

– стыки между плитами и внутренними стеновыми панелями необходимо заделывать раствором марки не ниже М100.

– опорный момент, возникающий в местах стыковки плит с внутренними стеновыми панелями, воспринимается бетонным сечением плиты и его рабочей арматурой, и не требует разработки дополнительных конструктивных решений.

Также были исследованы варианты рамного соединения вертикальных элементов каркаса и монолитного диска перекрытия. Если для стыка сборной колонны и монолитного перекрытия решение рамного узла возможно, и оно, по своей фактической сути, отличается от монолитного узла только большей податливостью, то решение со стыком диафрагм жесткости в виде полностью рамного узла не технологично. В процессе исследования были выполнены расчеты смешанного решения, когда нижняя диафрагма жесткости соединяется рамным узлом с монолитным диском перекрытия, а верхняя диафрагма устанавливается на растворный шов и узел стыка работает как шарнирное соединение. Проведенные расчеты и анализ их результатов показало, что рамное соединение позволяет включить в работу вертикальное конструктивное армирование диафрагм жесткости, и разгрузить, а, следовательно, и уменьшить армирование пролетной части диска перекрытия прилегающего к ядру жесткости.

УДК 624.04:624.21

## **ОБОСНОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ ИНЕРЦИОННОЙ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКЕ**

*СИДОРОВИЧ Е. М.*

Белорусский национальный технический университет  
Минск, Беларусь

За более чем вековой период, начиная с работ А.Н. Крылова (1905 г.) и С.П. Тимошенко (1912 г.), в которых было получено полное решение задачи о движении одиночного безынерционного груза по балке с равномерно распределенной массой, количество исследований и публикаций на тему о взаимодействии подвижной

нагрузки и подверженных ее действию сооружений стало практически необозримым. О важности и сложности решения задач о действии подвижных нагрузок на сооружения и их элементы свидетельствуют и исследования последнего времени [1, 3–5, 7–11]. В современных работах, как правило, применяют компьютерные технологии, основанные на разложении динамических перемещений узлов системы по формам собственных колебаний сооружения. Часто вводятся дополнительные гипотезы и упрощения. В качестве альтернативы применяют компьютерные программные комплексы, основанные на прямом интегрировании численными шаговыми методами дифференциальных уравнений движения, при этом динамическая степень свободы модели сооружения принимается невысокой. Основные отличительные факторы проводимых исследований – это учитывать или не учитывать силы инерции движущихся масс, как распределить массы несущей системы и учесть их силы инерции, вводить или нет строительные подъемы и другие несовершенства на пути следования подвижной нагрузки, учитывать или не учитывать центробежные силы масс при их движении по криволинейным траекториям, как определить критическую скорость движущейся нагрузки и т. п.

Европейские нормы проектирования мостов выделяют как важнейшие следующие факторы: скорость движения нагрузки по мосту, масса сооружения, длина пролета, частоты собственных колебаний конструкции, число сосредоточенных нагрузок и расстояния между ними, демпфирование конструкции, вертикальные неровности пути, изменение жесткости сооружения по длине (например, «балочный эффект»). Основными критериями для установления необходимости проведения динамического расчета сооружения является максимально допустимая скорость движения экипажей и тип пролетного строения моста. Отмечено, что для неразрезных пролетных строений при скорости движения поезда не выше 200 км/ч проводить динамический расчет в основном не требуется. При скорости движения поезда выше 200 км/ч для мостов всех систем, кроме простых балочных, рекомендуется применять разложение поперечных колебаний по собственным формам изгибных и иногда крутильных колебаний. В других случаях рекомендуется использовать динамические коэффициенты, основанные на эмпирических данных.

В данной работе решается задача о воздействии подвижной инерционной нагрузки на произвольное сооружение с произвольной конечной степенью свободы. Нагрузка представляется участками заданной длины и заданной интенсивности с заданными расстояниями между участками. Весь поезд движется с заданной постоянной скоростью, длина участков и расстояние между ними в процессе движения не изменяются. Такое представление нагрузки позволяет моделировать как произвольную гусеничную нагрузку, так и поезда сосредоточенных сил, в произвольной комбинации.

Сооружение задается матрицей жесткости в соответствии с принятым количеством динамических степеней свободы. Задаются соответствующие матрица масс сооружения и матрица коэффициентов демпфирования. При необходимости может быть проведена статическая и динамическая конденсация расчетной модели по методике, предложенной в [12].

Путь поезда задается в установленной последовательности соответствующими номерами узлов (степеней свободы). Задаются расстояния между этими узлами. Это позволяет в любой заданный момент времени определить положение поезда, силовое давление от него на соответствующие узлы и добавочные эффективные массы в этих узлах. При необходимости задается строительный подъем или конкретные вертикальные несовершенства по пути следования поезда.

Применяется численное интегрирование дифференциальных уравнений движения (дифференциальных уравнений второго порядка без их преобразования в систему дифференциальных уравнений первого порядка) прямым одношаговым методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности с заданным шагом по времени на заданном интервале времени. Шаг и интервал по времени зависят от скорости поезда, длины поезда и длины пути следования. Результатом вычислений являются динамические перемещения, скорости и ускорения по всем степеням свободы на каждом шаге интегрирования.

Следует отметить, что метод Рунге-Кутты [2] прямого интегрирования дифференциальных уравнений второго порядка по непонятным причинам не упоминается как эффективный ни в одном из известных нам, многочисленных изданий по вычислительной математике и дифференциальным уравнениям.

В дифференциальные уравнения движения деформируемой системы с подвижной нагрузкой включены дополнительные члены,

учитывающие влияние центробежных сил, появляющихся при движении масс по криволинейным траекториям. Эти силы пропорциональны кривизне траектории и квадрату скорости движения массы. Учет центробежных сил масс, движущихся по криволинейным траекториям, наряду с учетом вертикальных сил инерции, обусловленных вертикальными ускорениями масс при прогибах сооружения, – это отличительная особенность данного исследования.

Дополнительные модули, внедренные в алгоритм и компьютерные программы, позволяют строить графики перемещений, скоростей или ускорений по направлению любой степени свободы, изображать деформированную схему сооружения в любой момент времени, определять траектории движения в пространстве любой точки (узла) движущейся нагрузки.

На основе вычисленных динамических перемещений предоставляется возможность, пользуясь методами строительной механики [6], вычислить динамические внутренние силы в любом элементе сооружения в заданный момент времени. Задача поиска экстремальных значений усилий в отдельных элементах сооружения не является простой. В системе с демпфированием усилия в разных элементах достигают экстремальных значений в разные моменты времени. Необходимы специальные исследования. Но всегда сохраняется возможность вычислить экстремальное усилие и соответствующий динамический коэффициент.

В качестве объекта исследования был выбран прототип однопролетного балочного моста с поперечными деформируемыми балками и неразрезными продольными деформируемыми балками. Расчетная модель главных ферм принята в виде балки пролетом 60 м и разбита на 30 конечных элементов (рис. 1). В 29 промежуточных узлах были сосредоточены узловые массы сооружения. Поперечные балки моста промоделированы вертикальными деформируемыми стойками эквивалентной жесткости. Продольные балки моста представлены второстепенной неразрезной балкой, опирающейся шарнирно на стойки. Крайние узлы главной и второстепенной балок шарнирно оперты. Второстепенная балка разбита на 120 конечных элементов. В 119 промежуточных узлах сосредоточены массы проезжей части моста. Общее число динамических степеней свободы плоской модели равно 148 (29 вертикальных степеней свободы с номера 1 по номер 29 на главной балке и 119 вертикальных

степеней свободы с номера 30 по номер 148 на второстепенной балке). Нагрузка надвигается с заданной скоростью на второстепенную балку слева направо.

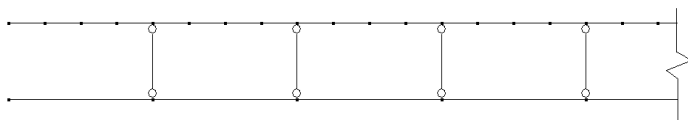


Рис. 1. Фрагмент исследуемой модели балочного моста

**Влияние нагрузки Н14.** Схема одиночного четырехосного экипажа изображена на рис. 2. При симметричном расположении экипажа в середине пролета моста статический прогиб главной балки в середине пролета по направлению 15-й степени свободы и прогиб второстепенной балки по направлению 89-й степени свободы соответственно составили

$$\Delta_{15}^{st} = 16,37 \text{ мм}, \quad \Delta_{89}^{st} = 20,31 \text{ мм}.$$

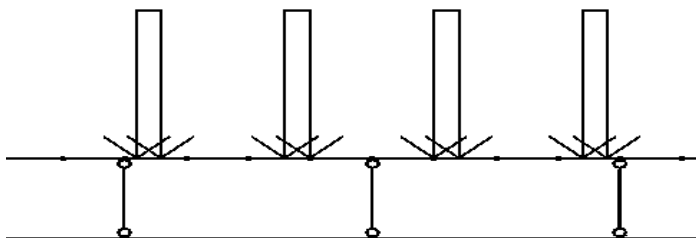


Рис. 2. Схема расположения нагрузки Н14

При движении нагрузки Н14 со скоростью 1 м/сек (почти статическое воздействие для тестирования программы) максимальный прогиб в 20,33 мм был зафиксирован по направлению 90-й степени свободы, когда поезд продвинулся на 32,3509 м. В это же время прогиб главной балки по направлению 15-й степени свободы был равен 16,39 мм. Вычисления велись с учетом влияния центробежных сил. Уместно заметить, что в данном случае при сравнении значения чисел различаются по 5-й и старше значащим цифрам. Траектория движения точки приложения первой силы (рис. 3)

показывает, что влияние центробежных сил наиболее сильно проявляется при вступлении нагрузки на сооружение и при сходе с сооружения (переломы траектории движения), а также при движении по средней части пролета балки (наибольшая кривизна вследствие наибольших прогибов). Тестирование алгоритма и программ при малой скорости движения нагрузки доказало их достоверность и надежность. Подобное тестирование в процессе разработки алгоритмов и программ проводилось и на примере движения одиночного груза (массы). Результаты тестирования оказались вполне удовлетворительными.

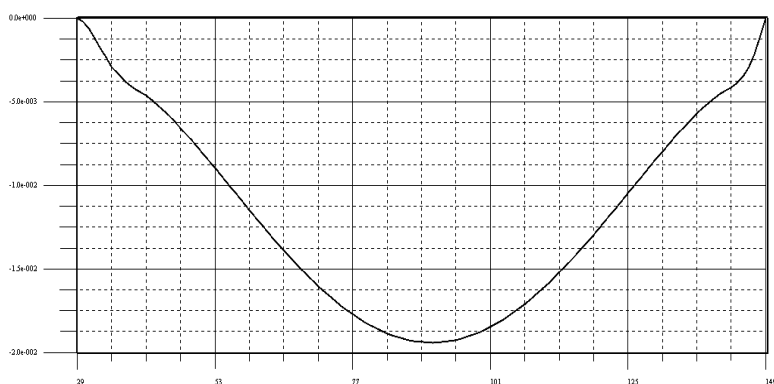


Рис. 3. Траектория движения точки приложения первой силы нагрузки N14 при скорости 1 м/сек

Целью проводимых в данной работе исследований было уточнение динамических коэффициентов, а также установление скорости движения нагрузки, при которой возможно отрывное, баллистическое движение экипажей, т. е. отрыв экипажа от поверхности проезжей части в результате колебаний сооружения. Так как при выводе дифференциальных уравнений движения предполагалось безотрывное движение нагрузки, то критерием отрыва можно считать факт, когда значения ускорений точек приложения нагрузок при колебаниях превышают по модулю значение ускорения свободного падения.

Так при скорости 20 м/сек максимальный прогиб имел место по направлению 93-й степени свободы и был равен 21,34 мм, а при

скорости 40 м/сек – по направлению 91-й степени свободы и был равен 26,35 мм. Динамические коэффициенты по прогибам при данных скоростях соответственно равнялись:

$$(1 + \mu)_{20} = 1,05, \quad (1 + \mu)_{40} = 1,30.$$

При неучете центробежных сил максимальный прогиб получил значение 24,00 мм в узле 91

Максимальные ускорения зафиксированы по направлению 33-й степени свободы при скорости 20 м/сек и по направлению 102-й степени свободы при скорости 40 м/сек. Их значения соответственно равны

$$a_{20} = 3,2 \text{ м/с}^2, \quad a_{40} = 23, \text{ м/с}^2.$$

В последнем случае нагрузка еще не дошла до 102-й массы, получившей наибольшее ускорение. На рис. 4 представлены виброграммы ускорений 102-й массы и 147-й массы, где имело место наименьшее, отрицательное ускорение.

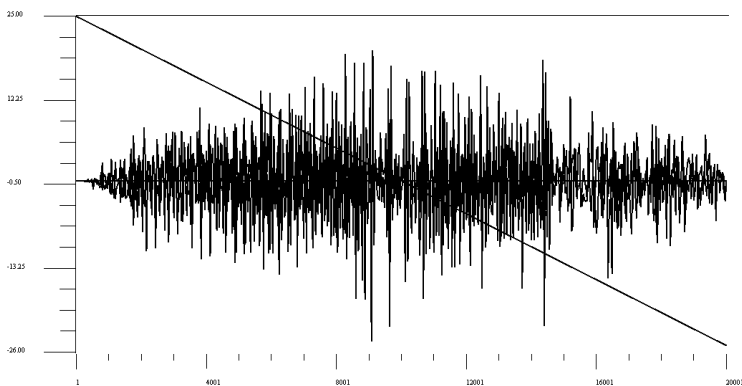


Рис. 4. Виброграммы ускорений масс 102 и 147 на временном интервале в 2 с

Наклонная прямая на рис. 4 определяет положение первой точки первого участка нагрузки Н14. Эти же виброграммы, представленные на рис. 5 в объемном исполнении, демонстрируют возможности графопостроителя «Compaq Array Visualizer».

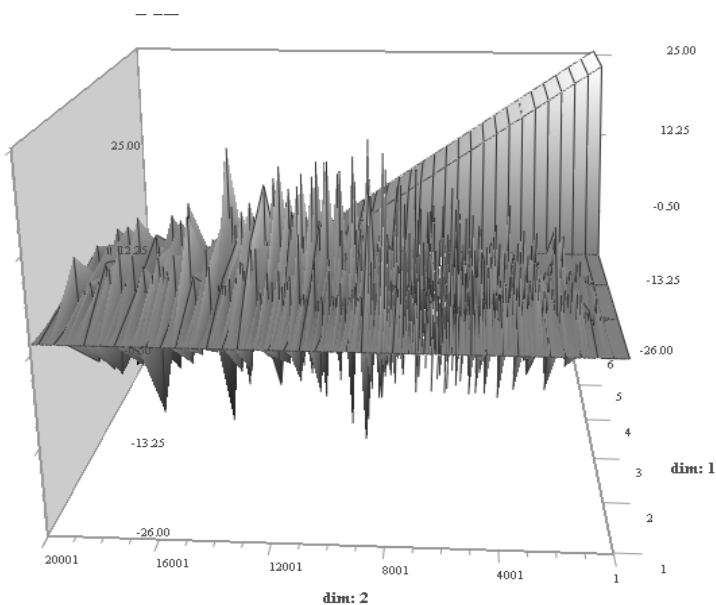


Рис. 5. Виброграммы рис. 4 в объемном представлении

Более тщательный анализ виброграммы ускорений в укрупненном масштабе показал, что при достижении нагрузкой узла 102 при скорости 40 м/с теряется контакт колес с проезжей частью при ускорениях не экстремальных, но все-таки больших ускорения свободного падения.

Траектория движения точки приложения нагрузки от первой оси при деформациях сооружения показана на рис. 6. Изломанность данной траектории обусловлена переменной податливостью второй-степенной балки, моделирующей продольные балки моста, опирающиеся на балки поперечные, тогда как последние опираются на главные фермы. Это явление известно в мостостроении под названием «балочный эффект». Траектории движения точек приложения других сил нагрузки Н14 при скорости 40 м/с мало отличаются от траектории первой.



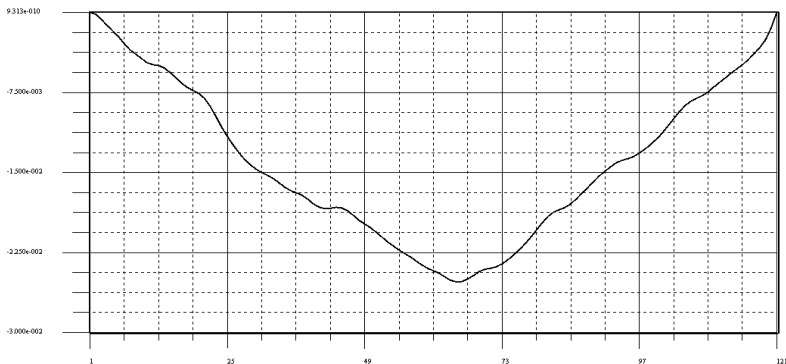


Рис. 6. Траектория движения точки соприкосновения первой оси нагрузки N14 с проезжей частью моста

**Влияние железнодорожной нагрузки LM71.** Данная нагрузка принята состоящей из четырех сосредоточенных сил по 250 кН, окаймленных двумя участками равномерно распределенной нагрузки интенсивностью 80 кН/м и длиной по 60 м. Расстояние между силами по 1,6 м, расстояния от крайних сил до участков распределенной нагрузки по 0,8 м. При скоростях движения нагрузки LM71 30 м/сек и выше по вступлении на мост сосредоточенных сил ускорения контактных точек превышали по модулю ускорение свободного падения, имело место баллистическое движение нагрузки.

На рис. 7 приведены графики перемещений двух крайних и центрального узлов второстепенной балки при скорости 30 м/с. Значения перемещений допустимы. На рис. 8 представлены виброграммы ускорений этих же точек. Имеет место отрывное, баллистическое движение. На рис. 9 показана траектория движения начальной контактной точки движущейся нагрузки LM71. Из рис. 7 и 9 следует, что линии прогибов сооружения и траектории движения масс нагрузки имеют совершенно разный смысл.

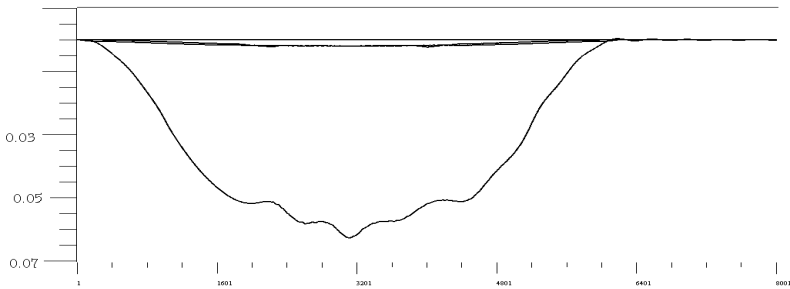


Рис. 7. График перемещений центрального узла и двух крайних от нагрузки LM71

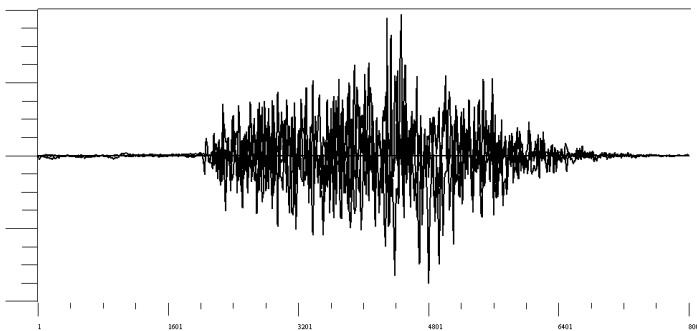


Рис. 8. Виброграммы ускорений двух крайних и центрального узлов

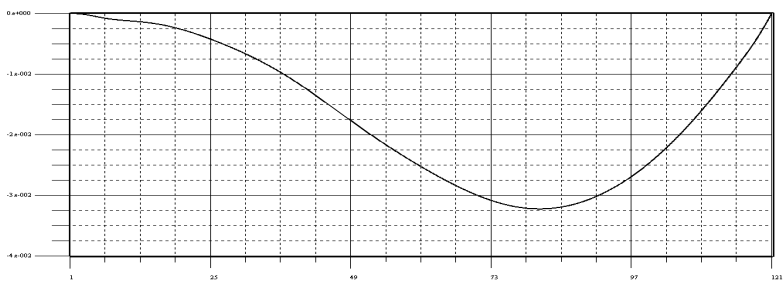


Рис. 9. Траектория движения первой контактной точки нагрузки LM71

## Выводы

1. Выведены дифференциальные уравнения движения деформируемых систем при действии на них подвижных нагрузок. В уравнениях учтено дополнительное влияние на деформации сооружения вертикальных сил инерции движущихся масс нагрузки, возникающих вследствие прогибов сооружения при колебаниях, а также центробежных сил, обусловленных криволинейностью траекторий движения масс, составляющих нагрузку.

2. Разработаны алгоритмы и составлены компьютерные программы для прямого численного интегрирования выведенных уравнений движения, вычисления динамических перемещений, скоростей и ускорений масс сооружения, а также для вычисления траекторий движения подвижных масс нагрузки.

3. Движущаяся нагрузка может иметь произвольную длину, произвольную интенсивность и произвольные разрывы. Это позволяет моделировать поезда подвижных сосредоточенных сил и распределенных нагрузок в любом сочетании.

4. Проведенные вычисления доказали, что линии прогибов сооружения и траектории движения подвижных масс нагрузок

5. Показана возможность вычисления или уточнения значений динамических коэффициентов для любых перемещений и любых усилий в любых элементах сооружения, подверженного действию нагрузок, перемещающихся с заданной скоростью.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fryba, L. *Vibration of Solids and Structures Under Moving Loads* / L. Fryba. – Prague: Academia, 1972. – 484 p.

2. Камке, Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям* / Э. Камке. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1981. – 704 с.

3. Вериго, М.Ф. *Взаимодействие пути и подвижного состава*. / М.Ф. Вериго, Ф.Я. Коган. – М.: Транспорт, 1986. – 559 с.

4. Dean, G. D. The response of an infinite railroad track to a moving vibrating mass / G. D. Dean // *Trans.ASME. J. Appl. Mech.* – 1990. – V. 57. P. 66–73.

5. Веричев, С.Н. *Динамическая жесткость балки в движущемся контакте* / С.Н. Веричев, А.В. Метрикин // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2000. – Т. 41, № 6. – С. 170 – 177.

6. Борисевич, А.А. Строительная механика / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – Минск: БНТУ, 2009. – 756 с.
7. Кругова, Е.А. Компьютерное моделирование взаимодействия железнодорожных экипажей и мостов / Е.А. Кругова, Г.В. Михеев, Р.В. Ковалев // Вестник Брянского государственного технического университета. – 2010 – № 3(27). – С. 39–49.
8. Корнеев, М.М. Стальные мосты: в 2 т./ М.М. Корнеев. – Киев: Академпрес, 2010. – Т. 1. – 532 с.
9. Корнеев, М.М. Стальные мосты: в 2 т./ М.М. Корнеев. – Киев: Академпрес, 2010. – Т. 2. – 490 с.
10. Кадисов, Г.М. Конечно-элементное моделирование динамики мостов при воздействии подвижной нагрузки / Г.М. Кадисов, В.В. Чернышов // Инженерно-строительный журнал. – 2013, № 9. – С. 56–63.
11. Круглов, В.М. О проектировании мостов на высокоскоростных магистралях России / В.М. Круглов, Е.С. Ашпиз // Интернет-журнал «Наукоедение». – Режим доступа: <http://naukovedenie.ru>. – 2014, выпуск 5(24). – 11 с.
12. Сидорович, Е.М. Компьютерное моделирование нестационарных задач динамики сооружений / Е.М. Сидорович // Перспективные направления инновационного развития строительства и подготовки инженерных кадров: Сб. научн. статей XIX Международного научно-методического семинара: в 3-х ч., Брест, 2014. – ч. 1. – С. 219–223.