовкой слоя для паллетизации. Он берет по 3 заготовки с конвейера "Fixture1" и согласно заложенному алгоритму (используется два способа укладки, следовательно, существует два типа слоев) выкладывает их на платформе "Fixture2". После завершения формирования слоя в целях предотвращения столкновения с другим оборудованием робот возвращается в исходное положение. Второй робот M410iB/300 получает разрешающий сигнал и забирает подготовленный слой с платформы "Fixture2", а затем укладывает его на поддон, находящийся на конвейере "Fixture3". Таким образом, для завершения формирования полной паллеты он должен уложить восемь слоев. Для укладки межслойных картонных листов служит третий робот – M710iC/20L. Последний после формирования разрешающего сигнала от робота M410iB/300 достает один картонный лист из диспенсера "Fixture5" и укладывает его на верхний слой паллеты на конвейере "Fixture3".

Следовательно, процесс моделирования описанного технологического процесса включает следующие этапы создания модели:

- конфигурация объектов, добавление оборудования и типов заготовок;
- создание программ для робота, выполняющего операцию подготовки слоя;
- создание программ для робота, выполняющего операцию укладки межслойных картонных листов.

Для практического повышения стабильности паллеты вводится два типа слоев; причем, как правило, второй является перевернутой копией первого, а их складирование осуществляется поочередно. Для решения этой задачи также используются межслойные картонные листы.

Приведем основные этапы создания компьютерной модели РТК (рис. 1).

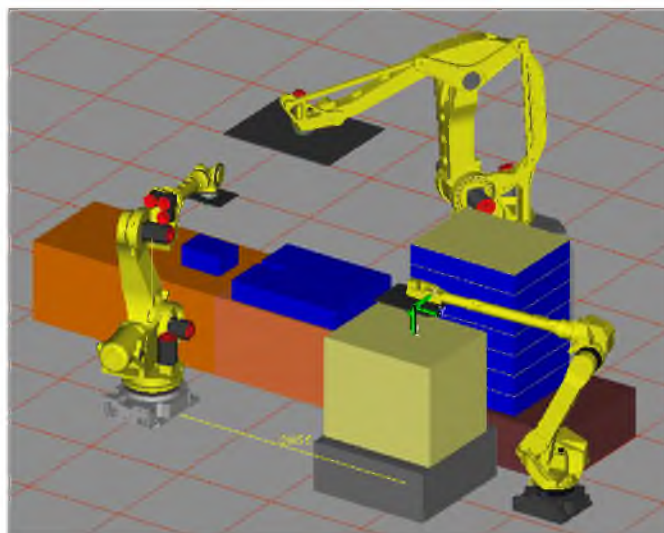


Рисунок 1 - Общий вид РТК

1. Добавляем все элементы проектируемого комплекса:
 - три робота манипулятора (сами роботы и инструменты для каждого робота);
 - элементы технологической оснастки (стол-конвейер, стол для укладки слоёв);
 - два типа заготовок (одна для слоёв, одна для межслойных листов).
2. Располагаем элементы согласно схеме размещения в проекте. Устанавливаем необходимые размеры для каждого элемента.
3. Выполняем конфигурацию каждого объекта:
 - устанавливаем связь каждого робота с соответствующим инструментом;
 - выполняем связь инструментов и элементов технологической оснастки с заготовками;
 - указываем, какие действия будут проводиться с заготовками (взятие/укладка);
 - выполняем синхронизацию роботов (посредством обмена сигналами).
4. Создаём программы для каждого манипулятора в проекте и главную программу, обеспечивающую взаимодействие между манипуляторами.

Далее приведен программный код для укладки слоя заготовок:

1: DO[1]=OFF	24: CALL PickPnt
2: J P[1] 100% CNT100	25: J P[14] 100% FINE
3: WAIT 0I(1)=0N	26: L P[15] 2000mm/sec FINE
4: CALL PickPnt	27: CALL Drop3P
5: J P[2] 100% FINE	28: L P[16] 2000mm/sec FINE
6: L P[3] 2000mm/sec FINE	29: CALL PickPnt
7: CALL Drop3P	30: J P[17] 100% FINE
8: L P[4] 2000mm/sec FINE	31: L P[18] 2000mm/sec FINE
9: CALL PickPnt	32: CALL Drop3P
10: J P[5] 100% FINE	33: L P[19] 2000mm/sec FINE
11: L P[6] 2000mm/sec FINE	34: CALL PickPnt
12: CALL Drop3P	35: J P[20] 100% FINE
13: L P[7] 2000mm/sec FINE	36: L P[21] 2000mm/sec FINE
14: CALL PickPnt	37: CALL Drop3P
15: J P[8] 100% CNT10	38: L P[22] 2000mm/sec FINE
16: L P[9] 2000mm/sec FINE	39: CALL PickPnt
17: CALL Drop3P	40: J P[23] 100% FINE
18: L P[10] 2000mm/sec FINE	41: L P[24] 2000mm/sec FINE
19: CALL PickPnt	42: CALL Drop3P
20: J P[11] 100% FINE	43: L P[25] 2000mm/sec FINE
21: L P[12] 2000mm/sec FINE	44: J P[26] 100% FINE
22: CALL Drop3P	45: DO[1]=ON
23: L P[13] 2000mm/sec FINE	46: WAIT 2.00(sec)

Для работы РТК необходимо программировать два различных способа укладки слоёв, однако программа для второго варианта укладки будет отличаться от первого только координатами точек, и поэтому здесь не приводится.

Программа для взаимодействия всех роботов в проекте (main) имеет вид:

1: J P[1] 100% CNT100	22: CALL PickPnt
2: CALL PickPnt	23: J P[14] 100% FINE
3: J P[2] 100% FINE	24: L P[15] 2000mm/sec FINE a
4: L P[3] 2000mm/sec FINE	25: CALL Drop3P
5: CALL Oiop3P	26: L P[16] 2000mm/sec FINE
6: L P[4] 2000mm/sec FINE	27: CALL PickPnt
7: CALL PickPnt	28: J P[17] 100% FINE
8: J P[5]100% FINE	29: L P[18] 2000mm/sec FINE
9: L P[6] 2000mm/sec FINE	30: CALL Drop3P
10: CALL Drop3P	31: L P[19] 2000mm/sec FINE
11: L P[7] 2000mm/sec FINE	32: CALL PickPnt
12: CALL PickPnt	33: J P[20] 100% FINE
13: J P[8] 100% CNT10	34: L P[21] 2000mm/sec FINE
14: L P[9] 2000mm/sec FINE	35: CALL Drop3P
15: CALL Drop3P	36: L P[22] 2000mm/sec FINE
16: L P[10] 2000mm/sec FINE	37: CALL PickPnt
17: CALL PickPnt	38: J P[23] 100% FINE
18: J P[11] 100% FINE	39: L P[24] 2000mm/sec FINE
19: L P[12] 2000mm/sec FINE	40: CALL Drop3P
20: CALL Drop3P	41: L P[25] 2000mm/sec FINE
21: L P[13] 2000mm/sec FINE	42: J P[26] 100% FINE

Построенная модель роботизированного комплекса имеет широкое применение в практике производства, в частности, внедрена в итальянской компании Elettric80 (рис. 2).

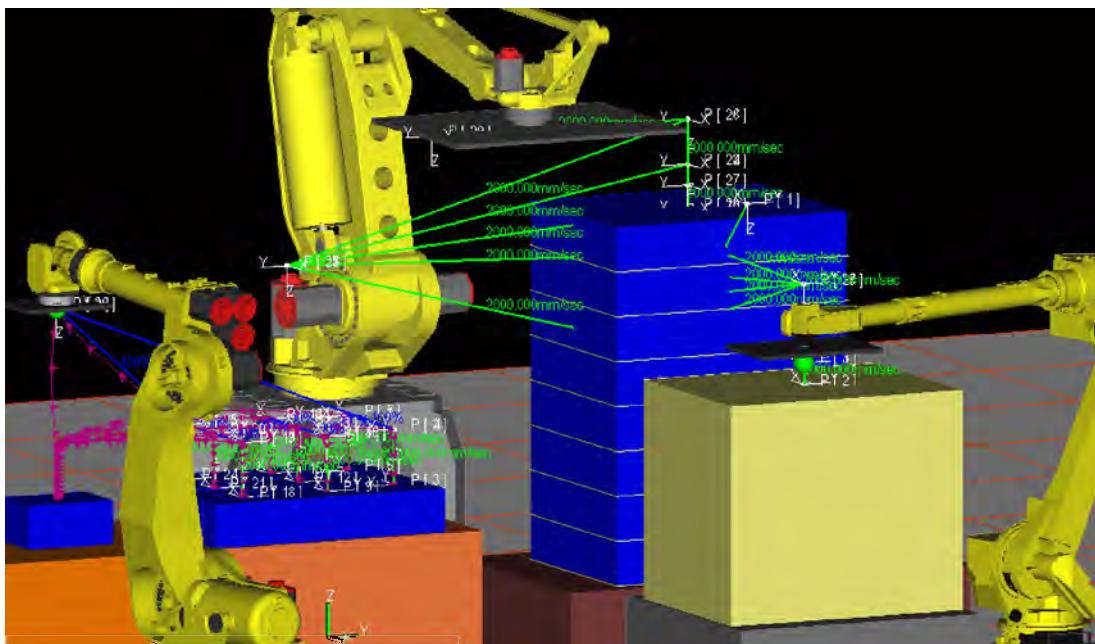


Рисунок 2 - РТК после выполнения программы

В построенной модели можно проводить измерения расстояний между объектами, траекторий, строить диаграмму рабочего времени, оценивать время «простоя». Все эти результаты измерения могут быть использованы для оптимизации рабочего процесса, т.е. снижать производственные издержки. На приведенных далее рис. 3,4 проиллюстрированы описанные выше возможности анализа и оптимизации производственных процессов.

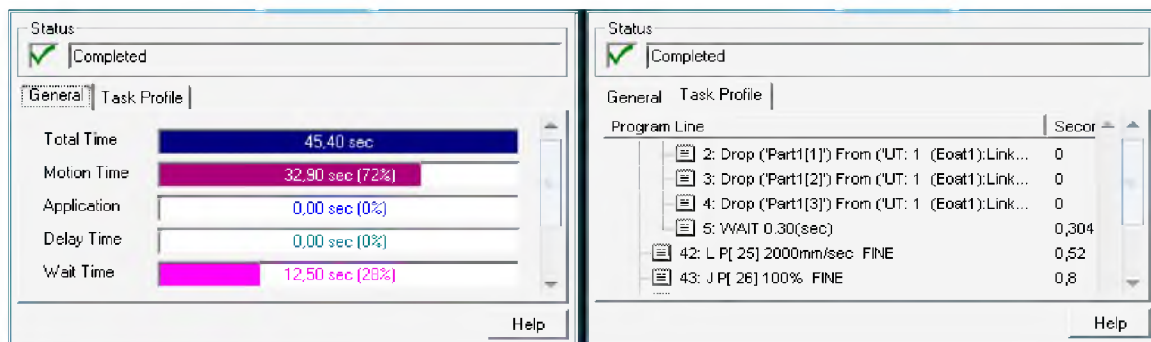


Рисунок 3 - Оценка рабочего времени и времени «простоя»

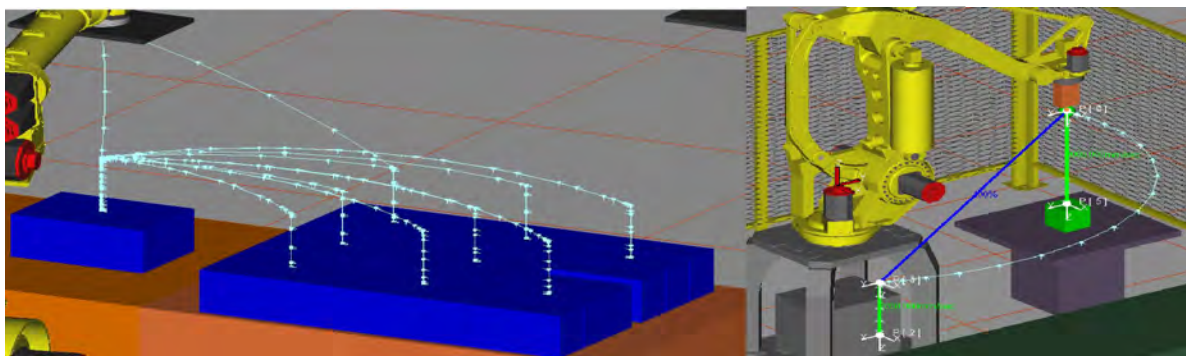


Рисунок 4 - Траектории движения роботов

И, наконец, отметим еще одно важнейшее преимущество изложенного в работе алгоритма создания компьютерной модели РТК. Оно заключается в том, что созданная программа может быть сразу же, без дополнительного тестирования и отладки, использована непосредственно на производстве. Для этого ее достаточно сконвертировать и загрузить в контроллер робота.

Резюме

Статья посвящена комбинированному методу компьютерного моделирования на основе пакета программ Fanuc Roboguide для симуляции и анализа роботизированных комплексов. Дополнительное преимущество рассматриваемого подхода заключается в параллельном создании программ для контроллеров роботов. Эти программы могут использоваться в реальных технологических процессах, основывающихся на использовании смоделированного робототехнического оборудования.

Литература

1. Робототехника. Кинематика и динамика манипуляторов: учеб.-метод. пособие / О. Н. Вярвьильская [и др.]; под общ. ред. проф. М. А. Журавкова. – Минск: БГУ, 2010. – 232 с.
2. Fanuc Robotics Industrial Robots and Robotic Automated Systems:
3. [Электронный ресурс]. М., 2012. URL: <http://www.fanucrobotics.com>.
4. Fanuc Roboguide: [Электронный ресурс] // CAD/CAM Software. М., 2012. URL: <http://www.johnhartsoftware.com.au/automation-software/fanuc-roboguide/>.
5. RobotWorx: [Электронный ресурс] // Simplify with Fanuc Roboguide. М., 2012. URL: <http://www.robots.com/blog/viewing/simplify-with-fanuc-roboguide-paintpro/515>.

Summary

The paper deal with combining method of computer simulation program Fanuc Roboguide to analyze and simulate robot mechanisms. The additional advantage of this approach is the program for robot controller. This program can be used for real technological process based on the modeled robotic equipment.

Поступила в редакцию 11.11.2012

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ НАГРУЖЕНИИ.

Мелешко И.Н., Пронкевич С.А.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Введение. В данной работе рассматривается задача потери устойчивости неравномерно нагруженной круглой пластины. Как известно, при нагружении пластины сжимающими усилиями в ее срединной плоскости, при критическом значении этих усилий, исходная прямолинейная форма поверхности пластины перестает быть единственно возможной. [1]. Задача устойчивости круглой пластины, сжатой равномерными силами, приложенными по контуру, была рассмотрена многими авторами [2, 3] и имеет аналитическое решение. Для задачи о потере устойчивости круглой пластины при неравномерных граничных условиях, аналитическое решение найти весьма затруднительно и решений данной задачи известно гораздо меньше, хотя она также представляет определенный практический интерес в машиностроении, приборостроении и т.д.

Постановка задачи. Рассмотрим изотропную пластину, срединная плоскость которой лежит в плоскости Oxy (рис. 1.). Задача устойчивости пластины основывается на решении дифференциального уравнения:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D}, \quad (1)$$

где w – прогиб, q – внешняя нагрузка, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость пластины, h – толщина пластинки.

Под поперечной нагрузкой q здесь понимается распределенная нагрузка в срединной плоскости

$$\text{пластины: } q = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

С учетом следующих возможных граничных условий:

1. Край свободно оперт:

$$w = 0, M_x = 0 \quad (\text{или } M_y = 0), \quad (2a)$$

где M_x, M_y – изгибающие моменты.

2. Край жестко заделан

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{или } \frac{\partial w}{\partial y} = 0) \quad (2b)$$

3. Край свободен

$$M_x = 0 \quad (\text{или } M_y = 0) \quad V_x = 0 \quad (\text{или } V_y = 0), \quad (2c)$$

V_x, V_y – перерезывающие усилия.

Для круглой пластины целесообразней перейти к полярным координатам r, φ : $r^2 = x^2 + y^2$, $\varphi = \arctg(y/x)$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{q}{D} \quad (3)$$

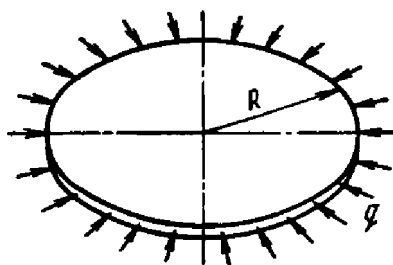


Рисунок 1 – Круглая пластина, нагруженная по контуру постоянной нагрузкой.

Уравнение (3) легко интегрируется при постоянных сжимающих усилиях q [4] и решение выражается в функциях Бесселя:

а) при осесимметричной форме потери устойчивости:

$$w_0(r) = C_1 J_0(kr) + C_2 Y_0(kr) + C_3 \ln kr + C_4 \quad (n = 0)$$

б) при неосесимметричной форме потери устойчивости:

$$w_n(r) = C_1 J_n(kr) + C_2 Y_n(kr) + C_3 r^{-n} + C_4 r^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

где J_n и Y_n – функции Бесселя первого и второго порядка соответственно, C_i – постоянные интегрирования, зависящие от граничных условий.

На рис. 2 представлены осесимметричные (первая и четвертая) формы потери устойчивости круглой пластины.

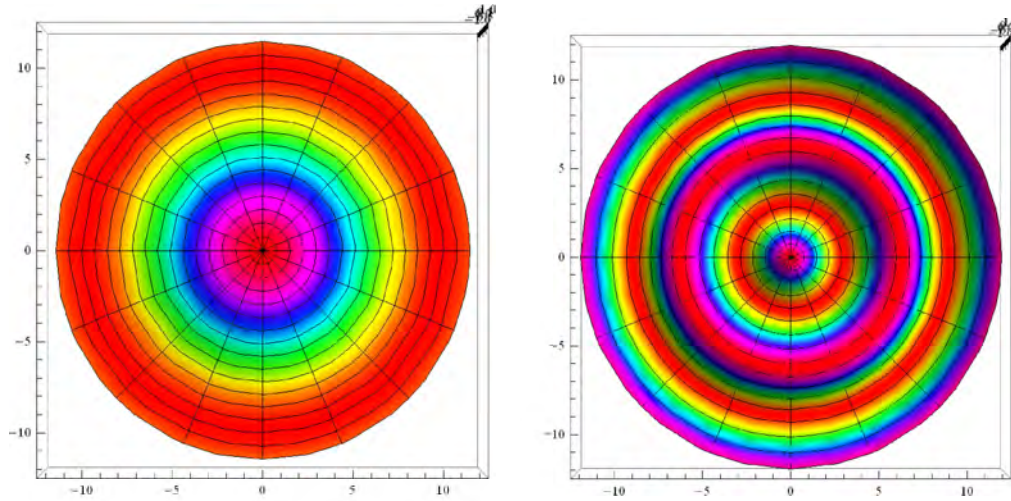


Рисунок 2 – Первая и четвертая формы потери устойчивости равномерно сжатой круглой пластины, полученные по аналитическим формулам.

При численном моделировании данной задачи в системе ANSYS появляются формы потери устойчивости, имеющие практически одинаковую критическую нагрузку (различие составляет менее 1%) и форму выпучивания, различающиеся лишь углом поворота (приблизительно $\frac{\pi}{n}$, n – число волн по окружности).

В связи с этим номер формы потери устойчивости при аналитическом расчете не соответствует номеру формы потери устойчивости при численном расчете в системе ANSYS. (рис. 3)

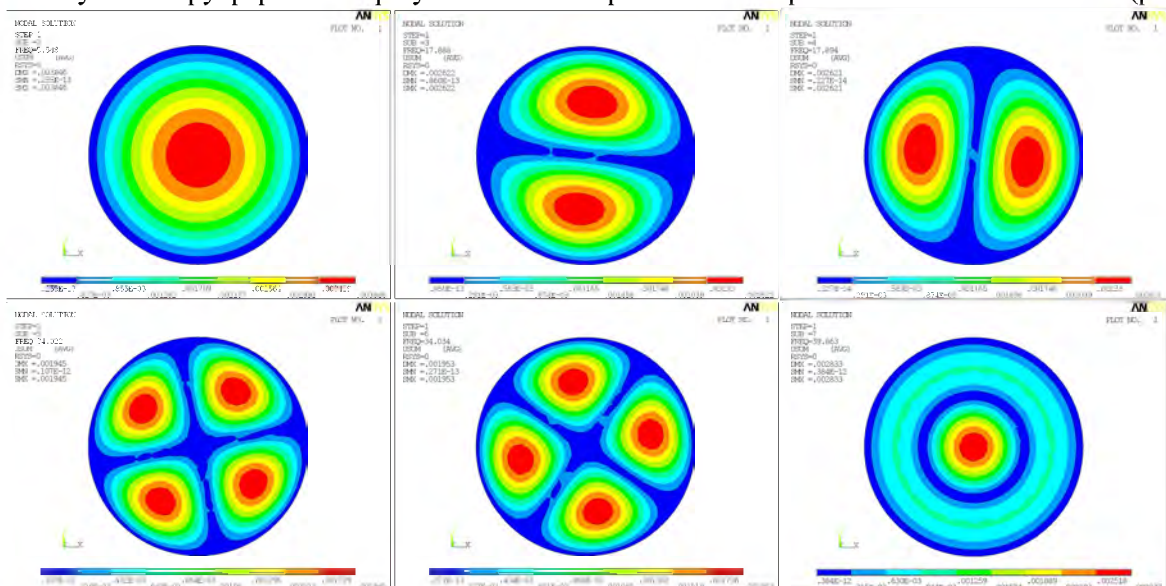


Рисунок 3 – Первые 6 формы потери устойчивости равномерно сжатой пластины

1. Рассмотрим неравномерность граничных условий в случае переменного сжатия.

Рассмотрим круглую изотропную пластину, нагруженную по контуру сжимающей силой, заданной по синусоидальному закону:

$$p = p_0 \sin 2\varphi$$

где p_0 – множитель

Пластина шарнирно оперта по контуру.

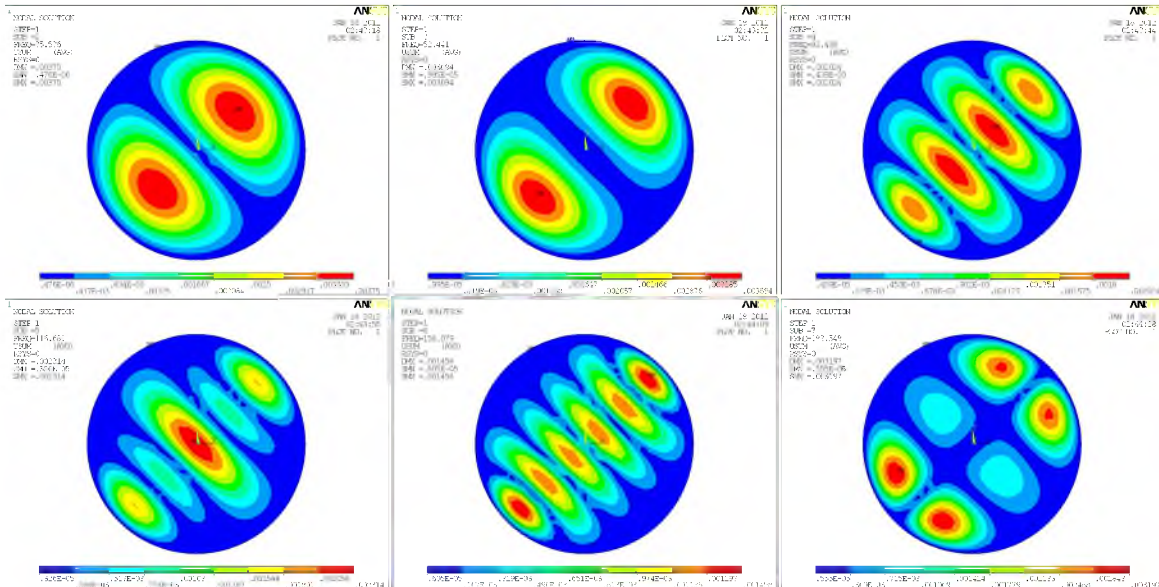


Рисунок 4 – Формы потери устойчивости пластины, сжимаемой силами, изменяющимися по закону $p = p_0 \sin 2\varphi$.

Сравнение результатов равномерно сжатой пластины и сжатой по закону синуса показывает существенное влияние характера нагрузки на формы потери устойчивости. Неравномерность нагружения ведет к усложнению собственных форм и спектра для высших гармоник.

Кроме того, формы потери устойчивости круглой пластины, нагруженной по синусоидальному закону подобны формам потери устойчивости прямоугольной пластины:

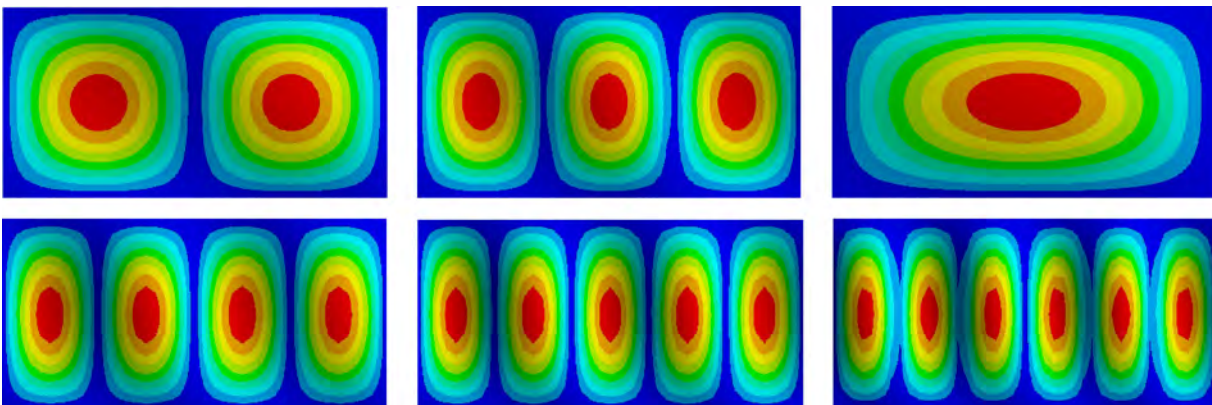


Рисунок 5 – Первые шесть форм потери устойчивости прямоугольной пластины, сжатой по торцевым сторонам

2. Рассмотрим задачу потери устойчивости круглой пластины, со смешанными граничными условиями:

Пластина нагружается силой $q(\varphi) = \text{const}$, на участке $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, и жестко закреплена при

$$\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$$

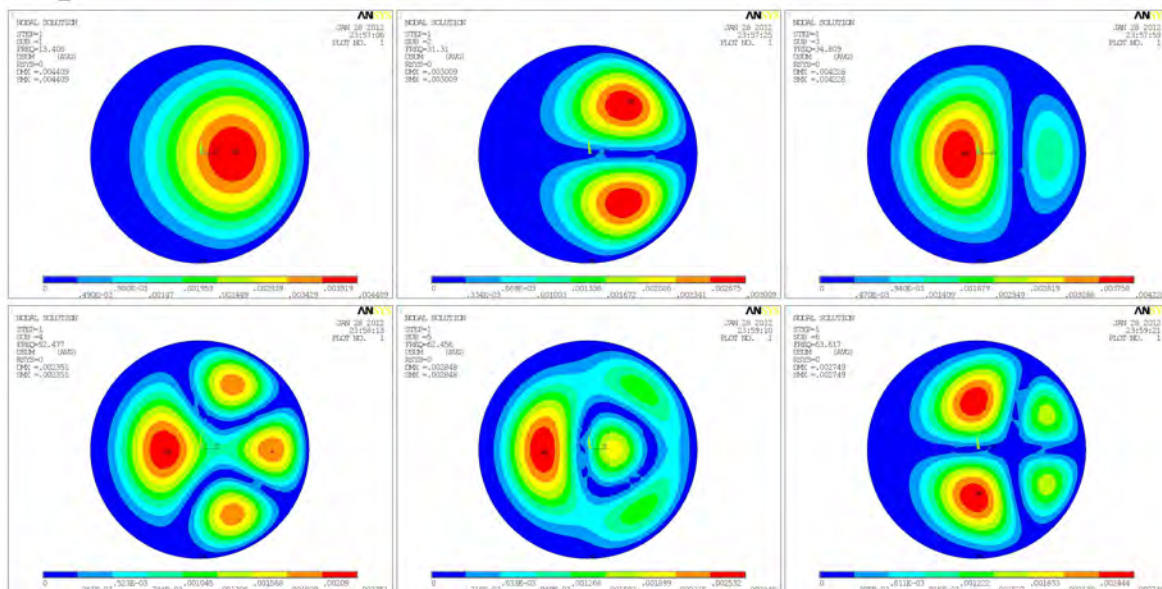
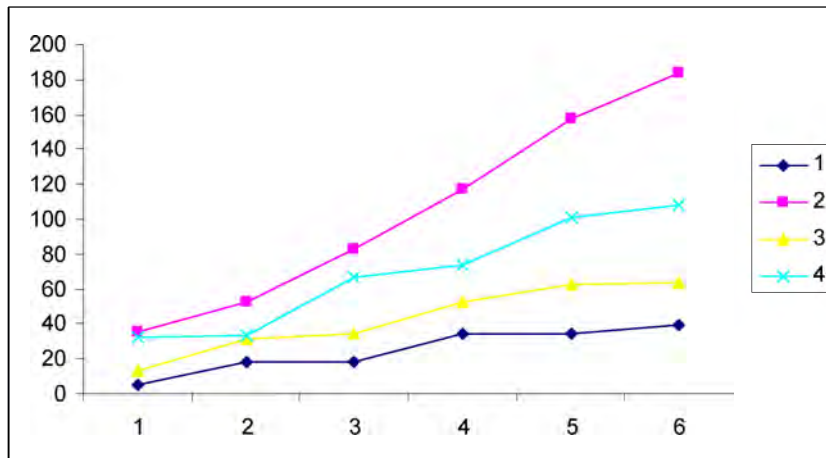


Рисунок 6 – Формы потери устойчивости при закреплении половины пластины

Спектр собственных частот выпучивания в данном случае подобен случаю равномерного сжатия, но нерегулярным образом. При увеличении неравномерности нагружения и закрепления увеличивается отличие формы потери устойчивости от симметричного случая.

В рис.7 представлено изменение критических нагрузок для рассмотренных выше примеров.



1 – равномерно сжимаемая круглая пластина, 2 – круглая пластина, сжимаемая неравномерной нагрузкой, распределенной по закону синуса, 3 – круглая пластина с неравномерными граничными условиями, 4 – прямоугольная пластина, сжатая с двух противоположных сторон

Рисунок 7 – Изменение критических нагрузок для рассмотренных выше задач

Выводы. При расчете критических нагрузок в системе ANSYS происходит дублирование форм потери устойчивости и критических нагрузок, обусловленное, по всей видимости, неравномерностью сетки конечно – элементной модели.

При неравномерных граничных условиях происходит трансформация соответствующих форм потери устойчивости для случая равномерного осесимметричного сжатия.

Резюме

В данной работе рассматривается задача потери устойчивости неравномерно нагруженной круглой пластины. Для задачи о потере устойчивости круглой пластины при неравномерных граничных условиях, аналитическое решение найти весьма затруднительно и решений данной задачи известно гораздо меньше. В статье получено численное решение задачи потери устойчивости круглой пластины для неравномерных граничных условиях.

Литература

1. Авдонин. Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций. М. «Машиностроение», 1969
2. Расчеты на прочность в машиностроении. Т 3, под ред. С.Д. Пономарева. Москва МАШГИЗ 1956-59г.
3. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М. «Наука», 1967, 984 с.
4. Алфутов. Основы расчета на устойчивость. М. «Машиностроение», 1978, 312 с.
5. K. Kumarci, P.K. Dehkordi and I. Mahmodi, 2010. Calculation of Plate Natural Frequency by Genetic Programming. Journal of Applied Sciences, 10: 451-461.

Summery

In this paper, the problem of instability unevenly loaded circular plate. For the problem of loss of stability of a circular plate with non-uniform boundary conditions, the analytical solution is very difficult to find a solution to this problem, and much less is known. In this paper a numerical solution to the problem of instability for nonuniform circular plate boundary conditions.

Поступила в редакцию 09.10.2012

ОЦЕНКА СОСТОЯНИЯ ЛОКАЛЬНО ДЕФОРМИРОВАННЫХ ЗОН МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗМЕРЕНИЯ ТВЕРДОСТИ

Хмелев А.А., Реут Л.Е.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

При текущем контроле состояния конструкций, а также при проведении исследований в аварийных ситуациях незаменимым методом для оценки состояния металла и его механических свойств является измерение твердости.

В настоящей статье предлагается метод, позволяющий по измерению твердости производить оценку пластичности металла эксплуатируемых конструкций, т.е. устанавливать уровень накопленной пластической деформации и определять запас оставшейся пластичности в материале. Этот метод является важным и может иметь большое практическое значение для выявления и оценки состояния локально деформированных зон конструкций, которые возникают в результате некоторых операций технологической обработки металлов, как например, холодная гибка или сварка. Эти зоны представляют потенциальную опасность для конструкции, так как имеют повышенную твердость по сравнению с твердостью исходного металла и могут являться источниками возникновения трещин. Оценка состояния локально деформированных зон основана на взаимосвязи между твердостью материала и его пластичностью, в соответствии с которой при пластическом деформировании твердость стали возрастает от значения HB_0 в состоянии поставки до максимального значения HB_{max} на поверхности разрушения, в то время как ее пластичность в указанном диапазоне изменения твердости соответственно снижается от максимального значения в состоянии поставки до нулевого – на поверхности разрушения.

Предлагаемый авторами метод позволяет через определение твердости, измеренной в локально деформированных зонах конструкции, устанавливать уровень накопленной и оставшейся пластичности, прогнозируя тем самым возможное трещинообразование и разрушение металла. Для измерения твердости в этих случаях предлагается использование портативных приборов типа ТПЦ-4, позволяющих производить замеры и определять значение твердости между точками, лежащими на расстоянии 1–2 мм. Поскольку в локально деформированных зонах распределение твердости имеет пиковый характер и ширина вершины пика, которая соответствует максимальному значению твердости, составляет величину такого же порядка (1–2 мм), то именно указанные приборы способны выявить изменения твердости на таких малых расстояниях.

Предложенный метод оценки пластичности позволяет определять ее значение по двум основным характеристикам – относительному удлинению ϵ и относительному сужению ψ . При этом за основу берутся исходные сертификатные характеристики механических свойств стали в состоянии поставки – предел прочности σ_B материала и относительное удлинение ϵ , а значение ψ , если оно не приведено в сертификатных данных, определяют расчетным путем.

Как известно из работы [1], максимальная твердость в общем случае определяется как:

$$HB_{max} = HB_0 e^{\psi} \quad (1)$$

где HB_0 и ψ – твердость по Бринеллю и относительное сужение стали в состоянии поставки соответственно.

Значение HB_0 определяем по взаимосвязи твердости с пределом прочности [2]:

$$HB_0 = \frac{\sigma_B}{c}, \quad (2)$$

где $c = (0,36 \div 0,365)$ для малоуглеродистых и низколегированных сталей.

Определим расчетным путем относительное сужение ψ по твердости по Бринеллю для случая, когда ψ не входит в сертификатные данные.

Как известно, твердость HB определяется делением силы F , задаваемой прессом Бринелля, на площадь поверхности сферического отпечатка, оставляемого вдавливаемым шариком диаметром D :

$$HB = \frac{F}{\pi D \cdot h} = \frac{2F}{\pi D \cdot \left(D - \sqrt{D^2 - d^2} \right)}. \quad (3)$$

Тогда на основании формулы (3) глубина отпечатка h_0 и диаметр отпечатка d_0 для твердости HB_0 , вычисленной через предел прочности (2), можно определить как:

$$HB_0 = \frac{F}{\pi D \cdot h_0} \rightarrow h_0 = \frac{F}{\pi D \cdot HB_0} \quad (4)$$

$$d_0 = 2\sqrt{h_0 (D - h_0)}. \quad (5)$$

Минимальный диаметр отпечатка d_{\min} , соответствующий максимальному значению твердости HB_{\max} , определяем через вычисленное d_0 (5) и сертификатное значение относительного удлинения ϵ :

$$d_{\min} = \frac{d_0}{e^{\frac{\epsilon}{\epsilon}}}, \quad (6)$$

а величину максимальной твердости HB_{\max} в соответствии с (3) и (6) вычисляем как:

$$HB_{\max} = \frac{F}{\pi D \cdot h_{\min}} = \frac{2F}{\pi D \cdot \left(D - \sqrt{D^2 - d_{\min}^2} \right)}. \quad (7)$$

Тогда относительное сужение на основании формул (1), (4) и (7) равно:

$$\psi = \ln \frac{HB_{\max}}{HB_0} = \ln \frac{h_0}{h_{\min}}. \quad (8)$$

Приведенные выше теоретические расчеты можно использовать для вычисления величины предварительной пластической деформации, возникающей в результате технологической обработки металла и определяемой уровнем его пластического повреждения. Для этого необходимо с помощью прибора ТПЦ-4 произвести замер диаметра d_k и глубины h_k отпечатка в исследуемой пластически деформированной зоне и тогда на основании формул (6) и (8) получаем:

$$\epsilon_{\text{пр}} = \ln \frac{d_0}{d_k} \quad (9)$$

$$\psi_{\text{пр}} = \ln \frac{h_0}{h_k}. \quad (10)$$

Соответственно оставшийся запас пластичности определится как:

$$\epsilon_{\text{ост}} = \epsilon - \epsilon_{\text{пр}} \quad (11)$$

$$\psi_{\text{ост}} = \psi - \psi_{\text{пр}}. \quad (12)$$

Если уровень предварительной пластической деформации достигает значений $\epsilon_{\text{пр}} = (0,19 \div 0,20)$, это соответствует окончанию равномерной деформации при растяжении стандартного образца при испытании на растяжение и началу образованию в нем шейки, а в реальных конструкциях при указанных значениях $\epsilon_{\text{пр}}$ возникают внутренние микро- и макротрещины. В конечном итоге, указанные трещины под действием рабочих напряжений становятся сквозными, и это особенно заметно в конструкциях, работающих в условиях усталостного режима. При снижении температуры твердость металла повышается, что соответственно снижает его пластичность и трещиностойкость.

Резюме

Предложенный метод позволяет оценивать пластичность и трещиностойкости металла локально деформированных зон металлических конструкций при их освидетельствовании или экспертизе при определении остаточного срока службы. Метод отличается простотой исполнения, экономичностью и высокой достоверностью результатов исследования.

Литература

1. Хмелев А.А., Реут Л.Е. Расширение возможностей оценки качества сталей по результатам исследования на ударную вязкость. / Весті НАН Беларусі. – 2009. – № 2. – с. 71-75.
2. Марковец П.М. Определение механических свойств металлов по твердости. – М.: Машиностроение, 1979. – 85с.

Summary

The offered method allows to estimate plasticity and crack resistance of metal of locally deformed zones of metal designs at their survey or examination at definition of residual service life. The method differs simplicity of execution, profitability and high reliability of results of research.

Поступила в редакцию 26.09.2012

РОТАЦИОННОЕ ДВИЖЕНИЕ УПРУГОПОЛЗУЧЕГО МАТЕРИАЛА

¹Лемза А.О., ²Мурашкин Е.В.¹Дальневосточный федеральный университет, Владивосток²Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, Владивосток

Прямолинейные и вискозиметрические течения в теории вязкопластичности рассматривались достаточно подробно [1, 2, 3, 4]. В настоящее время значительный интерес представляет исследование эффектов, которые обуславливаются упругими свойствами среды. Свойство упругости существенно влияет на продвижение упругопластических границ и определяет уровень остаточных напряжений в материале.

В настоящей статье рассматривается задача о вискозиметрическом течении упругоползучего материала, помещённого между двумя жёсткими цилиндрическими поверхностями. Решение ведётся в рамках модели больших деформаций, предложенной в [5, 8] и обобщённой на случай учёта вязких свойств материала на стадии пластического течения [6].

Основные соотношения модели больших деформаций. Кинематика среды в прямоугольной декартовой системе координат определяется зависимостями:

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2} e_{ik} e_{kj} - e_{ik} p_{kj} - p_{ik} e_{kj} + e_{ik} p_{ks} e_{sj}, \quad (1)$$

$$\frac{De_{ij}}{Dt} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2} \left((\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ik}^p + z_{ik}) e_{kj} + e_{ik} (\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{kj}^p - z_{kj}) \right), \quad (2)$$

$$\frac{Dp_{ij}}{Dt} = \varepsilon_{ij}^p - p_{ik} \varepsilon_{kj}^p - \varepsilon_{ik}^p p_{kj}, \quad (3)$$

$$\frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik} n_{kj} + n_{ik} r_{kj}, \quad (4)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}), \quad (5)$$

$$v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j} v_j, \quad (6)$$

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (7)$$

$$r_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}) + z_{ij} (\varepsilon_{sk} - e_{sk}). \quad (8)$$

В соотношениях (1) – (8) d_{ij} – компоненты тензора деформаций Альманси, e_{ij} и p_{ij} – их обратимые и необратимые составляющие, u_i и v_i – компоненты перемещений и скоростей точек среды, ε_{ij} и ε_{ij}^p – компоненты тензоров скоростей полных и необратимых деформаций, z_{ij} – нелинейная часть тензора вращений r_{ij} , $\frac{D}{Dt}$ – объективная производная по времени.

Связь напряжений и обратимых деформаций выражается зависимостями:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial d_{ik}} (\delta_{kj} - 2d_{kj}), \quad p_{ij} \equiv 0, \quad (9)$$

$$\sigma_{ij} = -p_1 \delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - e_{kj}), \quad p_{ij} \neq 0, \quad (10)$$

где

$$W = -2\mu J_1 - \mu J_2 + bJ_1^2 + (b - \mu)J_1J_2 - \chi J_1^3 + \dots,$$

$$J_k \begin{cases} L_k, & p_{ij} \equiv 0, \\ I_k, & p_{ij} \neq 0, \end{cases}$$

$$L_1 = d_{kk}, \quad L_2 = d_{ik}d_{ki}, \quad I_1 = e_{kk} - \frac{1}{2}e_{sk}e_{ks}, \quad I_2 = e_{st}e_{ts} - e_{sk}e_{kt}e_{ts} + \frac{1}{4}e_{sk}e_{kt}e_{tm}e_{ns}.$$

Будем считать, что необратимые деформации накапливаются в среде непосредственно с начала деформирования и определяются реологическими свойствами материала.

Компоненты напряжений связаны с компонентами тензора скоростей необратимых деформаций законом ползучести Нортон [7, 10, 11]:

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial V}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (11)$$

где

$$V = B\Sigma^n, \quad \Sigma = \sqrt{\frac{3}{2}((\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2)}, \quad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - главные значения тензора напряжений.

Процесс ползучести при ротационном вращении. Считаем, что слой материала ограничен цилиндрическими поверхностями $r = r_0$ и $r = R$, а на границе внешнего цилиндра поставлено условие прилипания:

$$\bar{u}|_{r=R} = \bar{v}|_{r=R} = 0. \quad (12)$$

Деформирование осуществляется за счёт поворота внутреннего цилиндра, в то время как внешний цилиндр остаётся неподвижным:

$$u_r = r(1 - \cos\theta(r, t)), \quad u_\varphi = r \sin\theta(r, t), \quad \theta(r_0, t) = \theta_0(1 + \alpha t), \quad (13)$$

$$u_r = u_\varphi = 0, \quad \text{если } r = R, \quad (14)$$

где $\theta(r, t)$ – центральный угол закручивания.

Отличными от нуля компонентами тензора деформаций Альманси остаются следующие:

$$d_{rr} = -\frac{1}{2}g^2, \quad d_{r\varphi} = \frac{1}{2}g, \quad (15)$$

$$g = r \frac{\partial \theta}{\partial r}.$$

Уравнения равновесия в условиях осевой симметрии примут вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = 0. \quad (17)$$

Уравнения изменения компонент необратимых деформаций преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \frac{dp_{rr}}{dt} &= \frac{3Bn}{4} Q^{2-\frac{n}{2}} (1 - p_{rr}) \sigma_{r\varphi} \frac{e_{rr} - e_{\varphi\varphi}}{e_{r\varphi}} - 2p_{r\varphi} \left(r_{\varphi r} + 3Bn \sigma_{r\varphi} Q^{2-\frac{n}{2}} \right), \\ \frac{dp_{\varphi\varphi}}{dt} &= \frac{3Bn}{4} Q^{2-\frac{n}{2}} (1 - p_{\varphi\varphi}) \sigma_{r\varphi} \frac{e_{rr} - e_{\varphi\varphi}}{e_{r\varphi}} + 2p_{r\varphi} \left(r_{\varphi r} - 3Bn \sigma_{r\varphi} Q^{2-\frac{n}{2}} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{dp_{r\varphi}}{dt} = 3Bn Q^{2-\frac{n}{2}} (1 - p_{rr} - p_{\varphi\varphi}) \sigma_{r\varphi} + r_{\varphi r} (p_{rr} - p_{\varphi\varphi}),$$

где

$$Q = 3\sigma_{r\varphi}^2 \left(1 + \left(\frac{e_{rr} - e_{\varphi\varphi}}{e_{r\varphi}} \right)^2 \right).$$

Для решения системы уравнений (16) – (18) построена конечно-разностная схема. В результате интегрирования получены сеточные распределения неизвестных параметров напряжённо-деформированного состояния, построены остаточные напряжения и деформации.

Резюме

Рассматривается деформирование упругоползучей среды между двумя жесткими коаксиальными цилиндрами при повороте одного из них. Решение строится в рамках модели больших упругоползучих деформаций.

Литература

1. Бахшиян Ф.А. Вращение жёсткого цилиндра в вязко-пластичной среде // Прикл. математика и механика. 1948. Т. 12, Вып. 6. С. 650-661.
2. Мясников В.П. Некоторые точные решения для прямолинейных движений вязко-пластической среды // ПМТФ. 1961. №2. С. 79-86.
3. Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х. Нестационарные движения вязко-пластичных сред. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1970. 415 с.
4. Сафрончик А.И. Вращение цилиндра с переменной скоростью в вязкопластичной среде // Прикл. математика и механика. 1959. Т. 23, Вып. 6. С. 998-1014.
5. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Полоник М.В. Возможность повторного пластического течения при общей разгрузке упругопластической среды // ДАН. 2000. Т. 375, №6. С. 767-769.
6. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Мурашкин Е.В. Об остаточных напряжениях в окрестности цилиндрического дефекта сплошности вязкоупругопластического материала // Прикл. механика и техн. физика. 2006. Т. 47, №2. С. 110-119.
7. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. 752 с.
8. Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтанюк Л.В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // ДАН. 1996. Т. 347, №2. С. 199-201.
9. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Устинова А.С. Об учёте упругих свойств неньютоновского материала при его вискозиметрическом течении // Прикл. механика и техн. физика. 2008. Т. 49, №2. С. 143-151.
10. Никитенко А.Ф. Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. – Новосибирск: НГАСУ, 1997. 278 с.
11. Локощенко А.М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. – М.: МГИУ, 2007. 264 с.

Summary

We consider the deformation of the elasto-creep medium between two rigid coaxial cylinders when one of them is turned. The solution is constructed in the model of large elasto-creep deformations.

Поступила в редакцию 16.09.2012

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ МАТЕРИАЛА ПРИ РАСЧЕТЕ В СИСТЕМЕ ANSYS НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЛОПАТКИ УСКОРИТЕЛЯ ЦЕНТРОБЕЖНО-УДАРНОЙ ДРОБИЛКИ

Петровский А.Л., Пронкевич С.А., Мартыненко И.М.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Дробилки центробежно-ударные предназначены для измельчения рудных и нерудных материалов. В центробежной дробилке разрушение материала происходит за счет удара материала об отбойные элементы при разгоне его в поле центробежных сил во вращающемся ускорителе,

Ударный способ разрушения материалов, реализуемый в центробежных дробилках и мельницах, обладает огромным резервом для повышения производительности процессов дробления и измельчения, повышения качества продукции, снижения энерго- и материалоемкости.

Центробежно-ударные дробилки позволяют выполнять операции дробления практически любых, в том числе, труднообрабатываемых абразивных материалов. В основу конструкции дробилок заложен опорный узел "на воздушной подушке"

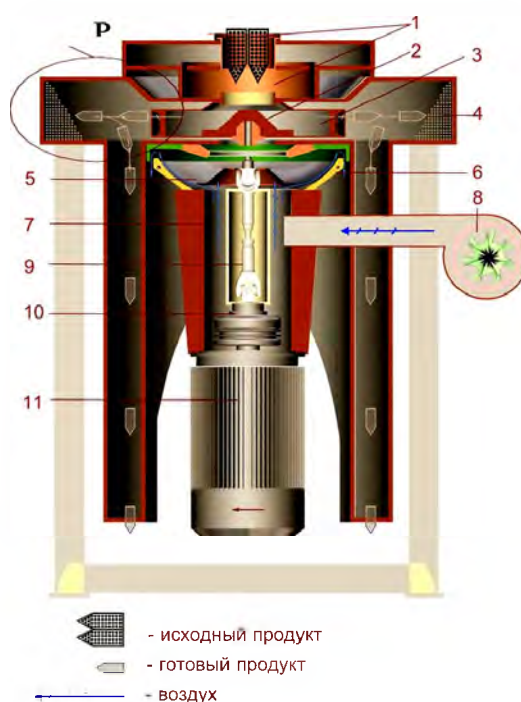


Рисунок 1 – Схема центробежно-ударной дробилки

Принцип работы центробежно-ударной дробилки показан на рис. 1. Вентилятором высокого давления 8 в камере 7 создается давление воздуха, необходимое для «всплытия» ротора и образования воздушного зазора между ротором 5 и статором 6. Образовавшаяся воздушная подушка под ротором играет роль газового подшипника, что позволяет создать самобалансирующуюся систему рабочего органа дробилки.

На валу двигателя 11 установлена центробежная муфта 10, предназначенная для облегчения запуска рабочего органа дробилки и предохраняющая дробилку от повреждений. Карданная передача 9 приводит в движение рабочий орган дробилки и имеет возможность регулировать величину «всплытия» ротора.

Исходный продукт через воронки 1 подается на разделительный конус 2, который равномерно распределяет его по каналам ускорителя 3. Исходный материал, получив во вращающемся ускорителе необходимую для выброса окружную скорость и, соответственно, кинетическую энергию, ударяется о самофутерующийся слой или отбойные плиты камеры дробления 4 и разрушается.

Процесс разрушения материалов ударным способом по сравнению с разрушением материала за счёт сдвиговых напряжений в конусных и щековых дробилках имеет ряд преимуществ, основными из которых являются качество получаемого материала, низкие капитальные и эксплуатационные затраты.

При больших скоростях вращения (около 4000 об/мин) ускорителя (рис. 2) палец крепления лопатки испытывает высокие напряжения, которые в ходе работы за счет смятия материалов упрочняются и общий уровень напряжений на срез в контактных парах устанавливается до удовлетворительных величин. Данное явление с помощью линейного упругого статического расчета выявить невозможно и в данном случае необходимо применять нелинейный статический расчет с учетом характеристик деформирования материалов.

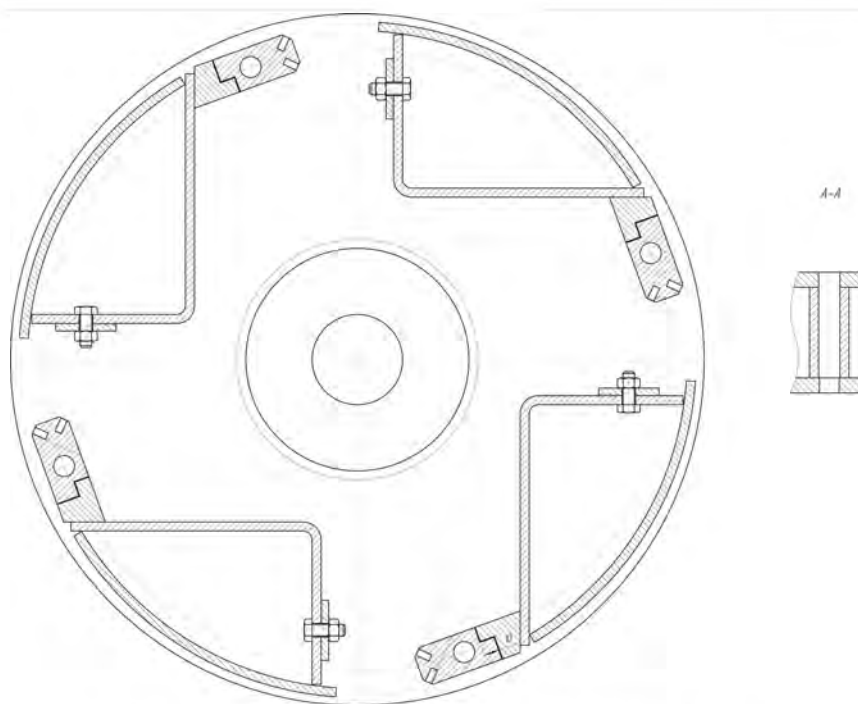


Рисунок 2 – Ускоритель центробежно-ударной дробилки.

В расчет принимаем сектор конструкции ввиду её симметрии (рис. 3)

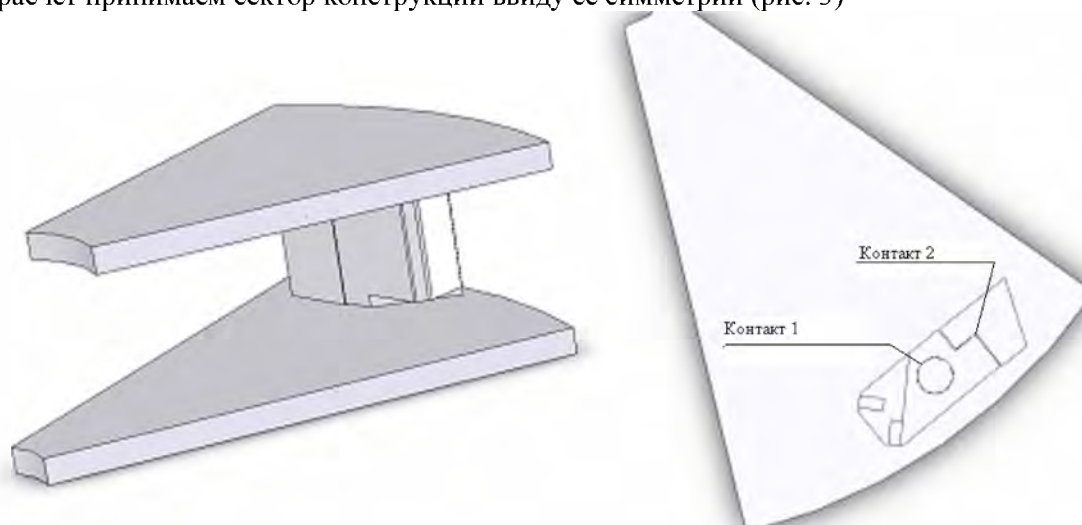


Рисунок 3 – Расчетная модель сектора центробежно-ударной дробилки.

Конструкцию рассчитываем с применение двух контактных пар: лопатка и палец (контакт 1, рис. 4), лопатка и упор (контакт 2, рисунок 4)

При расчёте принимаем следующие характеристики для всех материалов:

Модуль упругости – $2e+11$ Па;

Коэффициент Пуассона – 0,3;

Предел текучести – 355 МПа.

Плотность – 7850 кг/м^3 .

Свойство контактных пар – «нет проникновения»

Упрощённая модель представляет собой сборку из двух деталей: пальца и лопатки, причём в виду симметрии была принята половина детали (рис. 4).

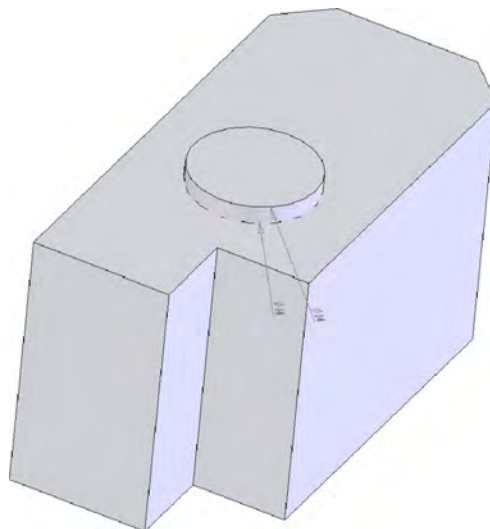


Рисунок 4 – Упрощенная модель пальца и лопатки сектора центробежно-ударной дробилки.

Для упрощения реализации расчёта трёхмерная модель создавалась в SolidWorks и импортировалась в ANSYS в формате Parasolid (x_t).

На рисунке 5 представлена расчетная модель с нагрузками и граничными условиями:

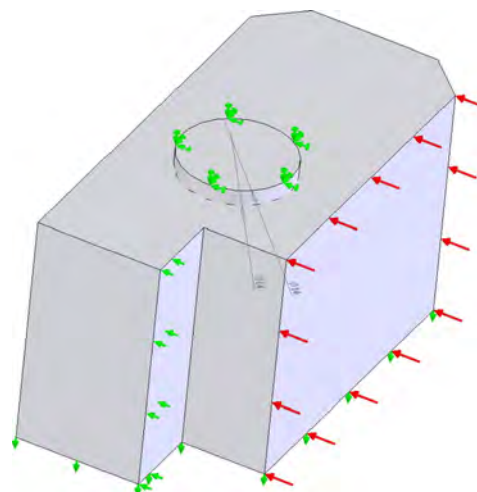


Рисунок 5 – Граничные условия модели пальца и лопатки сектора дробилки.

Верхний край пальца зашечлен, так как в реальной модели он закреплён на диск ускорителя; контакт 2, рис. 5, смоделирован запрещением перемещения в направлении перпендикулярном контактной плоскости, на нижней грани (т.к. упрощенная модель представляет собой половину детали) приложено условие симметрии.

Инерционная нагрузка приведена к давлению на соответствующую поверхность по следующим соотношениям:

$R = m\omega^2 r$, где $m = 0.445$ кг – масса лопатки с пальцем, $\omega^2 = 440 \text{ с}^{-1}$ – угловая скорость, $r = 0.207$ м – расстояние от центра вращения до оси пальца.

$$R = 17834 \text{ Н.}$$

Соответственно давление на поверхность лопатки вычислим по формуле:

$$P = R/S, \text{ где } S = 0,001128 \text{ м}^2 \text{ – площадь поверхности, на которую давит сила } R.$$

$P = 16 \text{ МПа}$.

На рис. 6 – 7 показаны результаты расчета.

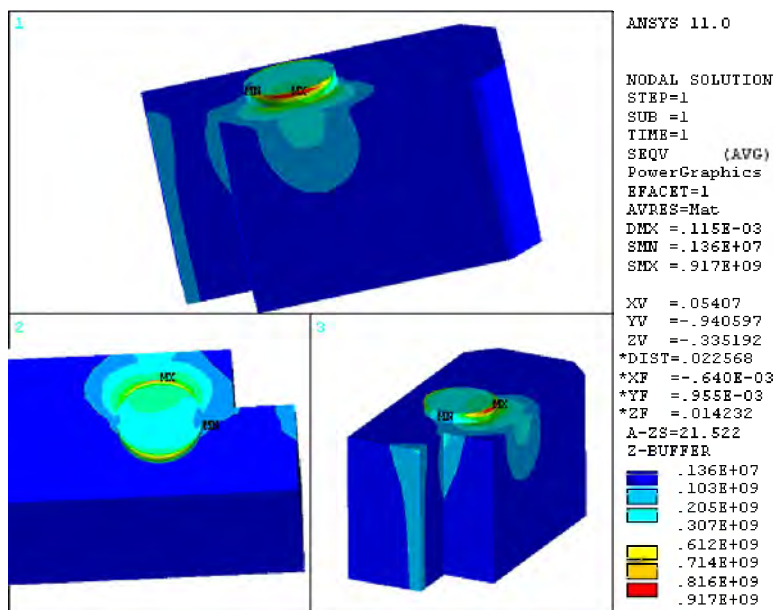


Рисунок 6 - Напряженное состояние в сборке палец-лопатка.

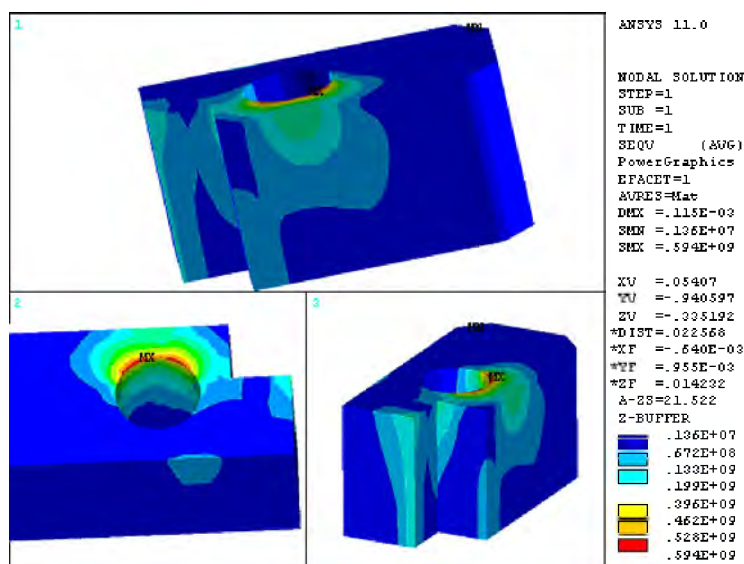


Рисунок 7 - Напряженное состояние в элементе лопатке

При детальном рассмотрении области контакта пальца с лопаткой были получены следующие результаты:

Максимальные напряжения в пальце составили более 900 МПа

Максимальные напряжения в лопатке в области контакта (лопатки с пальцем) составили 594 МПа

Для получения результата, более приближенного к реальному поведению материала, в расчёте учтем кривую напряжение – деформация для стали Ст3. При решении нелинейной задачи можно получить напряженно-деформированную картину поведения конструкции с учетом сминания материала при данных нагрузках.

Кривая напряжение – деформация представлена на рис. 8, а промежуточные значения диаграммы приведены в табл. 1

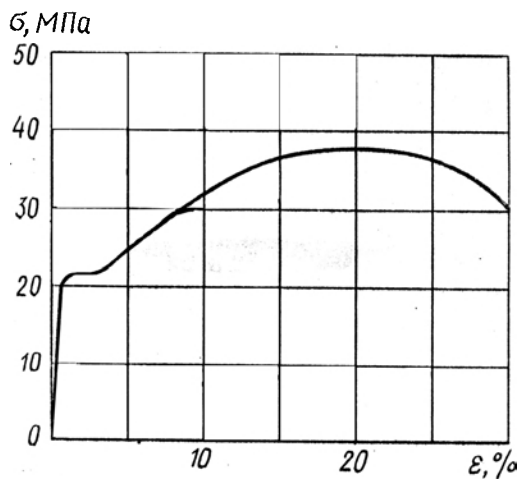


Рисунок 8 – напряжение - деформация для стали Ст3

Таблица 1

№	σ, МПа	ε, %
0	0	0
1	200	0,007
2	210	0,01
3	218	0,015
4	218	0,03
5	220	0,035
6	300	0,085
7	320	0,1
8	340	0,12
9	360	0,14
10	370	0,16
11	380	0,18
12	382	0,2
13	380	0,22
14	370	0,24
15	360	0,26
16	340	0,28
17	300	0,3

Другие физико-механические характеристики для стали Ст3:

$$\rho = 7850 \text{ кг/м}^3;$$

$$\alpha = 0,12 \times 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1};$$

$$E = 2,06 \times 10^{11} \text{ Па};$$

На рис. 9-10 показано распределение напряжений в сборке палец – элемент лопатки и в элементе лопатки отдельно.

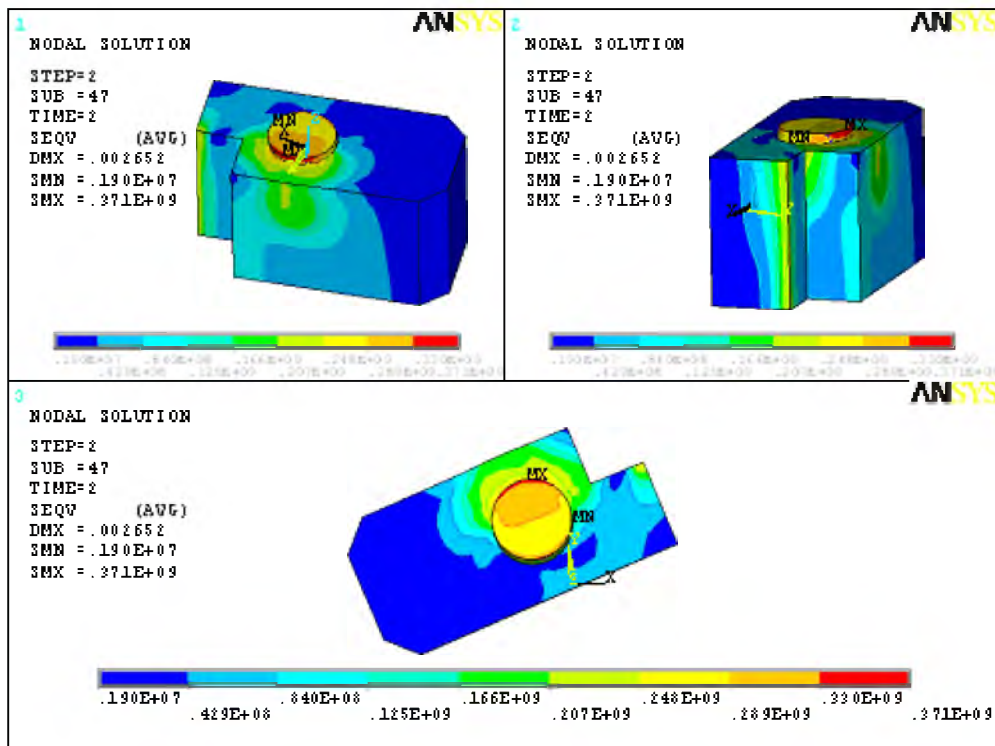


Рисунок 9 – Напряженное состояние в сборке палец-лопатка.

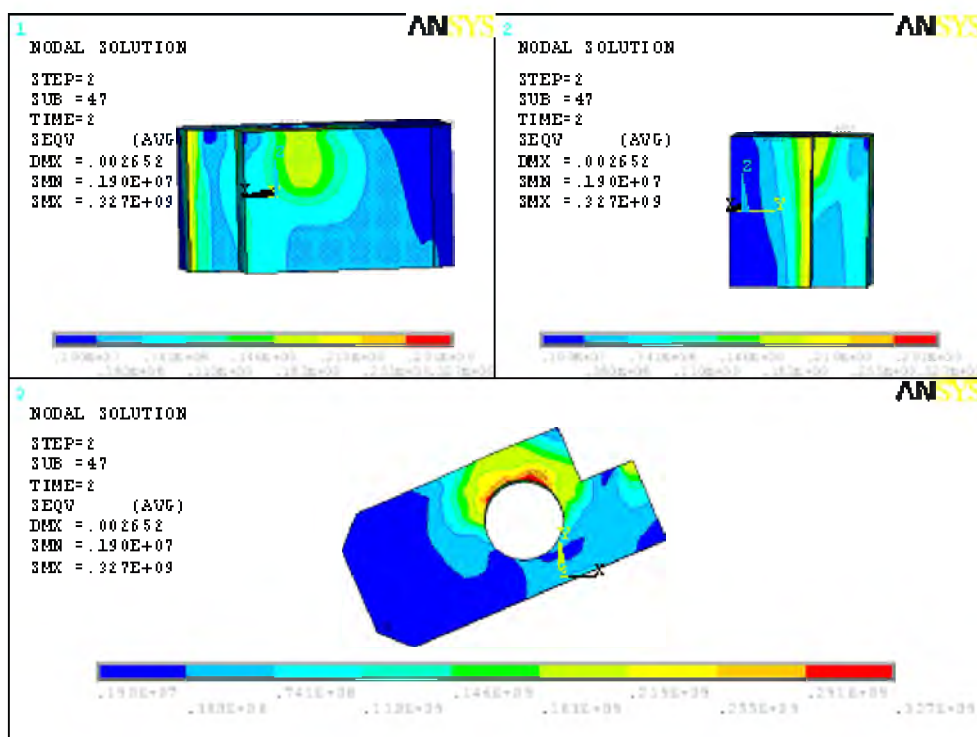


Рисунок 10 – Напряженное состояние в элементе лопатки.

При использовании модели материала, учитывающего нелинейное поведение стали Ст3 были получены следующие результаты:

Максимальные напряжения в пальце составили 370 МПа

Максимальные напряжения в лопатке в области контакта (лопатки с пальцем) составили 330 МПа.

Заключение. Сравнение результат показывает, что при использовании в расчете нелинейной модели материала величины максимальных напряжений в пальце снизились с 917 МПа до 370 МПа, максимальные напряжения в лопатке снизились с 594 МПа до 327 МПа. Распределение напряжений стало более равномерным.

Резюме

В статье рассматривается применение нелинейной модели материала для расчета напряженного состояния деталей центробежной ударной дробилки в системе ANSYS. Приводится сопоставление результатов расчета с использованием линейной и нелинейной моделей материалов.

Литература

1. А.Б. Каплун, Е.М. Морозов, М.А. Олферьева. ANSYS в руках инженера. М. «Едиториал УРСС» 2003
2. T. Stolarski, Y. Nakasone, S. Yoshimoto. Engineering analysis with ANSYS software. Oxford, UK 2006
3. E. Madenci, I. Guven. The Finite Element Method and Application in Engineering using ANSYS. Springer, 2006
4. В.Г. Сорокина, М.А. Гервасьева. Стали и справы. Марочник. М. «Машиностроение» 2001
5. С.В. Серенсен, В.П. Когаев, Р.М. Шнейдеров. Несущая способность и расчет деталей машин на прочность. Руководство и справочное пособие. М. «Машиностроение» 1975
6. С.Д. Пономарев и др. Расчеты на прочность в машиностроении. М. «Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы» 1956

Поступила в редакцию 16.03.2012

НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ НАДАВЛИВАНИЯ ВОЛОКОН ДРУГ НА ДРУГА

Дудяк А.И., Хмелев А.А., Сахнович Т.А., Гурковская О.И.

ОУ «Белорусский национальный технический университет», Минск

В данной статье приводится доказательство, что в продольных сечениях бруса при поперечном изгибе, вызванном действием сосредоточенной силы, возникают нормальные напряжения в результате надавливания волокон друг на друга.

Из курсов «Сопротивление материалов» и «Теории упругости» известно, что при таком изгибе в поперечных сечениях бруса возникают только нормальные напряжения в поперечном направлении, а перпендикулярном поперечному направлению они отсутствуют.

Рассмотрим двух опорную балку прямоугольного сечения, нагруженную сосредоточенной силой на середине пролета, рис. 1.

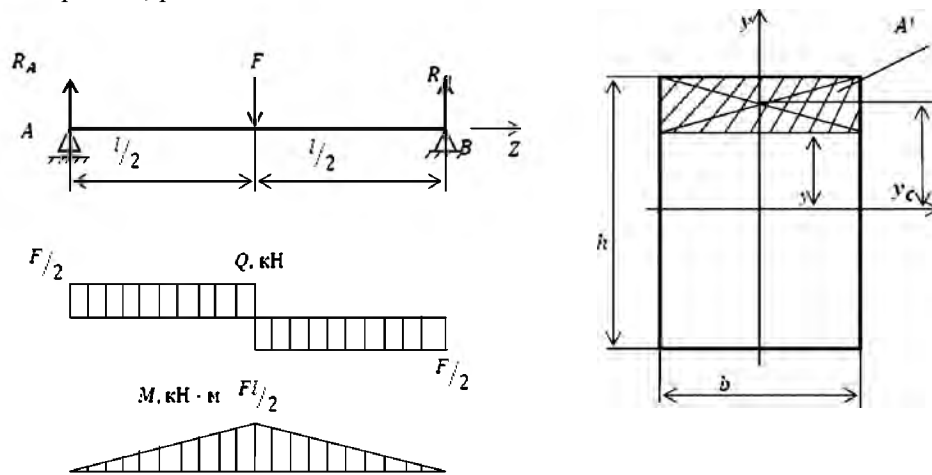


Рисунок 1 – Схема нагружения и форма сечения балки.

Из курса «Сопротивления материалов» расчетные формулы для определения нормальных и касательных напряжений в сечениях балки, без учета гипотезы о надавливании волокон друг на друга, имеют вид (1):

$$\sigma_z = \frac{M_z}{J_x} \cdot y \quad (1)$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_z S_x^{\text{отс}}}{J_x \cdot b} \quad (2)$$

где
$$S_x^{\text{отс}} = A^* \cdot y_c = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \left(\frac{h}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \right) = \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right) = \frac{b}{8} (h^2 - 4y^2)$$

Подставив значение $S_x^{\text{отс}}$ в (2) получаем:

$$\tau_{zy} = \frac{Q_z \frac{b}{8} (h^2 - 4y^2)}{J_x \cdot b} = \frac{Q_z (h^2 - 4y^2)}{8J_x} \quad (3)$$

Уравнения равновесия для плоской задачи без учёта компонент объёмных сил имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Из первого уравнения системы уравнений (4) следует, что:

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = -\int \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dy + c_1 \quad (5)$$

тогда используя уравнение (1), получаем:

$$\frac{\sigma_z}{\partial z} = \frac{\partial M_z}{\partial z} \cdot \frac{y}{J_x} = \frac{Q_z}{J_x} \cdot y \quad (6)$$

Решая совместно уравнения (5) и (6) получаем:

$$\tau_{zy} = -\int \frac{Q_z}{J_x} y dy + c_1 \quad (7)$$

Постоянную интегрирования определяем из следующих граничных условий при $y = \pm \frac{h}{2}$, $\tau_{zy} = 0$ тогда:

$$\begin{aligned} -\frac{Q_z}{2J_x} \cdot \frac{h^2}{4} + c_1 \\ c_1 = \frac{Q_z h^2}{8J_x} \end{aligned} \quad (8)$$

Совместное решение (7) и (8) дает:

$$\tau_{zy} = \frac{Q_z}{8J_x} (h^2 - 4y^2)$$

Полученное выражение для τ_{zy} полностью совпадает с уравнением (3), полученное решением методами сопротивления материалов.

Из второго уравнения системы уравнений (4) следует, что:

$$\sigma_y = -\int \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dy + c_2 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \frac{Q_z}{\partial z} \cdot \frac{1}{8J_x} (h^2 - 4y^2) = \frac{q_z}{8J_x} (h^2 - 4y^2) \quad (10)$$

где q_z – интенсивность распределительной нагрузки в рассматриваемом слое изгибаемой балки, значение которой можно рассматривать как величину эквивалентную касательным напряжениям τ_{zy} в рассматриваемом слое, рис.2.

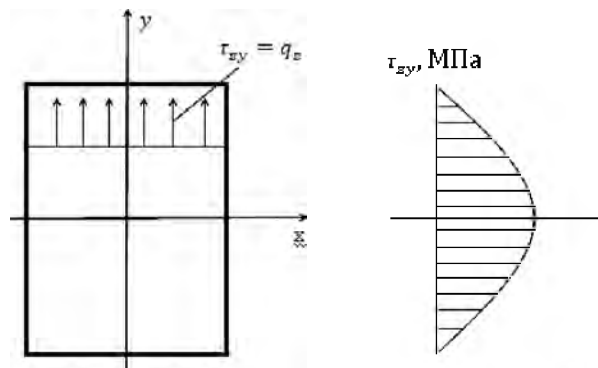


Рисунок 2– Вариант эквивалентности τ_{zy} и q_z .

Решая совместно уравнения (9) и (10) получаем:

$$\sigma_y = -\int \frac{q_z}{8J_x} (h^2 - 4y^2) dy + c_2 \quad (11)$$

$$\sigma_y = -\frac{q_z}{8J_x} \left(h^2 y - \frac{4}{3} y^3 \right) + c_2 \quad (12)$$

С учетом того, что в рассматриваемом слое $q_z = \tau_{zy}$, получаем:

$$\sigma_y = -\frac{Q_z}{8J_x}(h^2 - 4y^2) \cdot \frac{1}{8J_x}\left(h^2y - \frac{4}{3}y^3\right) + c_2 \quad (13)$$

После ряда преобразований получаем:

$$\sigma_y = -\frac{Q_z}{64J_x^2}(h^2 - 4y^2) \cdot \left(h^2y - \frac{4}{3}y^3\right) + c_2 \quad (14)$$

Значение постоянной c_2 определяем из граничного условия:

при $y = \pm \frac{h}{2}$ и $\sigma_y = 0$, получаем, что $c_2 = 0$.

В итоге получаем окончательное уравнение для определения нормальных напряжений в сечениях балки, вызванных надавливанием горизонтальных слоев балки при плоском поперечном изгибе:

$$\sigma_y = \frac{Q_z}{64J_x^2}(h^2 - 4y^2) \cdot \left(\frac{4}{3}y^3 + h^2y\right) \quad (15)$$

Эпюры распределения нормальных и касательных напряжений по высоте сечения балки, полученные с использованием формул (10) и (15) приведены на рис.3 для положительного значения поперечной силы Q .

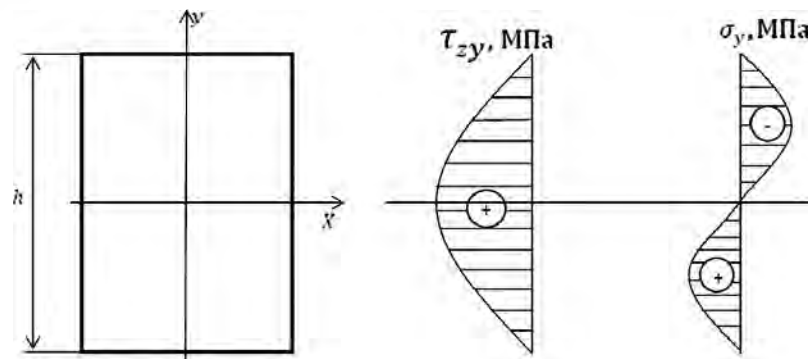


Рисунок 3 – Распределение касательных и нормальных напряжений по высоте сечения балки.

Из приведенных на рис. 3 эпюр следует, что при $y=0$ и при $y = \pm \frac{h}{2}$ нормальные напряжения в продольных волокнах стержня σ_y будут равны нулю и достигают своего максимального значения при $y = \pm \frac{h}{4}$. Изменения этих напряжений по высоте бруса описывается кубической параболой в соответствии с формулой (15).

Резюме

В данной статье представлено доказательство о возникновении нормальных напряжений в продольных сечениях бруса в результате надавливания волокон друг на друга при поперечном изгибе.

Доказательство приводится на примере рассмотрения двухопорной балки прямоугольного сечения, нагруженной сосредоточенной силой в середине пролета.

Литература

1. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Издательство «Наука», 1972. – 541с.
2. Писаренко Г.С., Агарёв В.А., Квитка А.Л. и др. Сопротивление материалов. – Издательство «Техника», Киев, 1967. – 783с.
3. Тимошенко С.П., Дж. Гудьер. Теория упругости. – М.: Издательство «Наука», 1972 – 559с.

Summary

This article provide the evidence of the origin of the normal stresses in the longitudinal sections of a timber by pressing the fibers to each other in transverse bending. The proof is provided as consideration of double-seat rectangular beam loaded with a concentrated force at mid-span.

Поступила в редакцию 21.08.2012

УПРУГИЕ МОДУЛИ И СИЛОВЫЕ ПОСТОЯННЫЕ

Репченков В.И., Нагорный Ю.Е., Насань О.А.

УО «Белорусский государственный университет», Минск

Введение. Линейная теория упругости опирается на закон Гука в дифференциальной форме

$$\sigma_{ik} = E_{iklm} \varepsilon_{lm}, \quad (1)$$

который связывает силы σ_{ik} и малые перемещения ε_{lm} в сплошной среде, которая находится в твердом агрегатном состоянии. Упругие свойства вещества в этой модели характеризуются тензором модулей упругости E_{iklm} , максимальное количество независимых компонент которого равно 18. Для среды, обладающей симметриями, это число меньше. В предельном случае изотропии, остается всего два параметра – модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Их можно определить в экспериментах по растяжению-сжатию прямолинейных стержней, где достигается простое однородное напряженно-деформированное состояние (НДС) [1,2,3].

Другой подход к описанию механических свойств вещества состоит в дискретном моделировании, когда рассмотрение проводится на атомно-молекулярном уровне. Решается классическая задача динамики системы материальных точек, в качестве которых выбираются ядра атомов. Силы взаимодействия между ними в значительной степени определяются распределением электронной плотности в пространстве. При достаточно малом отклонении системы от положения равновесия, связь между возникающими силами \bar{F} и перемещениями \bar{P} может быть записана в виде [4,5,6]:

$$\bar{F} = [K]\bar{P}, \quad (2)$$

где $[K]$ – матрица жесткости (потенциальной энергии).

Из общих соображений понятно, что упругие свойства вещества, как сплошной среды, определяются его свойствами на микроуровне – расположением атомов или молекул, их ориентациями и интенсивностью взаимодействия. В связи с этим уместно сравнить (1) и (2). Основное отличие этих соотношений состоит в том, что количество независимых элементов матрицы жесткости (силовых постоянных) может быть любым, поскольку определяется, главным образом, числом взаимодействующих частиц N и может быть рассчитано по формуле [7]:

$$N_{03} = \frac{(3N-6)(3N-5)}{2} - 3. \quad (3)$$

Следовательно, результат решения задачи о получении зависимостей компонент тензора модулей упругости от силовых постоянных существенно зависит от количества учитываемых межатомных связей. Сама эта задача представляется актуальной как с фундаментальной точки зрения, так и в связи с формированием в настоящее время такой новой научной дисциплины, как наноматериаловедение. Рассмотрение обратной задачи может дать дополнительную информацию для определения силовых постоянных методами молекулярной спектроскопии.

Здесь представлен подход к решению этой проблемы, основанный на конечно-элементной дискретизации, предполагающий разбиение тела или системы на элементы. Матрица жесткости конечно-го элемента сплошной среды вычисляется по формуле [8]:

$$[K] = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV_e, \quad (4)$$

где матрица градиентов $[B]$ содержит геометрические параметры, матрица $[D]$ – модули упругости, V_e – объем элемента. С другой стороны, среды на микроуровне состоят, как правило, из идентичных повторяющихся структурных элементов – атомных групп, для которых также, но из других соображений, могут быть построены матрицы жесткости, содержащие силовые постоянные межатомных взаимодействий и геометрические характеристики. Корректное сравнение матриц, идентичных по форме и размерам КЭ и СЭ, позволяет получить систему уравнений, связывающих компоненты тензора модулей упругости, силовые постоянные и геометрию химических связей.

Математическая модель КЭ. Рассмотрим гипотетическую двумерную среду со структурой квадратной решетки Бравэ [9]. В качестве четырехузловой КЭ выберем отдельную ячейку. В соот-

ветствии с показанной на рисунке 1 нумерацией степеней свободы сформируем векторы внешних сил $\bar{F}^T = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8)$ и перемещений $\bar{P}^T = (U_1, V_1, U_2, V_2, U_3, V_3, U_4, V_4)$.

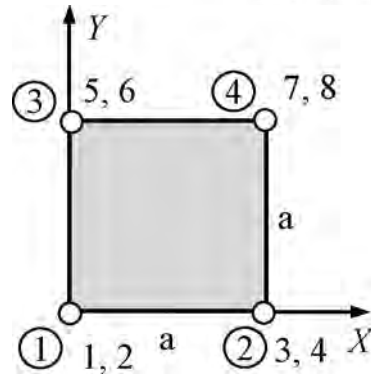


Рисунок 1 – Конечный элемент

Для построения математической модели КЭ, согласно (4), необходимо сформировать матрицы упругости, функций формы и градиентов. Считаем, что среда изотропна, поэтому деформации и напряжения связаны соотношением:

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} \end{pmatrix} = [D]^{-1} \bar{\sigma}, \quad (5)$$

где E , ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона. При этом дополнительно предполагается, что объект представляет из себя пластинку, то есть реализуется плоское напряженное состояние (ПНС). Матрица упругости получается обращением матрицы податливости $[D]^{-1}$.

Другая матрица из (4), матрица градиентов $[B]$, является результатом дифференцирования матрицы функций формы $[N]$, аппроксимирующей перемещения $\bar{U}(x, y)$ точек элемента

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = [N] \bar{P}, \quad (6)$$

которая в данном случае имеет вид:

$$[N] = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$N_1(x, y) = \frac{(x-a)(y-a)}{a^2}, \quad N_2(x, y) = \frac{x(a-y)}{a^2},$$

$$N_3(x, y) = \frac{(a-x)y}{a^2}, \quad N_4(x, y) = \frac{xy}{a^2}.$$

Здесь a – размер ячейки. Полиномы из (7) удовлетворяют стандартным условиям:

$$N_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \quad \sum_{i=1}^4 N_i(x_i, y_i) = 1, \quad (8)$$

что автоматически учитывает параллельный перенос и поворот элемента. Итак, для $[B]$ имеем:

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{pmatrix} \bar{P} = [B] \bar{P}. \quad (9)$$

Непосредственный расчет по формулам (4), (5), (9) в итоге дает:

$$[K]_e = \frac{Ed}{24(1-\nu^2)} \times \begin{pmatrix} 4A & 3C & -2H & -3K & 4\nu & 3K & -2A & -3C \\ 3C & 4A & 3K & 4\nu & -3K & -2H & -3C & -2A \\ -2H & 3K & 4A & -3C & -2A & 3C & 4\nu & -3K \\ -3K & 4\nu & -3C & 4A & 3C & -2A & 3K & -2H \\ 4\nu & -3K & -2A & 3C & 4A & -3C & -2H & 3K \\ 3K & -2H & 3C & -2A & -3C & 4A & -3K & 4\nu \\ -2A & -3C & 4\nu & 3K & -2H & -3K & 4A & 3C \\ -3C & -2A & -3K & -2H & 3K & 4\nu & 3C & 4A \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где введены обозначения: $A = 3 - \nu$, $C = 1 + \nu$, $H = 3 + \nu$, $K = 1 - 3\nu$; d – “толщина” пластинки.

Равновесие элемента под действием внешних сил описывается матричным уравнением:

$$[K]_e \bar{P} = \bar{F}, \quad (11)$$

к которому необходимо добавить граничные условия для исключения смещения элемента как целого.

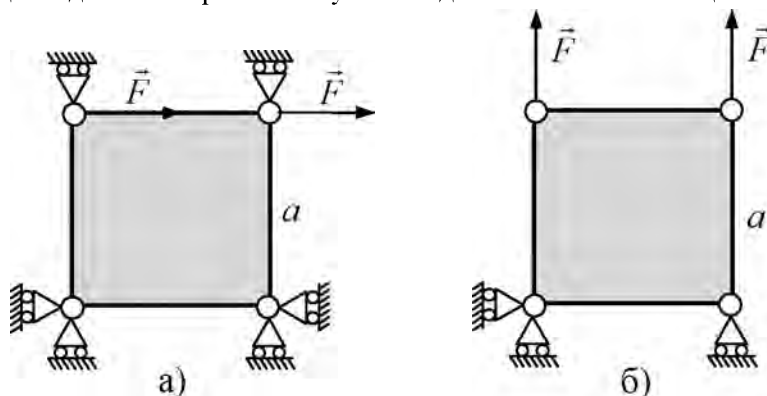


Рисунок 2 – а) сдвиг, б) растяжение

Виртуальные испытания КЭ. Схемы нагружения элемента при испытаниях показаны на рис. 2а, б. В соответствии с ними, в первом случае, когда происходит деформация сдвига, оба перемещения узлов 1, 2 и вертикальные перемещения узлов 3 и 4 отсутствуют, только $U_3 \neq 0$ и $U_4 \neq 0$. Это, в соответствии с (10), (11), приводит к следующей системе разрешающих уравнений:

$$\begin{cases} \frac{EAd}{6(1-\nu^2)}U_3 - \frac{EHd}{12(1-\nu^2)}U_4 = F, \\ -\frac{EHd}{12(1-\nu^2)}U_3 + \frac{EAd}{6(1-\nu^2)}U_4 = F. \end{cases} \quad (12)$$

Отсюда находим U_3 и U_4 :

$$U_3 = U_4 = \frac{4F}{Ed}(1+\nu). \quad (13)$$

Подставим полученные значения в формулу закона Гука, определяющую “экспериментальный” модуль сдвига

$$G^* = \frac{2Fa}{S\Delta x}, \quad (14)$$

где $2F$ – касательная сила, действующая на верхнюю поверхность испытуемого образца, S – площадь поверхности, по которой распределено действие силы, Δx – смещение. Получим

$$G^* = \frac{2Fa}{S\Delta x} = \frac{2Fa}{aU_3d} = \frac{2Fed}{4F(1+\nu)d} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G. \quad (15)$$

Таким образом, “экспериментальный” и “теоретический” модули сдвига совпадают.

Аналогичный результат имеет место и во втором случае при растяжении элемента, а именно:

$$E^* = \frac{Fa}{S\Delta y} = \frac{Fa}{SV_3} = E, \quad \nu^* = \frac{\Delta x}{a} / \frac{\Delta y}{a} = \frac{U_3}{a} / \frac{V_3}{a} = \nu. \quad (16)$$

Математическая модель структурного элемента. Под структурным элементом далее будем понимать группу из четырех атомов, образующих квадратную ячейку с (рис. 3). Матрица жесткости в данном случае может быть получена путем разложения элемента на составляющие – простейшие механические модели в виде упругих отрезков и упругих углов (рис. 4), которые применяются в теории колебаний молекул. Отсюда видно, что независимых силовых постоянных в матрице жесткости СЭ будет четыре. Это две жесткости упругих отрезков – сторон и диагоналей квадрата k_1 и k_2 , и две жесткости упругих углов, составляющих 90° и 45° k_3 и k_4 соответственно [7]. Понятно, что рассмотрение проводится в приближении общего гармонического поля, то есть учитываются все межатомные связи внутри СЭ, как валентные, так и невалентные.

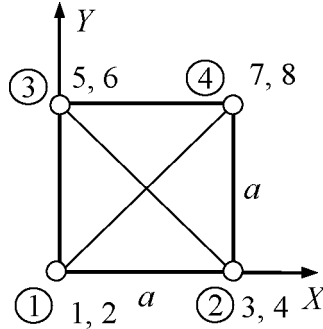


Рисунок 3 – Четырехатомный структурный элемент

Матрицы жесткости упругого отрезка и упругого угла в декартовых координатах приведены в [7].

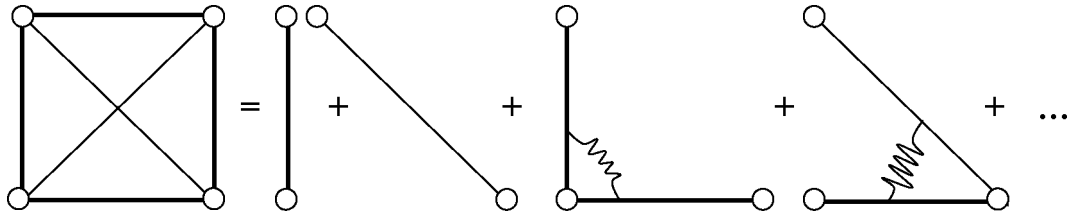


Рисунок 4 – Разложение четырехугольного структурного на базисные упругие отрезки и углы

Матрица жесткости СЭ в соответствии с рис. 4 получается как прямая сумма восемнадцати расширенных матриц жесткости составляющих:

$$[K]_{se} = d \begin{pmatrix} 4A' & 3C' & -2H' & -3K' & 4M' & 3K' & -\frac{k_2}{2} & -3C' \\ 3C' & 4A' & 3K' & 4M' & -3K' & -2H' & -3C' & -\frac{k_2}{2} \\ -2H' & 3K' & 4A' & -3C' & -\frac{k_2}{2} & 3C' & 4M' & -3K' \\ -3K' & 4M' & -3C' & 4A' & 3C' & -\frac{k_2}{2} & 3K' & -2H' \\ 4M' & -3K' & -\frac{k_2}{2} & 3C' & 4A' & -3C' & -2H' & 3K' \\ 3K' & -2H' & 3C' & -\frac{k_2}{2} & -3C' & 4A' & -3K' & 4M' \\ -\frac{k_2}{2} & -3C' & 4M' & 3K' & -2H' & -3K' & 4A' & 3C' \\ -3C' & -\frac{k_2}{2} & -3K' & -2H' & 3K' & 4M' & 3C' & 4A' \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$\text{где } A' = \frac{2k_1 + k_2}{8} + \frac{k_3 + k_4}{2a^2}, \quad C' = \frac{k_2}{6} + \frac{k_3}{3a^2}, \quad H' = \frac{k_1}{2} + \frac{k_4}{2a^2}, \quad K' = \frac{2k_3 + 2k_4}{6a^2}, \quad M' = -\frac{2k_3 + k_4}{4a^2}.$$

Матричное уравнение

$$[K]_{se} \bar{P} = \bar{F} \quad (18)$$

позволяет решить задачи статики структурного элемента.

Связь упругих модулей и силовых постоянных. Проведем виртуальные испытания структурного элемента подобные тем, что были проведены ранее с КЭ. Это позволит связать упругие характеристики гипотетической сплошной среды E , ν с силовыми постоянными k_1 , k_2 , k_3 , k_4 взаимодействия между атомами.

Начнем с деформации сдвига. После вычеркивания строк и столбцов соответствующих неизменяемым степеням свободы, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} 4A'U_3 - 2H'U_4 = F, \\ -2H'U_3 + 4A'U_4 = F. \end{cases} \quad (19)$$

Решая ее и вычисляя аналог модуля сдвига, приходим к равенству:

$$G' = k_2 + \frac{4k_3 + 2k_4}{a^2}, \quad (20)$$

Из него видно, что в выражении отсутствует силовая постоянная валентной связи между атомами k_1 . Это соответствует элементарным представлениям теории упругости, поскольку при такой деформации длины отрезков, составляющих границу остаются неизменными. Вклад в модуль сдвига вносит изменение диагоналей и углов.

Испытания дискретной структуры на растяжение-сжатие приводит к соотношениям:

$$E' = \frac{4(k_1 + k_2)(a^2k_1 + 2k_4)}{2a^2k_1 + a^2k_2 + 2k_4} = \frac{2k_1 + 2k_2 + 4\frac{k_4}{a^2} + 4\frac{k_2k_4}{a^2k_1}}{1 + \frac{1}{2}\frac{k_2}{k_1} + \frac{k_4}{a^2k_1}}, \quad (21)$$

$$\nu' = \frac{a^2k_2 - 2k_4}{2a^2k_1 + a^2k_2 + 2k_4} = \frac{\frac{1}{2}\frac{k_2}{k_1} - \frac{k_4}{a^2k_1}}{1 + \frac{1}{2}\frac{k_2}{k_1} + \frac{k_4}{a^2k_1}}. \quad (22)$$

Основной вклад в величину аналога модуля Юнга, как и следовало ожидать, вносят валентные связи. Другие взаимодействия относительно равноправны, и хотя их жесткости приблизительно на один-два порядка меньше валентных [10], в сумме они из-за наличия коэффициентов увеличивают значение E' на величину сравнимую с долей валентных. Прямые углы не деформируются, поэтому постоянная k_3 в формулы (21) и (22) не входит.

Сложнее обстоит дело с поперечной деформацией. Если считать, что силовые постоянные положительны, то есть положение равновесия устойчиво по всем координатам, то знак ν определяется разностью жесткостей диагональных упругих отрезков и упругих углов, составляющих 45° . В зависимости от соотношения между значениями k_2 и k_4/a^2 , коэффициент поперечной деформации может быть отрицательным, положительным и равным нулю. Таким образом, поведение обособленной ячейки отличается от поведения макроскопического объема среды, подчиняющейся закону Гука, где $0 < \nu < 0,5$. Заметим, что приближения поля центральных сил ($k_4 = 0$) и валентно-силового поля ($k_2 = 0$) дают противоположные результаты. В последнем случае растяжение приводит к увеличению поперечных размеров.

Из формул (20), (21), (22) вытекает невозможность выражения в общем случае модуля сдвига через модуль Юнга и коэффициент Пуассона по стандартной формуле. Обычная связь между ними имеет место только если

$$k_3 = \frac{1}{4}a^2(k_1 - k_2). \quad (23)$$

Но даже при этом матрицы жесткости КЭ и СЭ не совпадают. Поэлементное равенство достигается, когда

$$k_4 = \frac{1}{4} a^2 (2k_2 - 3k_1). \quad (24)$$

Заключение. Итак, упругое поведение отдельной ячейки взятой как конечный элемент сплошной среды не совпадает с поведением дискретной структуры в виде структурного элемента. Количества независимых упругих характеристик у СЭ и КЭ не совпадают.

В рамках приведенной схемы можно рассмотреть конечные объемы, состоящие из любого числа ячеек. Главное, чтобы процедуры сборки систем из КЭ и СЭ были идентичны. Это будет иметь место, если матрицу жесткости СЭ “подкорректировать”. Для того чтобы при объединении СЭ граничные отрезки, отвечающие валентным связям, не учитывались дважды, необходимо, очевидно, везде заменить k_1 на $k_1/2$. Следовательно, упругие свойства системы из СЭ также не будут совпадать с упругими свойствами сплошной среды, подчиняющейся закону Гука.

Резюме

Обсуждается проблема связи между компонентами тензора модулей упругости характеризующими сплошную среду, которая подчиняется закону Гука, и силовыми постоянными межатомного взаимодействия, определяющими упругость материала на микроуровне. Максимальное число упругих модулей среды равно 21, а число силовых постоянных не ограничено. Следовательно, дискретная модель вещества и модель сплошной среды Гука, вообще говоря, не эквивалентны. Рассмотрен простейший случай гипотетического кристалла с плоской квадратной решёткой Браве и установлены аналитические зависимости модуля Юнга и коэффициента Пуассона, то есть двух упругих характеристик, от четырёх силовых постоянных определяющих взаимодействие атомов в квадратной ячейке. Установлено условие, при котором коэффициент Пуассона отрицателен.

Литература

1. Лехницкий, С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий - М.: Наука, 1977. – 415с.
2. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика: в 10 т. / Л.Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 4-е изд. – М.: Наука, 1987. – Т. 7: Теория упругости. – 248 с.
3. Васильев, В.В. Композиционные материалы. / В.В. Васильев, В.Д. Протасов, В. В. Болотин. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
4. Волькенштейн, М. Колебания молекул / М. Волькенштейн, М. Ельяшевич, Б. Степанов. – М.-Л.: Гос. изд. технико-теоритической литературы, 1949. – 600 с.
5. Коптев, Г.С. Расчёт колебаний молекул / Г.С. Коптев, Ю.А. Пентин. – М. : МГУ, 1977. – 212 с.
6. Грибов, Л.А. Колебания молекул / Л. А. Грибов – М.: Либриком, 2009. – 544 с.
7. Журавков, М.А. Конечно-элементное моделирование наноразмерных структур / М.А. Журавков, Ю.Е. Нагорный, В.И. Репченков. // Российские нанотехнологии. – 2011. – №9/10. – С. 92-99.
8. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
9. Шафрановский, И.И. Краткий курс кристаллографии / И.И. Шафрановский, В.Ф. Алявдин. – М.: Высшая школа, 1984. – 120 с.
10. Грибов, Л.А. Введение в молекулярную спектроскопию / Л.А. Грибов – М.: Наука, 1976. – 400 с.

Summary

The problem of the equivalence of the elastic continuum Hooke and its discrete analog is discussed. The simplest case of a hypothetical crystal with a flat square Bravais lattice is considered and an analytical dependence of Young's modulus and Poisson's ratio are established, that is, two of the elastic characteristics of the four force constants govern the interaction of atoms in a square cell.

Поступила в редакцию 19.10.2012

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ МЕРИДИАНА ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, ДЕФОРМИРУЕМЫЕ БЕЗ ИЗМЕНЕНИЯ КРИВИЗНЫ ЗАДАННОЙ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКОЙ.

Мартыненко Т.М.

УО «Командно – инженерный институт МЧС РБ», Минск

Задача расчета безмоментного НДС оболочки по теории Кирхгофа–Лява является статически определимой [Новожилов, Бидерман с 133]. Интегрируя уравнения равновесия [1,2], получим:

$$T_1 = \frac{F(s)}{2\pi r \sin \theta}, \quad T_2 = q_n R_2 - T_1 \frac{R_2}{R_1} \quad (1)$$

где

$$F(s) = P_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} (q_n \cos \theta - q_1 \sin \theta) 2\pi r ds. \quad (2)$$

$F(s)$ – суммарная осевая нагрузка, действующая на элементарный элемент срединной поверхности и состоящая из: P_0 – осевой нагрузки, действующей на торец оболочки при проекцию на эту ось, q_n, q_1 – нормальных и касательных составляющие поверхностной нагрузки, θ – угол, составленный нормалью к меридиану с осью вращения, r – полярный радиус, T_1, T_2 – внутренние усилия, действующие по касательной к меридиану и к параллели, R_1, R_2 – радиусы кривизны меридиана и срединной поверхности.

Для поверхности вращения второго порядка радиусы кривизны R_1, R_2 связаны с углом θ формулами [1,2]:

$$R_1 = \frac{R_0}{(1 + \gamma \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}, \quad R_2 = \frac{R_0}{(1 + \gamma \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}}, \quad R_0, \gamma \text{ – постоянные.} \quad (3)$$

Выведем теперь уравнения меридиана, для чего воспользуемся формулами [1,2]:

$$\frac{dr}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{dr}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{ds}{d\theta} = R_1. \quad (4)$$

Имеем:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{d\theta} = R_1 \cos \theta = \frac{R_0 \cos \theta}{(1 + \gamma \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Откуда:

$$r = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{R_0 \cos \theta d\theta}{(1 + \gamma \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{R_0}{\sqrt{\gamma}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d(\sqrt{\gamma} \sin \theta)}{(1 + (\sqrt{\gamma} \sin \theta)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{R_0 \sqrt{\gamma} \sin \theta}{\sqrt{1 + \gamma \sin^2 \theta}} + r_0.$$

Совершенно аналогично:

$$\begin{aligned} z &= \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{dz}{d\theta} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{dz}{ds} \frac{ds}{d\theta} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta \frac{R_0 d\theta}{(1 + \gamma \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} = -R_0 \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d(\cos \theta)}{(1 + \gamma - \gamma \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= -\frac{R_0}{1 + \gamma} \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma \sin^2 \theta}} + z_0 \end{aligned}$$

Поэтому при $r_0 = 0, z_0 = 0$:

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{(z - z_0)^2}{b^2} = 1 \quad (5)$$

где

$$a = \frac{R_0}{\sqrt{1+\gamma}}, \quad b = \frac{R_0}{1+\gamma}. \quad (6)$$

Предположим что $q_n = p = \text{const}$, $\theta_0 = 0$, тогда:

$$T_1 = \frac{1}{2} p R_2 = \frac{p R_0}{2\sqrt{1+\gamma \sin^2 \theta}},$$

$$T_2 = p R_2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{1}{2} p R_0 \frac{1 - \gamma \sin^2 \theta}{\sqrt{1+\gamma \sin^2 \theta}}. \quad (7)$$

Уравнение совместности деформаций для оболочек вращения в осесимметричном случае имеет при $h = \text{const}$, $E, \nu = \text{const}$ вид:

$$\varepsilon_1 = \frac{d}{dr}(r\varepsilon_2)$$

или в силу закона Гука для изотропных оболочек:

$$T_1 - \nu T_2 = \frac{d}{dr}(r(T_2 - \nu T_1)). \quad (8)$$

После дифференцирования из (8) получим:

$$(1+\nu)(T_1 - T_2) = r \frac{d}{dr}(T_2 - \nu T_1). \quad (9)$$

Здесь ν – коэффициент Пуассона. Преобразуем (9) с помощью (7):

$$T_1 - T_2 = p R_2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{1}{2} p R_0 \frac{\gamma \sin^2 \theta}{\sqrt{1+\gamma \sin^2 \theta}}. \quad (10)$$

или

$$T_2 - \nu T_1 = \frac{p R_0 (1 - \nu - \gamma \sin^2 \theta)}{2\sqrt{1+\gamma \sin^2 \theta}}. \quad (11)$$

Поэтому (9) принимает такой вид:

$$(1+\nu) \frac{1}{2} p R_0 \frac{\gamma \sin^2 \theta}{\sqrt{1+\gamma \sin^2 \theta}} = r \left(\frac{d}{dr} \frac{1}{2} p R_0 \frac{1 - \nu - \gamma \sin^2 \theta}{\sqrt{1+\gamma \sin^2 \theta}} \right),$$

или

$$\frac{(1+\nu)\gamma \sin^2 \theta}{\sqrt{1+\gamma \sin^2 \theta}} = r \left(\frac{-\gamma \frac{d}{dr} \sin^2 \theta}{\sqrt{1+\gamma \sin^2 \theta}} - \frac{1 - \nu - \gamma \sin^2 \theta}{(1+\gamma \sin^2 \theta)^{3/2}} \frac{d}{dr} \gamma \sin^2 \theta \right) = \frac{r}{\sqrt{1+\gamma \sin^2 \theta}}$$

$$\left(\frac{-\gamma \frac{d}{dr} \sin^2 \theta \left(1 + \frac{1}{2} (1 - \nu - \gamma \sin^2 \theta)\right)}{1+\gamma \sin^2 \theta} \right) = -\frac{r\gamma \frac{d}{dr} \sin^2 \theta}{\sqrt{1+\gamma \sin^2 \theta}} \left(1 + \frac{1 - \nu - \gamma \sin^2 \theta}{2(1+\gamma \sin^2 \theta)}\right)$$

или

$$(1+\nu)\gamma \sin^2 \theta = -\gamma r 2 + 2\gamma + 2\gamma \sin^2 \theta + 1 - \nu - \gamma \sin^2 \theta =$$

$$= -\frac{\gamma r 2 \sin \theta \cos \theta \frac{d\theta}{dr}}{2(1+\gamma \sin^2 \theta)} (3 - \nu + \gamma \sin^2 \theta) \Rightarrow \quad (12)$$

т.к. $\gamma = \text{const}$ $1 + \gamma \sin^2 \theta \neq 0$ сократим на $\gamma \neq 0$ (исключим сферу) т.к. для сферы $\gamma = 0$ что приведет последнее равенство к $0 = 0$.

Но

$$r \frac{d}{dr} \sin^2 \theta = r 2 \sin \theta \cos \theta \frac{d\theta}{dr} = r 2 \sin \theta \cos \theta \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dr} = \frac{r 2 \sin \theta}{R_1} \Big|_{r=R_2 \sin \theta} =$$

$$= \frac{R_2}{R_1} 2 \sin^2 \theta = 2 \sin^2 \theta (1 + \gamma \sin^2 \theta),$$

Поэтому из (12) имеем:

$$\Rightarrow (1 + \nu) \sin^2 \theta = -\frac{1}{2} 2 \sin^2 \theta (1 + \gamma \sin^2 \theta) \frac{3 - \nu + \gamma \sin^2 \theta}{1 + \gamma \sin^2 \theta} \Rightarrow$$

$$1 + \nu = -3 + \nu - \gamma \sin^2 \theta \Rightarrow 4 + \gamma \sin^2 \theta = 0. \quad (13)$$

сократим на $\sin^2 \theta \geq 0$

Уравнение (12) в общем случае не разрешимо. Это означает что (7) не удовлетворяет условиям совместности деформации.

Если $\gamma = 0$, то $R_1 = R_2 = R_0$, $T_1 = T_2 = \frac{1}{2} p R_0$, $T_1 - T_2 = 0$, $T_2 - \nu T_1 = \frac{(1 - \nu) p R_0}{2} = \text{const}$.

Уравнение совместности деформаций:

$$(1 + \nu)(T_1 - T_2) = r \frac{d}{dr} (T_2 - \nu T_1) \Rightarrow 0 = 0 \text{ удовлетворяется.}$$

Резюме

Рассмотрим оболочки вращения постоянной толщины, следующие гипотезам Кирхгофа–Лява, и деформируемые постоянным давлением $p = \text{const}$. Показана необходимость учета уравнений совместности деформаций при определении без изгибной формы меридиана

Литература

1. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 456 с.
2. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 432 с.

Summary

The article is considered to rotation of the constant thickness, following hypotheses Kirkhgofa-Lyava, and deformed by constant pressure. Need of the accounting of the equations of compatibility of deformations is shown at definition of a non-bending form of a meridian.

Поступила в редакцию 26.07.2012

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В СЛОИСТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ ТЕЛАХ

Али М. Абед Аль-Зобайде, Чигарева Ю.А.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Введение. В последние годы в различных отраслях техники получают широкое применение составные конструкции слоистой структуры. Их использование обусловлено рядом несомненных преимуществ, которые имеют слоистые тела. Прежде всего, особенности поведения таких тел в поле температурных и силовых воздействий позволяют создавать конструкции, отвечающие самым разнообразным требованиям, управлять их реакцией на оказанные воздействия. Но для этого необходимо глубокое знание явлений и процессов, происходящих в телах слоистой структуры при их нагружении.

1. Стационарное распределение температуры $T(r)$ в цилиндрической трубе описывается уравнением:

$$\frac{d}{dr} \left(\lambda(r) \frac{dT}{dr} \right) + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \quad (1)$$

Здесь предполагается, что коэффициент теплопроводности λ является функцией только r , тогда $T = T(r)$, распределение T не зависит ни от ϕ , ни от z .

Уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{d}{dr} \left(\ln \left[\lambda(r) r^2 \frac{dT}{dr} \right] \right) = 0 \quad (2)$$

Интегрируя последовательно (2), получим

$$\ln(\lambda r^2 T_r') = \text{const} = C \quad (1.3)$$

$$T(r) = C_1 + e^C \int_{r_1}^r \frac{dr}{\lambda r^2} \quad (4)$$

где r_1 – внутренний радиус трубы.

Пусть на границе $r = r_1$ и $r = r_2$ на границе радиус внешней поверхности задано распределение температуры:

$$T^{(i)} = T(r = r_1), \quad T^{(e)} = T(r = r_2) \quad (1.5)$$

тогда находим

$$e^C = \frac{T^{(e)} - T^{(i)}}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2 \lambda(r)}} = C^{(e)}, \quad C = \ln \frac{T^{(e)} - T^{(i)}}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2 \lambda(r)}} \quad (1.6)$$

Таким образом, выражение для температуры $T(r)$ имеет вид

$$T(r) = T^{(i)} + [T] \left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2 \lambda} \right)^{-1} \int_{r_1}^r \frac{dr}{r^2 \lambda}, \quad [T] = [T^{(e)} - T^{(i)}] \quad (1.7)$$

Из формулы (1.7) следует, что при $r_1 \rightarrow 0$ интеграл становится расходящимся. Обозначим $\gamma(r) = \lambda^{-1}(r)$ – тепловое сопротивление

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^r \frac{dr}{r^2 \lambda(r)} &= \int_{r_1}^r \frac{\gamma(r) dr}{r^2} = \left[\gamma(r) \left(-\frac{1}{r} \right) \right]_{r_1}^r + \int_{r_1}^r \frac{1}{r} \gamma'(r) dr = -\frac{\gamma(r)}{r} + \frac{\gamma(r_1)}{r_1} + (\ln r \cdot \gamma') \Big|_{r_1}^r - \int_{r_1}^r \gamma'' \ln r dr = \\ &= \frac{\gamma(r_1)}{r_1} - \frac{\gamma(r)}{r} + \ln r \cdot \gamma'(r) - \ln r_1 \cdot \gamma'(r_1) - \int_{r_1}^r \gamma'' \ln r dr = \frac{\gamma(r)}{r} \left(\frac{\gamma(r_1) r}{\lambda(r) r_1} - 1 \right) + \ln \frac{r \gamma'(r_1)}{r_1 \gamma'(r_1)} - \int_{r_1}^r \gamma''(r) \ln r dr \end{aligned}$$

Рассмотрим некоторые примеры неоднородных цилиндров с функцией $\lambda(r)$, задаваемых элементарными функциями. Ограничимся случаями, когда $\lambda(r)$ представляет собой монотонно

возрастающую (убывающую) функцию от одной из внешних границ (r_1 или r_2) и случай периодического изменения $\lambda(r)$ между r_1 и r_2 .

1. $\lambda(r)$ монотонно возрастает от r_1 к r_2 по закону

$$\lambda(r) = \lambda_0 (r^2 - r_1^2)^{1/2} \quad (8)$$

Тогда

$$T(r) = T^{(i)} + [T] \left(\frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right)^{1/2} \frac{r}{r_2} \quad (9)$$

$$r = r_1 \quad T(r_1) = T^{(i)}$$

$$r = r_2 \quad T(r_2) = T^{(i)}$$

На графике показано изменение температуры для полого цилиндра ($r_1 = 1\text{ м}$, $r_2 = 2\text{ м}$) от 100°С до 300°С .

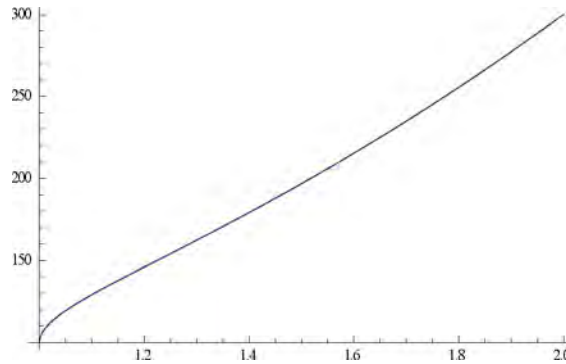


Рисунок 1 – График изменения температуры в полом цилиндре при $\lambda(r) = \lambda_0 (r^2 - r_1^2)^{1/2}$

2. $\lambda(r)$ монотонно убывает от r_1 к r_2 по закону

$$\lambda(r) = \lambda_0 (r^2 + r_2^2)^{1/2} \quad (10)$$

тогда изменение температуры подчинится закону

$$T(r) = T^{(i)} - [T] \left(1 + \frac{2r_1}{(r_1^2 + r_2^2)^{1/2}} \right)^{-1} \left(1 - \frac{r_1 (r^2 + r_2^2)^{1/2}}{r (r_1^2 + r_2^2)^{1/2}} \right) \quad (11)$$

$$r = r_1 \quad T = T^i$$

$$r = r_2 \quad T = T_n - [T] \left(1 + \frac{2r_1}{(r_1^2 + r_2^2)^{1/2}} \right)^{-1} \left(1 - \frac{r_1 (r_2^2 + r_2^2)^{1/2}}{r_2 (r_1^2 + r_2^2)^{1/2}} \right)$$

Вторая скобка в (1.11) при $r_1 \rightarrow r_2$ стремится к 0 возрастая, а, следовательно, $T_{(r)}$ убывает.

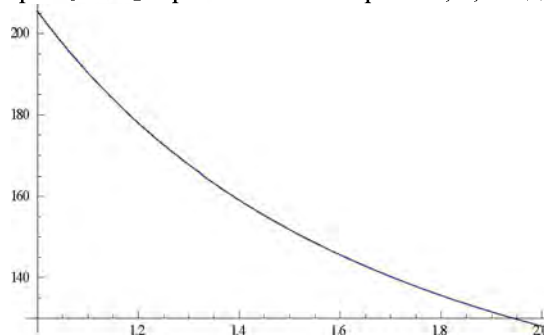


Рисунок 2 – График изменения температуры в полом цилиндре при $\lambda(r) = \lambda_0 (r^2 + r_2^2)^{1/2}$

3. Пусть $\lambda(r)$ на интервале (r_1 , r_2) изменяется по закону

$$\lambda(r) = \frac{[(ar - b)\sin r + (a + br)\cos r]^2}{r^2} \quad (12)$$

где a и b – некоторые константы.

Тогда распределение температуры имеет вид:

$$T(r) = T^{(i)} + [T] \left[1 - \frac{r_2 \sin r_2 + \cos r_2}{r_1 \sin r_1 + \cos r_1} \cdot \frac{b[(ar_1 - b)\sin r_1 + (a + br_1)\cos r_1]}{b[(ar_2 - b)\sin r_2 + (a + br_2)\cos r_2]} \right] \times \\ \times \left[1 - \frac{r \sin r + \cos r}{r_1 \sin r_1 + \cos r_1} \cdot \frac{b[(ar - b)\sin r + (a + br)\cos r]}{b[(ar_1 - b)\sin r_1 + (a + br_1)\cos r_1]} \right] \quad (13)$$

На рис. 3 изображены зависимости распределения неоднородности $\lambda(r)$, а на рис. 4 соответствующие распределения температуры по толщине трубы.

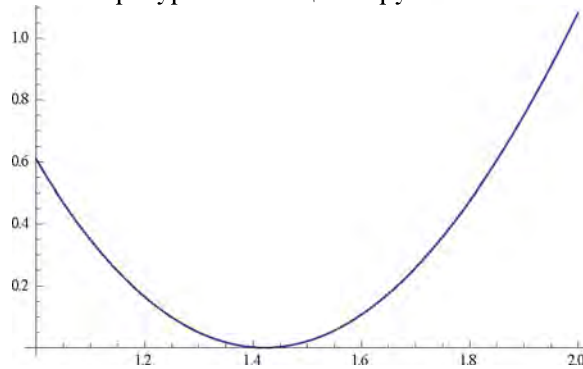


Рисунок 3. – График распределения неоднородностей $\lambda(r)$.

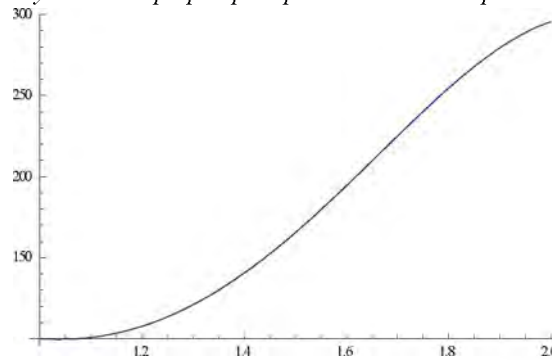


Рисунок 4 – График изменения температуры в полном цилиндре при $\lambda(r) = \frac{[(ar - b)\sin r + (a + br)\cos r]^2}{r^2}$.

Заключение. Результаты проведенных исследований показывают, что разработанная методология расчета теплового состояния многослойных тел позволяет путем соответствующего подбора функций неидеального контакта слоев со свойствами, полученными расчетами, создать многослойную конструкции с допустимыми уровнями температур, их градиентов.

Литература

1. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. – М: Атомиздат, 1979, 416 с.
2. Мухачев Г. А., Щукин В. К. Термодинамика и теплопередача: Учеб. для авиац. вузов.– М.: Высш. шк., 1991. – 480 с.
3. Зарубин В.С., Кувыркин Г. Н. Математические модели термомеханики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 168 с.

Summary

In the article discussed the calculation of the temperature in the simulation of the multilayer structure, which has imperfect contact between the layers. Imperfect contact between the layers of the various functions is given heterogeneity.

Поступила в редакцию 21.08.2012

НЕОБРАТИМОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ ВСЛЕДСТВИЕ ЛОКАЛЬНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Дац Е.П., Мурашкин Е.В.

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения
Российской академии наук, Владивосток*

Введение. Поле остаточных напряжений формируется в процессе упругопластического деформирования при последующее разгрузке таким образом продеформированного материала. Известно возникновение остаточных напряжений вследствие интенсивного теплового воздействия, например в окрестности сварных швов [6]. Очевидно, что в этом случае процесс упругопластического деформирования инициируется быстрым нагревом материала по линии сварки. Известны инженерные методы расчета уровня остаточных напряжений в зоне термического влияния сварного шва [8]. Здесь приводится точное решение задачи формирования остаточных напряжений в предположении, что связанностью процессов теплопроводности и деформирования в условиях интенсивного теплового воздействия можно пренебречь, то есть провести расчеты в рамках теории температурных напряжений [1,7], учитывая при этом зависимость предела текучести от температуры.

Основные модельные зависимости. Пусть до момента времени $t = 0$ пластина находится в свободном состоянии при комнатной температуре T_0 . Материал пластины считаем упругопластическим, подчиняющимся математической модели типа Прандтля-Рейса [2,3] в которой деформации e_{ij} полагаются малыми и складываются из упругих e_{ij}^e и пластических e_{ij}^p составляющих деформаций

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1)$$

Уровень и распределение упругих деформаций и температуры по пластине задают напряжения в ней, рассматриваемые согласно закону Дюамеля-Неймана

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk}^e + 3\alpha K\theta)\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e, \quad \theta = T(r, t) - T_0 \quad (2)$$

Здесь λ , μ – параметры Ламе, K – модуль всестороннего сжатия материала ($3K = 3\lambda + 2\mu$), α – коэффициент линейного температурного расширения материала, $T(r, t)$ – текущая температура. Начало процесса пластического течения в материале пластины свяжем с выполнением условия пластичности в форме Треска [3]

$$f(\sigma_{ij}) = \max |\sigma_i - \sigma_j| - 2k(\theta) = 0 \quad (3)$$

где σ_i – главные напряжения, $k(\theta)$ – предел текучести материала при заданной температуре. Далее в расчетах для $k(\theta)$ принимается простейшая линейная зависимость $k(\theta) = k_0 - \beta\theta$, в которой k_0 – предел текучести материала при комнатной температуре, β – теплофизическая постоянная материала, задающая степень падения предела текучести с повышением температуры. В условиях принятого принципа максимума Мизеса [3] поверхность (3) становится пластическим потенциалом, следствием которого является ассоциированный закон пластического течения

$$\varepsilon_{ij}^p = \xi \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \xi = \sqrt{\varepsilon_{kl}^p \varepsilon_{lk}^p} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4)$$

Если к соотношениям (1) – (4) добавить локальные следствия законов сохранения (уравнение движения и уравнение баланса внутренней энергии), приняв при этом в качестве закона теплопроводности закон Фурье, то получим замкнутую математическую модель деформирования.

Постановка задачи. Упругое деформирование. Пусть бесконечная пластина нагревается так, что температура на её линии, являющейся окружностью радиуса R , растёт пропорционально времени. Данное воздействие приведет к росту деформаций и напряжений в материале пластины. Считая толщину пластины достаточно малой, полагаем, что пластина находится в условиях плоского напряженного состояния так, что в цилиндрической системе координат r, φ, z нормальные напряжения σ_{zz} на площадках, ортогональных пластине равны нулю

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu)e_{zz} + \lambda(e_{rr} + e_{\varphi\varphi}) - 3\alpha K\theta = 0$$

$$e_{rr} = e_{rr}^e = u_{r,r}, \quad e_{zz} = e_{zz}^e = u_{z,z}, \quad e_{\varphi\varphi} = e_{\varphi\varphi}^e = \frac{u_r}{r}$$

Для других отличных от нуля компонент тензора напряжений в таком случае согласно (2) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} u_{r,r} + \frac{2\lambda\mu}{(\lambda + 2\mu)} \frac{u_r}{r} - \frac{6\alpha\mu K}{(\lambda + 2\mu)} \theta \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} \frac{u_r}{r} + \frac{2\lambda\mu}{(\lambda + 2\mu)} u_{r,r} - \frac{6\alpha\mu K}{(\lambda + 2\mu)} \theta \end{aligned} \quad (5)$$

Подстановка значений компонент напряжений из (5) в уравнения равновесия, записанные в цилиндрической системе координат, приводит к уравнению для единственной отличной от нуля компоненты вектора перемещений

$$u_{r,rr} + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{3\alpha K}{2(\lambda + \mu)} \theta_{,r} \quad (6)$$

Если в уравнении баланса внутренней энергии (локальной формулировке закона сохранения энергии) пренебречь источником тепла, вызванного деформированием (связанностью процессов деформирования и теплопередачи), то для нестационарного распределения температуры по пластине будем иметь классическое уравнение теплопроводности [4,5]. Его решение при условии, что, начиная с момента времени $t = 0$ в пластине, находящейся до того при комнатной температуре T_0 производится нагрев по линии $r = R$ до температуры T_k , строится конечно-разностным методом [9].

По известному распределению $\theta(r, t)$ перемещения могут быть найдены интегрированием уравнения (6) отдельно в областях $r < R$ и $r > R$. Также по рассчитанному полю перемещений вычисляется распределение напряжений. Для области $r < R$ получим

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{b}{\mu r} \psi(r, t) + c_1 r \\ \sigma_{rr} &= -\frac{2b}{r^2} \psi(r, t) + qc_1 \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{2b}{r^2} (\psi(r, t) - r^2 \theta) + qc_1 \end{aligned} \quad (7)$$

$$b = \frac{3\alpha\mu K}{2(\lambda + \mu)}, \quad q = \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)}, \quad \psi(r, t) = \int_0^r \theta(\rho, t) \rho d\rho$$

В области $r > R$ найдем

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{b}{\mu r} \phi(r, t) + \frac{c_2}{r} \\ \sigma_{rr} &= -\frac{2b}{r^2} \phi(r, t) - 2\mu \frac{c_2}{r^2} \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -\sigma_{rr} - 2b\theta \\ \phi(r, t) &= \int_R^r \theta(\rho, t) \rho d\rho \end{aligned} \quad (8)$$

Выполняя условия непрерывности перемещений и напряжений на границе $r = R$, найдем постоянные интегрирования c_1 и c_2

$$c_1 = 0; c_2 = b\psi(R, t) \quad (9)$$

Выписанные зависимости (7) – (9) решают поставленную задачу, но имеют, однако, ограничение, связанное с выходом напряженных состояний (7) и (8) на поверхность нагружения, вследствие чего в материале пластины начнется пластическое течение. Область пластического течения развивается от линии $r = R$ в обе стороны и в некоторый текущий момент нагрева занимает область, расположенную между линиями $r = r_1$ и $r = r_2$ ($r_1 < R < r_2$). Вне данной области пластина продолжает деформироваться обратимо и квазистатические параметры подобных напряженно-деформированных состояний будут по-прежнему задаваться зависимостями (7) – (8) с тем только отличием, что постоянные интегрирования в них будут определяться значениями, отличными от (9)

$$c_1(r_1) = \frac{2}{q} \left(-\frac{b}{r_1^2} \psi(r_1, t) + b\theta_1 - k_1 \right), \quad c_2(r_2) = \frac{r_2^2}{\mu} (b\theta_2 - k_2)$$

$$\theta_n = \theta(r_n), \quad k_n = k(\theta_n), \quad n = 1, 2$$

В развивающейся области пластического течения напряженные состояния соответствуют точкам поверхности нагружения (3). В рассматриваемом случае это будут точки призмы Треска, лежащие в плоскости $\sigma_{zz} = 0$ пространства главных напряжений на прямой

$$\sigma_{\phi\phi} = -2k(\theta) \quad (10)$$

Интегрируя уравнение равновесия при данном условии, найдем, что во всей области течения

$$\sigma_{rr} = -\frac{2}{r} \int_{r_1}^r k(\theta(\rho, t)) d\rho + \frac{c_3}{r} \quad (11)$$

Обратимые деформации в любой момент времени и в любой точки области пластического течения возможно теперь вычислить по (10) и (11), выразив их через зависимости (2), переписанные в цилиндрических координатах:

$$e_{\phi\phi}^e = 2s(b\theta - k(\theta)) - \frac{g}{r} \left(\frac{c_3}{2} - \int_{r_1}^r k(\theta(\rho, t)) d\rho \right)$$

$$e_{rr}^e = 2s \left(b\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{c_3}{2} - \int_{r_1}^r k(\theta(\rho, t)) d\rho \right) \right) + gk(\theta)$$

$$s = \frac{(\lambda + \mu)}{\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad g = \frac{\lambda}{\mu(3\lambda + 2\mu)}$$

Следствием ассоциированного закона пластического течения (4) будет равенство

$$e_{rr}^p = u_{r,r} - e_{rr}^e = 0 \quad (13)$$

Подставляя зависимость (12) в (13) приходим к уравнению для перемещений в области течения

$$u_{r,r} = 2s \left(b\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{c_3}{2} - \int_{r_1}^r k(\theta(\rho, t)) d\rho \right) \right) + gk(\theta)$$

проинтегрировав которое, получим

$$u_r = 2s \left(b \int_{r_1}^r \theta(\rho, t) d\rho + \frac{c_3}{2} \ln \left(\frac{r}{r_1} \right) - \int_{r_1}^r \frac{1}{\rho} \int_{r_1}^{\rho} k(\theta(\chi, t)) d\chi d\rho \right) + g \int_{r_1}^r k(\theta(\rho, t)) d\rho + c_4$$

Неизвестные константы интегрирования c_3, c_4 и размеры области необратимого деформирования ($r_1 < r < r_2$) найдем из условий неразрывности полей перемещений и напряжений на упругопластических границах (r_1, r_2). В результате несложных преобразований можно получить

$$c_3(r_1) = 2r_1 \left(b\theta_1 - \frac{2b}{r_1^2} \psi(r_1, t) - k_1 \right)$$

$$c_4(r_1) = \frac{2br_1}{q} \left(\theta_1 - \frac{k_1}{b} \right) + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{2}{q} \right) \frac{b}{r_1} \psi(r_1, t)$$

и систему уравнений для определения границ зоны пластического течения

$$\begin{cases} b \int_{r_1}^{r_2} \theta(\rho, t) d\rho - \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\rho} \int_{r_1}^{\rho} k(\theta(\chi, t)) d\chi d\rho - \int_{r_1}^{r_2} k(\theta(\rho, t)) d\rho + \\ + \frac{2b}{r_1} \psi(r_1, t) + \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + 1 \right) \left(2r_1 \left(b\theta_1 - \frac{2b}{r_1^2} \psi(r_1, t) - k_1 \right) \right) = 0 \\ b\theta_2 r_2 - r_2 k_2 = \int_{r_1}^{r_2} k(\theta(\rho, t)) d\rho + \frac{2b}{r_1} \psi(r_1, t) + 2r_1 k_1 - b\theta_1 r_1 \end{cases}$$

Распределения полей перемещений и напряжений в конечный момент нагрева $t = \tilde{t}$ приведены на рисунках (1, 2) соответственно.

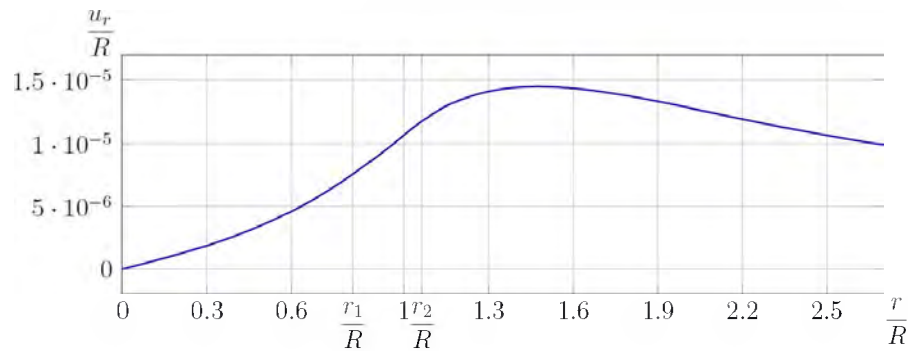


Рисунок 1

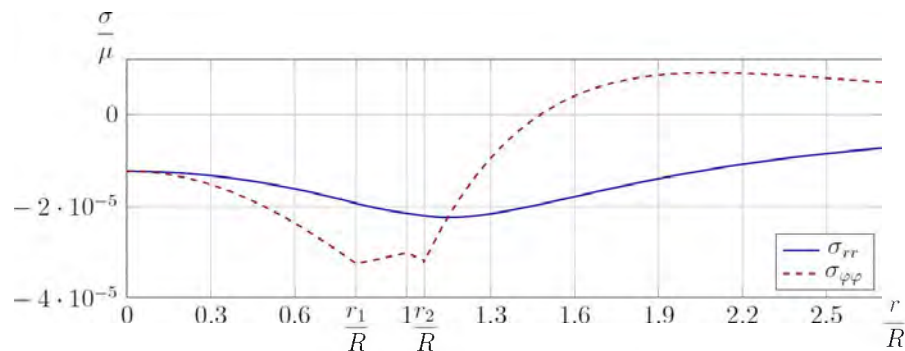


Рисунок 2

Охлаждение пластины. С некоторого момента времени \tilde{t} начнем постепенно охлаждать пластину, в дальнейшем волной сверху обозначим функции и константы, вычисленные в момент времени \tilde{t} . Тогда в областях обратимого деформирования перемещения и напряжения определятся зависимостями (7) – (8) с точностью до констант интегрирования.

В области с накопленными необратимыми деформациями $\tilde{r}_1 < r < \tilde{r}_2$ при разгрузке пластические деформации не изменяются и определяются зависимостями

$$e_{\varphi\varphi}^p = \frac{2bs}{r} \int_{\tilde{r}_1}^r \tilde{\theta}(\rho) d\rho + \frac{2s}{r} \int_{\tilde{r}_1}^r k(\tilde{\theta}(\rho)) \ln(\rho) d\rho + \left(\frac{s}{r} \ln \left(\frac{r}{\tilde{r}_1} \right) + \frac{g}{2r} \right) \tilde{c}_3 +$$

$$+ \frac{2s}{r} \ln(r) \int_{\tilde{r}_1}^r k(\tilde{\theta}(\rho)) d\rho + \frac{\tilde{c}_4}{r} - 2bs\tilde{\theta} + 2sk(\tilde{\theta}) \quad (14)$$

Упругие вычисляются согласно (1)

$$e_{rr}^e = u_{r,r}, \quad e_{\varphi\varphi}^e = \frac{u}{r} - e_{\varphi\varphi}^p \quad (15)$$

Используя (15), закон Дюамеля-Неймана (2) запишется в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} u_{r,r} + \frac{2\lambda\mu}{(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{u_r}{r} - e_{\varphi\varphi}^p \right) - \frac{6\alpha\mu K}{(\lambda + 2\mu)} \theta \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{u_r}{r} - e_{\varphi\varphi}^p \right) + \frac{2\lambda\mu}{(\lambda + 2\mu)} u_{r,r} - \frac{6\alpha\mu K}{(\lambda + 2\mu)} \theta \end{aligned} \quad (16)$$

Подставив компоненты тензора напряжений (16) в уравнение равновесия, и заменив компоненты необратимых деформаций согласно (14), получим уравнение относительно радиальной компоненты перемещений

$$u_{r,rr} + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} = -\frac{1}{qs} \frac{e_{\varphi\varphi}^p}{r} + \frac{g}{2s} e_{\varphi\varphi}^p + \frac{b}{\mu} \theta_{,r} \quad (17)$$

Решением уравнения (17) будет функция

$$u_r = \frac{b}{\mu r} \int_{\tilde{r}_1}^r \theta(\rho, t) \rho d\rho - \frac{r}{2qs} \int_{\tilde{r}_1}^r \frac{e_{\varphi\varphi}^p(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{1}{s\mu r} \int_{\tilde{r}_1}^r e_{\varphi\varphi}^p(\rho) \rho d\rho + \frac{(r^2 - \tilde{r}_1^2)c_5}{2qsr} + \frac{c_6}{r}$$

Что позволит вычислить напряжения (16) в области с накопленными необратимыми деформациями

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\frac{2b}{r^2} \int_{\tilde{r}_1}^r \theta(\rho, t) \rho d\rho - \frac{1}{2s} \left(\int_{\tilde{r}_1}^r \frac{e_{\varphi\varphi}^p(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{1}{r^2} \int_{\tilde{r}_1}^r e_{\varphi\varphi}^p(\rho) \rho d\rho \right) + \\ &+ \mu \left(2 + \frac{r^2 - \tilde{r}_1^2}{2r^2 sq} \right) c_5 - \frac{2\mu}{r^2} c_6 \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{2b}{r^2} \int_{\tilde{r}_1}^r \theta(\rho, t) \rho d\rho - \frac{1}{2s} \left(\int_{\tilde{r}_1}^r \frac{e_{\varphi\varphi}^p(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{1}{r^2} \int_{\tilde{r}_1}^r e_{\varphi\varphi}^p(\rho) \rho d\rho \right) + \\ &+ \mu \left(2 + \frac{r^2 - \tilde{r}_1^2}{2r^2 sq} \right) c_5 - \frac{e_{\varphi\varphi}^p}{s} - 2b\theta + \frac{2\mu}{r^2} c_6 \end{aligned}$$

Вновь воспользовавшись условиями непрерывности полей перемещений и напряжений на упругопластических границах $(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$, найдем неизвестные константы интегрирования. В результате несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} c_1(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) &= \frac{1}{sq} \int_{\tilde{r}_1}^{\tilde{r}_2} \frac{e_{\varphi\varphi}^p(\rho)}{\rho} d\rho \\ c_5(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) &= \int_{\tilde{r}_1}^{\tilde{r}_2} \frac{e_{\varphi\varphi}^p(\rho)}{\rho} d\rho \\ c_2(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) &= \frac{b}{\mu} \psi(\tilde{r}_1, t) + \frac{1}{4\mu s} \int_{\tilde{r}_1}^{\tilde{r}_2} e_{\varphi\varphi}^p(\rho) d\rho \\ c_6(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) &= \frac{b}{\mu} \psi(\tilde{r}_1, t) + c_1(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) \tilde{r}_1^2 \end{aligned}$$

На рис. 3,4 приведены поля перемещений и остаточных напряжений в момент времени, когда тело достигнет своей первоначальной температуры.

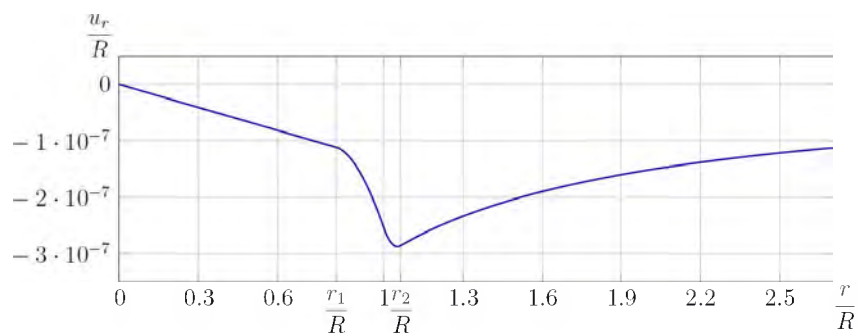


Рисунок 3

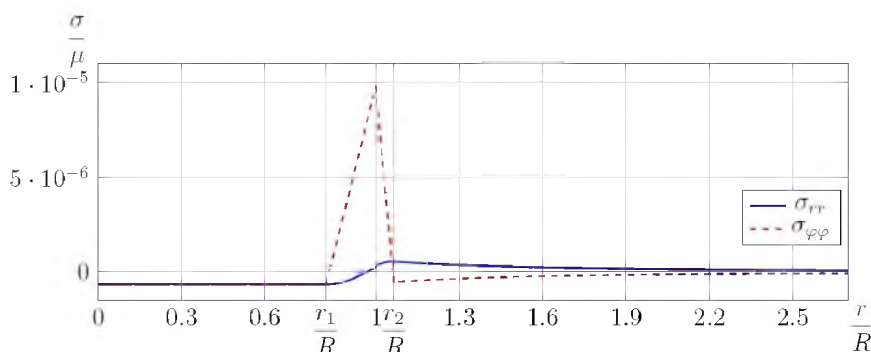


Рисунок 4

Построенное решение позволяет рассчитать распределение полей остаточных напряжений и перемещений в упругопластическом материале тонкой пластины под действием интенсивного теплового воздействия. Получены аналитические зависимости для напряжений, деформаций и перемещений в случае пластического течения, найдены границы области необратимого деформирования.

Резюме

В рамках классической теории упругопластических деформаций рассчитывается одномерный процесс деформирования материала вследствие локального нагрева и последующего охлаждения. Решена задача о формировании остаточных напряжений в тонкой пластине из упругопластического материала при заданном тепловом воздействии. Построены графики полей остаточных напряжений и перемещений.

Литература

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений // М.: Мир, 1964. 520с.
2. Галин Л.А. Упругопластические задачи // М.: Наука. 1984. 232с.
3. Ивлев Д.Д., Ершов Л.В. Метод возмущений в теории упругопластического тела // М.: Наука, 1978. 208с.
4. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел // М.: Наука, 1964. 487с.
5. Лыков А. В. Теория теплопроводности // М.: Высшая школа, 1967. 599с.
6. Окерблом Н.О., Демьянович В.П., Байкова И.П. Проектирование технологии изготовления сварных конструкций // Ленинград: СудпромГиз, 1963. 602с.
7. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения // М.: Физматгиз, 1963. 251с.
8. Рыкалин Н.Н. Расчеты тепловых процессов при сварке // М.: Машиностроение, 1951. 294с.
9. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем // М.: Наука, 1971. 552 с.

Summary

One-dimensional deformation process of a material due to local heating and subsequent cooling was calculated by the classical elastic-plastic theory. The problem of the formation of residual stresses in a thin plate of elastic material at a given thermal effect was solved. Graphs fields of residual stresses and displacements were given.

Поступила в редакцию 16.10.2012

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СИСТЕМЫ N ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Щербаков С.С.

УО «Белорусский государственный университет», Минск

Введение. Среди современных задач механики деформируемого твердого тела одной из важных является построение механико-математических моделей напряженно-деформированного состояния систем, в которых одновременно реализуется контактное взаимодействие с трением (качения, скольжения) между твердыми деформируемыми телами и неконтактное (объемное) деформирование по крайней мере одного из элементов системы [1-5].

Характерными примерами подобных трибофатических систем являются системы ролик/вал, ролик/кольцо, труба/поток вязкой жидкости. Эти системы представляют собой модели таких практически важных систем как зубчатые зацепления, колесо/рельс, участок магистрального трубопровода и мн. др.

Исследование данных систем в рамках теории упругости имеет ряд особенностей. Поскольку, как правило, реализуется трехмерное контактное взаимодействие, постановка задачи определения объединенного напряженно-деформированного состояния также является трехмерной.

В теории упругости принимается положение о независимости различных приложенных к твердому телу граничных условий. Однако в результате экспериментальных исследований установлено, что при упругом деформировании элементов сложных механических систем наблюдается изменение характеристик трения (момента, силы коэффициента трения) вследствие изгиба одного из контактирующих элементов, что свидетельствует об изменении условий контактного взаимодействия. Таким образом, при механико-математическом моделировании таких систем следует учитывать изменение контактных граничных условий в результате действия неконтактных нагрузок. Особую сложность представляют задачи моделирования взаимодействия во многоэлементных системах.

Постановка задачи. Рассмотрим механико-математическую модель взаимодействия системы n тел с различными механическими свойствами, деформируемых в том числе нелинейно.

Для некоторой конфигурации k -го тела, заданной его положением в пространстве \mathbf{r}^k в некоторый момент времени t , выполняются соотношения, определяющие механическое состояние частицы (элементарного объема) тела: уравнение неразрывности, уравнения движения частиц тела, зависимость между перемещениями и деформациями и закон Гука.

К данным уравнениям добавляются граничные условия первого типа, если на поверхности S_u упругого тела заданы перемещения $\bar{u}_i^{k*}(\mathbf{r}^k)$:

$$u_i^k = \bar{u}_i^{k*}(\mathbf{r}^k, t) \quad (1)$$

и/или второго типа, если на поверхности тела S_σ задано распределение усилий \bar{p}_i

$$\sigma_{ij}^k l_j^k = \bar{p}_i(\mathbf{r}^k, t) \quad (2)$$

где l_j^k – направляющие косинусы.

Помимо этого могут быть определены начальные условия

$$u_i^k \Big|_{t=0} = u_i^{k0}, \dot{u}_i^k \Big|_{t=0} = \dot{u}_i^{k0}. \quad (3)$$

Взаимодействие n деформируемых тел можно описать с помощью контактных граничных условий, определяемых следующими соотношениями:

$$\bar{\mathbf{u}}_l \Big|_{S_u^{(lm)}} - \bar{\mathbf{u}}_m \Big|_{S_u^{(lm)}} = \mathbf{d}_{lm}^{(u)}(\mathbf{r}^l, \mathbf{r}^m, t) \Big|_{S_u^{(lm)}}, \quad (4)$$

$$\mathbf{L}_\sigma \left(\bar{\mathbf{u}}_l \Big|_{S_\sigma^{(lm)}} \right) - \mathbf{L}_\sigma \left(\bar{\mathbf{u}}_m \Big|_{S_\sigma^{(lm)}} \right) = \bar{\mathbf{p}}_l \Big|_{S_\sigma^{(lm)}} - \bar{\mathbf{p}}_m \Big|_{S_\sigma^{(lm)}} = \mathbf{d}_{lm}^{(\sigma)}(\mathbf{r}^l, \mathbf{r}^m, t) \Big|_{S_\sigma^{(lm)}}, \quad (5)$$

где $S^{(lm)}$ – поверхность контакта тел l и m , $S_\sigma^{(lm)} \subset S^{(lm)}$, $S_u^{(lm)} \subset S^{(lm)}$, $\bar{\mathbf{p}}_k = \{\bar{p}_1^k, \bar{p}_2^k, \bar{p}_3^k\} = \{p_n^k, p_\tau^k\}$ и

$\bar{\mathbf{u}}_k = \{\bar{u}_1^k, \bar{u}_2^k, \bar{u}_3^k\}$ – векторы усилий и перемещений на поверхности k -го тела, p_n^k и p_τ^k – нормальная

и касательная компоненты вектора усилий, $\mathbf{d}_{lm}^{(u)} = \{\partial_{lm}^{(n,u)}, \partial_{lm}^{(\tau,u)}\}$, $\mathbf{d}_{lm}^{(\sigma)} = \{\partial_{lm}^{(n,\sigma)}, \partial_{lm}^{(\tau,\sigma)}\}$ – векторы перемещений и усилий на поверхности контакта, $\bar{\mathbf{L}}_{\sigma} = \{L_{11}, L_{12}, L_{13}\}$ – вектор, компонентами которого являются интегральные операторы, определяющие поверхностные усилия. Так, в упругой постановке данные операторы имеют следующий вид:

$$L_{ij}(\mathbf{u}) = \mu(u_{i,j} + u_{i,j}) + \lambda u_{q,q} \delta_{ij}. \quad (6)$$

где δ_{ij} – дельта Кронекера, μ и λ – постоянные Ламе.

Контактные граничные условия (4), (5) позволяют описать как взаимодействие компонент одного тела с разными механическими свойствами (зонально-однородная среда):

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{lm}^{(u)}(\mathbf{r}^l, \mathbf{r}^m, t) \Big|_{S_u^{(lm)}} &= \bar{\mathbf{u}}_l \Big|_{S_u^{(lm)}} - \bar{\mathbf{u}}_m \Big|_{S_u^{(lm)}} = 0, \\ \mathbf{d}_{lm}^{(\sigma)}(\mathbf{r}^l, \mathbf{r}^m, t) \Big|_{S_{\sigma}^{(lm)}} &= \bar{\mathbf{p}}_l \Big|_{S_{\sigma}^{(lm)}} - \bar{\mathbf{p}}_m \Big|_{S_{\sigma}^{(lm)}} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

так и взаимодействие элементов системы тел. В последнем случае величина касательных поверхностных усилий в соответствии с законом Кулона является ограниченной и граничные условия (4), (5) примут вид

$$\begin{aligned} \delta_{lm}^{(n,\sigma)}(\mathbf{r}^l, \mathbf{r}^m, t) \Big|_{S_u^{(lm)}} &= \bar{p}_n^l \Big|_{S_{\sigma}^{(lm)}} - \bar{p}_n^m \Big|_{S_{\sigma}^{(lm)}} = \bar{p}_n^{lm} - \bar{p}_n^{lm} = 0, \\ \delta_{lm}^{(\tau,\sigma)}(\mathbf{r}^l, \mathbf{r}^m, t) \Big|_{S_u^{(lm)}} &= \bar{p}_{\tau}^l \Big|_{S_{\sigma}^{(lm)}} - \bar{p}_{\tau}^m \Big|_{S_{\sigma}^{(lm)}} = \bar{p}_{\tau}^{lm} - \bar{p}_{\tau}^{lm} = 0, \quad \bar{p}_{\tau}^{lm} \leq f \bar{p}_n^{lm}, \\ \delta_{lm}^{(n,u)}(\mathbf{r}^l, \mathbf{r}^m, t) \Big|_{S_u^{(lm)}} &= \bar{u}_n^l \Big|_{S_u^{(lm)}} - \bar{u}_n^m \Big|_{S_u^{(lm)}} = \bar{u}_n^{lm} - \bar{u}_n^{lm} = 0, \\ \delta_{lm}^{(\tau,u)}(\mathbf{r}^l, \mathbf{r}^m, t) \Big|_{S_u^{(lm)}} &= \bar{u}_{\tau}^l \Big|_{S_u^{(lm)}} - \bar{u}_{\tau}^m \Big|_{S_u^{(lm)}} = \begin{cases} \bar{u}_{\tau}^{lm} - \bar{u}_{\tau}^{lm} = 0, \quad \bar{p}_{\tau}^{lm} < f \bar{p}_n^{lm}, \\ \Delta \bar{u}_{\tau}^{lm} = var, \quad \bar{p}_{\tau}^{lm} = f \bar{p}_n^{lm}, \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

где f – коэффициент трения, $\Delta \bar{u}_{\tau}^{lm}$ – переменная величина, подлежащая определению.

Если между телами l и m реализуется случай несогласованного контактного взаимодействия, то контактная поверхность $S^{(lm)}$ является изначально неизвестной. В этом случае размеры и формы областей контакта, а также распределение контактных усилий можно найти, воспользовавшись вариационными методами или итерационным методом обращения матрицы.

С учетом контактного взаимодействия между l -м и m -м телами (компонентами зонально-однородного тела), система разрешающих интегральных уравнений для поверхностей двух тел примет вид:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_l^{(S)} \\ \bar{\mathbf{u}}_l^{(S)} \\ \mathbf{d}_{lm}^{(\sigma)} \\ \mathbf{d}_{lm}^{(u)} \\ \bar{\mathbf{p}}_m^{(S)} \\ \bar{\mathbf{u}}_m^{(S)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{L}}_{\sigma}(\mathbf{L}_u^{(S)}) & 0 \\ \bar{\mathbf{L}}_u^{(S)} & 0 \\ \bar{\mathbf{L}}_{\sigma}(\mathbf{L}_u^{(S)}) & -\bar{\mathbf{L}}_{\sigma}(\mathbf{L}_u^{(S)}) \\ \bar{\mathbf{L}}_u^{(S)} & -\bar{\mathbf{L}}_u^{(S)} \\ 0 & \bar{\mathbf{L}}_{\sigma}(\mathbf{L}_u^{(S)}) \\ 0 & \bar{\mathbf{L}}_u^{(S)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_l \\ \bar{\mathbf{p}}_m \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{L}}_{\sigma}(\mathbf{L}_u^{(V)}) & 0 \\ \bar{\mathbf{L}}_u^{(V)} & 0 \\ \bar{\mathbf{L}}_{\sigma}(\mathbf{L}_u^{(V)}) & -\bar{\mathbf{L}}_{\sigma}(\mathbf{L}_u^{(V)}) \\ \bar{\mathbf{L}}_u^{(V)} & -\bar{\mathbf{L}}_u^{(V)} \\ 0 & \bar{\mathbf{L}}_{\sigma}(\mathbf{L}_u^{(V)}) \\ 0 & \bar{\mathbf{L}}_u^{(V)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_l \\ \mathbf{q}_m \end{Bmatrix} \quad (9)$$

где \mathbf{q} – вектор объемных сил во внутренней точке тела, $\mathbf{L}_u^{(S)} = \{L_1^{(S,u)}, L_2^{(S,u)}, L_3^{(S,u)}\}$ и $\mathbf{L}_u^{(V)} = \{L_1^{(V,u)}, L_2^{(V,u)}, L_3^{(V,u)}\}$ – векторы, компонентами которых являются интегральные операторы для действия поверхностных и объемных сил:

$$L_i^{(S,j)}(p_{\varphi}) = \int_{S(\mathbf{o})} p_{\varphi}(\mathbf{o}) G_i^{(\varphi,j)}(\mathbf{x} - \mathbf{o}) dS(\mathbf{o}), \quad L_i^{(V,j)}(q_{\varphi}) = \int_{V(\mathbf{o})} q_{\varphi}(\mathbf{o}) G_i^{(\varphi,j)}(\mathbf{x} - \mathbf{o}) dV(\mathbf{o}) \quad (10)$$

где $j = u, \sigma$; $\varphi = n, \tau$, $G_i^{(n,u)}$, $G_i^{(\tau,u)}$ – функции влияния из фундаментальных решений (например, Кельвина, Буссинеска, Черрути) [6, 7].

Решение системы (9) заключается в определении, так называемых, неизвестных «фиктивных» граничных условий в напряжениях $\bar{\mathbf{p}}_i$ соответствующих совокупности приложенных граничных условий в напряжениях $\bar{\mathbf{p}}_i^{(S)}$, $\mathbf{d}_{lm}^{(\sigma)}$ и перемещениях $\bar{\mathbf{u}}_i^{(S)}$, $\mathbf{d}_{lm}^{(u)}$. Система уравнений для взаимодействия n строится аналогично системе (9).

После расчета $\bar{\mathbf{p}}_i$ напряженно-деформированное состояние в точке $M(x_1, x_2, x_3)$ тела l может быть определено из следующих соотношений для поверхностных и объемных сил

$$\mathbf{u}_i^l = L_i^{(S,u)}(\bar{\mathbf{p}}_i) + L_i^{(V,u)}(\mathbf{q}_i), \sigma_{ij}^l = L_{ij}(\mathbf{u}_i^l). \quad (11)$$

В модели взаимодействия тел (1)–(11) в отличие от моделей зонально-однородных тел, дополнительно рассматриваются касательные поверхностные усилия p_τ для областей проскальзывания и сцепления. Это позволяет учитывать вклад силы трения в формирование механического состояния взаимодействующих тел.

Решение системы (9) проводится в предположении, что взаимодействующие тела могут иметь разные упругие характеристики. Воспользуемся этой особенностью системы (9) для того, чтобы на ее основе провести моделирование нелинейного деформирования твердого тела путем последовательного выделения в нем подобластей с измененными упругими характеристиками при достижении эквивалентными напряжениями предельных значений в этих подобластях.

Пусть зависимость между напряжения и деформациями представима в кусочно-линейной функции с участками I, II, III, IV, V ..., определяющими различное нелинейное поведение материала. Тогда изменение механических свойств материала при возрастающей нагрузке может происходить при достижении эквивалентными напряжениями (деформациями) предельных σ_l (ε_l) в точках $l = a, b, c, d, \dots$, разделяющих участки с различным характером деформирования, в соответствии с критерием предельного состояния

$$\varphi(\sigma_{eqv}, \varepsilon_{eqv}, \sigma_l, \varepsilon_l) = 0. \quad (12)$$

Рассмотрим внешнюю нагрузку (заданную усилиями или перемещениями), увеличивающуюся в зависимости от некоторого параметра θ (например, времени) до номинального значения $\bar{\mathbf{p}}^{(S)}$, $\bar{\mathbf{u}}^{(S)}$:

$$0 \leq \bar{\mathbf{p}}^{(*S)}(\theta) \leq \bar{\mathbf{p}}^{(S)}, 0 \leq \bar{\mathbf{u}}^{(*S)}(\theta) \leq \bar{\mathbf{u}}^{(S)}. \quad (13)$$

В этом случае выделение подобластей с измененными упругими характеристиками начинается в точках тела с максимальными напряжениями, рассчитанными для текущих упругих характеристик при действии $\bar{\mathbf{p}}^{(*S)}(\theta)$ или $\bar{\mathbf{u}}^{(*S)}(\theta)$. Например, если для некоторого θ на поверхности (кривой) $S_a(\theta)$ внутри тела, выполняется условие (12) для точки a (которая может трактоваться как предел пропорциональности), разделяющей участки I и II зависимости между напряжения и деформациями, то на этой поверхности задаются контактные граничные условия типа (7)

$$\bar{\mathbf{u}}_I \Big|_{S_a^{(I,II)}(\theta)} - \bar{\mathbf{u}}_{II} \Big|_{S_a^{(I,II)}(\theta)} = 0, \quad (14)$$

$$\mathbf{L}_\sigma \left(\bar{\mathbf{u}}_I \Big|_{S_a^{(I,II)}(\theta)} \right) - \mathbf{L}_\sigma \left(\bar{\mathbf{u}}_{II} \Big|_{S_a^{(I,II)}(\theta)} \right) = \bar{\mathbf{p}}_I \Big|_{S_a^{(I,II)}(\theta)} - \bar{\mathbf{p}}_{II} \Big|_{S_a^{(I,II)}(\theta)} = 0. \quad (15)$$

Тогда система разрешающих уравнений для тела с двумя подобластями, моделирующими нелинейное поведение материала, при отсутствии объемных сил будет иметь вид

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{C}_I(\theta) \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{C}_{II}(\theta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_I & 0 \\ \mathbf{A}_{I,II} & -\mathbf{A}_{I,II} \\ \bar{\mathbf{L}}_u^{(S)} & -\bar{\mathbf{L}}_u^{(S)} \\ 0 & \mathbf{A}_{II} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_I(\theta) \\ \bar{\mathbf{p}}_{II}(\theta) \end{Bmatrix}, \quad (16)$$

где \mathbf{A}_{lm} , \mathbf{B}_{lm} – краткие обозначения операторов $\bar{\mathbf{L}}_\sigma(\bar{\mathbf{L}}_u^{(S)})$ и $\bar{\mathbf{L}}_\sigma(\bar{\mathbf{L}}_u^{(V)})$.

Решение (16) относительно неизвестных $\bar{\mathbf{p}}_I(\theta)$ и $\bar{\mathbf{p}}_{II}(\theta)$, позволяет рассчитать напряженно-деформированное состояние подобластей I и II нелинейно деформируемого тела в соответствии с (11)

Если продолжить итерационный процесс до точки d диаграммы, в которой нагрузка $\bar{\mathbf{p}}^{(*S)}(\theta)$ достигает номинального значения $\bar{\mathbf{p}}^{(S)}$, то система разрешающих уравнений для данного участка

диаграммы будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_I \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{C}_{II} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{IV} \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{C}_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mathbf{A}_{I,II} & -\mathbf{A}_{II,I} & & 0 & 0 \\ \overline{\mathbf{L}}_u^{(S)} & -\overline{\mathbf{L}}_u^{(S)} & & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{II} & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & \mathbf{A}_{IV} & 0 \\ 0 & 0 & & \mathbf{A}_{IV,V} & -\mathbf{A}_{V,IV} \\ 0 & 0 & & \overline{\mathbf{L}}_u^{(S)} & -\overline{\mathbf{L}}_u^{(S)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{A}_V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{p}}_I \\ \overline{\mathbf{p}}_{II} \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{p}}_{IV} \\ \overline{\mathbf{p}}_V \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Система (17) является диагональной, поскольку каждая новая подобласть, моделирующая измененное поведение материала, находится внутри подобласти, описывающей поведение на предыдущем участке.

Разгрузка системы на участке V происходит параллельно линейной зависимости, заданной на участке I. Остаточные деформации получаются вычитанием упругих деформаций на участке V из деформаций, рассчитанных в соответствии с (11), (17).

Запишем систему уравнений для взаимодействия n тел при действии поверхностных усилий с учетом (17), предполагая, что, по крайней мере, один из элементов системы (например, первый) деформируется нелинейно:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_I^1 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{C}_{II}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{(Q-1)}^1 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{C}_Q^1 \\ \mathbf{D}_{12}^{(\sigma)} \\ \mathbf{D}_{12}^{(u)} \\ \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{D}_{13}^{(\sigma)} \\ \mathbf{D}_{13}^{(u)} \\ \mathbf{C}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{D}_{2n}^{(\sigma)} \\ \mathbf{D}_{2n}^{(u)} \\ \mathbf{D}_{3n}^{(\sigma)} \\ \mathbf{D}_{3n}^{(u)} \\ \mathbf{C}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_I^1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{A}_{I,II}^1 & -\mathbf{A}_{II,I}^1 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \overline{\mathbf{L}}_u^{(S)} & -\overline{\mathbf{L}}_u^{(S)} & & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{II}^1 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \mathbf{A}_{(Q-1)}^1 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & \mathbf{A}_{Q(Q-1)}^1 & -\mathbf{A}_{(Q-1)Q}^1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & \overline{\mathbf{L}}_u^{(S)} & -\overline{\mathbf{L}}_u^{(S)} & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \mathbf{A}_Q^1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \mathbf{A}_{12} & -\mathbf{A}_{21} & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \overline{\mathbf{L}}_u^{(S)} & -\overline{\mathbf{L}}_u^{(S)} & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & \mathbf{A}_2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \mathbf{A}_{13} & 0 & -\mathbf{A}_{31} & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \overline{\mathbf{L}}_u^{(S)} & 0 & -\overline{\mathbf{L}}_u^{(S)} & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}_3 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & \mathbf{A}_{2n} & 0 & 0 & & -\mathbf{A}_{n2} \\ 0 & 0 & & 0 & \overline{\mathbf{L}}_u^{(S)} & 0 & 0 & & -\overline{\mathbf{L}}_u^{(S)} \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}_{3n} & & -\mathbf{A}_{n3} \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \overline{\mathbf{L}}_u^{(S)} & & -\overline{\mathbf{L}}_u^{(S)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{A}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{p}}_I^1 \\ \overline{\mathbf{p}}_{II}^1 \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{p}}_{(Q-1)}^1 \\ \overline{\mathbf{p}}_Q^1 \\ \overline{\mathbf{p}}_2 \\ \overline{\mathbf{p}}_3 \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{p}}_n \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Разрешающая система (18) описывает взаимодействия, по крайней мере, тел (компонент тела) 1 с 2, 1 с 3, 2 и 3 с n . При этом, по крайней мере, тело 1 (выделено в (18) прямоугольниками) деформируется нелинейно. Нелинейное деформирование тела 1 моделируется участками упругого нагружения I – Q.

Рассмотрим теперь построение системы разрешающих уравнений с учетом волновых эффектов на основе, например, фундаментальных решений задачи Кельвина в динамической постановке.

В этом случае операторы аналогичные (10) примут вид

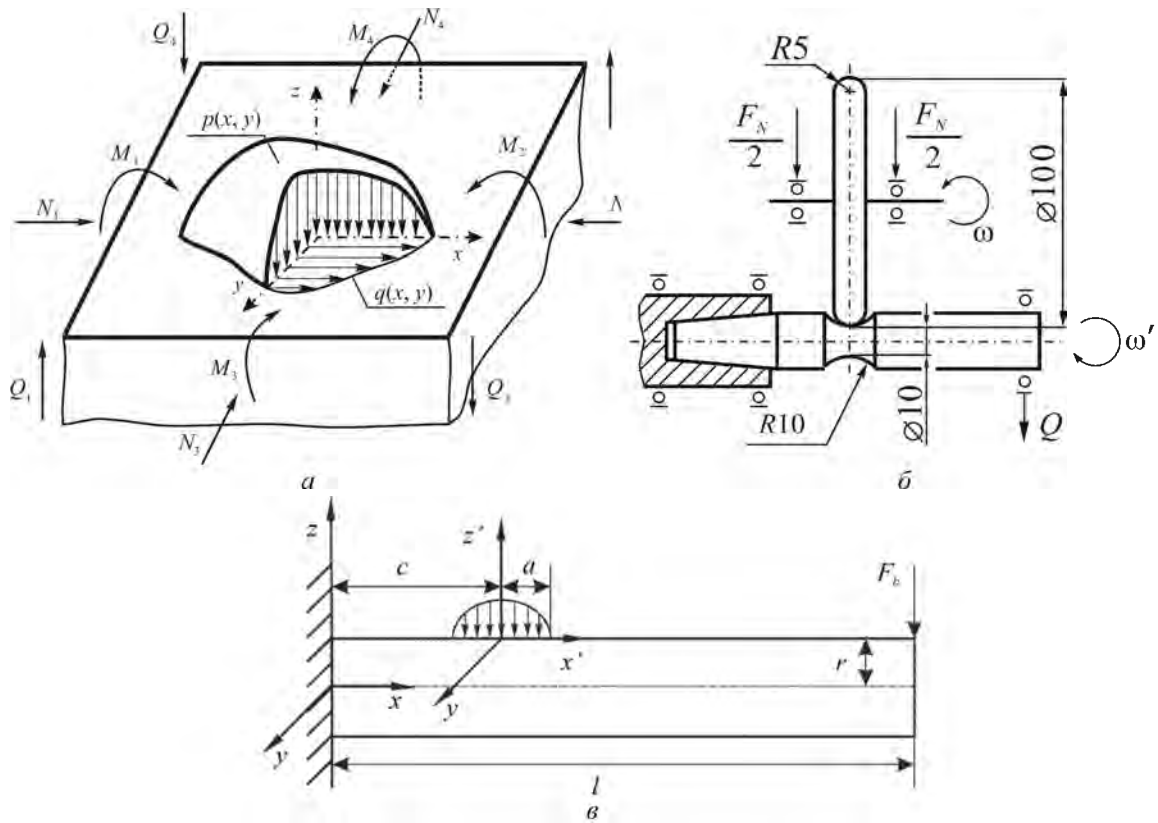
$$L_i^{(S,t,j)}(p_\varphi(t)) = \int_0^t \int_{S(\mathbf{o},\tau)} p_\varphi(\mathbf{o},\tau) G_i^{(\varphi,j)}(\mathbf{x}-\mathbf{o},t,\tau) dS(\mathbf{o},\tau) dt \quad (19)$$

$$L_i^{(V,t,j)}(q_\varphi(t)) = \int_0^t \int_{V(\mathbf{o},\tau)} q_\varphi(\mathbf{o},\tau) G_i^{(\varphi,j)}(\mathbf{x}-\mathbf{o},t,\tau) dV(\mathbf{o},\tau) dt \quad (20)$$

С учетом операторов (19) и (20) система (18) будет следующей

$$\left(\begin{array}{c} C_1^1(t) \\ 0 \\ 0 \\ C_{II}^1(t) \\ \vdots \\ C_{(Q-1)}^1(t) \\ 0 \\ 0 \\ C_Q^1(t) \\ D_{12}^{(\sigma)}(t) \\ D_{12}^{(u)}(t) \\ C_2(t) \\ D_{13}^{(\sigma)}(t) \\ D_{13}^{(u)}(t) \\ C_3(t) \\ \vdots \\ D_{2n}^{(\sigma)}(t) \\ D_{2n}^{(u)}(t) \\ D_{3n}^{(\sigma)}(t) \\ D_{3n}^{(u)}(t) \\ C_n(t) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccccccc} \mathbf{A}_I^{(1,t)} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{A}_{I,II}^{(1,t)} & -\mathbf{A}_{II,I}^{(1,t)} & & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \overline{\mathbf{L}}_u^{(S,t)} & -\overline{\mathbf{L}}_u^{(S,t)} & & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \mathbf{A}_{II}^{(1,t)} & & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \mathbf{A}_{(Q-1)}^{(1,t)} & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & \mathbf{A}_{Q(Q-1)}^{(1,t)} & -\mathbf{A}_{(Q-1)Q}^{(1,t)} & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & \overline{\mathbf{L}}_u^{(S,t)} & -\overline{\mathbf{L}}_u^{(S,t)} & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \mathbf{A}_Q^{(1,t)} & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \mathbf{A}_{12}^t & -\mathbf{A}_{21}^t & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \overline{\mathbf{L}}_u^{(S,t)} & -\overline{\mathbf{L}}_u^{(S,t)} & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & \mathbf{A}_2^t & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \mathbf{A}_{13}^t & 0 & -\mathbf{A}_{31}^t & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \overline{\mathbf{L}}_u^{(S,t)} & 0 & -\overline{\mathbf{L}}_u^{(S,t)} & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}_3^t & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & \mathbf{A}_{2n}^t & 0 & 0 & & -\mathbf{A}_{n2}^t \\ 0 & 0 & & 0 & \overline{\mathbf{L}}_u^{(S,t)} & 0 & 0 & & -\overline{\mathbf{L}}_u^{(S,t)} \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}_{3n}^t & & -\mathbf{A}_{n3}^t \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \overline{\mathbf{L}}_u^{(S,t)} & & -\overline{\mathbf{L}}_u^{(S,t)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{A}_n^t \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \overline{\mathbf{p}}_I^1(t) \\ \overline{\mathbf{p}}_{II}^1(t) \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{p}}_{(Q-1)}^1(t) \\ \overline{\mathbf{p}}_Q^1(t) \\ \mathbf{p}_2(t) \\ \mathbf{p}_3(t) \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n(t) \end{array} \right) \quad (21)$$

Рассмотрим пример реализации системы (9) для двух тел применительно к исследованию обратного эффекта в трибофатике (влияние неконтактной нагрузки на изменение контактного давления). В качестве объекта исследования возьмем систему ролик/вал, на которую действуют контактная F_N и неконтактная F_b силы (рис. 1б). Данная модель используется, в частности при износоусталостных испытаниях на контактно-механическую усталость.



а) нагружения силовой системы, б) износоусталостных испытаний, в) нагружения вала
Рисунок 1 – Схемы нагружения

Из рис. 1б видно, что поверхности контактирующих тел ограничены поверхностями второго порядка, поэтому для определения контактного давления можно было бы ограничиться теорией Герца. Однако, поскольку при решении системы (9) возможны случаи контакта тел с поверхностями произвольной формы, предпочтительнее пользоваться при расчете контактного давления более общими методами численного моделирования. В расчете использовался метод обращения матрицы.

Упругие перемещения соответствующих точек двух поверхностей удовлетворяют соотношению

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z1} + [z_1(x, y) - z_2(x, y)] - \delta = \bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z1} + h(x, y) - \delta \begin{cases} = 0, (x, y) \in S, \\ > 0, (x, y) \notin S, \end{cases} \quad (22)$$

где δ – сближение контактирующих тел, $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ – уравнения поверхностей тел, S – область контакта.

Численное моделирование контактного взаимодействия двух тел проводилось при следующих параметрах: $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $E_1 = E_2 = 2,01 \cdot 10^{11}$ Па, $R_{11} = 0,005$ м, $R_{12} = 0,05$ м, $R_{21} = 0,01$ м, $R_{22} = -0,01$ м (см. рисунок 1,б).

Контактная нагрузка задавалась сближением $\delta = 2,723 \cdot 10^{-5}$ м, соответствующим по теории Герца значению $F_N = 2000$ Н. Соотношение полуосей эллипса контакта $a/b = 0,89$. Размеры расчетной области: $-1,5a \leq x, y \leq 1,5a$, где $a = 5,296 \cdot 10^{-4}$ м. Область разбивалась на 21×21 квадратных элементов.

Полученное в результате итерационного решения распределение контактного давления сравнивалось с аналитическим решением для распределения эллиптического вида.

В соответствии со следующими формулами

$$\varepsilon_i = \frac{p_i^H - p_i}{p_0^H}, \varepsilon_{\max} = \max_i |\varepsilon_i|, \varepsilon_{\text{avg}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i|, \quad (23)$$

погрешности составили $\varepsilon_{\max} = 5,9 \cdot 10^{-2}$ и $\varepsilon_{\text{avg}} = 4 \cdot 10^{-3}$.

Вертикальные перемещения области контакта при неконтактном растяжении-сжатии или изгибе силой F_b составляют соответственно

$$\bar{u}_z^{(b1)} = -\frac{\nu_2}{E_2} \sigma_{xx}^{(b1)} R_2, \text{ и } \bar{u}_z^{(b2)} = -\frac{\nu_2}{2E_2} \sigma_{xx}^{(b2)} R_2. \quad (24)$$

Из рис. 2,а следует, что контактная сила F_N , отнесенная к $F_N^{(c)} = 2000$ Н, в зависимости от неконтактных напряжений в центре области контакта σ_a , отнесенных к $\sigma_a^{(\max)} = 6,4 \cdot 10^8$ Па, изменяется примерно от +60% до -50% при растяжении-сжатии и примерно от +27% до -25% при изгибе.

Из рисунка 2,б видно, что при испытаниях на контактно-механическую усталость изменение коэффициента сопротивления качению несколько больше в зоне сжатия, чем в зоне растяжения. Это в качественном отношении соответствует результатам приведенных расчетов (см. рис. 2).

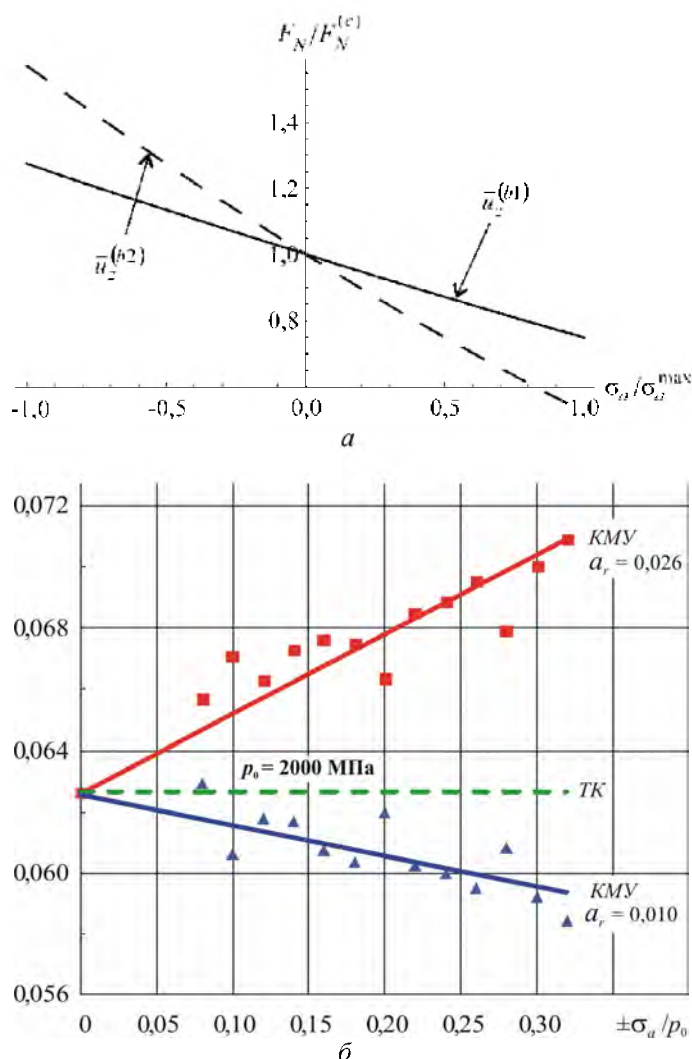


Рисунок 2 – Зависимость контактной нагрузки от уровня неконтактных напряжений (а), экспериментальная зависимость между трением качения в системе ролик/вал и неконтактными напряжениями в области контакта (б)

Заключение. Построена система интегральных уравнений (18) для статического взаимодействия системы твердых тел, к которым приложены смешанные граничные условия, и в которой, по крайней мере, один элемент деформируется нелинейно. Решение уравнений (17), (18) для поверхностей, взаимодействующих тел (т.е. определение граничных условий) позволяют применительно к трибофатическим системам [1], моделировать обратный эффект, а решение для внутренней области тела – прямой. Граничные условия в напряжениях задаются как нормальными к поверхности тела, так и касательными усилиями. Обобщение система уравнений (18) на случай динамического нагружения получено в виде системы (21).

Пример численного моделирования в системе ролик/вал контактного давления методом обращения матрицы продемонстрировал значительный вклад неконтактных нагрузок в изменение характеристик контактного взаимодействия. Приведено подтверждение этого эффекта результатами эксперимента.

Резюме

Рассматривается задача определения механического состояния системы n взаимодействующих тел с различными механическими свойствами. Набор граничных условий для каждого из тел системы определяется характером их взаимодействия. Для многоэлементной системы твердых тел предложена система разрешающих интегральных уравнений, которые могут быть применены для определения нормальных и касательных усилий на поверхности каждого тела, а также напряженно-деформированного состояния его внутренней области. Такая система может быть также применена для моделирования нелинейного поведения тела путем выделения подобластей тела с разными упругими свойствами. Решение данной системы позволяет исследовать прямой и обратный эффект для трибофатической системы, состоящей из более чем двух элементов. Пример расчета изменения контактного давления под влиянием неконтактной нагрузки в силовой системе ролик / вал.

Литература

1. Sosnovskiy, L.A. Tribo-Fatigue. Wear-fatigue damage and its prediction (Foundations of engineering mechanics) / L.A. Sosnovskiy– Springer, 2004. – P. 424.
2. Сосновский, Л.А. Механика износоусталостного повреждения / Л.А. Сосновский – Гомель: БелГУТ, 2007. – 434 с.
3. Сосновский, Л.А. Фундаментальные и прикладные задачи трибофатики : курс лекций / Л. А. Сосновский, М. А. Журавков, С. С. Щербаков. – Минск: БГУ, 2011. – 488 с.
4. Журавков, М.А. Исследование сопряженного напряженного состояния в условиях контактного нагружения и объемного деформирования / М. А. Журавков, С.С. Щербаков // Вести НАНБ, сер. физ.-тех. н., – 2008. № 1. – С. 48-57.
5. Щербаков, С.С. Механика трибофатических систем / С.С. Щербаков, Л.А. Сосновский. – Минск: БГУ, 2011. – 407 с.
6. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон– М.: Мир, 1989. – 510 с.
7. Бенерджи, П. Методы граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд – М.: Мир, 1984. – 494 с.

Summary

Problem of determining mechanical state of the system of n interacting solids of various mechanical properties is considered. Set of boundary conditions for each of the solids of the system is defined by character of their interaction. System of the resolving integrated equations is offered for the multielement system of solids which may be applied for determination of normal and tangential tractions on surface of each body and also stress-strain state of its interior. Such system may be also applied for simulation of non-linear behavior of a body by definition of body's subvolumes with different elastic properties. Solution of given system allows to investigate of direct and back effects for tribo-fatigue system consisting of more than two elements. The example of calculation of contact pressure change under the influence of non-contact loading in roller/shaft tribo-fatigue system is given.

Поступила в редакцию 26.10.2012

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Круподеров А.В., Щербаков С.С.

УО «Белорусский государственный университет», Минск

Моделирование напряженно-деформированного состояния механических систем в условиях ударного нагружения с целью оценки их прочности и долговечности имеет большое практическое значение для современного машиностроения. Применение аналитических решений для граничных элементов с распределенными по ним усилиями открывает новые возможности для эффективных решений динамических задач в упругой и вязкоупругой постановках.

При решении динамических задач теории упругости методом граничных интегральных уравнений (граничных элементов) удобно пользоваться сверткой двух функций f и g , определенных на интервале $t \in [0, \infty)$, которая при условии ее существования, определяется следующим образом:

$$y(t) = \int_0^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau, \quad (1)$$

В соответствии с [4] дискретном множестве точек может быть использовано следующее приближенное представление свертки:

$$y(n\Delta t) = \sum_{j=0}^n \omega_{n-j}(\Delta t)g(j\Delta t), n = 0, \dots, N, \quad (2)$$

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} f^L\left(\frac{\gamma(z)}{\Delta t}\right) z^{-n-1} dz \approx \frac{r^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} f^L\left(\frac{r e^{i\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t}\right) e^{inl\frac{2\pi}{L}},$$

где r – радиус некоторой окружности, в области аналитичности функции f , а верхний индекс L обозначает преобразование Лапласа [5] от соответствующей функции.

Учитывая, что решения задачи о действии массовых нагрузок $\vec{f}(\vec{x}, t)$, распределенных по некоторому контуру Γ , даются следующими выражениями:

$$u_i(x, t) = \int_{\Gamma} f(\vec{\xi}, t) * U_{ij}^G(\vec{x} - \vec{\xi}, t) ds_{\vec{\xi}}, \quad (3)$$

$$P_i(x, t) = \int_{\Gamma} f(\vec{\xi}, t) * P_{ij}^G(\vec{x} - \vec{\xi}, t) ds_{\vec{\xi}},$$

то в предположении, что нагрузка имеет кусочно-постоянное распределение по времени выражения (3) примут форму:

$$u_i(\vec{x}, n\Delta t) = \int_{\Gamma} f_1(\vec{\xi}, t) * U_{i1}^G(\vec{x} - \vec{\xi}, t) + f_2(\vec{\xi}, t) * U_{i2}^G(\vec{x} - \vec{\xi}, t) ds_{\vec{\xi}} =$$

$$\sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} f_{1j}(t) * U_{i1}^G(\vec{x} - \vec{\xi}, t) + f_{2j}(t) * U_{i2}^G(\vec{x} - \vec{\xi}, t) ds_{\vec{\xi}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^{L-1} \frac{r^{-(n-m)}}{L} \int_{\Gamma_j} \left(f_{1j}^L(m\Delta t) U_{i1}^{GL}\left(\vec{x} - \vec{\xi}, \frac{r e^{i\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t}\right) + f_{2j}^L(m\Delta t) U_{i2}^{GL}\left(\vec{x} - \vec{\xi}, \frac{r e^{i\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t}\right) \right) e^{i(n-m)l\frac{2\pi}{L}} ds_{\vec{\xi}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^{L-1} \frac{r^{-n}}{L} \int_{\Gamma_j} \left(f_{1jm}^L U_{i1}^{GL}\left(\vec{x} - \vec{\xi}, \frac{r e^{i\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t}\right) + f_{2jm}^L U_{i2}^{GL}\left(\vec{x} - \vec{\xi}, \frac{r e^{i\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t}\right) \right) e^{inl\frac{2\pi}{L}} ds_{\vec{\xi}},$$

$$\begin{aligned}
P_i(\bar{x}, n\Delta t) &= \int_{\Gamma} f_1(\bar{\xi}, t) * P_{i1}^G(\bar{x} - \bar{\xi}, t) + f_2(\bar{\xi}, t) * P_{i2}^G(\bar{x} - \bar{\xi}, t) ds_{\bar{\xi}} = \\
&= \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} f_{1j}(t) * P_{i1}^G(\bar{x} - \bar{\xi}, t) + f_{2j}(t) * P_{i2}^G(\bar{x} - \bar{\xi}, t) ds_{\bar{\xi}} = \\
&= \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^{L-1} \frac{r^{-(n-m)}}{L} \int_{\Gamma_j} \left(f_{1j}^L(m\Delta t) P_{i1}^{GL} \left(\bar{x} - \bar{\xi}, \frac{r e^{il\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t} \right) + f_{2j}^L(m\Delta t) P_{i2}^{GL} \left(\bar{x} - \bar{\xi}, \frac{r e^{il\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t} \right) \right) e^{i(n-m)l\frac{2\pi}{L}} ds_{\bar{\xi}} = \\
&= \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{m=0}^{N_t} \sum_{l=0}^{L-1} \frac{r^{-(n-m)}}{L} \int_{\Gamma_j} \left(f_{1jm}^L P_{i1}^{GL} \left(\bar{x} - \bar{\xi}, \frac{r e^{il\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t} \right) + f_{2jm}^L P_{i2}^{GL} \left(\bar{x} - \bar{\xi}, \frac{r e^{il\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t} \right) \right) e^{i(n-m)l\frac{2\pi}{L}} ds_{\bar{\xi}} = \\
&= \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{m=0}^{N_t} \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{k=1}^3 \frac{r^{-(n-m)}}{L} \int_{\Gamma_j} \left(f_{1jm}^L \sigma_{ik1}^{GL} \left(\bar{x} - \bar{\xi}, \frac{r e^{il\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t} \right) n_k + f_{2jm}^L \sigma_{ik2}^{GL} \left(\bar{x} - \bar{\xi}, \frac{r e^{il\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t} \right) \right) e^{i(n-m)l\frac{2\pi}{L}} ds_{\bar{\xi}}, \quad (4)
\end{aligned}$$

где f_{pjm} – p -ая компонента фиктивной нагрузки на элементе j , действующая на интервале времени $(m\Delta t, (m+1)\Delta t)$, u_i, P_i – i -ые компоненты усилий и перемещений, U_{ik}^G, σ_{ijk}^G – соответственно компоненты тензоров напряжений и перемещений Грина [5], которые имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
U_{ik}^{GL}(x_1, x_2, s) &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\delta_{ik}}{c_2^2} K_0\left(\frac{rs}{c_2}\right) + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^j}{c_j} \left(\frac{\delta_{ik}}{s} K_1\left(\frac{rs}{c_j}\right) - \frac{x_k x_i}{c_j r} K_2\left(\frac{rs}{c_j}\right) \right) \right), \\
\sigma_{ijk}^{GL}(x_1, x_2, s) &= \mu \left(\frac{U_{ik}^{GL}(x_1, x_2, s)}{\partial x_j} + \frac{U_{jk}^{GL}(x_1, x_2, s)}{\partial x_i} \right) + \lambda \sum_{i=1}^3 \frac{U_{ik}^{GL}(x_1, x_2, s)}{\partial x_i}, \quad (5) \\
r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.
\end{aligned}$$

Рассматривая задачу для области ограниченной контуром Γ , можем записать систему линейных уравнений гранично-элементной постановки задачи теории упругости относительно неизвестных f_{pjm} следующим образом (в предположении, что нагрузка имеет кусочно-постоянное распределение по элементам, а также кусочно-постоянное распределение по времени):

$$\begin{aligned}
(1 - q_{si}) \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{m=0}^{N_t} \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{k=1}^3 f_{1jm}^L \frac{r^{-(n-m)}}{L} \int_{\Gamma_j} \sigma_{ik1}^{GL} \left(\bar{x}_s - \bar{\xi}, \frac{r e^{il\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t} \right) n_k e^{i(n-m)l\frac{2\pi}{L}} ds_{\bar{\xi}} + \\
+ f_{2jm}^L \frac{r^{-(n-m)}}{L} \int_{\Gamma_j} \sigma_{ik2}^{GL} \left(\bar{x}_i - \bar{\xi}, \frac{r e^{il\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t} \right) n_k e^{i(n-m)l\frac{2\pi}{L}} ds_{\bar{\xi}} + \\
+ q_{si} \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{m=0}^{N_t} \sum_{l=0}^{L-1} f_{1jm}^L \frac{r^{-(n-m)}}{L} \int_{\Gamma_j} U_{i1}^{GL} \left(\bar{x}_s - \bar{\xi}, \frac{r e^{il\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t} \right) e^{inl\frac{2\pi}{L}} ds_{\bar{\xi}} + \\
+ f_{2jm}^L \frac{r^{-(n-m)}}{L} \int_{\Gamma_j} U_{i2}^{GL} \left(\bar{x}_s - \bar{\xi}, \frac{r e^{il\frac{2\pi}{L}}}{\Delta t} \right) e^{i(n-m)l\frac{2\pi}{L}} ds_{\bar{\xi}} = \quad , \quad (6) \\
= q_{si} u_{is}^B + (1 - q_{si}) T_{is}^B,
\end{aligned}$$

где в качестве x_s взяты центры соответствующих элементов, q_s – принимает значения 0 или 1 в соответствии задано ли граничное условие на s -м элементе в i -м направлении в усилиях или в перемещениях.

Следует отметить, что при составлении системы уравнений используются не сами компоненты тензоров Грина, а их образы по Лапласу. Таким образом, используя принцип соответствия упругой и вязкоупругой задач [6], можно легко осуществить переход от упругой к вязкоупругой постановке задачи.

В качестве тестового примера рассмотрим одномерную задачу о воздействии динамической нагрузки на один из концов стержня, второй конец которого жестко закреплен, а боковые поверхности закреплены по нормали (см. рис. 1).

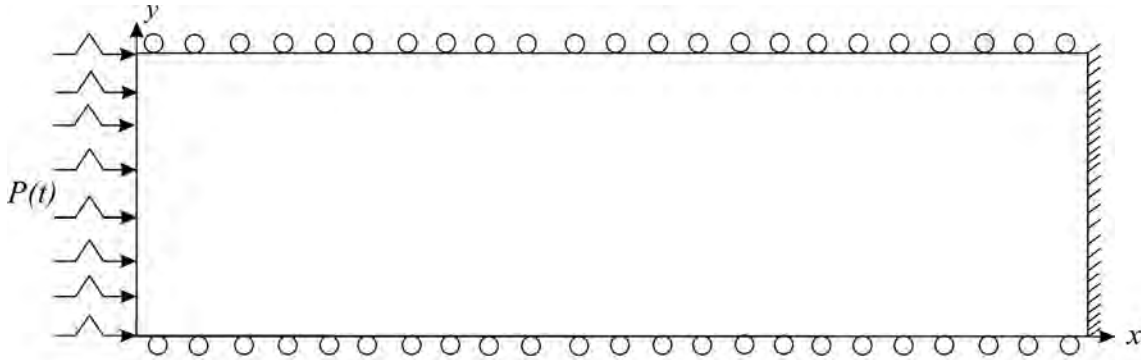


Рисунок 1 – Схема для тестовой задачи

Если поместить начало координат в левый нижний угол стержня, то граничные условия примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} |_{x=0} = P(t), \sigma_{xy} |_{x=0} = 0, u_x |_{x=l} = u_y |_{x=l} = 0, \\ u_y |_{y=0} = u_y |_{y=h} = 0, \sigma_{xy} |_{y=0} = \sigma_{xy} |_{y=h} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где l, h – соответственно длина и высота стержня.

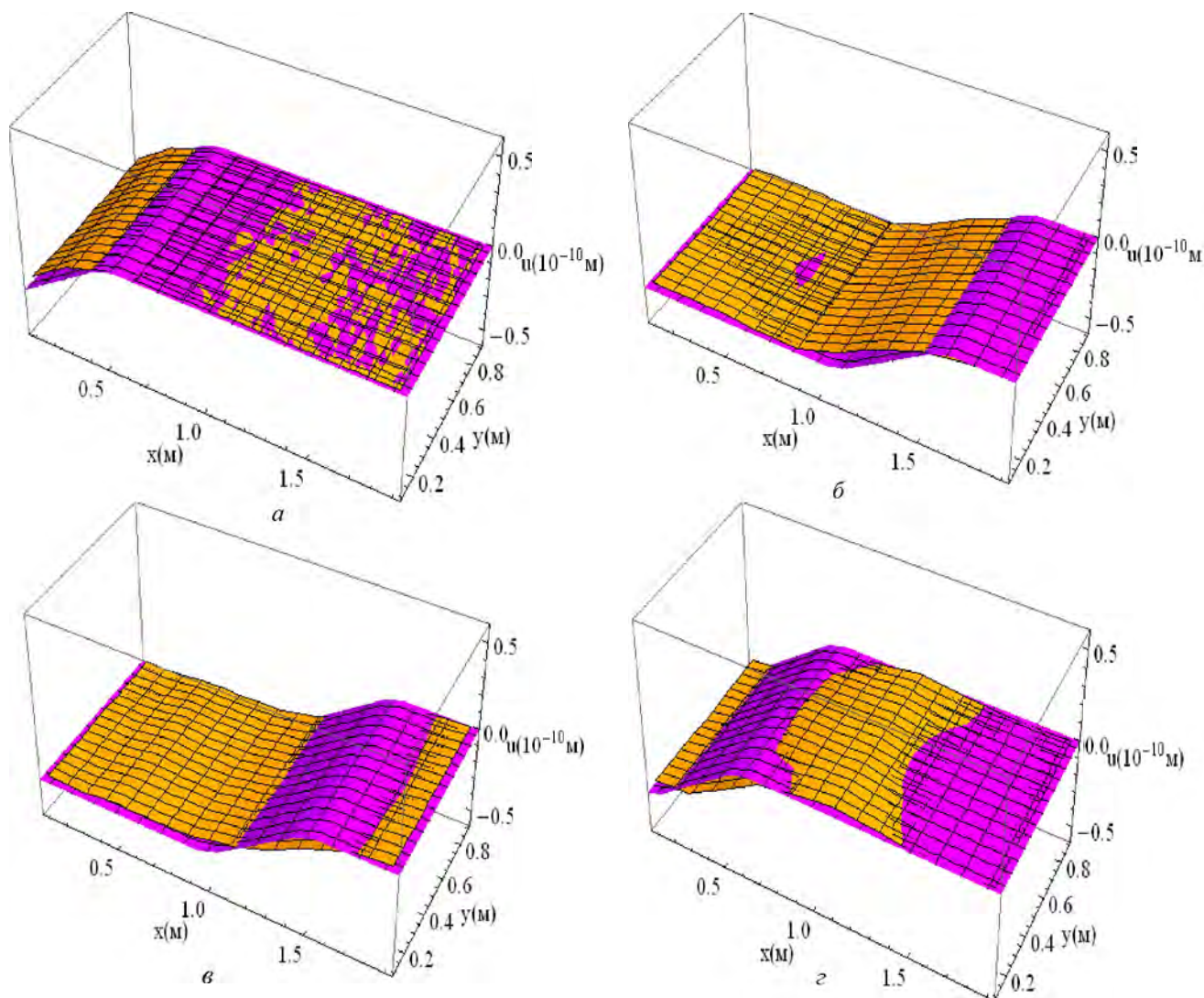
Задача с такими граничными условиями является по сути одномерной, поскольку все компоненты тензора напряжений и вектора деформаций зависят только от одной координаты x и $\sigma_{xy} = u_y = 0$. Для данной задачи существует аналитическое решение [6], имеющее следующий вид:

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= -lu(1 - x/l, tc_1/l), \\ \sigma_{xx} &= \frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\nu}{1 - \nu} \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ u(x) &= \sum_{i=0}^1 \sum_{n=0}^{N_i(x, \tau)} (-1)^{n+i} H(\tau - k_{in}(x)) \int_0^{\tau - k_{in}(x)} P(\tau - t - k_{in}(x)) dt, \\ N_i(x, \tau) &= \left[\frac{\tau - (-1)^i (x - (-1)^{i+1})}{2} \right], \quad k_{in}(x) = 2n + 1 + (-1)^i x. \end{aligned} \quad (8)$$

В качестве нагрузки на стержень возьмем равномерно распределенные единичные усилия, постоянно действующие на отрезке времени $[0, l/4c_1]$.

При расчетах были выбраны следующие физико-механические свойства стержня: модуль Юнга $E = 10^{10}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, плотность $\rho = 2200$ кг/м³.

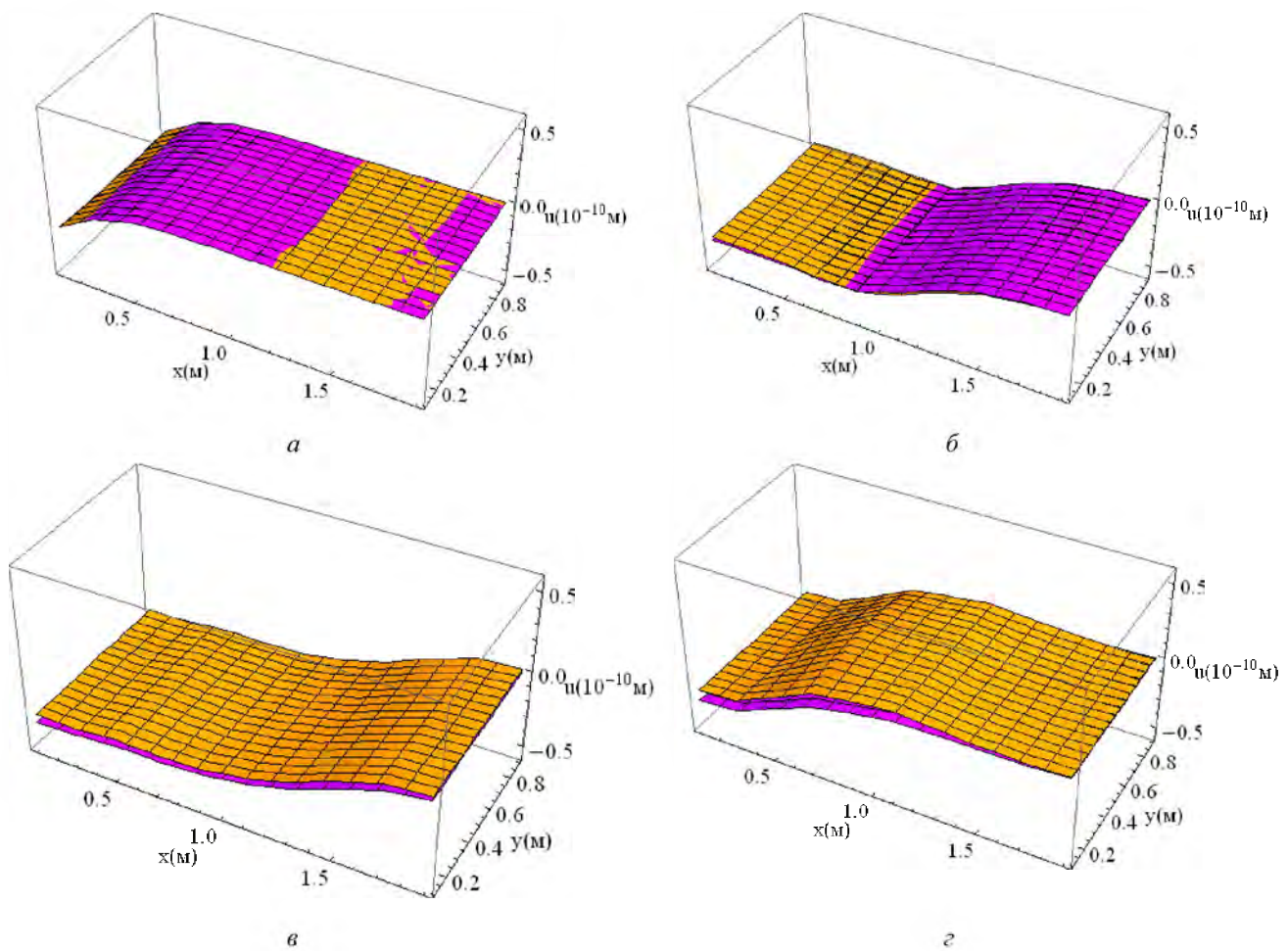
На рис. 2 приведены решения для упругого поведения материала, полученные методом граничных элементов и аналитические. Из сравнения графиков для распространяющихся волн перемещений и видно хорошее соответствие данных решений.



а) $t = 0,3l / c_1$, б) $t = 0,75l / c_1$ до и
 в) $t = 1,5l / c_1$, г) $t = 1,95l / c_1$ после отражения волны
 Рисунок 2 – Графики перемещений в моменты времени

Отметим, что описанный метод использует не сами фундаментальные решения, а их преобразование по Лапласу, что не составляет большой трудности на основании принципа соответствия [6] перейти к решению задач вязкоупругости. Приведем здесь пример решения вышеописанной задачи с учетом вязкости. Для моделирования вязкоупругого поведения будем использоваться ядро релаксации вида $\frac{A' c_1^{-\alpha}}{t^{1-\alpha}} e^{-c_1 \beta' t}$ для $A' = 300, \beta' = 0.05, \alpha = 0.5$ [5]. На следующих рисунках представлены графики решения с учетом и без ее учета в различные моменты времени.

На рис. 3 приведены решения для чисто упругого поведения материала и с учетом вязкости (на графиках сверху), полученные методом граничных элементов. Анализ данного рисунка показывает характерное уменьшение со временем величины перемещений (амплитуды колебаний) на фронте волны в вязкоупругом случае по сравнению с упругим.



а) $t = 0,3l / c_1$, б) $t = 0,75l / c_1$ до и
 в) $t = 1,5l / c_1$, г) $t = 1,95l / c_1$ после отражения волны
 Рисунок 3 – Графики перемещений в моменты времени

Рассмотрим далее пример решения прикладной задачи об ударе лезвия ножа кормоуборочного комбайна в вязкоупругой постановке (см. рис. 4). Ударная нагрузка q действует на отрезке времени $[0 \dots 0,8l_1 / 3c_1]$, где l_1 – длина режущей кромки.

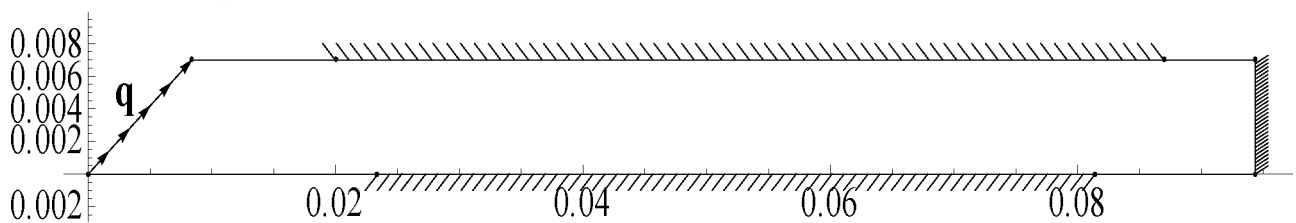


Рисунок 4 – Схема задачи об ударе лезвия ножа

Из рис. 5 и 6 видно, характерное при ударе с изгибом распределение вертикальных и горизонтальных перемещений в ноже в различные моменты времени.

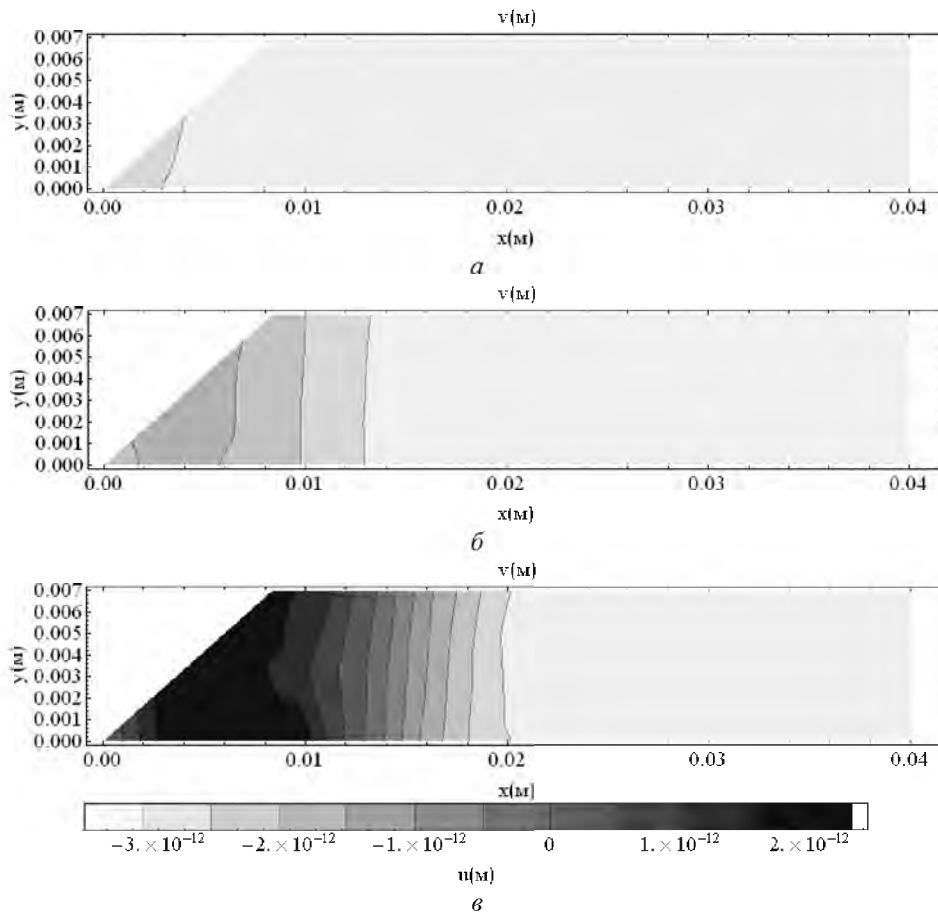


Рисунок 5 – Вертикальные перемещения при а) $t = 0,8l_1 / c_1$, б) $t = 10,4l_1 / c_1$, в) $t = 16l_1 / c_1$

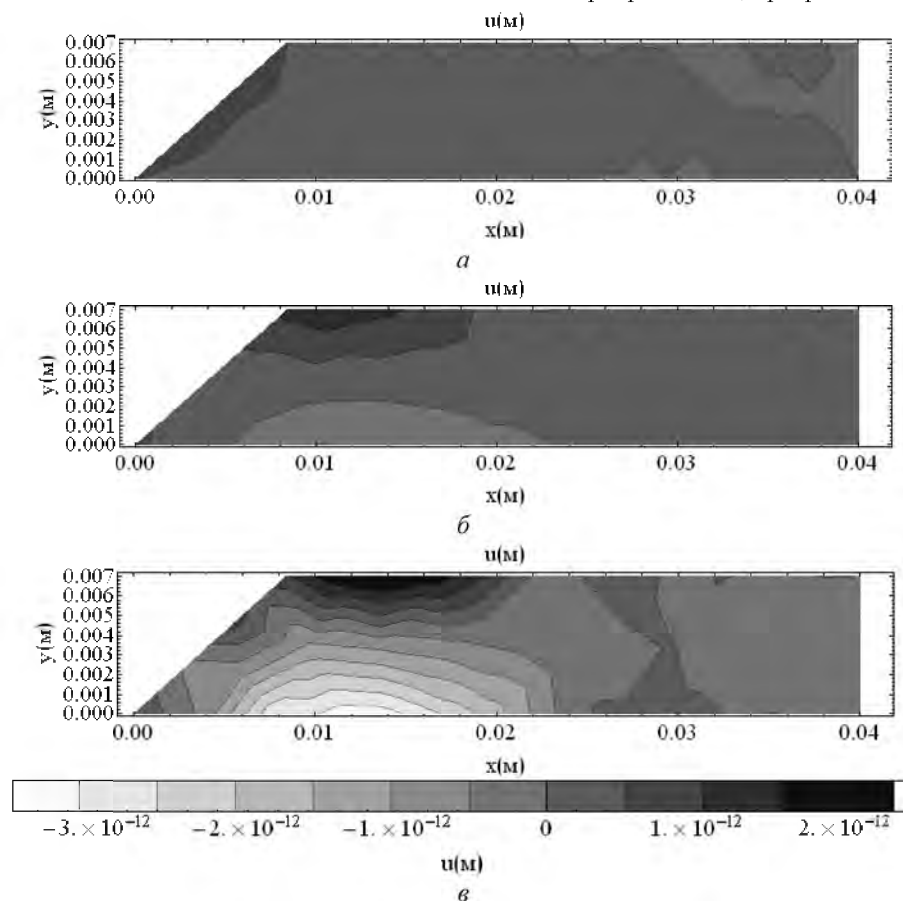


Рисунок 6 – Горизонтальные перемещения при а) $t = 0,8l_1 / c_1$, б) $t = 10,4l_1 / c_1$, в) $t = 16l_1 / c_1$

Резюме

В статье приводятся решения динамических задач теории упругости методом граничных элементов. Представлены примеры расчетов и их сравнение с аналитическими решениями. Построены решения с учетом вязкоупругого поведения среды. Представлено прикладное решение задачи для удара по лезвию ножа комбайна.

Литература

1. Lubich, C. Convolution quadrature and discretized operational calculus / C.Lubich // Numerische Mathematik. – 52. – 1988. – P.129–145.
2. Lubich, C. Convolution quadrature and discretized operational calculus II / C. Lubich // Numerische Mathematik. – 52. – 1988. – P. 413–425.
3. Schanz, M. H. Antes, Application of operational quadrature thods in time domain boundary element methods / M. Schanz, H. Antes // Meccanica. – 32 (3). – 1997. – P.179–186.
4. Gaul, L. A comparative study of three boundary element approaches to calculate the transient response of viscoelastic solids with unbounded domains / L. Gaul, M.Schanz // Computer methods in Applied Mechanics and Engineering. – V.179. – 1999. – P.111–123.
5. Горшков А. Г. Волны в сплошных средах: Учеб. пособ.: Для вузов./ ., А.Г. Горшков [и др.]. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
6. Мэйз, Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / Дж.Мэйз. – М.: URSS, 2007. – 318 с.

Summary

The paper considers the solutions of dynamic problems of the elasticity theory using boundary element method. Examples of calculations and their comparison with analytic solutions are represented. Solutions for viscoelastic behavior of body are given. Solution of the applied problem for the harvester knife blade under impact loading is given.

Поступила в редакцию 26.10.2012

О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ, БРОШЕННОГО ПОД НЕБОЛЬШИМ УГЛОМ К ГОРИЗОНТУ

Горбач Н. И., Гурвич Ю. А., Крайник Д. А., Шпургалова М.Ю.

УО «Белорусский национальный технический университет, Минск»

В данной работе рассматривается задача о движении артиллерийского снаряда с учетом силы сопротивления, пропорциональной квадрату скорости, при стрельбе по хорошо видимым объектам, допускающим прямое прицеливание, когда выстрел производится под небольшим углом направления ствола орудия к горизонту (обычно не более 15°). В этом случае траектория полета снаряда является пологой, которая называется настильной [1].

Для простоты модели отвлечемся от влияния формы снаряда и многих других факторов, рассматриваемых во внешней баллистике – науке, изучающей движение снаряда после его вылета из ствола орудия, будем рассматривать снаряд как материальную точку, брошенную под углом α_0 к горизонту с начальной скоростью V_0 .

При движении на снаряд действуют сила тяжести P и сила сопротивления R воздуха, зависящая от скорости полета снаряда.

В работе [2] подробно изучено движение снаряда при действии силы сопротивления воздуха $R = kPV$. В этом случае дифференциальные уравнения движения снаряда в декартовых осях решаются аналитически независимо от значения начального угла наклона к горизонту ствола орудия и позволяют получить уравнения движения, высоту подъема снаряда, дальность полета до достижения максимальной высоты и точное уравнение траектории. Если сила сопротивления $R = kPV^2$, то решение дифференциальных уравнений движения в декартовых осях в квадратурах невозможно. Поэтому они решаются численным методом с применением ЭВМ, либо приближенно аналитически с учетом некоторых допущений.

Рассмотрим аналитическое решение этой задачи с использованием декартовых осей координат и естественных осей с учетом допущений.

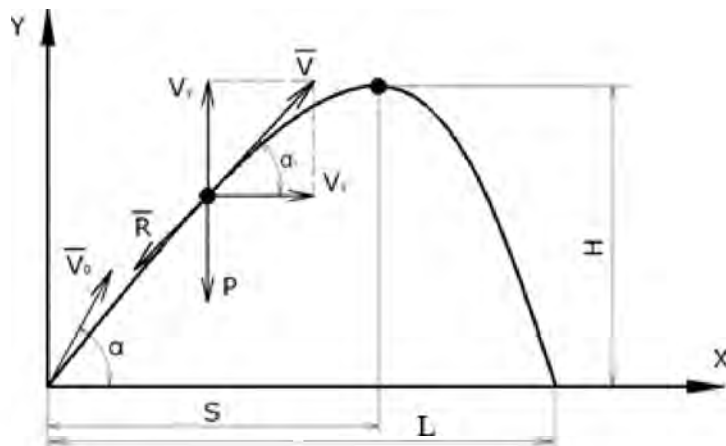


Рисунок 1

Дифференциальные уравнения движения в декартовых осях (рис. 1):

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -R \cos \alpha, \\ m\ddot{y} &= -P - R \sin \alpha, \end{aligned}$$

где $R = kPV^2$, $P = mg$, $\sin \alpha = \frac{V_y}{V}$, $\cos \alpha = \frac{V_x}{V}$, $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$. С учетом этого эти уравнения после преобразований примут вид:

$$\ddot{x} = -kgV_x \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \quad (1)$$

$$\ddot{y} = -g \left(1 + kV_y \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \right) \quad (2)$$

Заменим в уравнениях (1) и (2) $\ddot{x} = \frac{dV_x}{dt}$ и $\ddot{y} = \frac{dV_y}{dt}$ и перепишем их в виде:

$$\frac{dV_x}{dt} = -kgV_x^2 \sqrt{1 + \left(\frac{V_y}{V_x} \right)^2}, \quad (3)$$

$$\frac{dV_y}{dt} = -g \left(1 + kV_x V_y \sqrt{1 + \left(\frac{V_y}{V_x} \right)^2} \right). \quad (4)$$

Уравнение (3) и (4) в аналитических функциях не интегрируются. Поэтому в качестве допущения примем $\sqrt{1 + \left(\frac{V_y}{V_x} \right)^2} = \text{const}$, где $\frac{V_y}{V_x} = \frac{V_{0y}}{V_{0x}} = tg\alpha_0$, $\alpha_0 \leq 15^\circ$, $\sqrt{1 + tg^2\alpha_0} = \frac{1}{\cos\alpha_0}$.

Тогда уравнения (3) и (4) могут быть проинтегрированы и имеют вид:

$$\frac{dV_x}{dt} = -\frac{kg}{\cos\alpha_0} V_x^2, \quad (3')$$

$$\frac{dV_y}{dt} = -g \left(1 + \frac{k}{\cos\alpha_0} V_x V_y \right). \quad (4')$$

Интегрируем уравнение (3')

$$\frac{dV_x}{V_x^2} = -\frac{kg}{\cos\alpha_0} dt \Rightarrow \frac{1}{V_x} - \frac{1}{V_{0x}} = \frac{kg t}{\cos\alpha_0}$$

После преобразований получим:

$$V_x = \frac{V_{0x}}{1 + \frac{kg t}{\cos\alpha_0} V_{0x}}. \quad (5)$$

Так как $V_x = \frac{dx}{dt}$, то подставив в уравнение (5) и затем проинтегрировав, получим уравнение движения снаряда вдоль оси x

$$x = \frac{\cos\alpha_0}{kg} \ln \left(1 + \frac{kg V_{0x}}{\cos\alpha_0} t \right). \quad (6)$$

Теперь проинтегрируем уравнение (4'), подставив в него вместо V_x выражение (5)

$$\frac{dV_y}{dt} = -g \left(1 + \frac{k}{\cos\alpha_0} \cdot \frac{V_{0x}}{1 + \frac{kg t}{\cos\alpha_0} V_{0x}} V_y \right) = -g \left(1 + kV_{0x} \frac{V_y}{\cos\alpha_0 + kg V_{0x} t} \right). \quad (7)$$

Введем подстановку $V_y = zp$,

$$\frac{dV_y}{dt} = z \frac{dp}{dt} + \frac{dz}{dt} p.$$

Перепишем уравнение (7) с учетом этого в виде:

$$z \frac{dp}{dt} + \frac{dz}{dt} p + g + kpz \frac{gV_{0x}}{\cos\alpha_0 + kgV_{0x}t} = 0. \quad (8)$$

Разобьем уравнение (8) на два уравнения

$$z \frac{dp}{dt} + kpz \frac{gV_{0x}}{\cos\alpha_0 + kgV_{0x}t} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{dz}{dt} p + g = 0. \quad (10)$$

Из уравнения (9) определим p , при котором выполняется это уравнение при $z \neq 0$

$$\left(\frac{dp}{dt} + kp \frac{gV_{0x}}{\cos \alpha_0 + kgtV_{0x}} \right) z = 0 \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = - \int \frac{kgV_{0x} dt}{\cos \alpha_0 + kgtV_{0x}} \Rightarrow p = \frac{1}{\cos \alpha_0 + kgtV_{0x}}$$

Подставим полученное значение p в уравнении (10), получим:

$$\frac{dz}{dt} \frac{1}{\cos \alpha_0 + kgtV_{0x}} + g = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = -g(\cos \alpha_0 + kgtV_{0x}) \Rightarrow \int_{z_0}^z dz = - \int_0^t (g \cos \alpha_0 + kg^2 t V_{0x}) dt.$$

После интегрирования и с учетом того, что $p_0 = \frac{1}{\cos \alpha_0}$, а $z_0 = \frac{V_{0y}}{p_0} = V_{0y} \cos \alpha_0$, получим

выражение для z :

$$z = V_{0y} \cos \alpha_0 - gt \cos \alpha_0 - \frac{1}{2} kg^2 t^2 V_{0x}.$$

Тогда проекция скорости на ось y

$$V_y = zp = \frac{V_{0y} \cos \alpha_0 - gt \cos \alpha_0 - \frac{1}{2} kg^2 t^2 V_{0x}}{\cos \alpha_0 + kgtV_{0x}} \quad (11)$$

Так как $V_y = \frac{dy}{dt}$, то подставим в уравнение (11) и разобьем полученное уравнение на три слагаемых

$$dy = \frac{V_{0y} \cos \alpha_0 dt}{\cos \alpha_0 + kgtV_{0x}} - \frac{gt \cos \alpha_0 dt}{\cos \alpha_0 + kgtV_{0x}} - \frac{kg^2 t^2 V_{0x}}{2(\cos \alpha_0 + kgtV_{0x})}. \quad (12)$$

Найдем интегралы правой части уравнения (12)

$$I_1 = \int_0^t \frac{V_{0y} \cos \alpha_0 dt}{\cos \alpha_0 + kgtV_{0x}} = \frac{V_{0y} \cos \alpha_0}{kgV_{0x}} \ln \left(1 + \frac{kgV_{0x}}{\cos \alpha_0} t \right), \quad (13)$$

$$I_2 = \int_0^t \frac{gt \cos \alpha_0 dt}{\cos \alpha_0 + kgtV_{0x}} = \int_0^t \frac{\cos \alpha_0 (\cos \alpha_0 - \cos \alpha_0 + kgtV_{0x}) dt}{kV_{0x} (\cos \alpha_0 + kgtV_{0x})} = \frac{t \cos \alpha_0}{kV_{0x}} \Big|_0^t - \frac{\cos^2 \alpha_0}{k^2 g V_{0x}^2} \ln \left(\cos \alpha_0 + kgtV_{0x} t \Big|_0^t \right) = \frac{t \cos \alpha_0}{kV_{0x}} - \frac{\cos^2 \alpha_0}{k^2 g V_{0x}^2} \ln \left(1 + \frac{kgV_{0x}}{\cos \alpha_0} t \right), \quad (14)$$

$I_3 = \int_0^t \frac{kg^2 t^2 V_{0x}}{\cos \alpha_0 + kgtV_{0x}} dt$. Обозначим $a = kgV_{0x}$, тогда

$$I_3 = \int_0^t \frac{gt^2 a}{\cos \alpha_0 + at} dt = \int_0^t \frac{gt^2}{t + \frac{\cos \alpha_0}{a}} dt = \int_0^t \frac{g \left(t^2 - \frac{\cos^2 \alpha_0}{a^2} + \frac{\cos^2 \alpha_0}{a^2} \right)}{t + \frac{\cos \alpha_0}{a}} dt = \int_0^t g t dt - \int_0^t \frac{g \cos \alpha_0}{a} dt + \int_0^t \frac{g \frac{\cos^2 \alpha_0}{a^2}}{t + \frac{\cos \alpha_0}{a}} dt = \frac{gt^2}{2} - \frac{t \cos \alpha_0}{kV_{0x}} + \frac{\cos^2 \alpha_0}{k^2 g V_{0x}^2} \ln \left(1 + \frac{kgV_{0x}}{\cos \alpha_0} t \right). \quad (15)$$

Подставим I_1, I_2, I_3 в (12) и после преобразований получим уравнение движения снаряда по оси y

$$y = \frac{\sin \alpha_0}{kg} \ln(1 + kgV_0 t) + \frac{1}{2k^2 g V_0^2} \ln(1 + kgV_0 t) - \frac{t}{2kV_0} - \frac{gt^2}{4} \quad (16)$$

Для определения уравнения траектории полета снаряда исключим из уравнения (16) время t , выразив его из уравнения (6), где

$$\ln\left(1 + \frac{kgV_{0x}t}{\cos\alpha_0}\right) = \frac{kgx}{\cos\alpha_0}. \quad (17)$$

Тогда

$$t = \frac{1}{kgV_0} \left(e^{\frac{kgx}{\cos\alpha_0}} - 1 \right). \quad (18)$$

Подставив (17) и (18) в уравнение (16), получим приближенное уравнение траектории снаряда в осях xOy .

$$y = xtg\alpha_0 + \frac{x}{2kV_0^2 \cos\alpha_0} - \frac{1}{4k^2gV_0^2} \left(e^{\frac{2kgx}{\cos\alpha_0}} - 1 \right) \quad (19)$$

Сравним уравнение траектории, определяемой по формуле (19) с уравнением траектории при полете в безвоздушном пространстве, определяемой по формуле (20).

$$y = xtg\alpha_0 - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2\alpha_0}. \quad (20)$$

Разложим $f(x) = e^{\frac{2kgx}{\cos\alpha_0}}$ в ряд Тейлора, ограничившись шестью членами разложения, получим после соответствующих преобразований приближенное уравнение траектории полета снаряда в среде с учетом сопротивления

$$y = xtg\alpha_0 - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2\alpha_0} - \frac{kg^2x^3}{3V_0^2 \cos^3\alpha_0} - \frac{k^2g^3x^4}{6V_0^2 \cos^4\alpha_0} - \frac{k^3g^4x^5}{15V_0^2 \cos^5\alpha_0} - \dots \quad (21)$$

Сравнивая уравнения (20) и (21), видно, что совпадают только два первых слагаемых уравнения (21), а остальные слагаемые этого уравнения обусловлены сопротивлением воздуха. Таким образом, траектория полета снаряда в воздухе только на начальном участке представляет параболу, затем переходящую в некоторую плоскую кривую, называемую баллистической кривой, которая на начальном участке траектории до достижения максимальной высоты является полой, а нисходящая ветвь траектории более крутой, т.е. траектория полета не является симметричной кривой.

Рассмотрим решение этой задачи с использованием естественных осей по способу, изложенному в [1].

Дифференциальные уравнения движения снаряда в естественных осях τ и n (касательная и нормаль) (рис. 2) будут иметь вид:

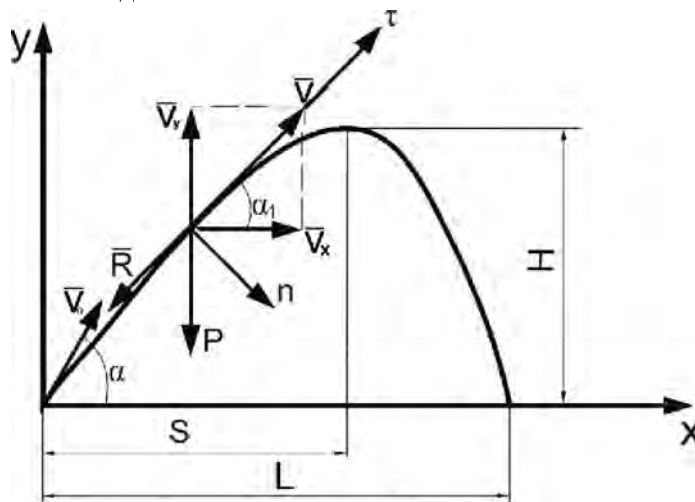


Рисунок 2

$$\frac{P}{g} \frac{dV}{dt} = -kPV^2 - P \sin \alpha, \quad (22)$$

$$\frac{P}{g} \frac{V^2}{\rho} = P \cos \alpha, \quad (23)$$

или после сокращения на P

$$\frac{dV}{dt} = -kgV^2 - g \sin \alpha, \quad (24)$$

$$\frac{V^2}{\rho} = g \cos \alpha, \quad (25)$$

При перемещении точки по траектории на бесконечно малое расстояние ds направление касательный изменяется на бесконечно малый угол $d\alpha$, называемый углом смежности.

Отношение $\frac{d\alpha}{ds} = -\frac{1}{\rho}$, где $ds = Vdt$ (знак «-» потому, что с возрастанием дуги s угол α убывает)

С учетом этого радиус кривизны

$$\rho = -\frac{Vdt}{d\alpha}. \quad (26)$$

Тогда уравнение (25) примет вид:

$$\frac{Vd\alpha}{dt} = -g \cos \alpha. \quad (27)$$

Выразим из уравнения (27) dt

$$dt = -\frac{Vd\alpha}{g \cos \alpha}. \quad (28)$$

Подставим (27) в уравнение (24) после преобразования получим

$$\frac{dV}{d\alpha} = \frac{kV^3}{\cos \alpha} + Vtg\alpha. \quad (29)$$

Преобразуем уравнение (29)

$$\frac{dV}{d\alpha} \cos \alpha = Vtg\alpha \cos \alpha + kV^3$$

или $\frac{dV}{d\alpha} \cos \alpha - V \sin \alpha = kV^3$, где

$$\frac{dV}{d\alpha} \cos \alpha - V \sin \alpha = \frac{d(V \cos \alpha)}{d\alpha} = kV^3. \quad (30)$$

Умножим правую и левую части уравнения (30) на $\cos^3 \alpha$ и разделим переменные

$$\frac{d(V \cos \alpha)}{(V \cos \alpha)^3} = \frac{k d\alpha}{\cos^3 \alpha} = \frac{k}{\cos \alpha_0} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}, \quad (31)$$

где в качестве допущения принято $\cos^3 \alpha = \cos \alpha_0 \cos^2 \alpha$. Отсюда

$$\frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha_0}{k} \frac{d(V \cos \alpha)}{(V \cos \alpha)^3}. \quad (32)$$

Перейдем к уравнению в декартовых координатах

$$dx = V_x dt = V \cos \alpha dt. \quad (33)$$

С учетом выражения (27) для dt получим:

$$dx = V \cos \alpha \left(-\frac{V d\alpha}{g \cos \alpha} \right) = -\frac{V^2}{g} d\alpha. \quad (34)$$

Умножим и разделим уравнение (34) на $\cos^2 \alpha$, получим с учетом (32)

$$dx = -\frac{(V \cos \alpha)^2}{g} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = -\frac{(V \cos \alpha)^2 \cos \alpha_0}{g k} \frac{d(V \cos \alpha)}{(V \cos \alpha)^3} = -\frac{\cos \alpha_0}{kg} \frac{d(V \cos \alpha)}{V \cos \alpha}. \quad (35)$$

Интегрируя (35) в пределах x от нуля до x и $V \cos \alpha$ от $V_0 \cos \alpha_0$ до $V \cos \alpha$, получим

$$V \cos \alpha = V_0 \cos \alpha_0 e^{\frac{k g x}{\cos \alpha_0}}. \quad (36)$$

Отсюда

$$V \cos \alpha = V_0 \cos \alpha_0 e^{\frac{k g x}{\cos \alpha_0}}, \quad (37)$$

Так как $V \cos \alpha = V_x$, то формула (37) устанавливает зависимость скорости движения вдоль оси x от координаты x .

Для определения уравнения траектории полета снаряда подставим (37) в уравнение (31)

$$\frac{d \left(V_0 \cos \alpha_0 e^{\frac{k g x}{\cos \alpha_0}} \right)}{V_0 \cos \alpha_0 e^{\frac{k g x}{\cos \alpha_0}}} = \frac{1}{V_0^2 \cos^2 \alpha_0} \frac{d \left(e^{\frac{k g x}{\cos \alpha_0}} \right)}{\left(e^{\frac{k g x}{\cos \alpha_0}} \right)^3} = \frac{k}{\cos \alpha_0} \frac{d \alpha}{\cos^2 \alpha}. \quad (38)$$

Обозначим $e^{\frac{k g x}{\cos \alpha_0}} = u$.

Тогда $\int_{u_0}^u \frac{du}{u^3} = \int_{u_0}^u u^{-3} du = -\frac{u^{-2}}{2} = -\frac{1}{2u^2} \Big|_{u_0}^u = -\left(\frac{1}{2u^2} - \frac{1}{2u_0^2} \right)$, где $u = e^{\frac{k g x}{\cos \alpha_0}}$, а при $x=0$ $u_0 = 1$

$$\text{Тогда} \quad \int_{u_0}^u \frac{du}{u^3} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{u^2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{2k g x}{\cos \alpha_0}}} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{2k g x}{\cos \alpha_0}} \right). \quad (39)$$

Интеграл от $\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = tg \alpha - tg \alpha_0$. С учетом этого выражение (38) примет вид

$$\frac{k}{\cos \alpha_0} (tg \alpha - tg \alpha_0) = \frac{\left(1 - e^{-\frac{2k g x}{\cos \alpha_0}} \right)}{2V_0^2 \cos^2 \alpha_0},$$

отсюда

$$tg \alpha = tg \alpha_0 - \frac{1}{2V_0^2 \cos^2 \alpha_0} \left(e^{\frac{2k g x}{\cos \alpha_0}} - 1 \right), \quad (40)$$

Заменив в уравнении (40) $tg \alpha = \frac{dy}{dx}$ и затем, разделив переменные и проинтегрировав, получим уравнение траектории полета снаряда в координатной форме

$$\begin{aligned} y &= x tg \alpha_0 + \frac{x}{2kV_0^2 \cos \alpha_0} - \frac{\int_0^x e^{\frac{2k g x}{\cos \alpha_0}} dx}{2kV_0^2 \cos^2 \alpha_0} = x tg \alpha_0 + \frac{x}{2kV_0^2 \cos \alpha_0} - \frac{\cos \alpha_0}{2kg} \frac{e^{\frac{2k g x}{\cos \alpha_0}} \Big|_0^x}{2kV_0^2 \cos \alpha_0} = \\ &= x tg \alpha_0 + \frac{x}{2kV_0^2 \cos \alpha_0} - \frac{1}{4k^2 V_0^2 g} \left(e^{\frac{2k g x}{\cos \alpha_0}} - 1 \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Сравнивая уравнения траектории, полученной при решении задачи первым способом (формула 19) и вторым способом (формула 41), видим полное совпадение уравнений.

Таким образом, решая задачу с допущениями, что $\sqrt{1 + \left(\frac{V_y}{V_x}\right)^2} = \frac{1}{\cos \alpha_0}$ в декартовых осях и, что $\frac{1}{\cos^3 \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha_0} \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ – в естественных осях, получаются совершенно одинаковые уравнения траектории, т.е. эти допущения равнозначны.

Поэтому дальнейшее исследование уравнения (41) приведет к аналогичному результату, как это получено при исследовании уравнения (19).

Для определения закона движения снаряда в функции времени в декартовых осях при условии, что найдена зависимость скорости V от угла наклона α касательной к траектории, т.е. $V = f(\alpha)$ при использовании естественных осей, можно воспользоваться интегрированием уравнений

$$\begin{aligned} dx &= V_x dt = V \cos \alpha dt, \\ dy &= V_y dt = V \sin \alpha dt. \end{aligned} \quad (42)$$

Интегрирование первого уравнения (42) приведено выше (смотри формулы 33-37), в результате которого получена зависимость $V_x = \varphi(x)$ (формула 37)

Проинтегрируем полученное уравнение, заменив $V \cos \alpha = V_x = \frac{dx}{dt}$.

$$\frac{dx}{dt} = V_0 \cos \alpha_0 e^{-\frac{kgx}{\cos \alpha_0}} \Rightarrow \int_0^x e^{-\frac{kgx}{\cos \alpha_0}} dx = \int_0^t V_0 \cos \alpha_0 dt$$

Отсюда закон движения снаряда по оси x

$$x = \frac{\cos \alpha_0}{kg} \ln(1 + kgV_0 t), \quad (43)$$

что в точности совпадает с уравнением, полученным при решении первым способом (смотри формулу 6), если учесть, что $V_{0x} = V_0 \cos \alpha_0$.

Закон движения снаряда по оси y определим косвенным путем, используя полученное уравнение траектории (формула 42), подставив в нее вместо x выражение (43).

$$y = \frac{\cos \alpha_0}{kg} \ln(1 + kgV_0 t) g \alpha_0 + \frac{\cos \alpha_0}{kg} \ln(1 + kgV_0 t) - \frac{1}{4k^2 V_0^2 g} \times \left(e^{\frac{2kg \cos \alpha_0 \ln(1 + kgV_0 t)}{\cos \alpha_0}} - 1 \right).$$

После соответствующих несложных преобразований получим

$$y = \frac{\sin \alpha_0}{kg} \ln(1 + kgV_0 t) + \frac{1}{2k^2 V_0^2 g} \ln(1 + kgV_0 t) - \frac{t}{2kV_0} - \frac{gt^2}{4}, \quad (44)$$

что в точности совпадает с уравнением (16), полученным первым способом решения задачи.

Продифференцировав уравнение (43), определим закон изменения скорости по оси x

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{V_0 \cos \alpha_0}{1 + kgV_0 t}, \quad (45)$$

что совпадает с уравнением (5). Закон изменения скорости по оси y определим, продифференцировав по времени уравнение (44),

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{2V_0 \sin \alpha_0 - 2gt - kg^2 V_0 t^2}{2(1 + kgV_0 t)}, \quad (46)$$

которое легко преобразуется к виду (11). Уравнение траектории в координатной форме можно также определить, проинтегрировав второе уравнение системы (42) с учетом (28)

$$dy = V_y dt = V \sin \alpha dt = V \sin \alpha \left(-\frac{V d\alpha}{g \cos \alpha} \right) = -\frac{V^2}{g} \operatorname{tg} \alpha d\alpha, \quad (47)$$

где с учетом (34) $-\frac{V^2}{g}d\alpha = dx$.

Тогда $dy = tg\alpha dx$. (48)

Интегрирование этого уравнения возможно, если будет известна зависимость $tg\alpha$ от координаты x , т.е. если предварительно будет проинтегрировано первое уравнение системы (42), что выше и сделано.

$$\text{Поэтому с учетом (40)} \quad dy = \left[tg\alpha_0 - \frac{\left(e^{\frac{2kgx}{\cos\alpha_0}} - 1 \right)}{2k^2V_0^2 \cos\alpha_0} \right] dx$$

$$\text{отсюда} \quad y = xtg\alpha_0 + \frac{x}{2kV_0^2 \cos\alpha_0} - \frac{\int_0^x e^{\frac{2kgx}{\cos\alpha_0}} dx}{2kV_0^2 \cos\alpha_0},$$

что соответствует уравнению (41).

Время подъема на максимальную высоту определим из условия, что в наивысшей точке траектории $V_y = 0$. Приравняв в уравнении (46) нулю правую часть, получим квадратное уравнение относительно t вида

$$t_{\text{под}}^2 + \frac{2}{kgV_0} t_{\text{под}} - \frac{2 \sin\alpha_0}{kg^2} = 0. \quad (49)$$

Определив корни этого уравнения, и учитывая, что $t > 0$, получим

$$t_{\text{под}} = \frac{1}{kgV_0} \left(\sqrt{1 + 2kV_0^2 \sin\alpha_0} - 1 \right). \quad (50)$$

За это время снаряд вдоль оси x пролетит расстояние s , которое определяется с учетом уравнения (43), подставив в него выражение для $t_{\text{под}}$

$$s = \frac{\cos\alpha_0}{kg} \ln \left(\sqrt{1 + 2kV_0^2 \sin\alpha_0} \right), \quad (51)$$

а с учетом формулы (45) будет иметь скорость

$$V_{x/t=t_{\text{под}}} = \frac{V_0 \cos\alpha_0}{\sqrt{1 + 2kV_0^2 \sin\alpha_0}}. \quad (52)$$

Рассмотрим числовой пример.

Воспользуемся полученными аналитическими формулами (50), (51), (52) и (44) и определим время подъема снаряда на максимальную высоту $t_{\text{под}}$, пройденное за это время расстояние s по оси x , проекцию скорости на ось x в этом положении и максимальную высоту h подъема снаряда, приняв $V_0 = 800$ м/с, $\alpha_0 = 15^\circ$ и $k = 0,00002$ с²/м². При этих данных: $t_{\text{под}} = 1,23$ с, $s = 5000$ м, $V_x = 280$ м/с, и $h = y_{(t=t_{\text{под}})} = 875$ м.

Таким образом, при принятых числовых значениях максимальная высота подъема снаряда в 5,71 раз меньше дальности полета до достижения этой высоты, поэтому траектория полета является настильной (рис. 3).

На этом рисунке приведены траектории полета снаряда, построенные по уравнению (19) для трех углов $\alpha_0 = 5^\circ$ – линия 1; $\alpha_0 = 10^\circ$ – линия 2; $\alpha_0 = 15^\circ$ – линия 3.

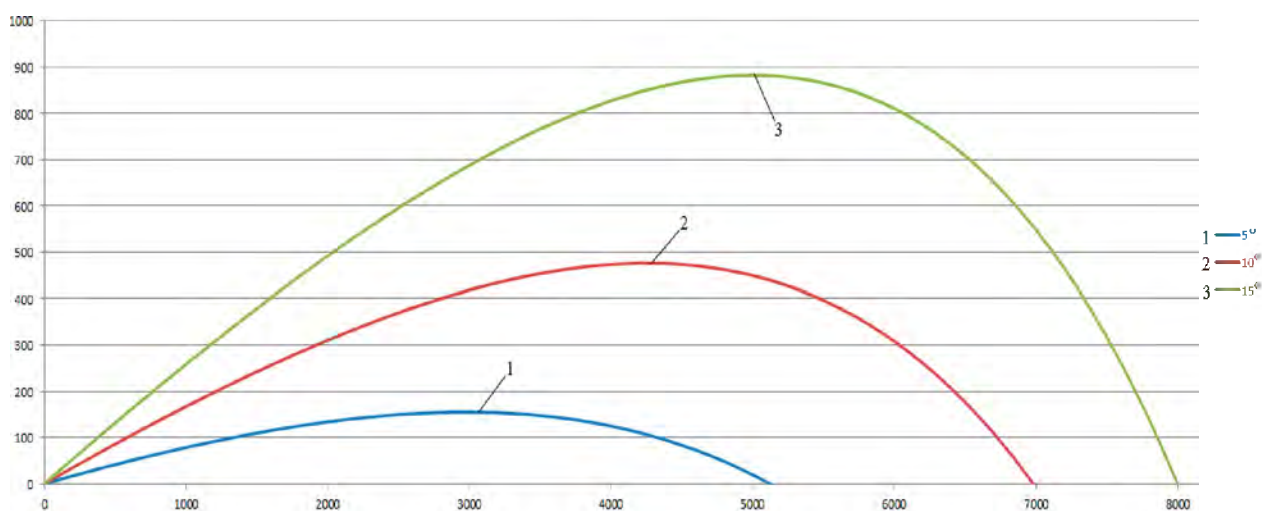


Рисунок 3

Резюме

Исследования, выполненные в данной работе, привели к следующим результатам:

- Получено впервые аналитическое решение дифференциальных уравнений движения снаряда в декартовых осях координат при квадратичном законе сопротивления, которое стало возможным путем введения допущения, что при движении по настильной траектории (угол наклона ствола орудия $\alpha_0 \leq 15^\circ$) составляющая скорости полета снаряда по оси y $V_y \ll V_x$, тогда

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = V_x \sqrt{1 + \left(\frac{V_y}{V_x}\right)^2} = V_x \sqrt{1 + tg^2 \alpha_0} = \frac{V_x}{\cos \alpha_0}, \text{ где } \frac{1}{\cos \alpha_0} = const;$$

- Получено решение дифференциальных уравнений движения в естественных осях при квадратичном законе сопротивления путем введения допущения, что $\cos^3 \alpha = \cos \alpha_0 \cdot \cos^2 \alpha$, а $\cos \alpha_0 = const$;

- Показано, что хотя способы интегрирования дифференциальных уравнений существенно отличаются, но конечные результаты по определению основных параметров траектории в точности совпадают;

- Анализ двух способов интегрирования дифференциальных уравнений движения показывает, что более доступным для понимания является способ решения задачи в декартовых осях;

- Рассмотрен числовой пример, в результате чего определены основные параметры траектории полета снаряда и построены траектории для различных углов наклона ствола орудия к горизонту.

Литература

1. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики: В 2-х томах. Т. II. Динамика.—6-е изд., перераб. и доп.—М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. — 640 с.
2. Амелянчик А.И., Горбач Н.И. К вопросу о движении артиллерийского снаряда. Межведомственный сборник научно-методических статей «Теоретическая и прикладная механика», выпуск 24 БНТУ. – Минск, 2009.
3. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. - М.: ООО «Издательство Астрель» АСТ, 2002. - 992 с: ил.
4. Яблонский, АА. Курс теоретической механики: учебник для техн. вузов / А.А. Яблонский. - 6-е изд. испр. - М.: Высш. шк., 1984-423 с.: ил.
5. Мещерский, И.В. Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский. - М.: «Наука», 1981. - 480 с.

Поступила в редакцию 05.10.2012

ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ ИЗМЕНЕНИЯ ФОРМЫ ОДНОМЕРНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН, СОЗДАНЫХ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ОБЩЕГО ВИДА

¹Рагозина В.Е., ¹Иванова Ю.Е., ²Чигарев А.В., ²Шукевич Т.В., ²Ручан М.В.

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматизации и процессов
управления Дальневосточного отделения Российской академии наук,
Владивосток*

УО «Белорусский национальный технический университет, Минск»

Возникновение и движение ударных волн в твердом теле – процесс, нелинейный по своей сути, поэтому его достоверное математическое описание возможно только в рамках нелинейной модели. При этом даже для простейших моделей, таких как нелинейно упругий изотропный материал, необходимо учитывать взаимосвязь объемного и сдвигового деформирования, а также зависимость скоростей ударных волн от строящегося решения и поля предварительных деформаций [1-4]. Перечисленные факторы обуславливают необходимость применения приближенных методов решения, как численных, так и аналитических. Среди аналитических методов назовем такие, как метод лучевых рядов [5, 6], метод сращиваемых асимптотических разложений [7-9]. Применение последнего к одномерным задачам объемного ударного деформирования [7] приводит к эволюционному уравнению квазипростых волн (уравнение Хопфа) в прифронтной области ударной волны. В данной статье основной интерес сосредоточен на описании закономерностей чисто поперечных волн, поэтому моделью среды выбран нелинейно упругий несжимаемый изотропный материал. Здесь также необходимо отметить, что изучение решений эволюционных уравнений волновых процессов в твердом теле обычно [7, 8] предполагало наиболее простой вид краевых условий: перемещения на границе считались квадратичными функциями времени, а для поперечных волн в решении эволюционного уравнения учитывались только линейные по времени слагаемые. В данной статье предлагается несколько вариантов решения краевых задач ударного деформирования, позволяющих использовать эволюционные уравнения при краевых условиях для перемещений в виде общей функции времени.

Поскольку в прифронтной области ударной волны основные изменения в решении связаны с производной в направлении нормали к волновому фронту, то для неодномерных задач в этой области также следует эволюционное уравнение. Его структура должна учитывать наличие переменной кривизны волнового фронта, также в основном приближении координата эйконала входит в него только как параметр. Дифференциальный оператор, соответствующий рассматриваемым в статье плоским волнам, переходит и в эволюционные уравнения неодномерных процессов. Это определяет возможность дальнейшего обобщения предлагаемых в статье методов на случай многомерного ударного деформирования.

Рассматривается нелинейно упругая несжимаемая изотропная среда, поведение которой в декартовой пространственной системе координат Эйлера x_i ($i = 1, 2, 3$) задается общей системой уравнений

$$\begin{aligned} v_i &= \dot{u}_i + u_{i,j}v_j, \quad 2\alpha_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}, \quad \sigma_{ij,j} = \rho(\dot{v}_i + v_{i,j}v_j), \\ \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}}(\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), \quad W(I_1, I_2) = (a - \mu)I_1 + aI_2 + bI_1^2 - \\ &- \kappa I_1 I_2 - \theta I_1^3 + cI_1^4 + dI_2^2 + kI_1^2 I_2 + \dots, \quad I_1 = \alpha_{ii}, \quad I_2 = \alpha_{ij}\alpha_{ji}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1)$$

где u_i и v_i – компоненты векторов перемещений и скорости соответственно, α_{ij} – компоненты тензора деформаций Альманси, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений Эйлера-Коши, $\rho = const$ – плотность среды, W – функция упругого потенциала, p – добавочное гидростатическое давление, $a, \mu, b, \kappa, \theta, c, d, k$ – упругие модули среды, δ_{ij} – символ Кронекера, латинские индексы принимают значения 1, 2, 3. В зависимости W от инвариантов I_1, I_2 учтены знаки инвариантов, поэтому перед

некоторыми слагаемыми принят знак минус. Многоточием здесь и далее обозначены невыписанные слагаемые с более высокой малостью.

С момента времени $t = 0$ на граничной плоскости $x_1 = 0$ предварительно недеформированного полупространства $x_1 \geq 0$ производится нагружение, результатом которого будет поле перемещений $u = u_2(x_1, t)$, $u_1 = u_3 = 0$. Для такого поля из системы (1) получаем уравнения движения

$$\begin{aligned} (1 + 3\alpha u_{,1}^2) u_{,11} + \dots &= \ddot{u} C^{-2} + \dots, \\ p_{,1} &= 2(\mu - a) u_{,1} u_{,11} + \dots, \quad C^2 = \mu \rho^{-1}, \quad \alpha = (a + b + k + d) \mu^{-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Перемещения на границе $x_1 = 0$ считаем известными:

$$u|_{x_1=0} = \begin{cases} g(t), & t \geq 0, \quad g'(0) > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Такое условие приводит к возникновению ударной волны с момента $t = 0$. Требование $g'(0) > 0$ не является обязательным, однако дальше рассматриваем такие функции $g(t)$, которые приводят к мгновенному образованию ударной волны. На поверхности ударной волны $\Sigma(t)$ должны быть выполнены геометрические, кинематические и динамические условия совместности [10-12]. Для поставленной краевой задачи на их основе определяется скорость ударной волны $\Sigma(t)$:

$$G(t) = C \sqrt{1 + \alpha (\gamma^2 - 3u_{,1}^+ \gamma + 3(u_{,1}^+)^2) + \dots}, \quad \gamma = [u_{,1}] = u_{,1}^+ - u_{,1}^-,$$

где γ – интенсивность сдвиговой волны, G – скорость движения $\Sigma(t)$ в направлении единичной внешней нормали, индексами «+» и «-» обозначены величины, вычисляемые непосредственно перед и за ударной волной, квадратными скобками обозначен разрыв величины, заключенной в них. Для нашей задачи $u_{,1}^+ = 0$. На поверхности ударной волны должны выполняться следующие краевые условия:

$$u|_{X(t)} = 0, \quad \gamma|_{X(t)} = -u_{,1}^-|_{X(t)}, \quad [\sigma_{11}]|_{X(t)} = 0, \quad X(t) = \int_0^t G(\xi) d\xi, \quad (4)$$

причем $p = p_0 = const$ в недеформированной области.

Отметим, что задачи о переходных волновых процессах, в которых ударная волна образуется впоследствии, а также учет поля предварительных деформаций также могут решаться на основе излагаемых далее методов.

Из системы нелинейных уравнений (2) для определения поля перемещений задачи будем рассматривать только первое уравнение, поскольку второе легко интегрируется при найденных перемещениях. Для решения этого уравнения определим следующие безразмерные переменные:

$$s = \frac{x_1}{CT}, \quad m = \frac{t}{T}, \quad w(s, m) = \varepsilon^{-1} \frac{u(x_1, t)}{CT}, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (5)$$

для которых T – характерный масштаб времени, за которое возникающие на границе перемещения значительно меньше проходимого волной в линейном приближении расстояния. Это определяет появление малого параметра задачи ε , причем зачастую для него можно принять $\varepsilon = -[\dot{u}(0, 0)]C^{-1}$. В переменных (5) для перемещений из системы (2) получим уравнение

$$w_{,ss} (1 + 3\alpha \varepsilon^2 w_{,s}^2) + \dots = w_{,mm}, \quad (6)$$

а от условия (3) перейдем к условию

$$w|_{s=0} = \begin{cases} f(m), & m \geq 0 \\ 0, & m \leq 0. \end{cases} \quad (7)$$

Поскольку уравнение (6) содержит только четные степени малого параметра, искомую функцию $w(s, m)$ представим асимптотической последовательностью:

$$w(s, m) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} w_{2k}(s, m) \approx w_0 + \varepsilon^2 w_2 + \varepsilon^4 w_4 + \dots$$

Интегрируя уравнение (6), методом последовательных линейных приближений получим

$$w(s, m) = f(\xi) + \frac{\alpha}{2} \varepsilon^2 (f'(\xi))^3 s + \frac{9}{8} \alpha^2 \varepsilon^4 \left\{ (f'(\xi))^4 f''(\xi) (s^2 + \xi s - s) - \right. \\ \left. - \frac{39}{45} (f'(\xi))^5 s \right\} + \dots, \quad \xi = m - s. \quad (8)$$

Отметим, что к решению (8) можно прийти двумя способами. В первом из них «теряется» краевое условие (4) и выполняется только условие (6). Во втором принимаем в расчет все условия и снова получаем ряд (8). В любом случае ударная волна $\Sigma(t)$ имеет скорость, большую чем C , поэтому в области от $\xi = 0$ до ударной волны из (8) получаем $w(s, m) = 0$, а на самой поверхности $\xi = 0$ $w(s, m)$ имеет разрыв (за счет $[f'(\xi)] \neq 0$), что недопустимо. Таким образом, одним рядом (8) невозможно выполнить все краевые условия и определить гладкое решение, мы приходим к сингулярной задаче метода малого параметра. Ряд (8) назовем, следуя терминологии метода сращиваемых асимптотических разложений [13], внешним решением. Для выполнения условий на ударной волне надо построить дополнительное решение, называемое внутренним.

Для определения новых переменных внутренней области есть несколько возможностей, связанных с потерей равномерности исходного ряда (8). Здесь рассмотрим неравномерность, возникающую на больших расстояниях. Очевидно, что при $s \ll \varepsilon^{-2}$ ряд (8) становится неравномерным. Для построения внутреннего решения примем новые переменные

$$n = \varepsilon^2 s, \quad p = s - m, \quad w^i = w(n, p). \quad (9)$$

В переменных (9) от уравнения (6) переходим к уравнению

$$(2w_{,pn} + \varepsilon^2 w_{,mm}) \left\{ 1 + 3\alpha^2 \varepsilon^2 (w_{,p} + \varepsilon^2 w_{,n})^2 \right\} + 3\alpha w_{,pp} (w_{,p} + \varepsilon^2 w_{,n})^3 + \dots = 0. \quad (10)$$

На основании вида уравнения (10) в представлении $w(n, p)$ асимптотической последовательностью также сохраним только четные степени ε . При этом на нулевом шаге метода получим уравнение

$$v_{0,n} + \frac{3\alpha}{2} v_0^2 v_{0,p} = 0, \quad v_0 = w_{0,p}, \quad (11)$$

которое по своему типу относится к нелинейным волновым уравнениям первого порядка и может быть названо эволюционным, поскольку структура его решения определяет как движение ударной волны, так и ее возникновение в результате «опрокидывания» исходного непрерывного профиля. В [7] показано, что прифронтальная область одномерной продольной ударной волны, движущейся в нелинейно упругом полупространстве, описывается решениями известного уравнения Хопфа. Его отличие от уравнения (11) заключается в зависимости угла наклона характеристик от функции v_0 во второй степени. Это простое математическое обстоятельство отличает процесс сдвигового деформирования и приводит к качественным отличиям его от объемного. Непрерывное решение уравнения (11) вдоль характеристик имеет вид

$$v_0 = F(p - \beta v_0^2 n), \quad \beta = \frac{3\alpha}{2} \quad (12)$$

где F – произвольная функция, определяемая краевыми условиями. В нашей задаче такими краевыми условиями необходимо считать вид поля перемещений и его производных в области, пограничной по отношению ко внутреннему и внешнему решению. Эта область определяется новой переменной $l = \varepsilon^k s$, $0 < k < 2$. В данной области на выбор функции F влияет только выбор $f'(\xi)$ с учетом $\xi = -p$. Следующая часть статьи посвящена подробному построению решений этой краевой задачи при достаточно общем виде $f(\xi)$ и $f'(\xi)$.

Так как полное решение поставленной краевой задачи включает определение поля перемещений (на нулевом шаге – по функции $w_0(n, p)$), необходимо указать способ восстановления перемещений по функции $v_0(n, p)$ при условии произвольности функции $f(\xi)$.

Первая из возможностей – явное выражение функции $v_0(n, p)$ из уравнения (12) с последующим интегрированием по переменной p . Это относится прежде всего к некоторым алгебраическим функциям $f(\xi)$, особенно к тем, которые приводят к квадратным либо биквадратным уравнениям относительно функции $v_0(n, p)$. В качестве одного из примеров рассмотрим краевое условие (3) вида

$$u|_{x_1=0} = \frac{4A}{5}t^{5/4}, \quad \dot{u}|_{x_1=0} = At^{1/4}, \quad A > 0,$$

или в безразмерных переменных: $w|_{s=0} = \frac{4}{5}\varepsilon m^{5/4}, \quad \varepsilon = \frac{AT^{1/4}}{C}$.

Эта задача интересна, в частности, как пример ситуации, где нет разрыва в скоростях в момент $t = 0$. При этом график $(\dot{u})^2$ имеет вертикальную касательную в нуле, что определяет мгновенное возникновение ударной волны, у которой интенсивность изменяется, начиная от нулевого значения. Приведем схематично основные результаты решения. Для внешней области получим:

$$w(s, m) \approx \frac{4}{5}(m-s)^{5/4} + \dots$$

Тогда во внутреннем решении достаточно выбрать: $v_0(n, p) = -(p + \beta n v_0^2)^{1/4}$, что приводит к представлению

$$\begin{aligned} v_0(n, p) &= -\sqrt{\frac{\beta n}{2} + \sqrt{-p + \frac{\beta^2 n^2}{4}}}, \\ w_0(n, p) &= \frac{4}{5} \left(\sqrt{\frac{\beta n}{2} + \sqrt{-p + \frac{\beta^2 n^2}{4}}} \right)^5 - \frac{2\beta n}{3} \left(\sqrt{\frac{\beta n}{2} + \sqrt{-p + \frac{\beta^2 n^2}{4}}} \right)^3 + \varphi(n), \end{aligned} \quad (13)$$

из которого также следует, что форма начального воздействия в переменных n, p терпит серьезные преобразования. Для определения положения волнового фронта необходимо проинтегрировать уравнение

$$\frac{dp_0}{dn} = \frac{\beta}{3} \left(\frac{\beta n}{2} + \sqrt{-p_0 + \frac{\beta^2 n^2}{4}} \right).$$

Для него в переменных $g = \sqrt{-p_0 + \frac{\beta^2 n^2}{4}}$, n приходим к одному из вариантов уравнения Дарбу. При этом оказывается, что интересующее нас решение (с условием $p_0(0) = 0$) совпадает с одним из особых решений. Из него в исходных переменных получаем

$$p_0(n) = \frac{5}{36}\beta^2 n^2, \quad (14)$$

то есть в переменных p, n положение ударной волны задается ветвью параболы. Подстановка уравнений (14), (13) в условие

$$w_0(n, p)|_{p=p_0(n)} = 0$$

приводит к простому результату $\varphi(n) = 0$, что и заканчивает решение в нулевом приближении. Кроме приведенного здесь примера, есть еще ряд краевых условий, допускающих явное представление функции v_0 с последующим интегрированием. Преимущество такого подхода состоит в работе с ис-

ходными переменными, основной недостаток – ограниченность вида краевых условий, приводящих к удобным в работе функциям $v_0(n, p)$. Рассмотрим далее еще один метод, позволяющий использовать решения эволюционных уравнений для практически произвольных краевых условий.

Обратим внимание на то, что уравнение (12) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial w_0}{\partial p} = F \left(p - \beta n \left(\frac{\partial w_0}{\partial p} \right)^2 \right). \quad (15)$$

По типу уравнение (15) можно отнести к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно w_0 с независимой переменной p , а n играет роль параметра. Это уравнение не содержит явно саму искомую функцию $w_0(n, p)$, поэтому для него можно использовать параметрический подход к решению. Для этого представим:

$$p = \varphi(\sigma, n), \quad \frac{\partial w_0}{\partial p} = \psi(\sigma), \quad (16)$$

где σ – параметр, область изменения которого определяется краевой задачей. Вдоль линий $n = const$ в пространстве σ, n из формул (16) следует

$$dw_0 = \psi(\sigma) \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} d\sigma, \quad (17)$$

причем $\varphi(\sigma, n)$ и $\psi(\sigma)$ – функции, связанные между собой исходным уравнением (15). В результате интегрирования уравнения (17) получим решение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} w_0(n, p) = w_0(n, p(\sigma, n)) = W_0(\sigma, n) \\ p = p(\sigma, n) \end{cases}$$

Для каждой краевой задачи параметр σ может выбираться в зависимости от удобства представления краевых условий. В общем случае наиболее целесообразным будет выбор

$$\begin{aligned} \sigma &= \beta n v_0^2 - p, \quad v_0 = \Phi(\sigma) = -f'(\sigma), \\ p &= \varphi(\sigma, n) = \beta n \Phi^2(\sigma) - \sigma, \quad \sigma \geq 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Из уравнений (18) и (17) с учетом условия (7) получим

$$\begin{cases} W_0(n, \sigma) = -\frac{2\beta n}{3} (f'(\sigma))^3 + f(\sigma) + \varphi_0(n) \\ p(n, \sigma) = \beta n (f'(\sigma))^2 - \sigma, \end{cases}$$

где $\varphi_0(n)$ – неизвестная функция, позволяющая выполнить условие на ударной волне $\Sigma(t)$, которое теперь представим так:

$$W_0(n, \sigma) \Big|_{n=n_0(\sigma)} = 0,$$

то есть в нулевом приближении положение ударной волны в параметрическом решении задается системой уравнений

$$\begin{cases} p_0 = p(\sigma, n_0(\sigma)) = \beta n_0(\sigma) (f'(\sigma))^2 - \sigma \\ n = n_0(\sigma). \end{cases}$$

Функция $n_0(\sigma)$ задает волновой фронт только на рассматриваемом нулевом шаге, далее, как обычно, надо уточнить представление, полагая $n = n_0(\sigma) + \varepsilon^2 n_2(\sigma) + \dots$. Обычно на ударной волне считали, что $p = p_0(n)$ и вычисляли $p'_0(n)$ с подстановкой в уравнение $\frac{dp_0}{dn} = \frac{\alpha}{2} v_0^2(p_0(n), n)$.

Теперь для этой производной можно использовать представление

$$\frac{dp_0}{dn} = \frac{\partial \varphi(n, \sigma(n))}{\partial n} + \frac{\partial \varphi(n, \sigma(n))}{\partial \sigma} \frac{d\sigma(n)}{dn}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \beta (f')^2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = 2\beta n f f'' - 1,$$

откуда имеем

$$\frac{dn_0}{d\sigma} = -3 \frac{f''(\sigma)}{f'(\sigma)} n_0 + \frac{3}{2\beta(f'(\sigma))^2}.$$

Интегрирование этого уравнения при условии возникновения ударной волны с момента $t = 0$ приводит к таким результатам:

$$\begin{cases} n_0(\sigma) = \frac{3}{2\beta} \frac{f(\sigma)}{(f'(\sigma))^3} \\ p_0(\sigma) = \frac{3}{2} \frac{f(\sigma)}{f'(\sigma)} - \sigma. \end{cases}$$

Найденные формулы определяют $\varphi_0(n) = 0$. Решение в такой форме удобно при численных расчетах, также оно легко сопоставляется с внешним рядом (на нулевом шаге это было сделано исходно за счет выбора связи $\Phi(\sigma) = -f'(\sigma)$). Использование этого приема достаточно просто перенести на уточнение внутреннего ряда последующими шагами.

В качестве одного из примеров параметрических решений рассмотрим подробнее задачу, в которой перемещения и скорости граничных точек изменяются по экспоненциальным законам:

$$\dot{u}|_{x_1=0} = Ae^{\gamma t}, \quad u|_{x_1=0} = -\frac{A}{\gamma}(1 - e^{\gamma t}), \quad A > 0, \quad \gamma < 0. \quad (19)$$

Решение этой задачи во внутреннем приближении проведем до второго шага включительно. Для условия (19) в безразмерных переменных внешней области:

$$w(s, m)|_{s=0} = \frac{1}{B}(1 - e^{-Bm}), \quad B = -\gamma T = \text{const} > 0, \quad \varepsilon = \frac{A}{C}.$$

Решение внешней области очевидно и строится на основе формулы (8). Для внутреннего решения можно выбрать

$$v_0 = w_{0,p} = \psi(\sigma) = -e^\sigma, \quad -\infty < \sigma \leq 0,$$

где область изменения σ задает затухающую ветвь экспоненты. Тогда

$$\sigma = B(p - \beta ne^{2\sigma}), \quad p = \varphi(n, \sigma) = \frac{\sigma}{B} + \beta ne^{2\sigma},$$

откуда

$$\begin{cases} W_0(n, \sigma) = -\frac{e^\sigma}{B} - \frac{2\beta n}{3} e^{3\sigma} + \varphi_0(n) \\ p(n, \sigma) = \frac{e^\sigma}{B} + \beta ne^{2\sigma}. \end{cases}$$

Из уравнения эйконала определяем положение волнового фронта $\Sigma(t)$:

$$\begin{cases} n_0(\sigma) = \frac{3}{2\beta B}(e^{-3\sigma} - e^{-2\sigma}) \\ p_0(\sigma) = \frac{\sigma}{B} + \frac{3}{2B}(e^{-\sigma} - 1), \end{cases}$$

которое дает формулу $\varphi_0(n) = B^{-1} = \text{const}$.

Приведенный метод легко распространяется на другие краевые условия. В частности, авторами рассматривались краевые условия логарифмического, синусоидального вида, а также полиномиальное представление граничных перемещений.

Подводя итог, можно сделать заключение, что применение метода возмущений с выделением эволюционного уравнения является эффективным способом решения краевых задач ударного деформирования. Параметрическое построение решений эволюционных уравнений позволяет существенно расширить класс изучаемых краевых условий. Приведенный метод может быть перенесен как на одномерные плоские задачи объемного деформирования, так и на краевые задачи с ненулевой кривизной фронта ударной волны. Полученные решения можно использовать как самостоятельный теоре-

тический результат, либо в практических целях, включая их в задачи численных расчетов, в которых необходимо четко выделить поверхность ударной волны. Отметим также вопрос об образовании ударной волны в переходном волновом процессе, не вошедший в круг задач этой статьи. Его решение также может строиться исходя из анализа эволюционного волнового уравнения. Также следует ожидать, что полученные закономерности должны в определенной степени сохраняться и для многомерных задач, либо для случая присутствия нескольких плоских волновых фронтов.

- *Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, гранты 12-01-90004-Бел_а, 11-01-00360-а, 11-01-98514-р_восток_а.*

Резюме

На примере одномерной задачи об ударном деформировании нелинейно упругого несжимаемого полупространства показан метод решения, в котором основные механизмы деформирования в прифронтной области отражаются эволюционными уравнениями. Для несжимаемой среды эволюционное уравнение принципиально отличается от уравнения Хопфа. Приведен ряд примеров решения этого уравнения для различных краевых условий.

Литература

1. Бленд Д.Р. Нелинейная динамическая теория упругости / Д.Р. Бленд – М.: Мир, 1972. – 183с.
2. Куликовский А.Г. Нелинейные волны в упругих средах / А.Г. Куликовский, Е.И. Свешникова – М.: Московский лицей, 1998. – 412с.
3. Куликовский А.Г. Об ударных волнах, распространяющихся по напряженному состоянию в изотропных нелинейно-упругих средах / А.Г. Куликовский, Е.И. Свешникова // ПММ, 1982. Т. 44. Вып. 3. С. 523-534.
4. Буренин А.А. Ударные волны в изотропном упругом пространстве / А.А. Буренин, А.Д. Чернышов // ПММ. – 1978. – Т. 42. – Вып. 4. – С. 711-717.
5. Rossikhin Y.A. Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities / Y.A. Rossikhin, M.V. Shitikova // Appl. Mech. Rev. – 1995. – V. 48. – № 1. – P. 1-39.
6. Бабичева Л.А. Лучевой метод решения динамических задач в упруго-вязко-пластических средах / Л.А. Бабичева, Г.И. Быковцев, Н.Д. Вервейко // ПММ. – 1973. – Т. 37. – № 1. – С. 145-155.
7. Буренин А.А. К решению одномерной задачи нелинейной динамической теории упругости со структурной ударной волной / А.А. Буренин, Ю.А. Россихин // Прикл. механика. – 1990. – Т. 26. – № 1. – С. 103 – 108.
8. Буренин А.А. О прифронтных асимптотиках в нелинейной динамической теории упругости / А.А. Буренин, В.Е. Рагозина // Проблемы механики сплошных сред и элементов конструкций. Владивосток: «Дальнаука», 1988. – С. 225-240.
9. Иванова Ю.Е. Об ударных осесимметрических движениях несжимаемой упругой среды при ударных воздействиях / Ю.Е. Иванова, В.Е. Рагозина // Прикладная механика и техническая физика. – 2006. – Т. 47. – № 6. – С. 144-151.
10. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1,2. Изд-ие 2-ое испр. и дополн./ Л.И. Седов – М.: Наука, 1973. – Т.1. 536с. Т.2. 584с.
11. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах / Т. Томас – М.: Мир, – 1964. – 308с.
12. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности / Г.И. Быковцев, Д.Д. Ивлев – Владивосток: Дальнаука, 1998. – 528с.
13. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости / М. Ван-Дайк – М.: «Мир», – 1967. – 239с.

Summary

The solution method, in which the basic mechanisms of deformation in the frontal area reflects by the evolution equations, is shown in the one-dimensional problem of shock deformation nonlinear elastic incompressible half space. The evolution equation for incompressible medium is fundamentally different from the Hopf equation. Several examples of solutions of this equation for different boundary conditions are given.

Поступила в редакцию 15.10.2012

РАЗРАБОТКА ПЕРСПЕКТИВНЫХ НЕСУЩИХ КОНСТРУКЦИЙ ПНЕВМОПОДВЕСОК ГРУЗОВЫХ АВТОМОБИЛЕЙ

Капуста П.П., Швец И.В.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Расчет разрабатываемых конструкции стальных опор произведен методом конечных элементов на пакете NASTRAN. Конечноэлементная модель создана в пре/постпроцессоре PATRAN на основе геометрической трехмерной модели, выполненной в пакете трехмерного моделирования Unigraphics.

Были рассмотрены различные опоры, используемые в автомобилях МАЗ.

На рис. 1 представлена трехмерная модель старой серийной подвески полуприцепа с линейной опорой.

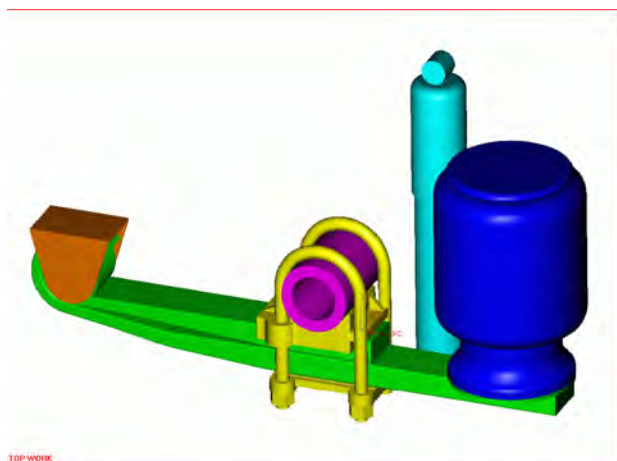


Рисунок 1

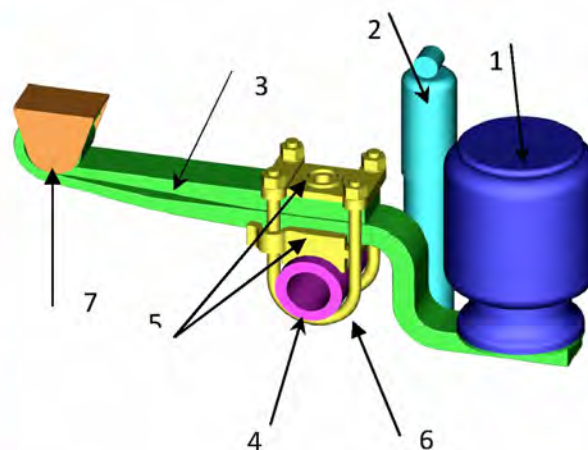


Рисунок 2

На рис. 2 представлена трехмерная модель новой серийной подвески полуприцепа: 1 – упругое звено, 2 – гидроамортизатор, 3 – опора новая серийная (криволинейная). Усилия от дороги передаются на ось полуприцепа (поз. 4), далее через соединительные кронштейны (поз. 5), стянутые стремьями (поз. 6), на опору, а от нее – через шарнир (поз. 7) и пневмоэлемент на раму.

Данные, полученные с помощью конечноэлементного расчета, позволяют оценить нагруженность деталей, а по местам локализации наибольших значений полей напряжений можно определить локальные опасные по усталости элементы деталей.

Результаты проектных расчетов подтверждены экспериментальными дорожными испытаниями.

В результате проведенного расчета были получены картины распределения перемещений и напряжений в деталях подвески полуприцепа при статическом нагружении из условия приходящейся на ось нагрузки в 8000 кг. Напряжения в листах опоры оказались значительно меньше предела текучести (для стали 50ХГФА 1325 МПа). В нижнем листе опоры эквивалентные напряжения составили 110 МПа в месте присоединения к кронштейнам и 103 МПа в месте присоединения пневмобаллона, а также кромочное напряжение 110 МПа в районе отверстия для стягивания листов опоры. В нижнем листе в зоне сгибов имеются остаточные напряжения отковки, которые при данном статическом расчете не учитывались. Их учет возможен только после отработки соответствующего технологического процесса. Эти напряжения впоследствии могут быть учтены как расчетным путем, так и в результате стендовых усталостных испытаний натурных конструкций рессор или локальных моделей, опасных с точки зрения усталостных зон.

Данное исследование позволяет предварительно оценить нагруженность листов опоры при выбранном режиме нагружения. Для более точной оценки необходимо уточнить режим нагружения с учетом динамических влияний внешних возмущений, а также учесть остаточные напряжения в листах послековки.

На рис.3 представлена трехмерная модель исходной штампованной опоры подвески полупри-

цепы. На рисунке 4 показана задняя часть этой модели, без верхней и нижней полок, чтобы видны были находящиеся внутри соединительные рёбра.



Рисунок 3



Рисунок 4

Рассчитана не только исходная модель штампованной опоры пневмоподвески, но и ещё два усиленных варианта этой модели с целью сравнения результатов расчёта, полученных методом конечных элементов с данными, полученными в результате стендовых испытаний.

Следующий вариант усиления конструкции – создание коробчатого сечения в задней части опоры, т.е. введенные рёбра для усиления соединены пластиной, продленной до амортизатора в нижней части стенок, что и показывает рис. 5.

Кроме приведенных выше моделей опоры рассчитана новая модель опоры, у которой толщина всех составляющих, в отличие от исходной модели, равна не 8 мм, а 6 мм, а также отсутствуют внутри соединительные рёбра. Верхняя и нижняя полки опоры доходят до конца стенок, что показывает рис. 6.

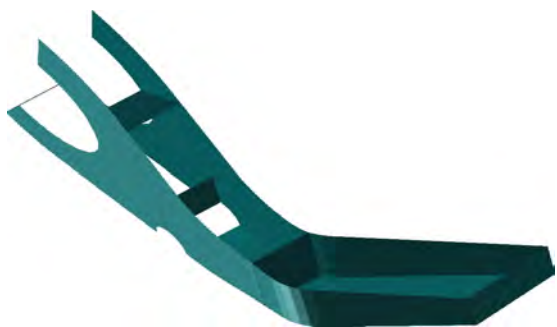


Рисунок 5

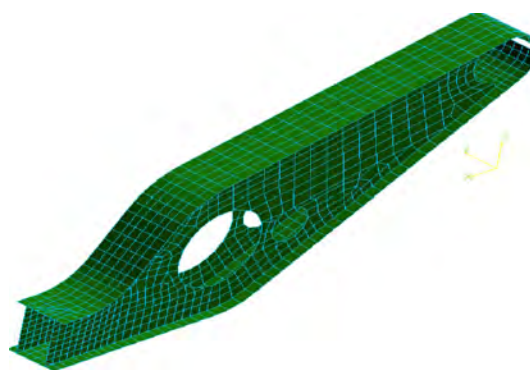


Рисунок 6

К концу опоры прикреплен швеллер с рёбрами, соединяющими нижнюю полку швеллера с кругом крепления пневмобаллона (рис. 7).

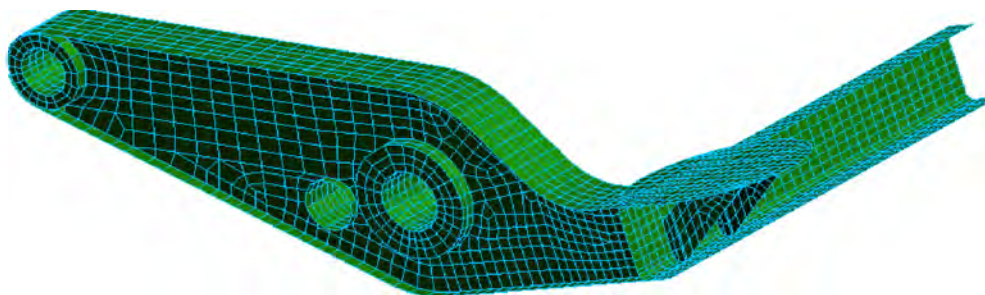


Рисунок 7

Все модели штамповарной опоры пневмоподвески просчитаны при одинаковых условиях закрепления и нагружения, за исключением опоры со швеллером, где на срединное сечение накладываются ещё условия симметричности, т.к. считается половина модели.

В результате расчётов определено напряжённо–деформированное состояние штамповарных опор: исходной, исходной, усиленной рёбрами и коробчатым сечением и опоры со швеллером. Наиболее нагруженной зоной является место крепления круга пневмобаллона к верхней полке опоры, т.к. именно в этом месте происходит изменение геометрических параметров (толщины, кривизны). Ещё эта зона усугубляется наличием сварного шва, который при расчёте не учитывается. Указанный факт следует иметь в виду.

Распределение эквивалентных напряжений в критической зоне анализируемых опор представлено следующими рисунками: рисунок 8 показывает эквивалентные напряжения задней части исходной модели. Максимальное значение напряжения, равное 443 МПа, возникает у верхней кромки внутренней стенки опоры, на изгибе, рядом с концом верхней полки. Указанная величина превышает предел текучести, который для материала 10ХСНД равен 390 МПа, в 1,14 раза. На этой же стенке, снизу, у отверстия под амортизатор, имеют место напряжения, также превышающие предел текучести. Поэтому здесь будет наблюдаться разрушение, которое подтверждено стендовыми испытаниями.

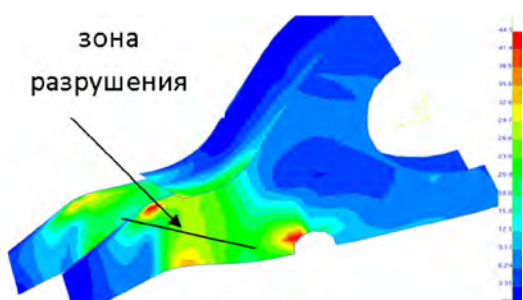


Рисунок 8

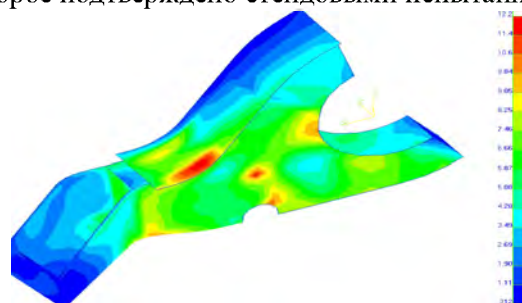


Рисунок 9

Введение в критической зоне поперечных пластин, т.е. рёбер толщиной 6 мм снижает уровень напряжений в верхней части стенки и у отверстия под амортизатор, как показывает рисунок 8, до 200 МПа и 275 МПа, соответственно. Ещё появляется зона увеличенных напряжений на нижней кромке внутренней стенки, за упрочняющей пластиной, в которой значение достигает 294 МПа, что в 1,3 раза меньше допустимых.

Дальнейшее усиление исходной модели путём соединения снизу усиливающих рёбер пластиной, продлённой до амортизатора, создавая, таким образом, в этом месте коробчатое сечение, ещё больше снижает максимальное напряжение до 122 МПа. Откуда видно, что нагружаются зоны внутренней стенки у нижней границы крепления усиливающего ребра, у отверстия под амортизатор, у верхней границы поперечного ребра, находящегося снизу за втулкой, и зона верхней полки, прилегающая к внутренней стенке в месте её изгиба. При таком усилении исходной модели уровень напряжений меньше допустимых в 3,2 раза.

Расчёт и анализ напряжённого состояния новой модели опоры, со швеллером, показывает рисунок 10, откуда видна локальная зона увеличенных напряжений до 237 МПа. Это место соединения верхней полки с внутренней стенкой, у ближайшего изгиба от места крепления круга под пневмобаллон.

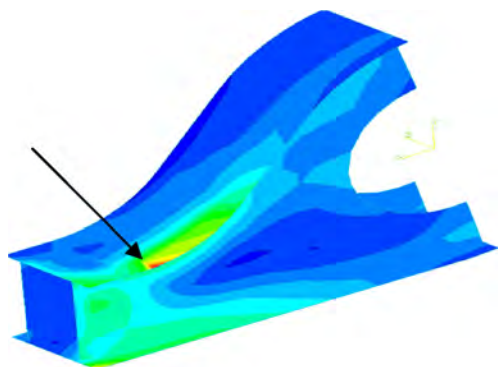


Рисунок 10

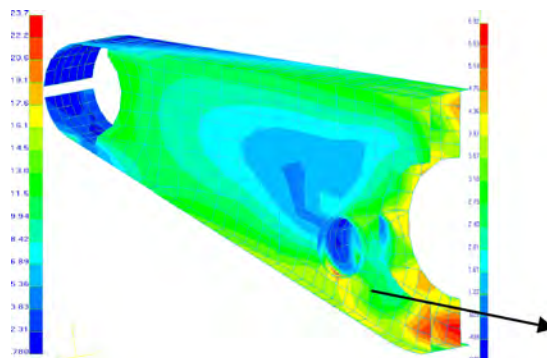


Рисунок 11

Значение напряжений в передней части всех опор невелико, и, как показывает рисунок 11, значение их 59 МПа - самое большое.

Три последние модели штамповарных опор удовлетворяют условиям прочности. Полученные данные подтверждаются стендовыми испытаниями.

На основе мирового опыта были предложены новые конструкции прокатных стальных опор пневмоподвески, адаптированные под серийные автомобили МАЗ, разработанные на базе опыта фирмы BPW, специализирующейся на проектировании конструкций пневмоподвески. Создана 3D-модель опоры в SolidWorks (рис. 12, 13).

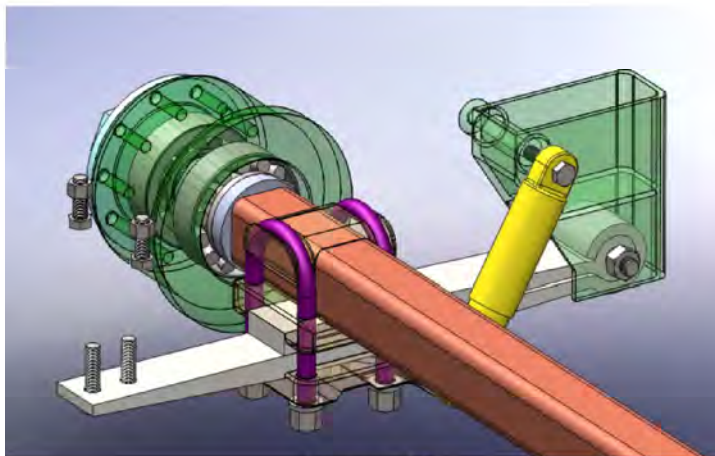


Рисунок 12

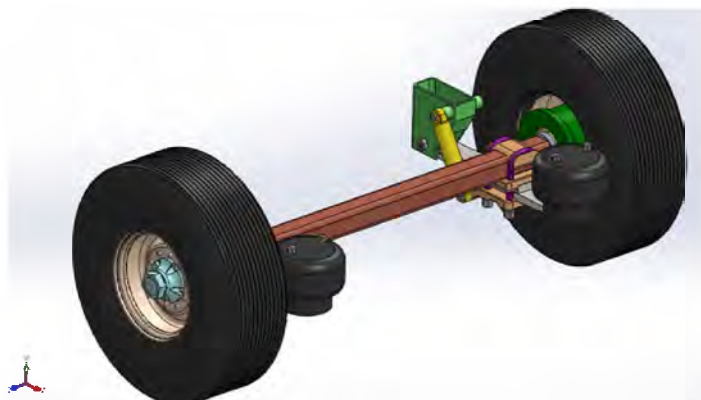


Рисунок 13

Далее были предложены новые конструкции опор пневмоподвески, разработанные с учетом технологических возможностей МАЗа, на основе моделей компании SAF, специализирующейся на изготовлении интегрированных систем подвесок с исключительными характеристиками и эффективностью. Создана 3D-модель штамповарной опоры в SolidWorks (рис. 14, 15).



Рисунок 14

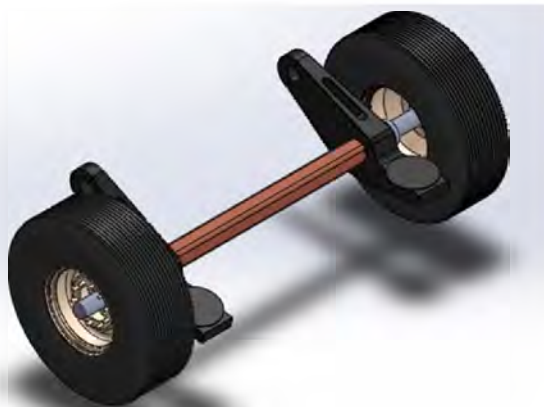


Рисунок 15

Проведен предварительный расчет методами сопромата, а также расчёт и анализ напряжённого состояния опоры (рис. 16).

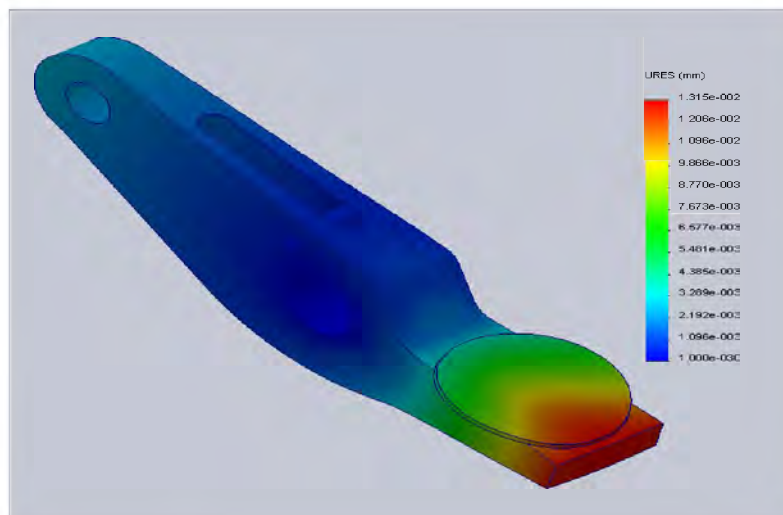


Рисунок 16

Предложены рекомендации для дальнейших более точных расчетов, учитывающих случайный характер нагружения подвески автомобиля, и проверке их на виртуальных и стендовых испытаниях.

Резюме

Представлены трехмерные модели прямолинейных, криволинейных и штампованных опор, рекомендации по улучшению конструкции базовой штампованной опоры и предложена новая модель опоры. Также представлены перспективные модели опор пневмоподвесок, разработанные на основе конструкций мировых лидеров.

Литература

1. Капуста П. П. Вероятностная оценка характеристик сопротивления усталости деталей на стадии проектирования машин: Учебно-методическое пособие для ВТУЗов.– Минск.: УП «Технопринт», 2001.– 97 с.
2. ГОСТ 25.504-82.Расчеты и испытания на прочность. Методы расчета характеристик сопротивления усталости. – Введ. 01.07.83. –М.: Изд-во стандартов, 1983.–81 с.
3. Марочник сталей и сплавов/ В.Г. Сорокин, А.В. Волосникова, С.А. Вяткин и др.; Под общ.ред. В.Г. Сорокина.- М.: Машиностроение, 1989.
4. MSC/NASTRAN Version 68 Reference Manual.- The MacNeal-Schwendler Corporation, 1996.
5. Биргер И.А. и др. Расчет на прочность деталей машин: Справочник/ И.А. Биргер, Б.Ф. Шорр, Г.Б. Иосилевич.- М.: Машиностроение, 1993.
6. Конструкционные материалы: Справочник/ Б.Н. Арзамасов, В.А. Брострем, Н.А. Буше и др.; Под общ.ред. Б.Н. Арзамасова.- М.: Машиностроение, 1990.

Summary

Represented by three-dimensional models of straight, curved and built-up steel supports, recommendations for improvements in the design of basic stamp-reliance support and a new model of support. Also the prospective model supports air suspension arms, developed on the basis of structures of world leaders.

Поступила в редакцию 13.05.2012

ВЕРИФИКАЦИЯ СТРУКТУРНЫХ МОДЕЛЕЙ ПРОСТРАНСТВЕННО-АРМИРОВАННЫХ ПЕНОПЛАСТМАСС И СОТОВЫХ ЗАПОЛНИТЕЛЕЙ СЭНДВИЧ-ПАНЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ ПРОВЕДЕНИЯ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

¹Щербатюк Д.А., ²Янковский А.П.

¹Сибирский государственный университет путей сообщения, Новосибирск

²Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,
Новосибирск

В авиа- и ракетостроении и в некоторых других областях техники в последние десятилетия широко применяются слоистые конструкции с наполнителем. В качестве наполнителей используются пенопластические массы – неармированные и армированные пластинками или проволокой, а также разного рода ребристые конструкции (сотовые, складчатые, типа гофра и др.).

Возможности пенопластмасс как легких наполнителей значительно расширяются, если использовать их в виде армированных слоистых структур, представляющих собой пенопласты с прослойками конструкционных материалов (металл, фанера, жесткие полимеры и др.), чаще всего в виде полос [1]. В этом случае при приложении нагрузки вдоль усиливающего материала прочность и жесткость армированного пенопласта значительно выше, чем неармированного с такой же плотностью.

Использование современных пенопластмасс (например, вспенивающихся) позволяет создавать такие типы наполнителей, в которых полости в ребристых конструкциях (сотовых, складчатых и др.) заполнены пенопластической массой [2]. Подобные наполнители, благодаря наличию в них пенопластмассы, обладают хорошими вибрационными характеристиками, так как пенопластическая масса

работает как демпфер и обеспечивает высокий градиент затухания колебаний. Кроме того, пенопластмасса, заполняющая полости ребристой конструкции, обеспечивает лучшую совместную работу элементов этой конструкции, поддерживает их и препятствует их потере устойчивости при сжатии и сдвиге, что во многом определяет жесткостные и прочностные характеристики наполнителей типа сотовых, складчатых и т. п. [2–4 и др.]. Подобные конструкции наполнителей можно рассматривать как пенопластмассы со сложными (ребристо-пространственными) структурами армирования, позволяющими локализовать в пределах одной ячейки распространение трещин в пенопластической массе. Этим резко повышается несущая способность материала в слоистых конструкциях с наполнителем, особенно в зонах приложения локализованных нагрузок и концентраторов напряжений при нестационарных термосиловых воздействиях, характерных для современных технических устройств [2].

Эффективные характеристики наполнителей, входящих в состав трехслойных панелей и представляющих собой ребристо-пространственные конструкции (типа сотовых, гофрированных и др.), в силу актуальности этой проблемы определялись многими авторами на основе различных структурных подходов [4, 5 и др.], детальный анализ которых содержится, в частности, в обзорной статье [6].

Моделирование же механического поведения криволинейно-армированных ребристыми элементами композитных сред в настоящее время находится в зачаточном состоянии. Так, в [2] на базе конечно-элементного моделирования (КЭМ) исследуется упругопластическое поведение трехслойных консольных пластин под действием локализованных и распределенных поперечных нагрузок при цилиндрическом изгибе, когда средний слой

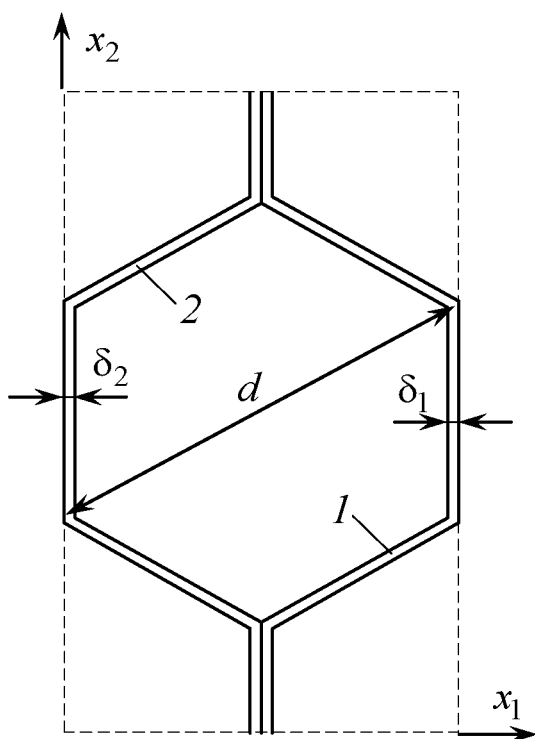


Рисунок 1 – Представительный элемент (ячейка) сотового наполнителя (вид сверху)

представляет собой ребристо-армированный полимер. КЭМ является идеальным при решении подобных задач, однако современный уровень вычислительной техники не позволяет рассчитать механическое поведение такой ячеистой конструкции при большом количестве ячеек. Например, в [2] исследование конструкции сведено к представительному элементу балочного типа, содержащему всего 10 ячеек, причем простейшей формы, когда ребристые элементы являются плоскими (не криволинейными) и образуют ортогональную структуру армирования. В реальных же заполнителях (например, сотовых) характерный размер одной ячейки может иметь порядок 1 см [3], поэтому тонкостенный сэндвич-элемент, содержащий заполнитель всего из 10 ячеек таких размеров, малоинтересен с практической точки зрения.

Следовательно, для решения реальных задач о деформировании конструкций периодической структуры с большим количеством ячеек на сегодняшний день целесообразно использовать структурные модели их механического поведения, базирующиеся на использовании тех или иных упрощающих гипотез, позволяющих резко сократить вычислительные затраты по сравнению с прямым использованием КЭМ. Так, в работах [7, 8] на основе упрощающих допущений с привлечением энергетических критериев эквивалентности разработаны две структурные модели, позволяющие определить нижние [7] и верхние [8] оценки эффективных жесткостей пенопластмассы, криволинейно-армированной ребристыми элементами (вилка Хашина – Штрикмана [9]). В работе [10] предложена аналогичная структурная модель без привлечения энергетических критериев эквивалентности.

Отсутствие в открытой печати экспериментальных данных по упругому деформированию пенопластмасс, криволинейно-армированных ребристыми элементами, не позволяет оценить точность этих структурных теорий и их практическую применимость.

На данный момент времени реальная возможность верификации структурных моделей из [7, 8, 10] заключается в сравнении значений эффективных жесткостей композиции, предсказываемых ими, со значениями, полученными на основе КЭМ, так как в последнем случае не используются никакие упрощающие гипотезы и расчет по КЭМ можно рассматривать как эталонный. (Методика определения эффективных характеристик 3D-периодических сред на основе КЭМ достаточно подробно изложена во многих публикациях [11 и др.], поэтому не будем останавливаться более подробно на обсуждении этого вопроса.)

Верификацию моделей из [7, 8, 10] проведем на примере сотовой ячейки, наиболее часто используемой на практике, полости в которой заполнены пенопластмассой.

Представительная ячейка сотовой ребристой конструкции изображена на рис. 1 и характеризуется наличием лишь двух криволинейных армирующих элементов (1 и 2) постоянной толщины $\delta_1 = \delta_2 = 0,05$ мм (см. рис. 1), а диаметр соты $d = 8$ мм [3]. Армирующие элементы изготовлены из дуралюмина Д16АТВ с упругими характеристиками [3]: $E^{(k)} = 67,7$ ГПа, $\nu^{(k)} = 0,41$ ($k = 1, 2$). Пустоты в сотах предполагаются заполненными пенопластической массой ПЭ-1 с упругими константами [1]: $E^{(0)} = 40$ МПа, $\nu^{(0)} = 0,25$. (Здесь: $E^{(n)}$, $\nu^{(n)}$ ($n = 0, 1, 2$) – модуль Юнга и коэффициент Пуассона n -го фазового материала.)

Так как фиктивный однородный материал, эквивалентный рассматриваемой армированной среде, является ортотропным, то закон Гука для него имеет вид:

$$\sigma_{ii} = \sum_{j=1}^3 A_{ij} \varepsilon_{jj}, \quad \sigma_{il} = 2G_{il} \varepsilon_{il} \quad (i \neq l, \quad i, l = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где σ_{ij} , ε_{ij} – усредненные напряжения и деформации в композиции; A_{ij} , G_{il} – эффективные жесткости композиции.

В табл. 1 приведены расчетные значения эффективных жесткостей A_{ij} , G_{il} рассматриваемой композитной среды, определенные по структурным моделям, предложенным ранее в [7, 8, 10], а также на основе КЭМ.

Таблица 1 – Расчетные значения эффективных жесткостей пенопластмассы ПЭ-1, армированной в виде сот ребристыми элементами из сплава Д16АТВ

Характеристики жесткости	Значения эффективных жесткостей, МПа			
	Модель из [8]	Модель из [10]	Модель из [7]	КЭМ
A_{11}	502,5	495,3	488,3	405,2
$A_{12} = A_{21}$	171,0	167,0	163,0	364,7
$A_{13} = A_{31}$	266,4	261,8	257,3	306,7
A_{22}	898,7	889,1	879,7	405,2
$A_{23} = A_{32}$	429,0	423,4	417,9	307,1
A_{33}	1621,7	1617,5	1613,4	1568,6
$2G_{12} = 2G_{21}$	634,9	329,3	170,8	48,2
$2G_{23} = 2G_{32}$	617,0	612,8	608,6	549,1
$2G_{13} = 2G_{31}$	386,4	383,2	378,0	380,4

В рамках КЭМ для определения значений эффективных жесткостей A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} , G_{12} использовались плоские КЭ (при задании условий плоского деформирования), причем ячейка (см. рис. 1) разбивалась на 47558 элементов с 24100 узлами. Для определения остальных эффективных постоянных использовалось пространственное КЭМ ячейки, причем в силу условий симметрии оказалось достаточным рассмотреть четверть ячейки. При этом по направлению x_3 (перпендикулярному плоскости рис. 1) был задан размер ячейки $h = 4$ мм; количество пространственных КЭ равно 56498 с 29523 узлами. Таким образом, при КЭМ использовалась достаточно мелкая разбивка ячейки на КЭ, что позволяет адекватно учесть неоднородность напряженно-деформированного состояния (НДС) во всех компонентах композиции и дает основание считать результаты расчета на базе КЭМ достаточно надежными – достоверными (см. последний столбец в табл. 1).

В работах же [7, 8, 10] при построении структурных моделей использовались упрощающие гипотезы, в частности НДС в компонентах композиции в пределах представительной ячейки предполагалось постоянным. Эти допущения позволили существенно упростить методику определения эффективных жесткостей композиции (при этом все вычисления сводятся к алгебре 6×6 -матриц). Однако, как видно из табл. 1, использование в [7, 8, 10] упрощающих гипотез приводит для некоторых характеристик (например, A_{12} , A_{22}) к занижению или завышению значений в 2 раза, а для модуля сдвига G_{12} в плоскости x_1x_2 – в 3,5–13,2 раза. Удовлетворительно согласуются с КЭМ лишь жесткости A_{33} , G_{32} , G_{31} .

Если задать $E^{(0)} = 0$, $\nu^{(0)} = 0$, то получим эффективные упругие характеристики для ребристой конструкции, полости в которой не заполнены пенопластмассой. Ранее, на основе принципиально других подходов (методами строительной механики [12]), эффективные упругие характеристики таких конструкций были получены, например, в [4–6 и др.]. Поэтому представляется целесообразным сравнить эффективные характеристики, например сотового заполнителя, рассчитанные по методикам, предложенным в [4, 5, 7, 8, 10], а также на базе КЭМ, и сопоставить их с известными экспериментальными данными [3].

Рассматривается сотовый заполнитель с ячейкой прежних размеров [3], выполненный из сплава Д16АТВ. В табл. 2 приведены расчетные (в расчетах по моделям из [7, 8, 10] и при КЭМ принималось $\nu^{(0)} = 0$, $E^{(0)} = 4$ кПа, чтобы обеспечить устойчивый счет и отсутствие деления на ноль) и экспериментальные значения эффективных упругих технических констант рассматриваемой сотовой конструкции. При этом закон Гука (1) предполагается записанным в следующей форме [13]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma_{33}, & \varepsilon_{22} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{1}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{32}}{E_3} \sigma_{33}, \\ \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_{22} + \frac{1}{E_3} \sigma_{33}, & 2\varepsilon_{il} &= \sigma_{il} / G_{il} \quad (i \neq l, \quad i, l = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (2)$$

где E_i , G_{il} , ν_{il} – модули упругости первого и второго рода и коэффициенты Пуассона для ортотропного эквивалентного материала.

Таблица 2 – Эффективные упругие технические константы сотового заполнителя

Технические константы	Метод расчета (модели)				Экспериментальные данные [3]
	Модель из [5, стр. 109]	Модель из [4]	Модели из [7, 8, 10]	КЭМ	
E_1 , МПа	410,6 / 408,0*	—	404,4 / 399,0 / 393,6**	1,383	—
E_2 , МПа	768,6 / 759,6	—	723,9 / 717,6 / 711,4	1,359	—
E_3 , МПа	1278,2	1566,8	1302,9 / 1302,9 / 1302,9	1282,1	—
G_{12} , МПа	—	—	301,6 / 148,8 / 73,5	0,804	—
G_{23} , МПа	263,6	288,7	292,9 / 290,8 / 288,7	258,1	216–246
G_{31} , МПа	173,2	173,2	177,5 / 175,3 / 173,2	173,9	83,5–131,0
ν_{21}	0,346 / 0,354	—	0,215 / 0,213 / 0,211	0,989	—
ν_{12}	0,185 / 0,190	—	0,120 / 0,118 / 0,117	1,007	—

*) В числителе: расчет при толщине заполнителя $h = 8$ мм; в знаменателе: расчет при $h = 13$ мм. (Расчетные значения E_1 , E_2 , ν_{21} , ν_{12} , определенные по методике из [5], зависят от толщины заполнителя h в направлении x_3 . Значения толщины h заполнителя при этом выбраны такими, какие использовались в [3] при проведении экспериментов.)
 **) Первое число – расчет по модели из [8], второе – из [10], третье – из [7].

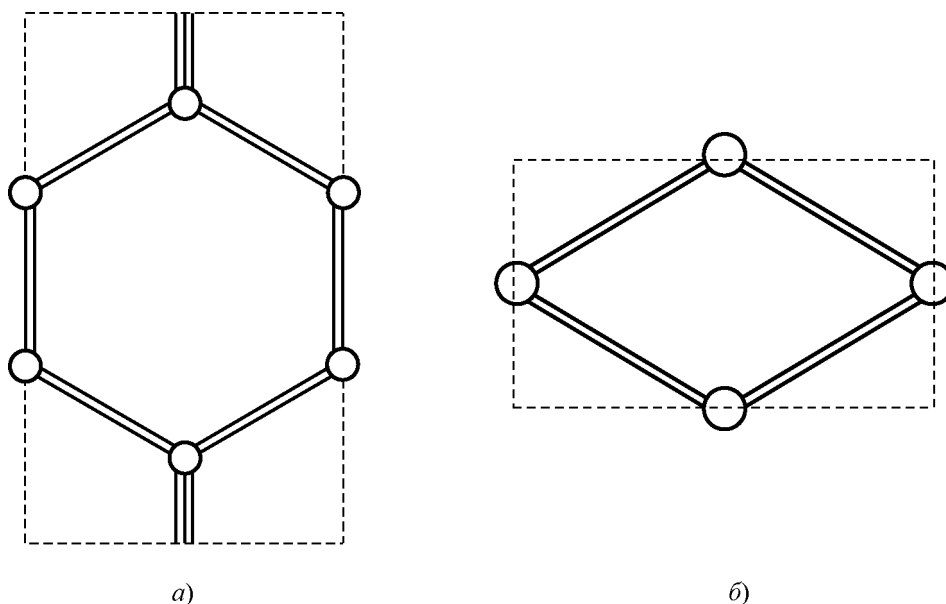


Рисунок 2 – Ячейки с абсолютно жесткими армирующими элементами: а) – сотовая, б) – ромбическая

Из сравнения чисел, приведенных в табл. 2, следует хорошее совпадение расчетных значений G_{23} , G_{31} , определенных по всем обсуждаемым методикам, и их удовлетворительное согласование с экспериментом, причем наиболее близки к эксперименту значения, определенные на базе КЭМ. Из табл. 2 видно: экспериментальные данные получаются меньше расчетных. В [3] авторы объясняют это тем, что в расчетах используется идеально правильная форма соты, а в реальности (в эксперименте) наблюдается наличие начальной погиби ребристых элементов соты. Последнее обстоятельство

сказывается на понижении жесткости реального сотового заполнителя. (В [4] теоретически показано, что после потери устойчивости элементов соты при их сжатии или сдвиге значения модулей упругости E_3 , G_{23} , G_{31} становятся меньше значений, приведенных в третьем столбце табл. 2. Исследование этих вопросов выходит за рамки настоящей работы.)

Общеизвестен следующий экспериментальный факт [6]: для сотового заполнителя значения модулей упругости E_1 , E_2 , G_{12} пренебрежимо малы по сравнению с E_3 , G_{23} , G_{31} . Поэтому в [4] значения E_1 , E_2 , G_{12} вообще не определены, а в [5] не вычислено значение G_{12} , что нашло отражение во втором и третьем столбцах табл. 2. Согласно же структурным моделям из [7, 8, 10] (см. четвертый столбец в табл. 2), расчетные значения E_1 , E_2 , G_{12} имеют тот же порядок, что и G_{23} , G_{31} ; аналогично, значения модулей E_1 , E_2 , определенных по модели из [5] (см. второй столбец в табл. 2), также имеют порядок G_{23} , G_{31} , что противоречит экспериментальным фактам. Напротив, согласно КЭМ, значения E_1 , E_2 , G_{12} составляют менее 1 % от значений E_3 , G_{23} , G_{31} (см. пятый столбец в табл. 2), т. е. пренебрежимо малы по сравнению с последними, что согласуется с известными экспериментальными данными.

У некоторых специалистов в области механики композиционных материалов сложилось мнение [14], что коэффициенты Пуассона армированного материала ν_{ij} (см. (2)) теоретически могут принимать значения лишь в интервале $(-1, 1/2)$. Согласно же пятому столбцу табл. 2, коэффициенты ν_{21} , ν_{12} в случае сотовой ячейки имеют значения, равные примерно единице, т. е. $\nu_{21} > 1/2$, $\nu_{12} > 1/2$. Несложными выкладками можно показать, что в случае, когда элементы соты являются абсолютно жесткими и в точках изломов траекторий армирования соединены шарнирно (рис. 2, а), коэффициенты Пуассона $\nu_{21} = \nu_{12} = 1$. Более того, можно построить ячейку, например с ромбовидным армированием (рис. 2, б), для которой $\nu_{21} = \nu_{12} = 3$ и т. д. Следовательно, значения ν_{21} , ν_{12} , приведенные в пятом столбце табл. 2, не являются абсурдными, а мнение, что коэффициенты Пуассона не могут превышать значения $1/2$, является ошибочным. (Утверждение, что $\nu < 1/2$, справедливо, по-видимому, лишь для изотропных материалов.)

Значения ν_{21} , ν_{12} , приведенные в других столбцах табл. 2, существенно отличаются от единицы, поэтому можно утверждать, что структурные модели из [5, 7, 8, 10] неверно предсказывают значения коэффициентов Пуассона для сотового заполнителя.

Проведенный сравнительный анализ структурных моделей для ребристо-армированных композитных сред, предложенных (моделей) в [7, 8, 10], показывает, что эти модели требуют дальнейшего усовершенствования, так как плохо согласуются с эталонными расчетами, проведенными на базе КЭМ.

Расчеты, проведенные в рамках КЭМ, показали, что концентрация напряжений в ячейке наблюдается лишь в малой окрестности точек излома траекторий армирования (см. рис. 1), причем эта область имеет диаметр порядка удвоенной толщины армирующего элемента ($2\delta_1$), т. е. пренебрежимо мала по сравнению с размерами ячейки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-90405-Укр_а).

Литература

1. Александров, А.Я. Конструкции с заполнителями из пенопластов / А.Я. Александров, М.Я. Бородин, В.В. Павлов. – М.: Машиностроение, 1972. – 212 с.
2. Vaziri, A. Metal sandwich plates with polymer foam-filled cores / A. Vaziri, Z. Xue and J.W. Hutchinson // Journal of Mechanics of Materials and Structures. – 2006. – V. 1, No 1. – P. 97–127.
3. Брюккер, Л.Э. Испытания трехслойных стержней при нормальных и повышенных температурах / Л.Э. Брюккер, А.С. Ракин // Динамика и прочность авиационных конструкций: Межвуз. сб. научн. трудов. – Новосибирск: Изд-во НГУ, НЭТИ, 1978. – Вып. 4. – С. 73–79.
4. Акишев, Н.И. Теоретико-экспериментальный метод определения усредненных упругих и пространственных характеристик сотового заполнителя трехслойных конструкций / Н.И. Акишев, И.И. Закиров, В.Н. Паймушин, М.А. Шишов // Механика композитных материалов. – 2011. – Т. 47, № 4. – С. 543–556.

5. Александров, А.Я. Расчет трехслойных панелей / А.Я. Александров, Л.Э. Брюккер, Л.М. Куршин, А.П. Прусаков. – М.: Оборонгиз, 1960. – 271 с.
6. Noor, A.K. Computational models for sandwich panels and shells / A.K. Noor, W.S. Burton, and Ch.W. Bert // Appl. Mech. Rev. – 1996. – Vol. 49, No 3. – P. 155–199.
7. Немировский, Ю.В. Статический метод определения эффективных термомеханических характеристик сложно армированных пенопластмасс / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Научный вестник НГТУ. – 2009. – № 4 (37). – С. 101–114.
8. Немировский, Ю.В. Кинематический метод определения эффективных термомеханических характеристик сложно армированных пенопластмасс [Текст] / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Конструкции из композиционных материалов. – 2010. – № 4. – С. 36–48.
9. Кристенсен, Р. Введение в механику композитов / Р. Кристенсен. – М.: Мир, 1982. – 334 с.
10. Янковский, А.П. Построение определяющих уравнений термоупругого поведения сложно армированных пенопластмасс / А.П. Янковский // Техническая механика. – 2010. – № 1. – С. 71–82.
11. Олегин, И.П. Определение эффективных характеристик композиционных материалов методом конечно-элементного моделирования / И.П. Олегин, Ю.Б. Нигирич, С.Г. Расторгуев // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тр. XXI Всерос. конф., Кемерово, 30 июня – 2 июля 2009 г. / Под ред. В.М. Фомина. – Новосибирск: «Параллель», 2009. – С. 183–189.
12. Александров, А.В. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы: Учебник для вузов / А.В. Александров, Б.Я. Лащеников, Н.Н. Шапошников. – М.: Стройиздат, 1983. – 488 с.
13. Малмейстер, А.К. Сопротивление полимерных и композитных материалов / А.К. Малмейстер, В.П. Тамуж, Г.А. Тетерс. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.
14. Колпаков, А.Г. Композиционные материалы и элементы конструкций с начальными напряжениями / А.Г. Колпаков. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2007. – 254 с.

Summary

It is performed the comparison of the effective elastic constants of the plastic foam medium, reinforced in the form of honeycomb cell, and honeycomb filler of sandwich panels, defined on the basis of different structural models, with the results of the reference calculations on the basis of the finite-element modeling. It is shown unsatisfactory correspondence of these structural models with the results of a numerical experiment.

Поступила в редакцию 12.10.2012

УДК 517.52

О РАЗЛОЖЕНИИ ФУНКЦИЙ В КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ РЯДЫ

Акимов В.А., Новиков А.А.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Рассмотрим разложение гладкой функции в неортогональный ряд вида:

$$Sh = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{m}{n} x. \quad (1)$$

Применяя операторный метод [1], получаем: . (1)

Для сравнения выписываем известное разложение этой же функции в ортогональный ряд Фурье:

$$Shax = \frac{2Sh(la)}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \delta_n}{a^2 + \delta_n^2} \sin \delta_n x. \quad (2)$$

где $\delta_n = \frac{\pi n}{l}$. Полагая в (2) $\delta_n = \pi m$ получим ряд (1).

Аналогичные соотношения получаются и для некоторых других разложений. Это обстоятельство дает основание выдвинуть гипотезу о прямой замене целочисленного параметра n функцией от n . Рассмотрим, в частности, два разложения вида:

$$Shax = \frac{2Sh(la)}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} a_n}{a^2 + a_n^2} \sin a_n x. \quad (3)$$

$$Shax = \frac{2Sh(la)}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \beta_n x}{a^2 + \beta_n^2} \sin \beta_n x. \quad (4)$$

где $a_n = \frac{\pi\sqrt{n}}{l}$, $\beta_n = \frac{\pi}{nl}$.

Отметим, что такое предположение, встречающееся в теории рядов впервые, возникло благодаря общности операторного метода. Такие неортогональные ряды, порожденные ортогональными, назовем квазиортогональными рядами. В данной работе покажем быстроту сходимости построенных рядов (3) и (4), заменив в них (по крайней мере пока) полученные коэффициенты коэффициентами, вычисленными методом наименьших квадратов.

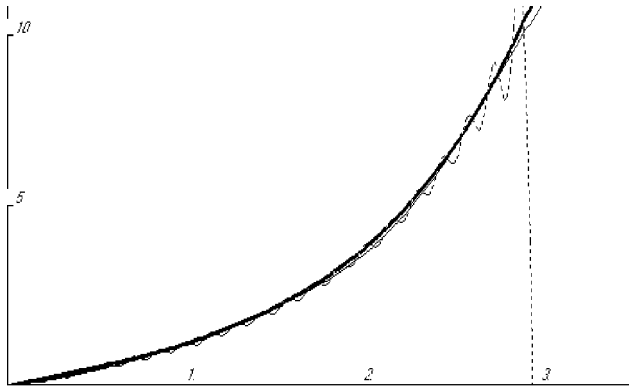


Рисунок – Сравнение аппроксимационного приближения функции $sh(x)$ (жирная линия) частичными суммами: квазиортогонального ряда по $\sin(\sqrt{n}x)$ для $n=4$ (тонкая линия) и ряда Фурье по $\sin(nx)$ для $n=40$ (пунктирная линия)

На этом графике непосредственно видна лучшая сходимость квазиортогональных рядов по сравнению с ортогональными. Даже 4 члена квазиортогонального ряда обеспечивают лучшую сходимость, достигаемую 40 членами ортогонального ряда. Похожий график получается и для ряда (4). Вопрос о достижении такой же хорошей сходимости за счет

собственных коэффициентов квазиортогональных рядов, порождаемых ортогональными рядами, остается открытым. Из всего вышесказанного вытекает, что квазиортогональные ряды использовать выгодно, но коэффициенты в них надо вычислять методом наименьших квадратов. Получается своего рода смешанный метод.

Резюме

В работе вводится понятие квазиортогональных рядов. Приводится численный пример разложения гладкой функции в квазиортогональный ряд методом наименьших квадратов.

Литература

Акимов В.А. Операторный метод решения задач теории упругости. Мн. УП «Технопринт»; 2003г.-101с.

Summary

In this article the concept of quasiorthogonal ranks is entered. The numerical example of decomposition of smooth function in a quasiorthogonal row is given by a method of the smallest squares.

Поступила в редакцию 11.10.2012

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ ПРИ ФОРМОВАНИИ ОБОЛОЧЕК НА ГИБКИХ ОПРАВКАХ

¹Василевич Ю.В., ²Сахоненко В.М., ²Горелый К.А., ²Малютин Е.В., ¹Неумержицкая Е.Ю.

¹УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

²ОАО «Авангард», Сафоново

Создание композита тесно связано с проблемой его расчета, так как получение армированной системы – комплексная задача, включающая: во-первых, обеспечение хорошего адгезионного слоя между жесткими и прочными армирующими элементами и полимерным связующим, обладающими ярко выраженными реологическими свойствами; во-вторых, формирование условий, которым должны отвечать упруго-прочностные свойства исходных компонентов, чтобы гетерогенная система мог-

ла рассматриваться как сплошная анизотропная среда с некоторым тензором приведенных вязкоупругих характеристик, соответствующих техническому заданию; в третьих, эта задача включает вопросы оптимального синтеза этих компонентов, т.е. разработке и строгому соблюдению технологии изготовления изделия.

Наиболее тривиальным конструктивным решением, позволяющим использовать высокую механическую прочность стеклянных волокон, являются вантовые конструкции, в которых непрерывные волокна укладываются параллельными пучками вдоль действующих напряжений растяжения. Поэтому совершенно очевидно, что основным несущим элементом в композите является наполнитель. Роль связующего двояка: с одной стороны оно служит для передачи усилий от непосредственно нагруженных элементов к незагруженным, а с другой – препятствует потере устойчивости волокон. Для выполнения своих функций связующее должно обладать:

- хорошей смачивающей способностью и высокой адгезией к материалам арматуры (стеклом, базальтом и т.д.);
- высокой когезионной прочностью и достаточно большим модулем упругости при вязком характере разрушения; достаточной деформативностью, т.е. относительное удлинение упругой и пластичной деформации связующего вплоть до разрыва должно быть не менее соответствующих значений для стеклоарматуры;
- незначительной усадкой при отверждении и значением коэффициента термического расширения близким к значению этого показателя для стеклоарматуры; отсутствием при отверждении выделений побочных продуктов, нарушающих монолитность стеклопластиков;
- достаточной теплостойкостью и стабильностью физико-химических свойств при хранении и эксплуатации в соответствии с заданными требованиями; гидрофобностью и высокой водостойкостью; малой коррозионной активностью по отношению к металлам, химической нейтральностью отвержденного связующего по отношению к стеклоарматуре;
- приемлемыми технологическими свойствами (вязкостью, жизнеспособностью, температурой охлаждения, временем желатинизации и т.д.);
- экономическими показателями полимера (стоимостью, дефицитностью и т.п.).

Технологически армирование по одной и той же принятой схеме может быть выполнено с переплетением и без переплетения волокон (или нитей), от чего меняется рисунок каждого элементарного слоя стеклопластика, его макростроение. В зависимости от этого изменяются и некоторые свойства стеклопластика. Например, герметичность, жесткость при изгибе и др. Поэтому для большей определенности необходимо стеклопластики дополнительно характеризовать строением его текстурных слоев. В этом плане различаются стеклопластики: а) с тканевой текстурой; б) со строчной текстурой или однонаправленно-армированной; в) с плетеной текстурой, в которой в каждом текстурном слое волокна переплетены между собой.

Выполнение торových оболочек предполагает использование всех этих текстур в зависимости от дополнительных требований. Конкретный выбор материала регулируется условиями, которые будут рассмотрены ниже. Таким образом, мы будем рассматривать стеклопластики, представляющие собой слоистые текстуры с чередующимися слоями высокомодульной арматуры и прослойками связующего. При проведении технологических исследований используют разнообразные методы, необходимее для получения достаточно полной и надежной информации о процессах, проходящих при изготовлении изделий и об изменениях их в зависимости от состава, структуры, свойств и технологии переработки входящих материалов. Эти многочисленные и отличающиеся между собой методы исследования можно распределить на следующие три группы: структурные методы, с помощью которых определяют строение и превращения, протекающие в материале изделия в процессе его изготовления; методы, использование которых позволяют непосредственно определять свойства материалов, требуемые в тех или иных условиях эксплуатации, и прежде всего механические; технологические методы, в частности, определяющие поведение материалов в производстве, включая свойства деформируемости, требуемые для данных условий эксплуатации.

Для анализа деформативного и напряженного состояния определим понятие среды исследования, рассмотрим геометрические величины, описывающие изменения этой среды, внутренние силы и их связь с внешними воздействиями. Соотношения между внутренними силами и деформациями будем получать на основе экспериментальных исследований. Технология изготовления торových оболочек на гибких оправках основывается на технологии производства цилиндрических оболочек с учетом ряда особенностей. Все дальнейшие рассуждения будем проводить только для торových оболочек круглого сечения, хотя принципиальной разницы в этом нет. На оправку наматывается или

наформовывается цилиндрическая оболочка. Оправка должна быть жесткой как в радиальном, так и в осевом направлениях, а материал наформованной оболочки должен оставаться препрегом. Дальнейшая трансформация оболочки происходит путем изгиба совместно с оправкой. В этом случае оправка должна быть освобождена от жестких связей в осевом направлении. Изгиб оболочки происходит путем приложения внешних усилий: изгибающего момента и осевой силы с опорой на жесткую поверхность, представляющую собой внутреннюю поверхность тора. В результате полученная торовая оболочка не должна иметь утяжек и разрывов армирующего материала, складок на поверхности и внутренних расслоений, т.е. параметры созданной оболочки должны удовлетворять требованиям конструкторской документации.

Исследуем процессы, которые происходят при проведении указанной последовательности технологических операций с целью выработки и принятия мер для предотвращения тех отступлений, которые перечислены выше. С точки зрения прочности и надежности конструкции изделия наиболее ответственной является задача обеспечения заданных конструктором структурных параметров. При этом требуемая геометрия изделия, точность и чистота поверхности обеспечиваются рабочими поверхностями технологической оснастки. Качество формирования стеклопластиковых оболочек независимо от типа применяемой стеклоарматуры оценивается по двум критериям: величиной коэффициента объемной плотности H_0 и величиной коэффициента поверхностной плотности Π , характеризующей пористость намотанной структуры, а, следовательно, в конечном счете, герметичностью готового стеклопластика. Таким образом, выдерживание расчетных значений структурных показателей H_0 , Π и T_0 , где T_0 - величина технологического натяжения арматуры при формовании изделия, в пределах заданных допусков, позволит значительно сократить и регламентировать высокую стабильность прочностных данных у оболочек. Для выдерживания этих структурных параметров технологу при подготовке производства необходимо установить оптимальные величины технологических параметров формования и регламентировать их соответствующими допусками, которые гарантировали бы стабильность готовых стеклопластиковых структур в заданных пределах. Таковыми являются контактное давление формования N , технологическое натяжение арматуры T_0 при формовании изделия и температура формования $t^\circ\text{C}$. Кроме того, необходимо обеспечить заданные макроструктурные критерии и схемы армирования, требуемые геометрические формы поверхностей, точность размеров и геометрических форм, точность взаимного расположения, высокое качество и чистоту формируемых поверхностей и регламентировать процент возможных дефектов. Все сказанное относится к подготовке производства цилиндрической оболочки, которую можно формовать как «сухим» методом (стеклоарматура перед формованием предварительно пропитывается связующим на отдельной технологической операции), так и мокрым, когда нанос связующего осуществляется непосредственно при намотке.

Вторая стадия, которая предусматривает уже непосредственное изгибание цилиндрической оболочки вместе с оправкой, должна происходить при повышенной температуре. Это требование исходит из следующих рассуждений. Так как при изгибе цилиндрической оболочки происходят большие относительные деформации материала, которые в некоторых случаях достигают нескольких десятков процентов, то эти деформации в значительной степени должны быть неупругими. В идеальном случае упругие деформации отсутствуют или являются минимальными. Это требование выполняется если материал оболочки находится в состоянии препрега. Кроме того, чтобы уменьшить силы трения, возникающие при сдвигающих перемещениях армирующего материала, необходимо обеспечить минимальное значение вязкости связующего. Опытным путем установлено: температура переработки связующего должна составлять примерно 80°C , если согласно технологической маршрутной карте для связующего в это время осталось не менее 97% массовой доли растворимой смолы, так как это напрямую связано с ее жизнеспособностью.

Развитие промышленного производства композитов невозможно без широкого внедрения технологии изготовления изделий из полуфабрикатов, в частности, препрегов. При этом к полимерным связующим предъявляются дополнительные требования технологического характера, основными из которых являются сочетание длительной жизнеспособности при температуре хранения и достаточно высокие реакционные способности при температурах переработки.

Следует отметить, что само понятие «жизнеспособность» требует уточнения, поскольку отсутствуют единые критерии его оценки. При хранении препрегов в связующих протекают два взаимосвязанных процесса: химическое структурирование, т.е. образование сетки химических связей, и фи-

зическое структурирование, т.е. образование сетки физических связей. Наиболее часто жизнеспособность связующих отождествляют со временем гелеобразования. Именно в момент гелеобразования связующие теряют текучесть, в итоге чего резко снижается их способность к дальнейшей переработке. Очевидно, что эта величина является верхним пределом жизнеспособности полимерной композиции и зависит от процесса химического структурирования полимера, т.е. образования в нем сетки химических связей. На практике препреги теряют способность к дальнейшей переработке задолго до достижения верхнего предела жизнеспособности из-за существенного повышения вязкости связующего вплоть до перехода в стеклообразное состояние. Время, за которое достигается максимальное значение вязкости, следует считать технологической жизнеспособностью. Технологическая жизнеспособность связующих обусловлена критическим явлением затвердевания, т.е. появлением в полимере сетки физических связей.

При получении торовых оболочек связующее, очевидно, должно быть таким, чтобы оно способствовало достижению минимального значения внутренней силы трения при скольжении армирующего материала препрега. Отсюда вытекает необходимость повышения жизнеспособности связующего применительно для изготовления торовых оболочек на гибких оправках. Это необходимо делать по двум причинам: из-за увеличения периода изготовления торовой оболочки и из-за необходимости иметь связующее с минимальной вязкостью в момент получения торовой оболочки из цилиндрической.

Существуют разнообразные методы повышения жизнеспособности связующих. Так, например, регулируется реакционная способность подбором всех компонентов связующего, а также при необходимости вводятся катализаторы, ускорители или ингибиторы (замедлители). Наполнители при изготовлении композитов иногда могут играть роль ингибиторов. Наличие воды в компонентах связующего и наполнителях также приводит к снижению реакционной способности связующих, как и присутствие растворителей и реактивных пластификаторов. Важной проблемой в химии эпоксидов является необходимость сочетания быстрого отверждения эпоксидных композиций с ее высокой жизнеспособностью при хранении. Частично эта проблема решается путем замены катализаторов на латентные ускорители (УА-605/2-5, А-30-1,5, блок-полиизоцианаты, И-120У), которые имеют разную температуру активации и позволяют получать связующие не только с достаточно длительным сроком хранения, но и значительно сокращают время полимеризации. Одни смолы имеют длительный цикл отверждения, другие – короткий, поэтому для получения связующего с заданными сроками жизнеспособности разрабатываются модифицированные системы. Например, изменение свойств связующих, в частности, свойства «жизнеспособности» проводится с использованием системы на основе эпоксидных соединений, называемых в промышленности «смолами», представляющими собой ароматические, гетероциклические и циклоалифатические мономеры с повышенной удельной функциональностью или смеси мономеров с примесью олигомерной фракции или с использованием отвердителей других классов. Для композиций на основе эпоксидных полимеров марок ЭД-16, ЭД-10 и эпуров на их основе с отвердителем - продуктом конденсации анилина с формальдегидом используется метод раздельного нанесения смоляной и затвердевающей части на различные слои армирующего материала с последующим их объединением-чередованием в процессе формования изделий. Имеются и другие методы повышения жизнеспособности связующих. Однако необходимо также отметить, что управление жизнеспособностью может привести к изменению других свойств связующего, иногда даже в нежелательную сторону. Поэтому управление жизнеспособностью связующих не совсем простая задача, но вполне выполнимая.

Резюме

Дано научное обсуждение решения проблем при разработке и создании оболочек из композиционных материалов.

Summary

Given a scientific discussion of solutions in the design and creation of shells made of composite materials.

Поступила в редакцию 24.11.2012

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ВИРТУАЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ УПРАВЛЯЕМОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ШАРНИРНО-СОЧЛЕНЁННЫХ МАШИН

¹Петровский А.Л., ¹Гурвич А.Ю., ²Сафронов К.И.

¹Белорусский национальный технический университет, Минск

²ОАО «Амкодор», Минск

Проблема обеспечения управляемости и устойчивости транспортных средств и мобильного технологического оборудования до сих пор остается актуальной и однозначно до конца не решена [1–4]. Наиболее остро эта проблема встает при проектировании транспортных средств с шарнирно-сочлененной рамой. Такие машины обладают повышенной маневренностью, проходимостью и поэтому находят своё применение в строительной, горнодобывающей, лесохозяйственной и других отраслях промышленности. Особое внимание стоит уделить подземным самосвалам с шарнирно-сочлененной рамой, поскольку их производительность в основном зависит от способности маневрировать в стесненных условиях тоннелей при значительных габаритах и грузоподъемности машины.

Исследования динамических характеристик таких машин с использованием аналитических методов [1] сопряжено со сложностью решения системы дифференциальных уравнений с большим количеством неизвестных. Применение методов виртуального моделирования позволяют исследовать маневренность и устойчивость автомобиля в динамической постановке, т.е. воспроизводится поведение объекта с учётом массово-инерционных характеристик, конструктивных особенностей рамы и ходовой части.

В данной работе описана методика расчёта показателей маневренности и устойчивости шарнирно-сочлененного двухосного самосвала БелАЗ 75800, которая базируется на построении модели и проведении виртуальных испытаний в пакете SolidWorks Motion [5].

В основу методики расчета характеристик управляемости и устойчивости движения шарнирно-сочлененных машин (в соответствии с ГОСТ [6–8]) в пакете SolidWorks Motion входит:

- определение радиусов траекторий установившегося поворота при различных скоростях движения;
- определение углов складывания секций, при которых наблюдается потеря устойчивости машины, совершающей установившейся поворот;
- определение предельных углов бокового крена машины, совершающей установившейся поворот;
- определение силовых характеристик взаимодействия колес машины с полигоном при установившемся повороте;
- определение траекторий неустановившегося поворота при различных скоростях движения;
- определение углов складывания секций, при которых наблюдается потеря устойчивости машины, совершающей неустановившейся поворот;
- определение предельных углов бокового крена машины, совершающей неустановившейся поворот;
- определение силовых характеристик взаимодействия колес при неустановившемся повороте.

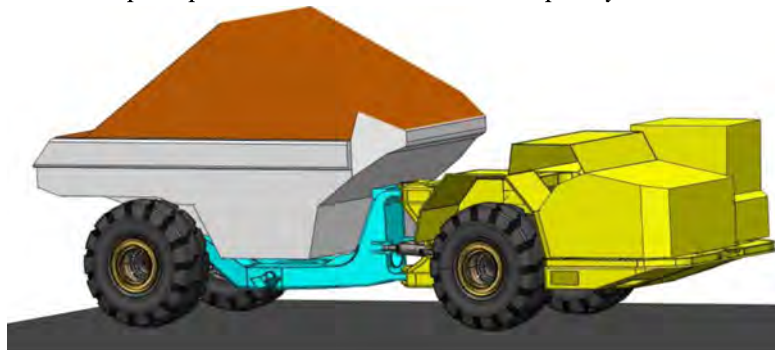


Рисунок 1 – Трёхмерная модель шарнирно-сочлененного самосвала БелАЗ 75800

Модель самосвала состоит из двух полурам, четырёх колёс, передней оси, двух цилиндров и двух поршней гидроцилиндров, виртуальный полигон. Все основные части модели имеют следующие взаимосвязи:

- поворотным шарниром связаны задние колёса с задней полурамой, передние колёса с передней осью, передняя ось с передней полурамой, полурамы между собой, цилиндры и поршни с полурамами;
- цилиндрическим шарниром связаны цилиндр с поршнем;
- контактное соединение определено между всеми колёсами и полигоном, полурамами и полигоном, передней осью и передней полурамой.

Для каждой группы контактов задавались свои коэффициенты трения, жесткости и демпфирования. В модели учтена возможность качания передней оси самосвала во фронтальной плоскости на $\pm 15^\circ$. Управление поворотом осуществляется через изменение положения поршня относительно цилиндра с течением времени (рисунок 2). Скорость движения автомобиля задавалась через угловую скорость вращения каждого колеса.

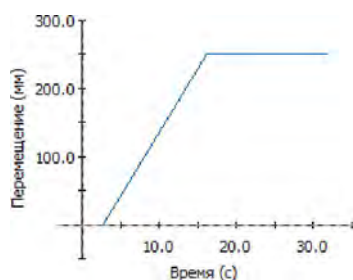


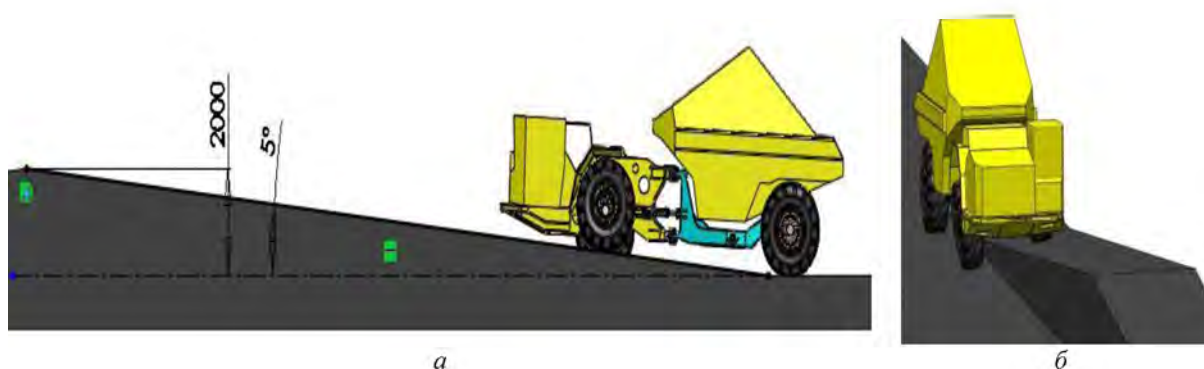
Рисунок 2 - Функция изменения положения поршня относительно цилиндра

Виртуальные испытания проводятся в два этапа. На первом этапе виртуальная модель разгоняется до скоростей 10, 20, 30, 40 км/ч, в момент времени 2.8 с, когда скорости поступательного движения становится постоянной, начинает сжиматься гидроцилиндр. В период времени с 2.8 до 16 с поршень относительно своего первоначального положения сместится на 250 мм, что соответствует максимальному углу складывания секций в 42° , и до конца расчёта остаётся постоянным.

Критерием потери устойчивости на этом этапе будет величина скорости движения машины и её угол складывания в момент отрыва переднего внутреннего колеса. На втором этапе виртуальная модель движется прямолинейно и одной стороной наезжает на уклон в 5° , высотой – 2 м, рисунок 3. Критерием потери устойчивости в этом случае будет угол бокового крена при отрыве заднего внутреннего колеса машины от полигона.

Критерием потери устойчивости на этом этапе будет величина скорости движения машины и её угол складывания в момент отрыва переднего внутреннего колеса.

На втором этапе виртуальная модель движется прямолинейно и одной стороной наезжает на уклон в 5° , высотой – 2 м, рисунок 3. Критерием потери устойчивости в этом случае будет угол бокового крена при отрыве заднего внутреннего колеса машины от полигона.

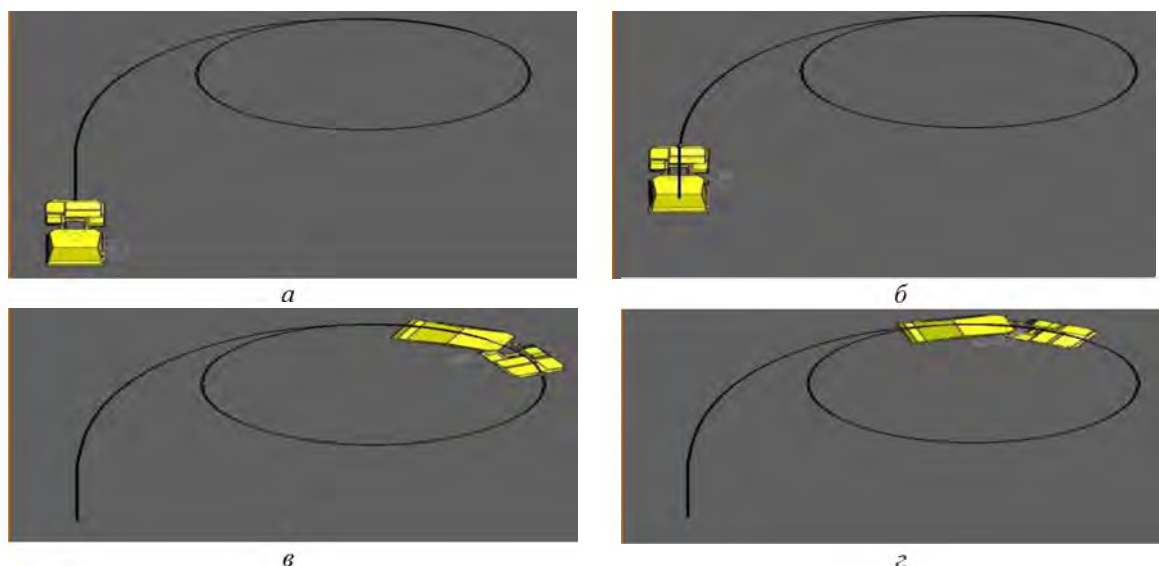


а – вид спереди на модель самосвала, въезжающего на уклон;
б – вид слева на модель самосвала, въезжающего на уклон.

Рисунок 3 – Движение модели самосвала по полигону с уклоном

Результатами виртуальных испытаний маневренности и устойчивости на опрокидывание шарнирно-сочленённого самосвала, проводимых методами виртуального моделирования в пакете SolidWorks Motion, могут быть как в виде таблиц и графиков, так и анимация поведения модели в процессе расчёта.

На рисунке 4 представлены этапы движения модели во время прохождения поворота на скорости 10 км/ч.



а – начало движения; б – вход в поворот; в – начало установившегося поворота; г – конец движения.

Рисунок 4 – Движение модели по полигону

На рисунке 5 представлены этапы движения модели во время прохождения поворота.

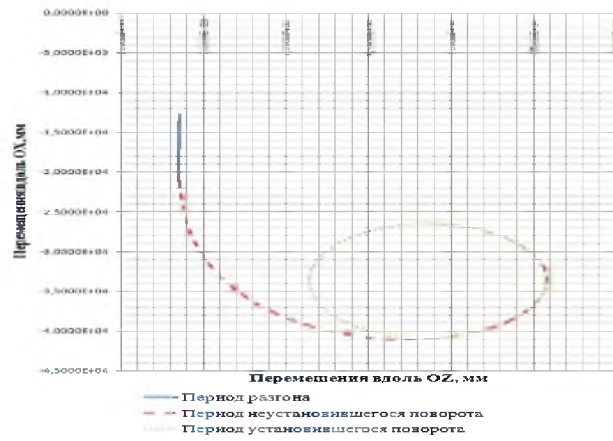


Рисунок 5 - Этапы движения модели

На рис. 6 представлена графическая зависимость контактных сил между каждым колесом машины и испытательным полигоном за период всего движения.

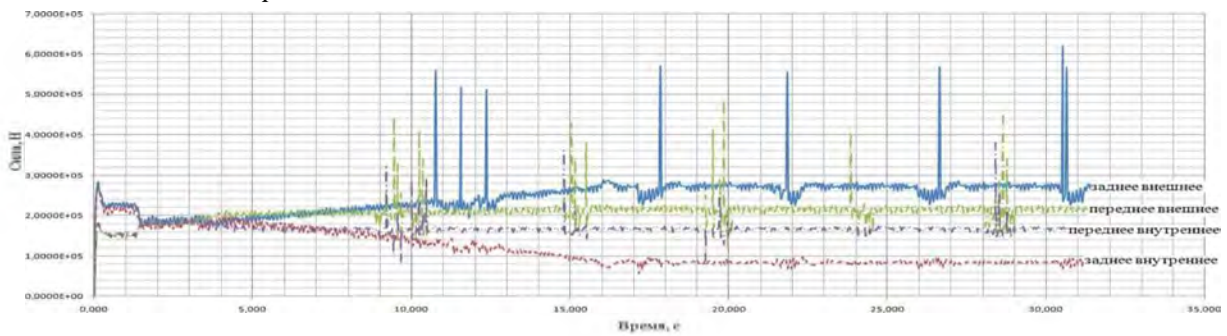
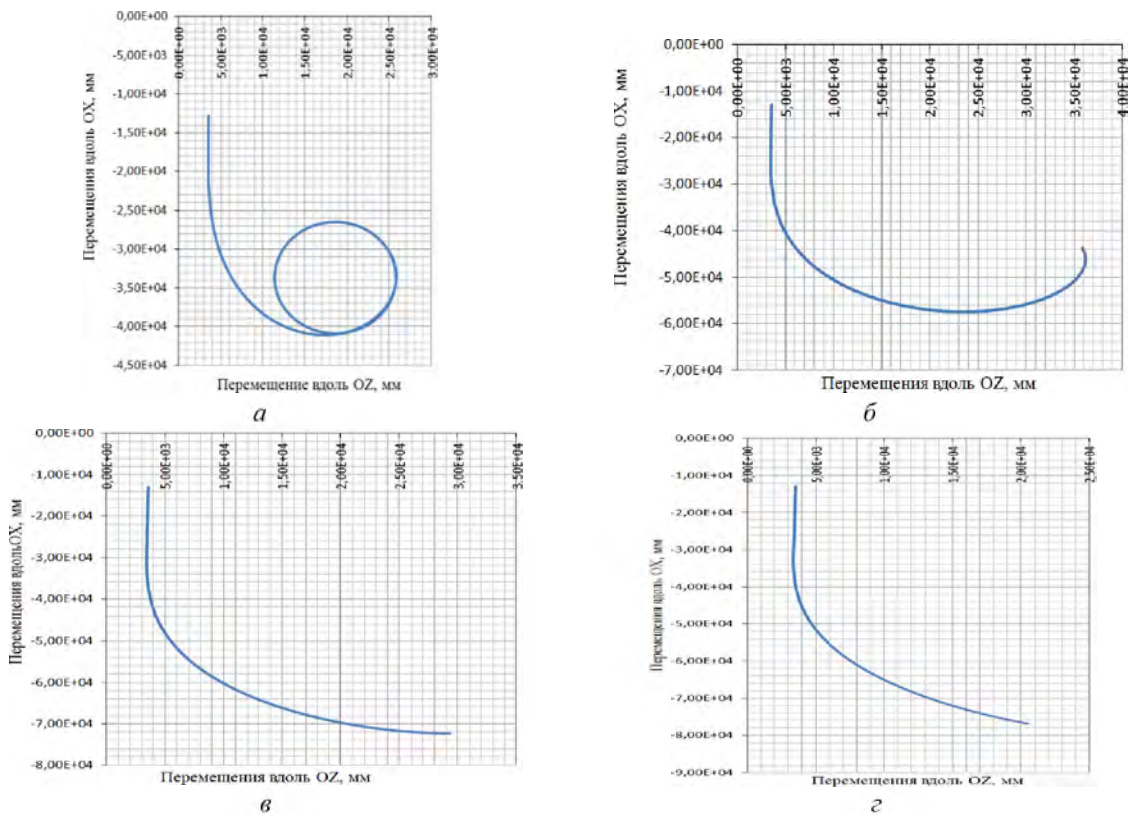


Рисунок 6 – Изменение контактных сил между колесами и полигоном

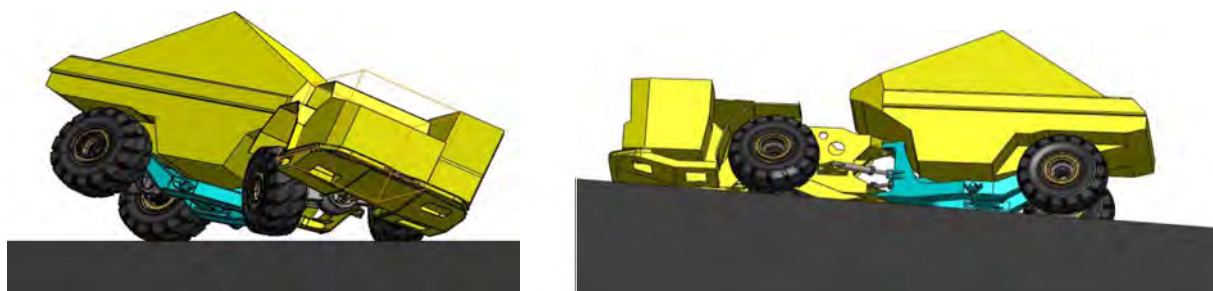
На рис. 7 представлены траектории центральной точки переднего бампера модели при различных скоростях движения.



а - 10 км/ч; б - 20 км/ч; в - 30 км/ч; г - 40 км/ч.

Рисунок 7 – Траектории движения центральной точки переднего бампера модели при различных скоростях движения

При заданной скорости складывания секций, на скорости 10 км/ч, модель самосвала ведёт себя устойчиво и не сходит с траектории входа в поворот, а также с траектории установившегося поворота с радиусом кривизны, равным 8 м (рисунок 7а). Машина теряет устойчивость в фазе входа в поворот на скоростях движения 20, 30 и 40 км/ч (рисунки 7б, в, г и 8а), соответственно, при углах складывания 32.7°, 18° и 12.64°. В случае наезда на препятствие автомобиль теряет устойчивость при угле бокового крена, равном 20° (рисунок 8б).



а – при входе в поворот;

б – при наезде на препятствие.

Рисунок 8 – Потеря устойчивости автомобиля

Заключение. С моделью шарнирно-сочленённого самосвала БелАЗ 75800 были проведены виртуальные испытания в пакете SolidWorks Motion по определению характеристик управляемости и устойчивости машины, совершающей поворот. В ходе исследования были получены: графики траекторий поворота при различных скоростях движения самосвала; значения скоростей и величины углов складывания секций при потере устойчивости во время прохождения поворота; угол бокового крена при потере устойчивости во время наезда автомобиля на препятствие; определены силовые характеристики взаимодействия колес с полигоном при установившемся и неустановившемся повороте. Реализована анимация поведения модели за все время испытаний. Результаты виртуальных испытаний согласуются на качественном и количественном уровнях с данными заводских экспериментальных исследований, а также с результатами, полученными в [1–4]. Использование методов виртуальных испытаний позволяют с большой точностью смоделировать поведение не только серийных, но и перспективных шарнирно-сочленённых самосвалов в обычных и экстремальных условиях, что значительно сокращает объём натурных испытаний, время выпуска и стоимость доводки серийных и проектируемых машин.

Резюме

Описана методика исследования управляемости и устойчивости транспортных средств в пакете SolidWorks Motion. Разработана динамическая модель сочлененного самосвала, с помощью которой посредством виртуальных испытаний определены показатели управляемости и устойчивости движения машины. Приведены результаты виртуальных испытаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурвич, Ю.А. Динамика поворота шарнирно-сочленённой машины с двумя осями / Ю.А. Гурвич, А.Л. Петровский // Научные труды научно-практической конференции учёных МАДИ(ГТУ), РГАУ-МСХА, ЛНАУ. 17-18 июня 2010 г. Том 6. Естественные и технические науки. Москва-Луганск. Издательство МАДИ(ГТУ), РГАУ-МСХА, ЛНАУ. – с. 85-90.
2. Гурвич, Ю.А. Разработка методов описания динамики многоосных и шарнирно-сочлененных машин по критериям управляемости и устойчивости / Ю.А. Гурвич, К.И. Сафронов // Теоретическая и прикладная механика №27. Мн.: 2012, – с. 341-346.
3. Альгин, В.Б. Виртуальное моделирование как способ получения адекватных результатов поперечной и продольной устойчивости транспортных средств / В.Б. Альгин, С.В. Харитончик, А.Н. Колесникович // Сб. Науч. Тр./НИРУП "Белавтотракторостроение" Минск, Беларусь, 2005.
4. Теория движения колёсных машин / Г.А. Смирнов. – М.: Машиностроение, 1990. – 352с.
5. Инженерные расчеты в SolidWorks Simulation / А.А. Алямовский. – М.: ДМК-Пресс, 2010. – 464 с.
6. ГОСТ Р 52302–2004 «Автотранспортные средства. Управляемость и устойчивость. Технические требования. Методы испытания».
7. СТБ ГОСТ Р 52302–2006 «Автотранспортные средства. Управляемость и устойчивость. Технические требования. Методы испытания».
8. ГОСТ 27257–87 (ИСО 7457-83) «Методы определения параметров поворота колесных машин»

Summary

The article describes a technique to study the controllability and stability of the transport vehicles in the package SolidWorks Motion. Developed a dynamic model considered dump truck, which through virtual testing determined for the handling and stability of the car, which would greatly reduce the amount of field tests.

Поступила в редакцию 21.12.2012

РЕФЕРАТЫ

УДК 539.4 Немировский Ю.В., Романова Т.П. **Моделирование динамического деформирования железобетонных круглых и кольцевых пластин** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.3-7.

Разработан общий метод расчета динамической повреждаемости армированных железобетонных круглых и кольцевых пластин в рамках модели жесткопластического материала, учитывающий разные свойства бетона на растяжение и сжатие. В качестве примера построено точное решение динамической задачи по определению предельной нагрузки и остаточных прогибов шарнирно опертой по внешнему контуру кольцевой пластины с центральной жесткой вставкой, под действием распределенной по поверхности нагрузки. Расчеты показывают, что при одинаковом расходе арматуры изменение структуры армирования влияют как на несущую способность таких пластин, так и на степень их остаточной повреждаемости. Ил. 5. Библиогр. – 5 назв.

УДК 539.3 Плескачевский Ю.М., Старовойтова Е.Э. **Изгиб физически нелинейного трехслойного стержня со ступенчато-переменной границей** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.8-15.

Рассмотрен изгиб упругопластического трехслойного стержня со ступенчато-переменной границей одного из несущих слоев. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета стержня приняты гипотезы ломаной нормали. Деформирование материалов несущих слоев описывается соотношениями теории малых упругопластических деформаций, наполнитель – нелинейно упругий. Получена система уравнений равновесия в перемещениях и ее аналитическое рекуррентное решение. Проведен численный анализ решения. Ил. 4. Библиогр. – 10 назв.

УДК 539.3 Буренин А.А., Дудко О.В., Лантвева А.А. **Взаимодействие плоской одномерной волны со свободной границей разномодульного упругого слоя** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.16-21.

Рассматривается решение одномерной задачи с осевой симметрией о движении поперечных ударных волн от цилиндрической полости в нелинейно-упругом несжимаемом пространстве. Применение метода срачиваемых асимптотических разложений приводит к системе двух эволюционных уравнений. Для этих уравнений строится непрерывное решение в виде инвариантов Римана вдоль характеристических направлений. Полученное решение согласуется с возможностью образования двух ударных волн, плоскополяризованной и нейтральной. Ил. 4. Библиогр. – 9 назв.

УДК 539.3 Старовойтов Э.И., Попченко А.В., Тарлаковский Д.В. **Изгиб с растяжением трехслойного термоупругого стержня** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.22-26.

Приведена методика и решение краевой задачи, которые позволяют проводить анализ напряженно-деформированного состояния трехслойного стержня при изгибе в температурном поле. Табл. 2. Ил. 5. Библиогр. – 11 назв.

УДК 612.76+539.37 Чигарев А.В., Борисов А.В. **Использование СКМ «Mathematica» для численного исследования стохастических моделей накопления повреждений в биоматериалах** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.37-30.

В статье рассмотрена предложенная авторами стохастическая модель на основе марковских цепей, описывающая накопление повреждений в элементах опорно-двигательного аппарата человека. Проводится численное решение стохастического уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова в СКМ «Mathematica» и графическая визуализация решения дифференциального уравнения. На основании полученного решения рассчитано среднее время достижения третиной границ сустава. Ил. 2. Библиогр. – 8 назв.

УДК 539.3 Янковский А.П. **Численно-аналитическое моделирование линейного термо-влаго-вязкоупругого поведения просадочных и набухающих грунтов, армированных пространственной георешеткой** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.31-37.

Разработана численно-аналитическая модель линейного термо-влаго-вязкоупругого поведения просадочных и набухающих грунтов, армированных пространственной георешеткой со структурой общего вида, позволяющая в дискретные моменты времени сводить рассматриваемую задачу к термо-влаго-упругой, в рамках которой процедура построения определяющих уравнений уже известна. Ил. 1. Библиогр. – 7 назв.

УДК 531+621.01:531.8 Михасев Г.И., Шейко А.Н. **Исследование свободных колебаний двустенной углеродной нанотрубки, основанное на нелокальной теории ортотропных оболочек** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.38-44.

На основе теории тонких ортотропных оболочек Флорге, а также нелокальной теории Эрингена выведены уравнения движения двустенной углеродной нанотрубки (УНТ), внедренной в упругую среду. Предложена модель УНТ, учитывающая начальные напряжения и влияние окружающей упругой среды. В качестве примера изучена зависимость собственных частот УНТ от ее длины и количество волн в осевом и окружном направлениях. Выполнен анализ собственных форм колебаний двустенной УНТ. Табл. 6. Ил. 1. Библиогр. – 14 назв.

УДК 539.434 Одиноква О.А. **Прочностной предел ползучести вязкоупругих материалов** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.45-51.

На уровне изобретения предлагается метод определения на ранней стадии момента потери несущей способности вязкоупругого материала, различного при растяжении и сжатии. Метод основан на комплексном исследовании процессов деформирования материала в условиях растяжения – сжатия и заключается в определении предельного напряжения $\sigma_{пр}$, величина которого зависит от времени его действия. С увеличением действия нагрузки величина $\sigma_{пр}$ смещается в сторону малых значений напряжений. Табл. 3. Ил. 2. Библиогр. – 7 назв.

УДК 622.9.002.5(075)

Журавков М.А., Коновалов О.Л., Круподеров А.В., Хвесеня С.С., Богдан С.И. **Естественное напряженно-деформированное состояние горного массива вблизи сочленения Кривичского и Листопадовичского тектонических нарушений** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.52-58.

Описан процесс построения геомеханической модели участка пересечения Кривичского и Листопадовичского разломов. Посчитано напряженно-деформированное состояние горного массива, вызванное собственным весом. Выяснено, что напряженное состояние массива с разломами имеет существенные отличия по сравнению с напряженным состоянием в ненарушенном массиве. Табл. 1. Ил. 7. Библиогр. – 5 назв.

УДК 539.3 Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. **Пространственная задача термоупругости для шара** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.59-65.

Строится точное решение трехмерной задачи термоупругости для полого шара. В качестве примера рассматривается сферический купол, основание которого находится в условиях жесткого или скользящего защемления. Табл. 3. Библиогр. – 2 назв.

УДК 539.3 Василевич Ю.В., Сахоненко В.М., Горелый К.А., Малыгин Е.В., Неумержицкая Е.Ю. **Способы и структурная организация тканых материалов при создании композиционных материалов** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.66-68. Изложены способы и дан анализ структурной организации тканых материалов при создании композиционных материалов.

УДК 621.787: 539.319 Сазанов В.П. **Результаты исследований распределения компонент остаточного напряжённого состояния в области наименьшего сечения кольцевого надреза поверхностно упрочнённых деталей сплошного и полого сечений** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.69-74.

Методом конечно-элементного моделирования для поверхностно упрочненных цилиндрических деталей различного диаметра проведено исследование влияния радиуса и глубины надреза на значения осевых остаточных напряжений в наименьшем сечении. Ил. 12. Библиогр. – 4 назв.

УДК 62-50 Левина Г.А., Дрокин В.В., Хлызов И.Е. **Численное моделирование нагрузочных характеристик лепестковых газодинамических опор** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.85-92.

Приведена постановка задачи математического моделирования лепестковых газодинамических опор. Представлено краткое описание алгоритма численного решения упругогидродинамической задачи взаимодействия газового смазочного слоя и упругих оболочек, ограничивающих слой, на плоских моделях. Приведены результаты вычислений нагрузочных характеристик лепестковых газодинамических радиальных и осевых опор при различных значениях конструктивных параметров в созданной программе. Ил. 5. Библиогр. – 9 назв.

УДК 539.3 Куликов И.С., Глембоцкий А.В. **Метод расчета напряженно-деформированного состояния сферического тепловыделяющего элемента ядерного реактора** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.93-99.

Приводится вывод системы уравнений напряженно-деформированного состояния в сферической систем координат. В качестве примера составляется численная схема расчета сферического твэла. Ил. 1. Библиогр. – 5 назв.

УДК 539.3 Миронов Д.Н., Чигарев В.А., Гончаренко В.П. **Исследование совместного воздействия тепловых и силовых нагрузок, приложенных на внешней и внутренней границах** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.100-103.

В работе получены зависимости тензоров напряжений и деформаций на внешних и внутренних границах оболочек от совместных температурных и механических воздействий. Данная задача рассматривается в рамках теории упругости твердого тела. Библиогр. – 6 назв.

УДК 674.055 Аникеенко А.Ф., Бобылев П.С., Вихренко В.С. **Анализ относительного равновесия подвижного сектора деревообрабатывающей фрезы** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.104-108.

Исследованы условия относительного равновесия установленного с помощью соединения типа «ласточкин хвост» подвижного сектора деревообрабатывающей фрезы, несущего режущие элементы. Установлено, что распределение сил взаимодействия сектора и корпуса на начальном и более поздних этапах разгона различно. Показано, что для обеспечения относительного равновесия сектора на начальном этапе необходимы минимальные стопорные устройства, тогда как на более поздних этапах реализуется режим самоторможения. Ил. 2. Библиогр. – 5 назв.

УДК 539.374 Леоненко Д.В. **Локальные нагрузки трехслойных круговых цилиндрических оболочек с упругим наполнителем** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.109-113.

Рассмотрены колебания трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем внутри под действием локальных нагрузок. Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа-Лява. В толстом наполнителе учитывается работа поперечного сдвига и обжатие по толщине, изменение перемещений принято линейным по поперечной координате. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Для упругого наполнителя принята гипотеза Винклера. В качестве примера исследовано изменение перемещений при действии погонных сил. Ил. 4. Библиогр. – 4 назв.

УДК 539.4 Немировский Ю.В., Янковский А.П. **Применение схемы «крест» при численном интегрировании динамических начально-краевых задач для гибких армированных балок-стенок с учетом их ослабленного сопротивления поперечному сдвигу** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.114-122.

В приближении Кармана сформулирована начально-краевая задача динамического деформирования гибких армированных балок-стенок с учетом их ослабленного сопротивления поперечному сдвигу. Показано, что для металлокомпозитных балок учет ослабленного сопротивления поперечному сдвигу при их упругопластическом деформировании обязателен. Проведен качественный анализ разрешающей системы уравнений движения. Продемонстрировано, что в геометрически линейной постановке динамика линейно-упругих балок описывается системой гиперболического типа, поэтому для ее численного интегрирования применение схемы «крест» вполне оправданно, если выполняются необходимые условия устойчивости. В рамках геометрически нелинейной постановки задачи динамики разрешающая система уравнений движения не является гиперболической, поэтому схема «крест» в этой задаче является неустойчивой. Табл. 1. Ил. 5. Библиогр. – 4 назв.

УДК 546.28-121+544.227+004.94 Юхневич А.В., Майер И.А., Усенко А.Е. **К моделированию технологии изготовления кремниевых МЭМС/НЭМС-приборов** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.123-126.

Рассматривается оригинальная компьютерная программа, предназначенная для моделирования на атомном уровне процесса маскированного растворения монокристаллов типа алмаза. Этот процесс является ключевым в технологии изготовления большинства современных и перспективных кремниевых МЭМС/НЭМС-приборов. В основе программы – кинетический метод Монте-Карло и классификация атомов поверхности по числу и типу первых и вторых соседей. Сравнение результатов компьютерных и натуральных экспериментов позволяет уточнить детали процесса растворения кристалла кремния, а также наметить пути совершенствования технологии изготовления миниатюрных кремниевых приборов. Ил. 4. Библиогр. – 4 назв.

УДК 546.28-121+544.227+004.94 Никитин А.В., Шилько С.В. **Оценка влияния остеогенеза на механические свойства пористого титана при сжатии** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.127-129.

Рассмотрено применение пористого титана для повышения функциональных характеристик эндопротезов. Показано, что кинетика деформационно-прочностных свойств пористого титана в процессе остеогенеза является актуальной областью биомеханических исследований. Проведенные испытания на статическое сжатие показали двукратное повышение модуля упругости имплантированного материала в результате заполнения пор костной тканью. Ил. 3. Библиогр. – 11 назв.

УДК 539.3 Буренин А.А., Рагозина В.Е., Иванова Ю.Е. **Об осесимметричной задаче распространения деформаций изменения формы** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.130-134.

В работе обсуждается система эволюционных уравнений поперечных ударных волн деформаций и ее решение в виде инвариантов Римана вдоль характеристических направлений. Библиогр. – 12 назв.

УДК 621.039.54+539.3 Костюк Д.М., Ширвель П.И. **Нелинейное вязкоупругое деформирование пластин при стационарном нагреве и облучении высокоэнергетическими частицами** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.135-141.

Предложена математическая модель поведения тонких пластин с учетом влияния радиационного облучения на примере деформирования прямоугольной пластины из полимерного материала. В работе на основе нелинейного уравнения, описывающего область устойчивой и неустойчивой ползучести, записано уравнение тонких пластин с учетом вязко-упругих деформаций при нестационарном нагреве. Предложены модели НДС пластины различных схемах воздействия и приложенной нагрузки. Показано, что под влиянием радиационной среды происходит существенное изменение механических характеристик пластины. Ил. 10. Библиогр. – 6 назв.

УДК 539.214:539.374 Полоник М.В., Рогачев Е.Е. **Моделирование стационарного течения несжимаемой упругопластической среды в сферическом диффузоре с идеально гладкими стенками** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.142-147.

Рассматривается течение материала в сферическом диффузоре при стационарной упругопластической границе. Построено точное решение задачи в рамках теории больших упругопластических деформаций. Основными принимаемыми допущениями являются предположение об идеальной гладкости стенок и несжимаемости материала. Ил. 2. Библиогр. – 23 назв.

УДК 539.214:539.374 Мелешко И.Н., Пронкевич С.А. **Численное определение частот и форм собственные колебания круглых пластин при неоднородных граничных условиях** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.148-152.

В статье рассматривается решение задач собственных колебаний круглой пластины при неоднородных граничных условиях. Полученные результаты свидетельствуют о том, что распределение спектра собственных частот при различных соотношениях заданных на контуре граничных условий лежит строго между случаями защемления и шарнирного закрепления по всему контуру. При моделировании в системе ANSYS сохраняется некоторое дублирование форм и частот собственных колебаний. Табл. 1. Ил. 4. Библиогр. – 7 назв.

УДК 539.3 Манцыбора А.А., Русанов М.М. **Автомодельная задача деформирования упругопластического полупространства** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.153-159

Приведена постановка одномерной автоматической задачи ударного деформирования полупространства, в рамках модели больших упругопластических деформаций. Получено, что в данной постановке задачи, пластические деформации могут изменяться на двух простых волнах Римана. Из полученных численных расчетов видно, что скорости распространения пластических волн меньше скорости распространения соответствующих им упругих ударных волн. Ил. 8. Библиогр. – 13 назв.

УДК 531/534: [57+61] Славаевич И.Л., Михасев Г.И., Ботогова М.Г. **Собственные частоты реконструированного среднего уха, подвергнутого тимпанопластике и стапедотомии** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.160-166

В данной работе представлена биомеханическая модель реконструированного среднего уха, подвергнутого тимпанопластике и стапедотомии. Изучено влияние тангенциальных перемещений в тимпанальной мембране на собственные частоты и формы колебаний реконструированного среднего уха в случае наличия двух степеней свободы тотального протеза. Реконструированная тимпанальная мембрана моделируется как упругая изотропная кольцевая пластинка. Табл. 5. Ил. 3. Библиогр. – 9 назв.

УДК 539.434 Холодарь Б.Г. **Долговечность материала при сложном напряженном состоянии и переменных нагрузках** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.167-172

Кинетические уравнения развития поврежденности применены к вопросу о связи долговечности материала с его напряженным состоянием. Поврежденность рассматривается как сумма гидростатической и девиаторной компонент. Проведена обработка экспериментальных данных для жесткого поливинилхлорида при напряжениях, постоянных во времени. Уравнения используются для описания накопления поврежденности при других режимах нагружения. Построены поверхности долговечности для рассмотренных режимов. Ил. 5. Библиогр. – 6 назв.

УДК 621.01 Авсиевич А.М., Пронкевич С.А., Бальшева Н.О., Хват А.В., Иванов А.Ю. **Моделирование нагруженности элементов вращательных кинематических пар** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.173-177

Описаны математический аппарат и программа расчета распределения напряжений по поверхностям вращательных кинематических пар на основе динамического анализа механизма. Результаты расчета позволяют определить работу сил трения на локальных участках поверхностей, выявлять участки, наиболее подверженные износу, исследовать влияние режимов работы, геометрических и массовых характеристик звеньев, свойств материалов на нагруженность изнашиваемых поверхностей и КПД механизма. Ил. 5. Библиогр. – 4 назв.

УДК 539.3:621.22 Водка А.А., Степченко А.С., Трубаев А.И. **Исследование напряженного состояния и ресурса болтовых соединений рабочих колес гидротурбин на переходных режимах** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.178-184

В работе построены конечно-элементные модели болтового соединения рабочего колеса гидротурбины и с их помощью проведен расчет напряженного состояния. На основе проведенных расчетов дана оценка ресурса. Ил. 5. Библиогр. – 18 назв.

УДК 539.3: 678.073:661.481 Шилько С.В. **Мезомеханика биотканей и полимерных композитов технического и медицинского назначения** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.184-189

С использованием мезомеханического описания и оригинальных экспериментальных методов проведены исследования композитов, как физически нелинейных и структурно-неоднородных деформируемых тел. На основе моделей пористых, гранулированных и дисперсно-армированных материалов разработан двухуровневый метод анализа напряженно-деформированного состояния элементов конструкций и контактных сопряжений, предложены оптимальные составы полимерных композитов технического и медицинского назначения, диагностические технологии для медицины и спорта. Исходя из биомеханических аналогий и анализа явлений деформирования, разрушения и контактного трения, рассматривается возможность создания адаптивных материалов и конструкций. Прогнозируются процессы ремоделирования и актуации биологических тканей, эффекты самосборки наноразмерных ауксетиков и упрочнения фрикционных соединений на их основе. Ил. 2. Библиогр. – 11 назв.

УДК 539.3: 678.073:661.481 Шилько С.В. **Мезомеханика биотканей и полимерных композитов технического и медицинского назначения** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.184-188

С использованием мезомеханического описания и оригинальных экспериментальных методов проведены исследования композитов, как физически нелинейных и структурно-неоднородных деформируемых тел. На основе моделей пористых, гранулированных и дисперсно-армированных материалов разработан двухуровневый метод анализа напряженно-деформированного состояния элементов конструкций и контактных сопряжений, предложены оптимальные составы полимерных композитов технического и медицинского назначения, диагностические технологии для медицины и спорта. Исходя из биомеханических аналогий и анализа явлений деформирования, разрушения и контактного трения, рассматривается возможность создания адаптивных материалов и конструкций. Прогнозируются процессы ремоделирования и актуации биологических тканей, эффекты самосборки наноразмерных ауксетиков и упрочнения фрикционных соединений на их основе. Ил. 2. Библиогр. – 11 назв.

УДК 536.24 Конон П.Н., Докукова Н.А. **Исследования нестационарных процессов тепло и массопереноса в двухслойных дымовых трубах** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.189-194

Построена модель совместного нестационарного тепло-и массопереноса в конструкциях двухслойных дымовых труб, работающих в пульсирующем тепловом режиме. Численным расчетом найдено поле температур и влаги. Определена интенсивность конденсации на внутренней поверхности футеровки, проведен расчет пленки конденсата Ил. 6. Библиогр. – 5 назв.

УДК 539.3 Буренин А.А., Дудко О.В., Латтева А.А., Чигарев А.В., Шукевич Т.В., Ручан М.В. **Взаимодействие плоской одномерной волны со свободной границей разномодульного упругого слоя** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.195-200

Исследуются особенности распространения граничных возмущений в изотропной упругой среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию. На примере нестационарной краевой задачи об отражении плоских одномерных волн нагрузки и разгрузки от свободной границы разномодульного упругого слоя показано, что решения, полученные в рамках кусочно-линейной модели деформируемой среды, существенно отличаются от известных результатов линейной теории упругости. Ил. 4. Библиогр. – 9 назв.

УДК 621.865 Громыко О.В., Царёва А.А. **Исследование кинематики манипулятора в аппарате кватернионов и их дуальных аналогов** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.201-207

Проведена постановка задачи об исследовании кинематики манипулятора в аппарате кватернионов и их дуальных аналогов на примере промышленного робота-манипулятора семейства Fanuc. Ил. 1. Библиогр. – 3 назв.

УДК 539.4 Романова Т.П., Янковский А.П. **Численное интегрирование задачи динамики неупругих изгибаемых стержней на двухпараметрическом упругом основании** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.208-215

Сформулирована задача упругопластического динамического изгиба стержней на упругом двухпараметрическом основании. Разработан метод численного интегрирования поставленной задачи, основанный на обобщении методов Рунге – Кутты. Эффективность предлагаемой численной процедуры продемонстрирована на расчетах неупругой динамики изотропных стержней постоянного и переменного поперечного сечения. Проведен анализ полученных результатов. Табл. 5. Ил. 3. Библиогр. – 12 назв.

УДК 004.9.005.53 Василевич Ю.В., Штургалова М.Ю., Сатешко В.В. **Оптимизационная модель процесса дробления калийных руд** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.216-218.

Построены аналитические выражения, описывающие зависимость между основными параметрами процесса дробления калийных руд. Установлены оптимальные значения удельной потребляемой мощности для различных оборотов ротора дробилки. Сравнив оптимальные значения, полученные экспериментальным путём с опытными данными можно сделать заключение о том, что модель адекватно и достоверно описывает процесс дробления. Табл. 4. Ил. 1. Библиогр. – 2 назв.

УДК 539.3 Мармыш Д.Е. **Граничноэлементное моделирование напряженно-деформированного состояния статически неопределимой балки** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.219-223.

Проведено исследование напряженно-деформированного состояния балки жестко закрепленной по обоим концам. Решения построены на основе методов сопротивления материалов и с помощью численно-аналитического метода граничных элементов. Проведено сравнение полученных решений. Описаны особенности распределения полей напряжений в балке при аналитическом и численном моделировании. Ил. 6. Библиогр. – 5 назв.

УДК 681.3 Анципович П.П., Акулич В.К., Дубовская Е.М. **Кинестатический силовой анализ манипулятора с 4 степенями свободы** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.224-227.

В статье применительно к манипулятору с 4 степенями свободы рассматривается задача определения динамических нагрузок в кинематических парах (реактивных сил и моментов), а также движущих (управляющих) сил и моментов приводных двигателей, необходимых для осуществления программного движения схвата. Ил. 2. Библиогр. – 4 назв.

УДК 621.835-41:514.764 Скойбеда А.Т., Жуковец В.Н. **Колесно-шагающие движители для транспортного средства высокой проходимости** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.228-233.

Описаны преимущества в тяге и проходимости экспериментального образца колесно-шагающего движителя перед колесом. С целью улучшения характеристик ходовой системы выполнено обоснование принципиальной схемы колесно-шагающего движителя другого типа, предназначенного для совместной работы с уже разработанным образцом. Дана методика расчета основных параметров разрабатываемого движителя. При проведении расчетов применяются методы дифференциальной геометрии. Ил. 3. Библиогр. – 5 назв.

УДК 624.131+539.215 Алтынбеков Ш.А. **Основное уравнение консолидации засоленных земляных сред** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.234-236.

На основе законов неразрывности жидкой и твердой фаз, уравнения баланса для газообразной фазы, закона Генри и Дарси-Герсеванова, а также, предполагая, что растворенная соль (солевой раствор) движется с водой, а пена газа и нерастворенная соль движется с твердой фазой получено основное уравнение консолидации засоленных земляных сред. Ил. 1.

УДК 621.835-41:514.764 Кулешов Р.А., Сабиров Н.М., Ширвель П.И. **Изгиб балки в условиях неравномерного нагрева и нейтронного облучения** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.237-243.

В работе на основе классических подходов механики и современных численных методов предложена теория и практика расчета объемных и необратимых деформаций при механических и немеханических условиях нагружения для структурных элементов типа балка. Приведены формулы учета неоднородного термического расширения и радиационного распухания. На примере тестового расчета было показано влияние механических и немеханических факторов на изгиб модели массивной балки. Создана универсальная основа для решения подобных задач в программном пакете MathCAD 15.0, где реализована возможность, изменения свойств материала и геометрии исследуемого образца, поперечного сечения, значения внешних факторов сразу получить достоверную информацию о перемещениях точек ТВС, а также возникающих деформациях и напряжениях конструкции. Ил. 7. Библиогр. – 4 назв.

УДК 621.865+681.5 Бахмутский Ю.А., Громыко О.В. **Моделирование и программирование роботизированного комплекса на базе FANUC в пакете ROBOGUIDE** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.244-247.

Используется комбинированный метод компьютерного моделирования на основе пакета программ Fanuc Roboguide для симуляции и анализа роботизированных комплексов. Дополнительное преимущество рассматриваемого подхода заключается в параллельном создании программ для контроллеров роботов. Эти программы могут использоваться в реальных технологических процессах, основывающихся на использовании смоделированного робототехнического оборудования. Ил. 4. Библиогр. – 4 назв.

УДК 539.3 Мелешко И.Н., Пронкевич С.А. **Потеря устойчивости круглой пластины при неравномерном нагружении** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.248-252.

В данной работе рассматривается задача потери устойчивости неравномерно нагруженной круглой пластины. Для задачи о потере устойчивости круглой пластины при неравномерных граничных условиях, аналитическое решение найти весьма затруднительно и решений данной задачи известно гораздо меньше. В статье получено численное решение задачи потери устойчивости круглой пластины для неравномерных граничных условий. Ил. 7. Библиогр. – 5 назв.

УДК 621.762.4.539 Хмелев А.А., Реут Л.Е. **Оценка состояния локально деформированных зон металлических конструкций по результатам измерения твердости** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.253-255.

Предложен метод оценки состояния локально деформированных зон металлических конструкций по значению уровней предварительной пластической деформации и оставшегося запаса пластичности, определяемых по результатам измерения в этих зонах твердости по Бринеллю. Библиогр. – 2 назв.

УДК 539.19 Лемза А.О., Мурашкин Е.В. **Ротационное движение упругоползучего материала** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.256-258.

Рассматривается деформирование упругоползучей среды между двумя жесткими коаксиальными цилиндрами при повороте одного из них. Решение строится в рамках модели больших упругоползучих деформаций. Библиогр. – 11 назв.

УДК 629.113 Петровский А.Л., Пронкевич С.А., Мартыненко И.М. **Использование нелинейной модели материала при расчете в системе ANSYS напряженного состояния лопатки ускорителя центробежно-ударной дробилки** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.259-264.

В статье рассматривается применение нелинейной модели материала для расчета напряженного состояния деталей центробежной ударной дробилки в системе ANSYS. Приводится сопоставление результатов расчета с использованием линейной и нелинейной моделей материалов. Табл. 1. Ил. 10. Библиогр. – 6 назв.

УДК 621.762.4 Дудяк А.И., Хмелев А.А., Сахнович Т.А., Гурковская О.И. **Нормальные напряжения при плоском изгибе прямого стержня, возникающие в результате надавливания волокон друг на друга** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.265-267.

Доказать возникновение нормальных напряжений в продольных сечениях бруса в результате надавливания волокон друг на друга при плоском изгибе двухпорной балки прямоугольного сечения, нагруженной сосредоточенной силой в середине пролета. Ил. 3. Библиогр. – 3 назв.

УДК 538.913 – 022.532:539.32 Репченко В.И., Назорный Ю.Е., Насань О.А. **Упругие модули и силовые постоянные** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.268-273.

Обсуждается проблема эквивалентности упругой сплошной среды Гука и ее дискретного аналога. Рассмотрен простейший случай гипотетического кристалла с плоской квадратной решеткой Браве и установлены аналитические зависимости модуля Юнга и коэффициента Пуассона, то есть двух упругих характеристик, от четырех силовых постоянных определяющих взаимодействие атомов в квадратной ячейке. Ил. 4. Библиогр. – 10 назв.

УДК 539.4 Мартыненко Т.М. **Определение формы меридиана оболочек вращения, деформируемые без изменения кривизны заданной внешней нагрузкой** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.274-276.

Рассмотрим оболочку вращения постоянной толщины, следующие гипотезам Кирхгофа-Лява, и деформируемые постоянным давлением $p = \text{const}$. Показана необходимость учета уравнений совместности деформаций при определении безизгибной формы меридиана. Библиогр. – 2 назв.

УДК 539.3 Али М. Абед Аль-Зобайде, Чigareва Ю.А. **Стационарное распределение температуры в слоистых цилиндрических и сферических телах** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.277-279.

В статье рассматривается расчет температуры при моделировании многослойной структуры, имеющей неидеальный контакт между слоями. Неидеальный контакт между слоями задается различными функциями неоднородности. В статье показано, каким образом изменяется температура. Ил. 4. Библиогр. – 3 назв.

УДК 539.377 Дац Е.П., Мурашкин Е.В. **Необратимое деформирование тонкой пластины вследствие локального нестационарного теплового воздействия** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.280-285.

Решена задача о формировании остаточных напряжений в тонкой пластине из упругопластического материала при заданном тепловом воздействии. Построены графики полей остаточных напряжений и перемещений. Ил. 4. Библиогр. – 9 назв.

УДК 539.3 Щербаков С.С. **Взаимодействие системы n деформируемых тел** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.286-293.

Рассматривается задача определения механического состояния системы n взаимодействующих тел с различными механическими свойствами. Набор граничных условий для каждого из тел системы определяется характером их взаимодействия. Для многоэлементной системы твердых тел предложена система разрешающих интегральных уравнений, которые могут быть применены для определения нормальных и

касательных усилий на поверхности каждого тела, а также напряженно-деформированного состояния его внутренней области. Такая система может быть также применена для моделирования нелинейного поведения тела путем выделения подобластей тела с разными упругими свойствами. Решение данной системы позволяет исследовать прямой и обратный эффект для трибофатической системы, состоящей из более чем двух элементов. Пример расчета изменения контактного давления под влиянием неконтактной нагрузки в силовой системе ролик / вал. Ил. 2. Библиогр. – 7 назв.

УДК 539.3 А.В. Круподеров, Щербачков С.С. Решение некоторых динамических задач теории упругости методом граничных элементов // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.294-300.

В статье приводятся решения динамических задач теории упругости методом граничных элементов. Представлены примеры расчетов и их сравнение с аналитическими решениями. Построены решения с учетом вязкоупругого поведения среды. Представлено прикладное решение задачи для удара по лезвию ножа комбайна. Ил. 6. Библиогр. – 6 назв.

УДК 531.8 Горбач Н.И., Гурвич Ю.А., Крайник Д.А., Штургалова М.Ю. О движении тяжелого тела в сопротивляющейся среде, брошенного под небольшим углом к горизонту // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.301-309.

Анализ двух способов интегрирования дифференциальных уравнений движения показывает, что более доступным для понимания является способ решения задачи в декартовых осях. Рассмотрен числовой пример, в результате чего определены основные параметры траектории полета снаряда и построены траектории для различных углов наклона ствола орудия к горизонту. Ил. 3. Библиогр. – 5 назв.

УДК 539.3 Рагозина В.Е., Иванова Ю.Е. Эволюционное уравнение для нестационарных процессов изменения формы одномерных поперечных ударных волн, созданных краевыми условиями общего вида // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.310-316.

В работе обсуждается эволюционное уравнение ударных волн поперечных деформаций и его частные решения для различных краевых условий на нагружаемой границе несжимаемого изотропного полупространства. Библиогр. – 13 назв.

УДК 621.81 Кануста П.П., Швец И.В. Разработка перспективных несущих конструкций пневмоподвесок грузовых автомобилей // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.317-321.

Представлены трехмерные модели прямолинейных, криволинейных и штамповарных опор, рекомендации по улучшению конструкции базовой штамповарной опоры и предложена новая модель опоры. Также представлены перспективные модели опор пневмоподвесок, разработанные на основе конструкций мировых лидеров. Ил. 16. Библиогр. – 6 назв.

УДК 539.3 Щербатюк Д.А., Янковский А.П. Верификация структурных моделей пространственно-армированных пенопластмасс и сотовых наполнителей сэндвич-панелей на основе проведения численных экспериментов // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.322-327.

Проведено сравнение эффективных упругих постоянных пенопластмассовой среды, армированной в виде сотовых ячеек, и сотового наполнителя трехслойных панелей, определенных на базе разных структурных моделей, с результатами эталонных расчетов, выполненных на основе конечно-элементного моделирования. Показано неудовлетворительное согласование этих структурных моделей с результатами численного эксперимента. Табл. 2. Ил. 2. Библиогр. – 14 назв.

УДК 517.52 Акимов В. А., Новиков А.А. О разложении функций в квазиортогональные ряды // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.327-328.

В работе вводится понятие квазиортогональных рядов. Приводится численный пример разложения гладкой функции в квазиортогональный ряд методом наименьших квадратов. Ил. 1. Библиогр. – 1 назв.

УДК 539.3 Василевич Ю.В., Сахоненко В.М., Горелый К.А., Малютин Е.В., Неумержицкая Е.Ю. Решение научно-технических проблем при формовании оболочек на гибких оправках // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.328-331.

Дано научное обсуждение решения проблем при разработке и создании оболочек из композиционных материалов.

УДК 629.113.073 Петровский А.Л., Гурвич Ю.А., Сафронов К.И. применение методов виртуального моделирования при исследовании управляемости и устойчивости движения шарнирно-сочлененных машин // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28. 2013. С.332-335.

Описана методика исследования управляемости и устойчивости транспортных средств в пакете SolidWorks Motion. Разработана динамическая модель сочлененного самосвала, с помощью которой посредством виртуальных испытаний определены показатели управляемости и устойчивости движения машины. Приведены результаты виртуальных испытаний. Ил. 8. Библиогр. – 8 назв.

ABSTRACTS

UDC 539.4

Nemirovsky Yu.V., Romanova T.P. Modeling of the dynamic deformation of reinforced concrete circular and circular plates // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.3-7.

A general method of calculation of the dynamic damageability of reinforced concrete circular and annular plates in the framework of the model of rigid-plastic material, taking into account the different properties of concrete in tension and compression, is developed. As an example, the exact solution for the dynamic problem of the definition of limit load and final deflections of the hingedly supported annular plate with central rigid insert, under the influence of the load distributed on the surface of plate, is built. Calculations show that changing the structure of reinforcement with the same amount of reinforcement affect the carrying capacity of such plates, and on the degree of their final damage. Fig. 5. Ref.: 5 titles.

UDC 539.3

Pleskachevski U.M., Starovoitova E.E. The bending of three-layer elastic-plastic beam with stepped variable thickness // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.8-15.

The bending of three-layer elastic-plastic beam with stepped variable thickness of one of two stiff shells is considered. To describe kinematics of asymmetrical over thickness core pack the hypotheses of the broken normal are accepted. Stiff shells deformation is circumscribed by correlations of small elastic-plastic deformations theory, filler is elastic nonlinear. A system of equilibrium equations and its analytical iterative solution in terms of displacements have been derived. Numerical results were adduced. Ref.: 10 titles.

UDC 539.3

Burenin A.A., Dudko O.V., Lapteva A.A. The interaction of a plane one-dimensional wave with the free boundary of the multimodulus elastic layer // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.16-21.

Features of the propagation of boundary perturbations in an isotropic elastic media with different resistance to tension and compression are studied. On example of boundary problems about the reflection of the plane one-dimensional wave of loading and unloading from the free boundary of the multimodulus elastic layer it is shown, that solutions obtained in the framework of piecewise-linear model of a deformable medium are quite different from the known results of the linear theory of elasticity. Fig. 4. Ref.: 9 titles.

UDC 539.3

Starovoitov E.I., Pochepko A.V., Tarlakovski D.V. The bending with tension of three-layer elastic beam in a temperature field // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.22-26.

The bending with tension of three-layer elastic beam in a temperature field is considered. To describe kinematics of asymmetrical over thickness core pack the hypotheses of the broken normal are accepted. A system of equilibrium equations in terms of displacements has been derived. Analytical deciding a problem are received and their numeric analysis are conducted. Tab.: 2. Fig. 5. Ref.: 11 titles.

UDC 612.76+539.37

Chigarev A.V., Borisov A.V. the use of the computer mathematics system «Mathematica» for numerical research of stochastic models of damage accumulation in biological materials // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.37-30.

The work deals with the proposed by the authors stochastic model based on Markovian chains which describes damage accumulation in the elements of a human locomotorium. The numerical solution of Fokker-Plank-Kolmogorov equation in the computer mathematics system “Mathematica” and the graphical visualization of the obtained solution are carried out. On the basis of the obtained solution the average time of achieving the joint-border by the crack is calculated. Fig. 2. Ref.: 8 titles.

UDC 539.3

Yankovskii A.P. Numerically-analytical modelling of linear thermo-moisture-viscoelastic behaviour the subsidence and swelling soils reinforced by the space geolattice // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.31-37.

The numerically-analytical model of linear thermo-moisture-viscoelastic behaviour the subsidence and moisture soils reinforced by the space geolattice with structure of a general view is developed, allowing during the discrete moments of a time to reduce an observed problem to thermo-moisture-elastic within the limits of which procedure of construction of the governing equations is already known. Fig. 1. Ref.: 7 titles.

UDC 531+621.01:531.8

Mikhasev G.I., Sheiko A.N. Studying free vibrations of two-walled carbon nanotube based on the nonlocal theory of orthotropic shells // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.38-44.

On the basis of Flügge theory for thin orthotropic shells and the non-local theory of Eringen, governing equations of motion of a two-walled carbon nanotube (CNT) embedded in an elastic medium have been derived in this paper. The proposed model of a CNT allows taking into account initial stresses and influence of a surrounding elastic medium. As an example, the dependence of natural frequencies of the CNT on its length and a number of waves in the axial and circumferential directions has been studied. The analysis of the two-walled CNT eigenmodes has been performed. Tab.: 6. Fig. 1. Ref.: 14 titles.

UDC 539.434

Odinokova O.A. Tensile creep viscoelastic // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.45-51.

At the level of the invention, a method for determining the early time of the loss of bearing capacity of the viscoelastic material, different in tension and compression that occurred. The method is based on a comprehensive study of the processes of deformation of the material under tension - compression and is determining σ_{pr} stress limit, which depends on the time of action. With the increase of the load value σ_{pr} shifted toward smaller values of voltage. Tab.: 3. Fig. 2. Ref.: 7 titles.

UDC 622.9.002.5(075)

Zhuravkov M.A., Kononov O.L., Krupoderov A.V., Hvesenya S.S., Bogdan S.I. Nature stress-strain state of rock massif in region of intersection of Krivichi's and Listopadovichi's faults // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.52-58.

The process geomechanical model creation in the region of Listopadovichi's and Krivichi's tectonic breaches intersection is described in this paper. The stress-strain state of rock massif caused by gravity was calculated and analyzed. It was stated that stress-strain state of massif with faults has essential differences as compared with stress-strain state of massif without faults. Tab.: 1. Fig. 7. Ref.: 5 titles.

UDC 539.3

Gurjyanov N.G., Tuleneva O.N. **Spatial three-dimensional problem of thermoelasticity for a sphere** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.59-65.

Exact solution of three-dimensional problem of elasticity theory for a spherical shell located in temperature pattern, is developed. Spherical cap the basal part of which is located in terms of rigidly or gliding fixing, is considered as an example. Tab.: 3. Ref.: 2 titles.

UDC 539.3

Vasilevich U.V., Sahonenko V.M., Gorelyi K.A., Malyutin E.V., Neumerzhickaya E.Y. **Methods and the analysis of the structural organization of woven fabrics to create composites** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.66-68.

Set out the methods and the analysis of the structural organization of woven fabrics to create composites.

UDC 621.787: 539.319

Sazanov V.P. **The results of residual strained state components distribution investigation in the circular cut area of surface hardened solid and hollow parts** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.69-74.

By FEM modeling the axial residual stresses distribution regularity of surface treatment cylindrical details of various diameters at infliction of different radius and depth notches is researched. It is shown that with diameter rising of treatment detail stratification depth of residual stresses maximum is moving deep. Fig.12. Ref.: 4 titles.

UDC 62-50

Levina G.A., Drokin V.V., Khlizov I.E. **Numerical modeling of load characteristics for multi-leaf bearings with gas lubrication** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.85-92.

The statement of a problem of mathematic modeling for multi-leaf bearings with gas lubrication is described. The short summary of strategy for numerical solution of the hydro elasticity problem of interaction between gas layer and elastic shells, which restrict the layer, on two dimensional model is presented. The results of the computing of the load characteristics for multi-leaf gas dynamic radial and axial bearings due to different values of design factors with the use of created application program are shown. Fig. 5. Ref.: 9 titles.

UDC 539.3

Kulikov I.S., Glembofskij A.B. **The method of analysis the stress-strain state of the spherical fuel element of a nuclear reactor** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.93-99.

The deduction of the equations of the stress-strain state in spherical coordinates is presented. As an example, the numerical scheme for the calculation for a spherical fuel element is drawn up. Ref.: 5 titles. Fig. 1. Ref.: 5 titles.

UDC 539.3

Mironov D.N., Chigarev V.A., Goncharenko V.P. **Issledovanie of joint influence of the thermal and power loadings enclosed on external and internal borders** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.100-103.

In work dependences тензор pressure and deformations on external and internal borders of covers from joint temperature and mechanical influences are received. The given problem is considered within the limits of the theory of elasticity of a firm body. Ref.: 6 titles.

UDC 674.055

Anikeenko A. F., Bobylev P. S., Vikhrenko V. S. **Analysis of relative equilibrium of the movable sector of a woodworking rotary cutter** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.104-108.

The conditions of relative equilibrium of the movable sector of a woodworking rotary cutter are investigated. The dovetail is used to connect the sector to the cutter frame. It is found that there are two different sector-frame interaction force distributions on the initial and the successive time intervals during cutter speeding up. On the initial stage a minimal blocking device is necessary to ensure relative equilibrium of the sector with respect to the frame, while on the latter stage the conditions of self blocking are realized. Fig. 2. Ref.: 5 titles.

UDC 539.374

Leonenko D.V. **Local loading of the three-layered circular cylindrical shell with elastic filler** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.109-113.

The vibrations of the three-layered cylindrical shell with elastic filler under local load are considered. Kirchhoff-Love's hypotheses are accepted for the thin isotropic bearing layers. The work of the in-plane shear, compression over thickness and variations in displacements are taken linear along the transverse coordinate for the thick filler the conditions of displacement continuity are not used on the contact boundaries. Reaction of the elastic filler is described in terms of the Winkler model. The investigation of variations in displacements under action of linear forces is given as an example. Fig. 4. Ref.: 4 titles.

UDC 539.4

Nemirovskii Yu.V., Yankovskii A.P. **Application of the «cross» scheme for a numerical integration of the dynamic of the initial-boundary problems for flexible reinforced beams-panels with regard to their weakened resistance to in-plane shear** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.114-122.

It is formulated the initial-boundary problem of the dynamic deformation of a flexible reinforced beams-panels with regard to their weakened resistance of the transverse shear in the approximation of Karman. It is shown that in elastoplastic deformation of metal-composite beams it is necessary to take into account the weakened resistance to in-plane shear. A qualitative analysis of the governing system of equations of motion is performed. It is demonstrated that in the geometrically linear formulation the dynamics of the linear-elastic beams is described by a system of hyperbolic type, so for the numerical integration of the application of the «cross» scheme is quite justified if it meets necessary conditions of stability. In the framework of the geometrically nonlinear formulation of a problem of the dynamics the governing system of equations of motion is not hyperbolic, so in this task the «cross» scheme is unstable. Tab.: 1. Fig. 5. Ref.: 4 titles.

UDC 546.28-121+544.227+004.94

Yukhnovich A.V., Mayer I.A., Usenka A.E. **Towards simulation technology of manufacturing silicon MEMS / NEMS devices** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.123-126.

The paper considers an original computer program designed to simulate at the atomic level the process of diamond crystal etching with chemical masking. This process is a key technology in the manufacture of most modern and advanced silicon MEMS / NEMS devices. At the heart of the program - a kinetic Monte Carlo method and the classification of the surface atoms on the number and type of the first and second neighbors. Comparison of the results of computer and real experiments enables us to refine the details of the silicon crystal dissolution process, and identify ways to improve the technology of miniaturized silicon devices. Fig. 4. Ref.: 4 titles.

UDC 546.28-121+544.227+004.94

Nikitin A.V., Shilko S.V. Improvement of functional characteristics of endoprostheses // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.127-129.

Using of porous titanium for the improvement of functional characteristics of endoprostheses is considered. It's shown that kinetics of deformational and strength properties of porous titanium under osteogenesis process is an actual topic of biomechanics. The compression tests performed allows us to note twice increasing of implanted material's Young modulus due to bone tissue ingrowth. Fig. 3. Ref.: 11 titles.

UDC 539.3

Burenin A.A., Ragozina V.E., Ivanova Yu.E. **About the propagation of axisymmetric shape change deformations** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.130-134.

The evolution equations system of transverse shock waves and its solution in the form of the Riemann invariants along characteristic directions are discussed. Ref.: 12 titles.

UDC 621.039.54+539.3

Kostiuk D.M., Shyrvel P.I. **A mathematical model of the behavior of thin plates with the influence of nuclear radiation** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.135-141.

A mathematical model of the behavior of thin plates with the influence of radiation exposure was propounded on the example of a rectangular polymerplate deformation. Based on a nonlinear equation describing the areas of stable and unstable creep was recorded the equation of thin plates considering the viscoelastic deformation under unsteady heating. The models of stress state of plate under the different impact schemes and the applied load was propounded. It is shown that under the influence of radiation the mechanical properties of the plate is change. Fig. 10. Ref.: 6 titles.

UDC 539.214:539.374

Polonik M.V., Rogachev E.E. **Simulation of steady-state flow of an incompressible elastic-plastic medium in a spherical diffuser with a perfectly smooth walls** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.142-147.

The flow of material in a spherical diffuser at stationary elastic-plastic boundary is examined. An exact solution of the problem in the framework of the theory of large elastic-plastic deformations is found. The basic allowed assumptions are the assumption of perfect smoothness of the walls and the incompressibility of the material. Fig. 2. Ref.: 23 titles.

UDC 539.214:539.374

Meleshko I.N., Pronkevich S.A. **Numerical determination of the frequencies and modes of vibrations of a circular plate at the inhomogeneous boundary conditions** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.148-152.

The article deals with the tasks of natural oscillations of a circular plate with inhomogeneous boundary conditions. The results indicate that the distribution of the spectrum of frequencies for different ratios given boundary conditions on the contour lies strictly between the cases of entrapment and simply supported around the circuit. In modeling the system ANSYS retained some overlapping shapes and natural frequencies. Tab.: 1. Fig. Ref.: 7 titles.

UDC 539.3

Mantsybora A.A., Rusanov M.M. **Automodel problem about deformation of elastic-plastic half-space** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.153-159

The one-dimensional automodel problem, about deforming elastic-plastic half-space with large deformation, was shown. The plastic deformations can change in two type of simple Riman waves, was obtained. The sped of plastic waves are less then velocity of elastic shock waves, was shown in numerical calculations. Fig. 8. Ref.: 13 titles.

UDC 531/534: [57+61]

Slavashevich I., Mikhasev G., Botogova M. **Eigenfrequencies of the reconstructed middle ear, subjected to tympanoplasty and stapedotomy** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.160-166

Biomechanical model of the reconstructed middle ear subjected to tympanoplasty and stapedotomy is proposed. The basic goal of this study is to clear up the influence of the tangential displacements in an eardrum at modes and fundamental frequencies of the reconstructed middle ear. The reconstructed tympanic membrane is modeled as an isotropic elastic annular plate. Tab.: 5. Fig. 3. Ref.: 9 titles.

UDC 539.434

Kholodar B.G. **Longevity of material under complex stress state and variable loadings** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.167-172

The kinetic equations for damage development are applied to investigate the connection of material longevity with its stress state. Damage is considered as the sum of hydrostatic and deviatoric components. Analysis of the experimental data is carried out for rigid polyvinylchloride with time-constant stresses. The equations can be applied to describe the damage accumulation for other load regimes. . Surfaces of durability for the considered modes are constructed. Fig. 5. Ref.: 6 titles.

UDC 621.01

Ausiyevich A., Pronkevich S., Balysheva N., Khvat A., Ivanov A. **The modeling of rotation kinematic pairs loading** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.173-177

The mathematical apparatus and computer program for calculating stress distribution over the surface of the rotational kinematics pairs are described. The calculations are based on the dynamic analysis of the mechanism. This calculation method allows to determine the friction work on the local surface sites, identify the more worn-out areas, to explore the influence of operation modes, parts characteristics, elements materials on the wear surfaces loading and mechanical efficiency of the mechanism. Fig. 5. Ref.: 4 titles.

УДК 539.3:621.22

Vodka A.A., Stepchenko A.S., Trubayev A.I. **Investigation of the stress state and life-time of the bolted impeller connection of water turbines on transient modes** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.178-184

In this work the finite-element models of bolted impeller connection of water turbine have been developed. Using these models the stress state has been calculated. The assessment of the life-time of the bolted connection is given. Fig. 5. Ref.: 18 titles.

UDC 539.3: 678.073:661.481

Shilko S.V. Mesomechanical description and original experimental techniques the studies of composites as physically non-linear and non-homogeneous deforming media // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.184-188

Using mesomechanical description and original experimental techniques the studies of composites as physically non-linear and non-homogeneous deforming media have been performed. Based on the models of porous, granular and disperse-reinforced materials, a two-level calculating method for stress-strain analysis of structural elements and contact joints has been developed, the optimal structures of polymer composites for technical and medical applications, as well as diagnostic procedures for medicine and sport have been proposed. In accordance to biomechanical analogies and analysis of deforming, failure and contact friction phenomena, the possibility of adaptive materials and structures creation has been assumed. The remodeling and actuation processes in biotissues, the effects of self-structuring of nanosized auxetics and strengthening of frictional joints on their base are predicted. Fig. 2. Ref.: 11 titles.

UDC 536.24

Konon P.N., Dokukova N.A. Transient processes of heat and mass transfer in two-layer stacks // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.189-194

We consider a model of combined nonstationary heat and mass transfer in the construction of double-layer stack operates in pulse thermal regime. With help numerical calculations we obtain the measure of temperature and moisture. We found intensity of condensation on the inner surface of the lining, and calculated condensate film. Fig. 6. Ref.: 5 titles.

UDC 539.3

Burenin A.A., Dudko O.V., Lapteva A.A., Chigarev A.V., Shukevich T.V., Ruchan M.V. The interaction of a plane one-dimensional wave with the free boundary of the multimodulus elastic layer // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.195-200

Features of the propagation of boundary perturbations in an isotropic elastic media with different resistance to tension and compression are studied. On example of boundary problems about the reflection of the plane one-dimensional wave of loading and unloading from the free boundary of the multimodulus elastic layer it is shown, that solutions obtained in the framework of piecewise-linear model of a deformable medium are quite different from the known results of the linear theory of elasticity. Fig. 4. Ref.: 9 titles.

UDC 621.865

Gromyko O.V., Tsarova A.A. Manipulator's kinematics research in the quaternion and their dual analogs apparatus // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.201-207

A problem statement of manipulator's kinematics research in the quaternion and their dual analogs apparatus on the example of Fanuc industrial robot-manipulator is made. Fig. 1. Ref.: 3 titles.

УДК 539.4

Romanova T.P., Yankovskii A.P. Numerical integration of problem of dynamics of inelastic bendable bars on two-parameter elastic foundation // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.208-215

The problem of elasto-plastic dynamic bending rods on an elastic two-parameter basis is formulated. The method of numerical integration of the problem, based on a generalization of the Runge – Kutta method, is designed. The efficiency of the proposed numerical procedure is demonstrated by the calculations of inelastic dynamics of the isotropic bars with uniform and variable cross section. The analysis of the received results is made. Tab.: 5. Fig.3. Ref.: 12 titles.

UDC 004.9.005.53

Vasilevich Y.V., Sapeshko V.V., Shpurgalova M.Y. The formalization of the optimization process model potash ore // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.216-218.

The analytical expressions describing the relationship between the main parameters of the process of fragmentation of potash ores. The optimal value of the specific power consumption for different rotor speed grinder. Comparing the optimal values obtained experimentally with the experimental data we can conclude that the model adequately and accurately describe the process of fragmentation. Tab.: 4. Fig. 1. Ref.: 2 titles.

UDC 539.3

Marmysh D.E. boundary element simulation of stress strain behavior of statically indetermineta beam // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.219-223.

The investigation of the stress-strain state of the beam rigidly fixed at both ends. Solutions are based on the strength of materials and methods of using the numerical-analytic method of boundary elements. A comparison of the solutions obtained. The features of the field distribution of stresses in the beam at the analytical and numerical simulation. Fig. 6. Ref.: 5 titles.

UDC 681.3

Antsiparovich P.P., Akulich B.K., Dubovskaya E.M. The kinetostatic force analysis of the manipulator with 4 degrees of freedom // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.224-227.

In article with reference to the manipulator with 4 degrees of freedom the problem of definition of dynamic forces in kinematic pairs(reactive forces and the moments), and also of moving (operating) forces and the moments of the drive units necessary for program realisation of hand's movement is considered. Fig. 2. Ref.: 4 titles.

UDC 621.835-41:514.764

Skoybeda A.T., Zhukavets V.M. Wheel-step movers for the vehicle of high flotation // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.228-233.

The paper describes the benefits in traction and flotation experimental model of wheel-step mover in front of the wheel. In order to improve the performance of running system the substantiation of the principal scheme of wheel-step mover of another type, designed to work together with the already developed model has been performed. The method of calculation of the main parameters of the developed mover has been given. The methods of differential geometry have been used in the calculations. Fig. 3. Ref.: 5 titles.

УДК 624.131+539.215

Altynbekov Sh.A.//Base of equation consolidation in salt ground sphere // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.234-236.

In base of laws indissoluble liquid and solid phase, equation balance for gaseous phase, Law's of Henry and Darsi- Hersevanova, and so suppose, that is mixed solid (dissolved) moving with water, and his foam gas and don't mixed salt moving by liquid phase, that given base level consolidation in salt ground sphere. Fig. 1.

UDC 621.865+681.5

Bahmutski Yu., Gromyko O. **Modeling and Programming of the Robotic FANUC Complex Using ROBOGUIDE Package** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.244-247.

The paper deal with combining method of computer simulation program Fanuc Roboguide to analyze and simulate robot mechanisms. The additional advantage of this approach is the program for robot controller. This program can be used for real technological process based on the modeled robotic equipment. Fig. 4. Ref.: 4 titles.

UDC 539.3

Meleshko I.N., Pronkevich S.A. **Linear buckling round plate in case of irregular loading** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.248-252.

In this paper, the problem of instability unevenly loaded circular plate. For the problem of loss of stability of a circular plate with non-uniform boundary conditions, the analytical solution is very difficult to find a solution to this problem, and much less is known. In this paper a numerical solution to the problem of instability for nonuniform circular plate boundary conditions. Fig. 7. Ref.: 5 titles.

UDC 621.762.4.539

Hmelev A.A., Reut L.E. **Estimation of a condition of locally deformed zones of metal designs by results of hardness measurement** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.253-255.

The method of an estimation of a condition of locally deformed zones of metal designs on value of levels of preliminary plastic deformation and the remained stock of the plasticity, defined by results of measurement in these zones of hardness on Brinell is offered. Ref.: 2 titles.

UDC 539.19

Lemza A.O., Murashin E.V. **Rotary motion elasto-creep material** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.256-258.

We consider the deformation of the elasto-creep medium between two rigid coaxial cylinders when one of them is turned. The solution is constructed in the model of large elasto-creep deformations. Ref.: 11 titles.

UDC 629.113

Piatrowski A.L., Pronkevich S.A., Martynenko I.M. **Using the nonlinear material model for the calculation in ansys the stress state of accelerator blade of impact-centrifugal crushers** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.259-264.

The article discusses using of nonlinear material model for the calculation of the stress state of parts of the impact-centrifugal crushers by system ANSYS. A comparison of the calculation results using linear and nonlinear material models. Табл. 1. Fig. 10. Ref.: 6 titles.

UDC 621.762.4

Dudyak A.I., Hmelev A.A., Sahnovich T.A., Gurkovskaya O.I. **The normal stresses in simple bending of a straight rod that appears as a result of pressing fibers to each other** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.265-267.

Prove the appearance of normal stresses in the longitudinal sections of a timber by pressing the fibers to each other in simple bending of double-seat rectangular beam loaded with a concentrated force at mid-span. Fig. 3. Ref.: 3 titles.

UDC 538.913 – 022.532:539.32

Repchenkov V.I., Nagornyi Y.E., Nasan O.A. **The elastic moduli and force constants** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.268-273.

The problem of the equivalence of the elastic continuum Hooke and its discrete analog is discussed. The simplest case of a hypothetical crystal with a flat square Bravais lattice is considered and an analytical dependence of Young's modulus and Poisson's ratio are established, that is, two of the elastic characteristics of the four force constants govern the interaction of atoms in a square cell. Fig. 4. Ref.: 10 titles.

UDC 539.4

Martynenko T.M. **The definition of meridian shape for thickness shell** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.274-276.

Let's consider covers of rotation of the constant thickness, following hypotheses Kirkgofa-Lyava, and deformed by constant pressure. Need of the accounting of the equations of compatibility of deformations is shown at definition of a bezizgibny form of a meridian. Ref.: 2 titles.

UDC 539.3

Ali M. Abed Al Zobaede, Pronkevich S.A., Chigareva U.A. **State temperature distribution in multilayer cylindrical and spherical bodies** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.277-279.

In the article discussed the calculation of the temperature in the simulation of the multilayer structure, which has imperfect contact between the layers. Imperfect contact between the layers of the various functions is given heterogeneity. Fig. 4. Ref.: 3 titles.

UDC 539.377

Dats E.P., Murashin E.V. **Irreversible deformation of a thin plate due to local unsteady thermal effects** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.280-285.

The problem of the formation of residual stresses in a thin plate of elastic material at a given thermal effect was solved. Graphs fields of residual stresses and displacements were given. Fig. 4. Ref.: 9 titles.

УДК 539.3

Sherbakov S.S. **Interaction of the system of deformable n bodies** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.286-293.

Problem of determining mechanical state of the system of n interacting solids of various mechanical properties is considered. Set of boundary conditions for each of the solids of the system is defined by character of their interaction. System of the resolving integrated equations is offered for the multielement system of solids which may be applied for determination of normal and tangential tractions on surface of each body and also stress-strain state of its interior. Such system may be also applied for simulation of non-linear behavior of a body by definition of body's subvolumes with different elastic properties. Solution of given system allows to investigate of direct and back effects for tribo-fatigue system consisting of more than two elements. The example of calculation of contact pressure change under the influence of non-contact loading in roller/shaft tribo-fatigue system is given. Fig. 2. Ref.: 7 titles.

UDC 539.3

A.B. A.V. Krupoderov, Sherbakov S.S. **Solutions of some dynamic problems of elasticity theory using boundary element method** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.294-300.

The paper deals with the solutions of dynamic problems of the elasticity theory using boundary element method. Examples of calculations and their comparison with analytic solutions are represented. Solutions for viscoelastic behavior of body are given. Solution of the applied problem for the harvester knife blade under impact loading is given. Fig. 6. Ref.: 6 titles.

UDC 539.3

Ragozina V.E., Ivanova Yu.E. **The evolution equation for nonstationary processes of the shape change of one-dimensional transverse shock waves created by the boundary conditions of the general form** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.310-316.

The evolution equation of shock waves of transverse deformations and its particular solutions for different boundary conditions at the loaded boundary incompressible isotropic half space are discussed. Ref.: 13 titles.

UDC 621.81

Kapusta P.P., Shvets I.V. **Development of advanced load-bearing structural parts for air springs trucks** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.317-321.

Represented by three-dimensional models of straight, curved and built-up steel supports, recommendations for improvements in the design of basic stamp-reliance support and a new model of support. Also the prospective model supports air suspension arms, developed on the basis of structures of world leaders. Fig. 16. Ref.: 6 titles.

UDC 539.3

Shcherbatyak D.A., Yankovskii A.P. **Verification of the structural models of spatially-reinforced plastic foams and honeycomb filler of sandwich panels on the basis of numerical experiments** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.322-327.

It is performed the comparison of the effective elastic constants of the plastic foam medium, reinforced in the form of honeycomb cell, and honeycomb filler of sandwich panels, defined on the basis of different structural models, with the results of the reference calculations on the basis of the finite-element modeling. It is shown unsatisfactory correspondence of these structural models with the results of a numerical experiment. Tab.: 2. Fig. 2. Ref.: 14 titles.

UDC 517.52

Akimov V.A., Novikov. A.A. **The numerical decomposition of smooth function in a quasiorthogonal row** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.327-328.

In this article the concept of quasiorthogonal ranks is entered. The numerical example of decomposition of smooth function in a quasiorthogonal row is given by a method of the smallest squares. Fig. 1. Ref.: 1 titles.

UDC 539.3

Vasilevich Yu.V., Sahonenko V.M., Gorely K.A., Malyutin E.V., Neumerzhitskaya E.Yu. **Solving scientific and technical problems in the molding shells on flexible mandrels** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.328-331.

Given a scientific discussion of solutions in the design and creation of shells made of composite materials.

UDC 629.113.073

Petrovsky A., Gurvich Y., Safronov K. **Applying a virtual testing method to study the controllability and stability of the dump truck transport vehicles** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Issue 28. – P.332-335.

The article describes a technique to study the controllability and stability of the transport vehicles in the package SolidWorks Motion. Developed a dynamic model considered dump truck, which through virtual testing determined for the handling and stability of the car, which would greatly reduce the amount of field tests. Fig. 8. Ref.: 8 titles.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Немировский Ю.В., Романова Т.П.</i> Моделирование динамического деформирования железобетонных круглых и кольцевых пластин.....	3
<i>Плескачевский Ю.М., Старовойтова Е.Э.</i> Изгиб физически нелинейного трехслойного стержня со ступенчато-переменной границей.....	8
<i>Буренин А.А., Дудко О.В., Лаптева А.А.</i> Взаимодействие плоской одномерной волны со свободной границей разномодульного упругого слоя.....	16
<i>Старовойтов Э.И., Попченко А.В., Тарлаковский Д.В.</i> Изгиб с растяжением трехслойного термоупругого стержня.....	22
<i>Чигарев А.В., Борисов А.В.</i> Использование СКМ «Mathematica» для численного исследования стохастических моделей накопления повреждений в биоматериалах.....	27
<i>Янковский А.П.</i> Численно-аналитическое моделирование линейного термо-вязкоупругого поведения просадочных и набухающих грунтов, армированных пространственной георешеткой.....	31
<i>Михасев Г.И., Шейко А.Н.</i> Исследование свободных колебаний двустенной углеродной нанотрубки, основанное на нелокальной теории ортотропных оболочек.....	38
<i>Одиноква О.А.</i> Прочностной предел ползучести вязкоупругих материалов.....	45
<i>Журавков М.А., Коновалов О.Л., Круподеров А.В., Хвесеня С.С., Богдан С.И.</i> Естественное напряженно-деформированное состояние горного массива вблизи сочленения Кривичского и Листопадовичского тектонических нарушений.....	52
<i>Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н.</i> Пространственная задача термоупругости для шара.....	59
<i>Василевич Ю.В., Сахоненко В.М., Горелый К.А., Малютин Е.В., Неумерэжская Е.Ю.</i> Способы и структурная организация тканых материалов при создании композиционных материалов.....	66
<i>Сазанов В.П.</i> Результаты исследований распределения компонент остаточного напряжённого состояния в области наименьшего сечения кольцевого надреза поверхностно упрочнённых деталей сплошного и полого сечений.....	69
<i>Мрочек Ж.А., Терешко И.В., Логвин В.А., Редько В.П., Сотская Л.И.</i> Компьютерное моделирование процессов самоорганизации и наноструктурирования в металлах и сплавах.....	75
<i>Левина Г.А., Дрокин В.В., Хлызов И.Е.</i> Численное моделирование нагрузочных характеристик лепестковых газодинамических опор.....	85
<i>Куликов И.С., Глембоцкий А.В.</i> Метод расчета напряженно-деформированного состояния сферического тепловыделяющего элемента ядерного реактора.....	93
<i>Миронов Д.Н., Чигарев В.А., Гончаренко В.П.</i> Исследование совместного воздействия тепловых и силовых нагрузок, приложенных на внешней и внутренней границах.....	100
<i>Аникеенко А.Ф., Бобылев П.С., Вихренко В.С.</i> Анализ относительного равновесия подвижного сектора деревообрабатывающей фрезы.....	104
<i>Леоненко Д.В.</i> Локальные нагружения трехслойных круговых цилиндрических оболочек с упругим наполнителем.....	109
<i>Немировский Ю.В., Янковский А.П.</i> Применение схемы «крест» при численном интегрировании динамических начально-краевых задач для гибких армированных балок-стенок с учетом их ослабленного сопротивления поперечному сдвигу.....	114
<i>Юхневич А.В., Майер И.А., Усенко А.Е.</i> К моделированию технологии изготовления кремниевых МЭМС/НЭМС-приборов.....	123

<i>Никитин А.В., Шилько С.В.</i> Оценка влияния остеогенеза на механические свойства пористого титана при сжатии.....	127
<i>Буренин А.А., Рагозина В.Е., Иванова Ю.Е.</i> Об осесимметричной задаче распространения деформаций изменения формы.....	130
<i>Костюк Д.М., Ширвель П.И.</i> Нелинейное вязкоупругое деформирование пластин при стационарном нагреве и облучении высокоэнергетическими частицами.....	135
<i>Полоник М.В., Рогачев Е.Е.</i> Моделирование стационарного течения несжимаемой упругопластической среды в сферическом диффузоре с идеально гладкими стенками.....	142
<i>Мелешко И.Н., Пронкевич С.А.</i> Численное определение частот и форм собственные колебания круглых пластин при неоднородных граничных условиях.....	148
<i>Манцыбора А.А., Русанов М.М.</i> Автомодельная задача деформирования упругопластического полупространства.....	153
<i>Славашевич И.Л., Михасев Г.И., Ботогова М.Г.</i> Собственные частоты реконструированного среднего уха, подвергнутого тимпанопластике и стапедотомии.....	160
<i>Холодарь Б.Г.</i> Долговечность материала при сложном напряженном состоянии и переменных нагрузках.....	167
<i>Авсиевич А.М., Пронкевич С.А., Балышева Н.О., Хват А.В., Иванов А.Ю.</i> Моделирование нагруженности элементов вращательных кинематических пар.....	173
<i>Водка А.А., Степченко А.С., Трубаев А.И.</i> Исследование напряженного состояния и ресурса болтовых соединений рабочих колес гидротурбин на переходных режимах.....	178
<i>Шилько С.В.</i> Мезомеханика биотканей и полимерных композитов технического и медицинского назначения.....	184
<i>Конон П.Н., Докукова Н.А.</i> Исследования нестационарных процессов тепло и массопереноса в двухслойных дымовых трубах.....	189
<i>Буренин А.А., Дудко О.В., Лантева А.А., Чигарев А.В., Шукевич Т.В., Ручан М.В.</i> Взаимодействие плоской одномерной волны со свободной границей разномодульного упругого слоя.....	195
<i>Громько О.В., Царева А.А.</i> Исследование кинематики манипулятора в аппарате кватернионов и их дуальных аналогов.....	201
<i>Романова Т.П., Янковский А.П.</i> Численное интегрирование задачи динамики неупругих изгибаемых стержней на двухпараметрическом упругом основании.....	208
<i>Василевич Ю.В., Шнургалова М.Ю., Сапешко В.В.</i> Оптимизационная модель процесса дробления калийных руд.....	216
<i>Мармыш Д.Е.</i> Граничноэлементное моделирование напряженно-деформированного состояния статически неопределимой балки.....	219
<i>Анципорович П.П., Акулич В.К., Дубовская Е.М.</i> Кинестатический силовой анализ манипулятора с 4 степенями свободы.....	224
<i>Скойбеда А.Т., Жуковец В.Н.</i> Колесно-шагающие движители для транспортного средства высокой проходимости.....	228
<i>Алтынбеков Ш.А.</i> Основное уравнение консолидации засаленных земляных сред.....	234
<i>Кулешов Р.А., Сабиров Н.М., Ширвель П.И.</i> Изгиб балки в условиях неравномерного нагрева и нейтронного облучения.....	237
<i>Бахмутский Ю.А., Громько О.В.</i> Моделирование и программирование роботизированного комплекса в пакете FANUC ROBOGUIDE.....	244

<i>Мелешко И.Н., Пронкевич С.А.</i> Потеря устойчивости круглой пластины при неравномерном нагружении.....	248
<i>Хмелев А.А., Реут Л.Е.</i> Оценка состояния локально деформированных зон металлических конструкций по результатам измерения твердости.....	253
<i>Лемза А.О., Мурашкин Е.В.</i> Ротационное движение упругоползучего материала.....	256
<i>Петровский А.Л., Пронкевич С.А., Мартыненко И.М.</i> Использование нелинейной модели материала при расчете в системе ANSYS напряженного состояния лопатки ускорителя центробежно-ударной дробилки.....	259
<i>Дудяк А.И., Хмелев А.А., Сахнович Т.А., Гурковская О.И.</i> Нормальные напряжения при плоском изгибе прямого стержня, возникающие в результате надавливания волокон друг на друга.....	265
<i>Репченков В.И., Нагорный Ю.Е., Насань О.А.</i> Упругие модули и силовые постоянные....	268
<i>Мартыненко Т.М.</i> Определение формы меридиана оболочек вращения, деформируемые без изменения кривизны заданной внешней нагрузкой.....	274
<i>Али М. Абед Аль-Зобайде, Чигарева Ю.А.</i> Стационарное распределение температуры в слоистых цилиндрических и сферических телах.....	277
<i>Дац Е.П., Мурашкин Е.В.</i> Необратимое деформирование тонкой пластины вследствие локального нестационарного теплового воздействия.....	280
<i>Щербаков С.С.</i> Взаимодействие системы п деформируемых тел.....	286
<i>Круподеров А.В., Щербаков С.С.</i> Решение некоторых динамических задач теории упругости методом граничных элементов.....	294
<i>Горбач Н.И., Гурвич Ю.А., Крайник Д.А., Шпургалова М.Ю.</i> О движении тяжелого тела в сопротивляющейся среде, брошенного под небольшим углом к горизонту.....	301
<i>Рагозина В.Е., Иванова Ю.Е.</i> Эволюционное уравнение для нестационарных процессов изменения формы одномерных поперечных ударных волн, созданных краевыми условиями общего вида.....	310
<i>Капуста П.П., Швец И.В.</i> Разработка перспективных несущих конструкций пневмоподвесок грузовых автомобилей.....	317
<i>Щербатюк Д.А., Янковский А.П.</i> Верификация структурных моделей пространственно-армированных пенопластмасс и сотовых заполнителей сэндвич-панелей на основе проведения численных экспериментов.....	322
<i>Акимов В. А., Новиков А.А.</i> О разложении функций в квазиортогональные ряды.....	327
<i>Василевич Ю.В., Сахоненко В.М., Горелый К.А., Малютин Е.В., Неумержицкая Е.Ю.</i> Решение научно-технических проблем при формовании оболочек на гибких оправках.....	328
<i>Петровский А.Л., Гурвич Ю.А., Сафронов К.И.</i> Применение методов виртуального моделирования при исследовании управляемости и устойчивости движения шарнирно-сочлененных машин.....	332
РЕФЕРАТЫ	336
ABSTRACTS	342