МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ИННОВАЦИОННОЙ ПОДГОТОВКИ ИНЖЕНЕРНЫХ КАДРОВ ПРИ ПЕРЕХОДЕ СТРОИТЕЛЬНОЙ ОТРАСЛИ НА ЕВРОПЕЙСКИЕ СТАНДАРТЫ
(г. Минск, БНТУ — 26-27.05.2015)

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ИННОВАЦИОННЫХ ЗАДАЧ КАК СРЕДСТВО ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ПОДГОТОВКИ СПЕЦИАЛИСТОВ

АКИМОВ В.А., ГОНЧАРОВА С.В.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

До сих пор на строительном факультете БНТУ, при изложении предмета «Теория упругости и пластичности» решались две так называемые две прямые задачи, решение которых приводится ниже на конкретных примерах. Авторам данной статьи пришла мысль о возможности найти решение обратных им задач. В результате им удалось справиться с данной проблемой. Получившаяся работа носит инновационный характер. Она расширяет понятие напряженно деформируемого состояния в точке и способствует повышению квалификации работников строительной отрасли. Все примеры снабжены численными расчетами.

Вначале рассмотрим первую прямую задачу теории упругости для напряженного состояния упругой изотропной среды. Ее условие заключается в том, что по заданному напряженному состоянию найти главные напряжения и расположение главных площадок. Решение этой задачи известно и поэтому приведем ее решение на конкретном примере.

Итак, пусть напряженное состояние в точке задано тензором напряжений

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} МПа \qquad (1)$$

Главные напряжения являются корнями кубического уравнения

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0.$$

Коэффициентами этого уравнения служат инварианты тензора напряжений:

а) линейный инвариант

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 2 + 4 + 4 = 10\ МПа$$

б) квадратичный инвариант

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = 2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 +$$
$$+4 \cdot 2 - \left(-\sqrt{3^2}\right) - 0^2 - 0^2 = 29\ (МПа)^2$$

в) кубический инвариант

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = 2 \cdot 4 \cdot 4 -$$
$$-\left(-\sqrt{3}\right) \cdot 0^2 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0^2 - 4 \cdot \left(-\sqrt{3}\right)^2 = 20$$
$$(МПа)^3$$

При таких значениях инвариантов кубическое уравнение принимает вид

$$\sigma^3 - 10\sigma^2 + 29\sigma - 20 = 0$$

Корни этого уравнения равны $\sigma_1 = 5МПа$, $\sigma_2 = 4МПа$, $\sigma_3 = 1МПа$.

Это и есть главные напряжения, расставленные в порядке убывания, т.е. максимальное равно 5 Мпа, минимальное 1 МПа, среднее 4 МПа.

Направляющие косинусы главных площадок определяются из уравнений:

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_i)l_i + \tau_{xy}m_i + \tau_{xz}n_i = 0\,, \\ \tau_{yx}l_i + (\sigma_y - \sigma_i)m_i + \tau_{yz}n_i = 0\,, \\ \tau_{zx}l_i + \tau_{zy}m_i + (\sigma_z - \sigma_i)n_i = 0\,, \\ l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1\,, \qquad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Для первой площадки $i = 1$, $\sigma_1 = 5$ МПа, получим:

$$\begin{cases} -3l_1 - \sqrt{3m_1 = 0}\,, \\ -\sqrt{3}l_1 - m_1 = 0\,, \\ -n_1 = 0\,, \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1\,. \end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид $l_1 = \frac{1}{2}$, $m_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $n_1 = 0$ т.е. вектор нормали равен $\vec{n}_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$.

Для второй площадки $i = 2$, $\sigma_2 = 4$ Мпа, получим:

$$\begin{cases} -2l_2 - \sqrt{3}m_2 = 0\,, \\ -\sqrt{3}l_2 = 0\,, \\ 0 = 0\,, \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1\,. \end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид: l_2=0, m_2=0, n_2=1 т.е. вектор нормали равен $\vec{n}_2 = (0,0,1)$.

Для третьей площадки $i = 3$, σ_3=1 Мпа, будем иметь:

$$\begin{cases} l_3 - \sqrt{3m_3 = 0}\,, \\ -\sqrt{3}l_3 + 3m_3 = 0\,, \\ 3n_3 = 0\,, \\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1\,. \end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид $l_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $m_3 = \frac{1}{2}$, $n_3 = 0$. т.е. вектор нормали равен $\vec{n}_3$=($\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, 0).

Нетрудно непосредственно убедиться в том, что выполняются соотношения для ортогональности площадок

$$\begin{cases} l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \\ l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0 \\ l_3 l_1 + m_3 m_1 + n_3 n_1 = 0 \end{cases}$$

Решим теперь обратную задачу: в данной точке твердого тела главные напряжения и главные направления имеют вид

σ_1 =5 МПа, σ_2=4 МПа, σ_3=1 Мпа,

$\vec{n}_1$=($\frac{1}{2}$, -$\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0), $\vec{n}_2$=(0, 0, 1), $\vec{n}_3$=($\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, 0).

Требуется найти исходный тензор напряжений

$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$ в данной точке.

Решение этой задачи базируется на соотношениях, получаемых из векового уравнения

$$\begin{cases} \sigma_x l_1 + \tau_{xy} m_1 + \tau_{xz} n_1 = \sigma_1 l_1 \\ \tau_{yx} l_1 + \sigma_y m_1 + \tau_{yz} n_1 = \sigma_1 m_1 \\ \tau_{zx} l_1 + \tau_{zy} m_1 + \sigma_z n_1 = \sigma_1 n_1 \\ \sigma_x l_2 + \tau_{xy} m_2 + \tau_{xz} n_2 = \sigma_2 l_2 \\ \tau_{yx} l_2 + \sigma_y m_2 + \tau_{yz} n_2 = \sigma_2 m_2 \\ \tau_{zx} l_2 + \tau_{zy} m_2 + \sigma_z n_2 = \sigma_2 n_2 \\ \sigma_x l_3 + \tau_{xy} m_3 + \tau_{xz} n_3 = \sigma_3 l_3 \\ \tau_{yx} l_3 + \sigma_y m_3 + \tau_{yz} n_3 = \sigma_3 m_3 \\ \tau_{zx} l_3 + \tau_{zy} m_3 + \sigma_z n_3 = \sigma_z n_3 \end{cases}$$

Вводя обозначения $\sigma_x = x_1$, $\tau_{xy} = x_2$, $\tau_{xz}=x_3$, $\sigma_y=x_4$, $\tau_{yz}=x_5$, $\sigma_z=x_6$,

перепишем эту систему в более привычном виде:

$$\begin{cases} x_1 l_1 + x_2 m_1 + x_3 n_1 = \sigma_1 l_1 \\ x_2 l_1 + x_4 m_1 + x_5 \tau_{yz} = \sigma_1 m_1 \\ x_3 l_1 + x_5 m_1 + x_6 n_1 = \sigma_1 n_1 \\ x_1 l_2 + x_2 m_2 + x_3 n_2 = \sigma_2 l_2 \\ x_2 l_2 + x_4 m_2 + x_5 n_2 = \sigma_2 m_2 \\ x_3 l_2 + x_5 m_2 + x_6 n_2 = \sigma_2 n_2 \\ x_1 l_3 + x_2 m_3 + x_3 n_3 = \sigma_3 l_3 \\ x_2 l_3 + x_4 m_3 + x_5 n_3 = \sigma_3 m_3 \\ x_3 l_3 + x_5 m_3 + x_6 n_3 = \sigma_z n_3 \end{cases}$$

Полученные девять уравнений содержат шесть неизвестных, потому что в вековых уравнениях только два уравнения из каждых трех являются независимыми. Поэтому, например, третье, шестое, девятое уравнения можно удалить, но мы их оставим для проверки правильности решения, так как они должны тождественно обратиться в ноль. Подставляя численные значения, перепишем нашу систему в виде:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 = \frac{5}{2}, \\ \frac{1}{2}x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_4 = -\frac{5\sqrt{3}}{2}, \\ \frac{1}{2}x_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_5 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_5 = 0, \\ x_6 = 4, \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 = -\frac{1}{2}, \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5 = 0. \end{cases}$$

Данная система уравнений имеет решение:

$x_1 = 2, x_2 = -\sqrt{3},\ \ x_3 = 0, x_4 = 4, x_5 = 0, x_6 = 4,$ т. е.

Исходный тензор имеет вид:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \textit{МПа}$$

Таким образом, круг замкнулся - ответом обратной задачи явилось исходное условие прямой задачи.

Теперь рассмотрим еще одну прямую и обратную задачи.

Первая задача заключается в нахождении компонент вектора полного напряжения, действующего на наклонной площадке с нормалью $\vec{n} = (l; m; n)$, по известному тензору напряжений (1).

Приводим известное решение этой задачи [1, стр. 79].

$$\begin{cases} \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = p_{nx}, \\ \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n = p_{ny}, \\ \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n = p_{nz}. \end{cases} \qquad (2)$$

Обратная задача, очевидно, звучит, так: по известным компонентам полного напряжения $(p_{nx}; p_{ny}; p_{nz})$, действующего на наклонной площадке с нормалью $\vec{n} = (l; m; n)$, найти компоненты тензора деформаций (1).

Решение такой задачи приводится впервые. Оно основано на составлении шести уравнений равновесия тетраэдра. Первые три из них содержатся в формуле (2). Оставшиеся три уравнения моментов относительно координатных осей составим по аналогии с [1, стр.80].

$$-\sigma_x \frac{dz}{3} S_{\Delta OBC} - \tau_{xy} \frac{dz}{3} S_{\Delta OAB} + p_{nx} \frac{dz}{3} S_{\Delta ABC} + \sigma_z \frac{dx}{3} S_{\Delta OAC} = 0.$$

С учетом

$$S_{\Delta OBC} = S_{\Delta ABC} l,\ S_{\Delta OAB} = S_{\Delta ABC} m,\ S_{\Delta OAC} = S_{\Delta ABC} n \qquad (3)$$

перепишем это уравнение в виде

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m - \sigma_z \frac{dx}{dz} = p_{nx}.$$

Производя циклическую замену переменных, получим еще два таких уравнения. Выпишем эту систему уравнений:

$$\begin{cases} \sigma_x l + \tau_{xy} m - \sigma_z n \dfrac{dx}{dz} = p_{nx} \\ \sigma_y m + \tau_{yz} n - \sigma_x l \dfrac{dy}{dx} = p_{ny} \\ \sigma_z n + \tau_{zx} l - \sigma_y m \dfrac{dz}{dy} = p_{nz} \end{cases} \qquad (4)$$

Выражая площади треугольников, входящих в формулы (3) через $OA = dx$, $OC = dy$, $OB = dz$, получим систему уравнений вида:

$$\begin{cases} 1 + (\frac{dz}{dx})^2 + (\frac{dz}{dy})^2 = \frac{1}{l^2}, \\ 1 + (\frac{dx}{dz})^2 + (\frac{dx}{dy})^2 = \frac{1}{m^2}, \\ 1 + (\frac{dy}{dz})^2 + (\frac{dy}{dx})^2 = \frac{1}{n^2}. \end{cases} \qquad (5)$$

Решением этой системы являются искомые равенства:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{l}{m},\ \frac{dy}{dx} = \frac{m}{n},\ \frac{dz}{dy} = \frac{n}{l} \qquad (6)$$

Нетрудно убедиться в том, что они тождественно удовлетворяют соотношениям (5) в силу равенства $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

Подставляя соотношения (6) в (4), перепишем (4) в виде:

$$\begin{cases} \sigma_x lm + \tau_{xy} m^2 - \sigma_z nl = mp_{nx} \\ \sigma_y mn + \tau_{yz} n^2 - \sigma_x lm = np_{ny} \\ \sigma_z nl + \tau_{zx} l^2 - \sigma_y mn = lp_{nz} \end{cases} \qquad (7)$$

Из (7) получим

$$\tau_{xy} = \frac{mp_{nx}+\sigma_z nl-\sigma_x lm}{m^2},\ \tau_{yz} = \frac{np_{ny}+\sigma_x lm-\sigma_y mn}{n^2},$$

$$\tau_{zx} = \frac{lp_{nz}+\sigma_y mn-\sigma_z nl}{l^2} \qquad (8)$$

Подставляя эти соотношения в (2), с учетом парности напряжений

$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$, после несложных преобразований получим:

$$\begin{cases} m^2n^2\sigma_y + nl(l^2 - mn)\sigma_z = -lmnp_{nz}, \\ n^2l^2\sigma_z + lm(m^2 - nl)\sigma_x = -lmnp_{nx}, \\ l^2m^2\sigma_x + mn(n^2 - lm)\sigma_y = -lmnp_{ny}. \end{cases} \qquad (9)$$

Решая данную систему уравнений по формулам Крамера

$$\sigma_x = \frac{\Delta_x}{\Delta_1},\ \sigma_y = \frac{\Delta_y}{\Delta_1},\ \sigma_z = \frac{\Delta_z}{\Delta_1},$$

где

$$\Delta_x = -lmn \begin{vmatrix} p_{nz} & m^2n^2 & nl(l^2 - mn) \\ p_{nx} & 0 & m^2n^2 \\ p_{ny} & mn(n^2 - lm) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= l^2m^2n^2[n^2l(n^2 - lm)p_{nz} - lmn^3p_{ny} - n(n^2 - lm)(l^2 - mn)p_{nx}].$$

$$\Delta_y = -lmn \begin{vmatrix} 0 & p_{nz} & nl(l^2 - mn) \\ lm(m^2 - nl) & p_{nx} & m^2n^2 \\ l^2n^2 & p_{ny} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= l^2m^2n^2[l^2m(l^2 - mn)p_{nx} - mnl^3p_{nz} - l(l^2 - mn)(m^2 - nlp_{ny})].$$

$$\Delta_z = -lmn \begin{vmatrix} 0 & m^2n^2 & p_{nz} \\ lm(m^2 - nl) & 0 & p_{ny} \\ l^2n^2 & mn(n^2 - lm) & p_{nx} \end{vmatrix} =$$

$$= l^2m^2n^2[m^2n(m^2 - nl)p_{ny} - nlm^3p_{ny} - m(m^2 - nl)(n^2 - lmp_{nz})]$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & m^2n^2 & nl(l^2 - mn) \\ lm(m^2 - nl) & 0 & m^2n^2 \\ l^2n^2 & mn(n^2 - lm) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= l^2m^2n^2[l^2m^2n^2 + (l^2 - mn)(m^2 - nl)(n^2 - lm)].$$

В результате получим:

$$\sigma_x = \frac{n}{\Delta}\left[-(n^2 - lm)(l^2 - mn)p_{nx} - lmn^2 p_{ny} + nl(n^2 - lm)p_{nz}\right],$$

$$\sigma_y = \frac{1}{\Delta}\left[\mathrm{lm}(\mathrm{l}^2 - \mathrm{mn})\mathrm{p_{nx}} - (\mathrm{l}^2 - \mathrm{mn})(\mathrm{m}^2 - \mathrm{nl})\mathrm{p_{ny}} - \mathrm{mnl}^2\mathrm{p_{nz}}\right] \quad (10)$$

$$\sigma_z = \frac{m}{\Delta}\left[-nlm^2 p_{nx} + mn(m^2 - nl)p_{ny} - (m^2 - nl)(n^2 - lm)p\right]_{nz},$$

где $\Delta = l^2m^2n^2 + (l^2 - mn)(m^2 - nl)(n^2 - lm)$.

Отметим, что в системе (9) сокращения не производились с целью симметрии уравнений, т.е. мы как бы умножили первую, вторую, и третью строчки, соответственно, на n, l, m. Результат будет тот же.

Подставляя найденные значения (10) в (8) , определяем:

$$\tau_{xy} = \frac{m}{\Delta}\left[(n^2 - lm)(l^2 - mn)p_{nx} + lmn^2 p_{ny} - \mathrm{nl}(n^2 - lm)\, p_{nz}\right] \quad (11)$$

$$\tau_{yz} = \frac{n}{\Delta}\left[-lm(l^2 - mn)p_{nx} + (l^2 - mn)(m^2 - nl)p_{ny} + mnl^2 p_{nz}\right],$$

$$\tau_{zx} = \frac{l}{\Delta}\left[nlm^2 p_{nx} - mn(m^2 - nl)p_{ny} + (m^2 - nl)(n^2 - lm)p_{nz}\right].$$

Здесь $\Delta = l^2m^2n^2 + (l^2 - mn)(m^2 - nl)(n^2 - lm)$.

Сделаем поверку, подставляя (10) и (11) в (2). Проделав очевидные алгебраические преобразования, убеждаемся в правильности полученных формул.

Приведем численный пример для $l = \frac{2}{3}$, $m = \frac{2}{3}$, $n = \frac{1}{3}$;

$p_{nx} = 1,\ p_{ny} = 2,\ p_{nz} = 3.$

Непосредственно по формулам (10) и (11), находим:

$\sigma_x = -15,\qquad \sigma_y = 36,\qquad \sigma_z = 27$

$\tau_{xy} = 30,\qquad \tau_{yz} = 18,\qquad \tau_{zx} = -27$

Таким образом, нам удалось восстановить тензор напряжений в данной точке только по действующим на заданной наклонной площадке усилиям.

$$\mathrm{T}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 30 & -27 \\ 30 & -36 & 18 \\ -27 & 18 & 27 \end{pmatrix} \textit{МПа} \quad (12)$$

Теперь окончательно убеждаемся в том, что формула (2) тождественно удовлетворятся в числах.

$-(15)\frac{2}{3} + 30\frac{2}{3} + (-27)\frac{1}{3} = 1,$ -10 + 20 - 9=1, 1=1;

$30\frac{2}{3} + (-36)\frac{2}{3} + 18\frac{1}{3} = 2,$ 20 – 24 + 6 = 2, 2=2;

$(-27)^{\frac{2}{3}} + 18^{\frac{2}{3}} + 27^{\frac{1}{3}} = 3,$ -18 + 12 + 9 = 3, 3=3.

Итак, решены две прямые, и что наиболее важно, две обратные задачи теории упругости. Если решение первой обратной задачи уже апробировалось в 2013-14 и 2014-15 учебных годах на строительном факультете БНТУ, то решение второй обратной задачи приводится впервые. На этой базе могут быть составлены контрольные и самостоятельные работы для студентов, изучающих напряженное состояние в точке в курсе теории упругости или механики материалов. Авторы разработанных алгоритмов решения задач надеются, что они также принесут несомненную пользу не только студентам, но и преподавателям, а также специалистам, работающим в данном направлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. Учебник под ред. Г. С. Варданяна- М., Издательство АСВ, 1995.-568 стр. с илл.

УДК 624.04

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ПРОЕКЦИИ ГРАДИЕНТА В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ БАЛКИ

БОРИСЕВИЧ А.А., САБУК А.А.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

В настоящее время ведутся активные исследования по разработке численных методов оптимального проектирования конструкций. Цель этой работы – показать особенности поиска оптимального проекта с помощью метода проекций градиента.

Исследуется расчетная схема балки с различными, но постоянными сечениями на участках АС и СВ (рис. 1)