



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**Белорусский национальный
технический университет**

**Кафедра «Сопротивление материалов
машиностроительного профиля»**

Л. Е. Реут

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ В МЕХАНИКЕ МАТЕРИАЛОВ

**Пособие
по учебной дисциплине
«Механика материалов»**

**Минск
БНТУ
2018**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Сопротивление материалов
машиностроительного профиля»

Л. Е. Реут

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ В МЕХАНИКЕ МАТЕРИАЛОВ

Пособие по учебной дисциплине
«Механика материалов»
для студентов специальности 1-36 01 01
«Технология машиностроения»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию
в области машиностроительного оборудования и технологий*

Минск
БНТУ
2018

УДК 620.1(075.8)

ББК 30.121я7

Р44

Рецензенты:

кафедра «Теоретическая механика и теория механизмов и машин»
Белорусского государственного аграрного технического университета
(зав. каф., д-р техн. наук, профессор *А. Н. Орда*);
канд. техн. наук, директор Республиканского компьютерного центра
машиностроительного профиля Объединенного института
машиностроения НАН Беларуси *А. В. Шмелев*

Реут, Л. Е.

Р44 Основные понятия в механике материалов : пособие по учебной дисциплине «Механика материалов» для студентов специальности 1-36 01 01 «Технология машиностроения» / Л. Е. Реут. – Минск : БНТУ, 2018. – 58 с.
ISBN 978-985-550-779-7.

Пособие – одна из книг, издаваемых автором в виде серии пособий, посвященных различным темам учебной дисциплины «Механика материалов» и включающих основные лекционные и практические вопросы, изучаемые в программе курса. Издание представляет собой вводный курс изучения дисциплины, дает основные понятия и определения, принятые в «Механике материалов», обозначает класс задач и вопросов, необходимых для инженерного образования, вводит в суть предмета.

Издание предназначено для студентов машиностроительных специальностей всех форм обучения, а также для преподавателей при подготовке к лекциям и практическим занятиям.

УДК 620.1(075.8)

ББК 30.121я7

ISBN 978-985-550-779-7

© Реут Л. Е., 2018

© Белорусский национальный
технический университет, 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
1. Предмет и задачи курса.....	5
2. Объекты исследования.....	13
3. Внешние силы. Классификация внешних сил	15
4. Внутренние усилия. Метод сечений. Основные виды деформаций	19
5. Напряжения.....	22
6. Перемещения и деформации	25
7. Реальный объект и расчетная схема.....	36
8. Основные гипотезы и допущения	48
Вопросы для самоконтроля	57
Список использованных источников	58

ВВЕДЕНИЕ

Механика материалов – фундаментальная общетехническая дисциплина, изучаемая во всех технических вузах и являющаяся основой технического образования инженера любой специальности.

Пособие представляет собой одну из книг, издаваемых автором в виде серии пособий, посвященных различным темам учебной дисциплины «Механика материалов» и включающих основные лекционные и практические вопросы, изучаемые в программе курса. Каждое пособие посвящено определенной теме и включает теоретическую часть с выводом и анализом формул, практические примеры и задачи и их решение, а также вопросы для самоконтроля, способствующие самостоятельному изучению предмета.

Тема «Основные понятия в механике материалов» – вводная часть дисциплины, которая дает основные понятия и определения, принятые в «Механике материалов», обозначает класс задач и вопросов, решаемых в инженерной практике, вводит в суть предмета.

Пособие может быть использовано студентами машиностроительных специальностей всех форм обучения в качестве литературы для изучения предмета и подготовки к экзаменам, а также преподавателями для подготовки лекций и практических занятий.

1. ПРЕДМЕТ И ЗАДАЧИ КУРСА

МЕХАНИКА – это наука, изучающая движение и равновесие материальных тел, а также возникающие взаимодействия между ними. В результате таких взаимодействий с материальными телами может происходить ряд явлений, например, изменение характера их движения, нарушение равновесия, возникновение деформаций и изменение внутреннего состояния материала, а также разрушение. В зависимости от поставленной задачи и цели исследования тела могут рассматриваться либо как *недеформируемые*, то есть не изменяющие под внешним воздействием свои размеры и форму, либо как *деформируемые*, для которых эти изменения важны и являются главным объектом изучения. В соответствии с принятой моделью для исследуемого объекта МЕХАНИКА делится на два основных раздела – «Механика недеформируемых сред» и «Механика деформируемых сред» («Механика сплошной среды»), каждый из которых изучает свою сторону поведения тел под нагрузкой. «Механика сплошной среды» включает в область своих интересов материалы различной реологии – жидкости, газы, твердые и сыпучие материалы, поэтому в свою очередь также подразделяется на ряд самостоятельных наук, изучаемых в соответствующих отраслях. В машиностроительной практике в качестве конструкционных используются твердые материалы, поэтому при изучении данного курса объектом исследования будут только *твердые тела*.

Рассмотрим, прежде всего, вопрос, касающийся понятий «*деформируемое*» и «*недеформируемое*» тело, и определим их смысловое значение.

Следует сразу заметить, что недеформируемых сред в природе не существует. Если к среде с любой реологией приложить внешнюю силу, произойдет смещение частиц внутри материала и нарушение межчастичных расстояний. Для твердого тела такое перемещение частиц приведет к изменению размеров и формы тела, а это и есть деформация. В зависимости от жесткости материала деформации могут быть большими или ничтожно малыми, упругими (исчезающими после снятия нагрузки) или остаточными, но они будут возникать обязательно. Величина и характер деформации будут зависеть от способа приложения внешних сил, их величины, от геометрии тела и свойств материала. Возрастание нагрузки всегда будет сопровождаться возрастанием деформаций

и изменением их характера. При малых нагрузках деформации, как правило, обратимы, при больших – они становятся необратимыми и дальнейшее их нарастание заканчивается разрушением тела. Таким образом, любое воздействие нагрузки всегда приводит к возникновению деформаций. *Недеформируемых тел в природе не существует.*

Однако многие науки, относящиеся к МЕХАНИКЕ, эти деформации не учитывают, так как возникающие под нагрузкой изменения размеров и формы тела не влияют на ту сторону исследования, которую данные науки изучают. Например, теоретическая механика.

Теоретическая механика изучает общие законы движения, равновесия и механического взаимодействия тел под действием внешних сил. Ни размеры тела, ни его форма, ни тем более возникающие деформации на законы движения и равновесия не влияют, поэтому здесь они во внимание не принимаются. Простейшим объектом теоретической механики является *материальная точка* массой m , то есть обладающее массой тело, размерами, формой и внутренней структурой которого в условиях исследуемой задачи можно пренебречь. Вторым опорным объектом является *абсолютно твердое тело*, обозначающее совокупность материальных точек, расстояния между которыми и распределение масс при любых внешних воздействиях остаются неизменными, а значит, такое тело под действием сил *не будет деформировано*. Таким образом, теоретическая механика, абстрагируясь от способности реального физического тела изменять свою форму под нагрузкой, то есть деформироваться, использует модель абсолютно твердого тела и по этой причине она относится к разделу «Механика *недеформируемых сред*». Так же, как и аналитическая механика, изучающая равновесие и движение механических тел математическими методами, основанными на дифференциальных и интегральных принципах механики.

Однако поведение тел под нагрузкой не ограничивается изучением их движения и равновесия. Под действием сил тела могут разрушаться или необратимо изменять свои размеры и форму, что приводит к нарушению работоспособности узлов и механизмов. Это другая сторона исследования поведения тел под нагрузкой, в которой деформации играют главную роль и напрямую связаны с прочностью и жесткостью конструкций. Учет деформаций здесь

имеет основное значение и требует принятия другой модели для исследуемого объекта – модели *деформируемого тела*.

Изучением этих вопросов занимается наука «Механика материалов», в основе которой лежит учение о *сопротивлении материалов*. Здесь изучение деформаций и связанной с ними прочности элементов является главным аспектом исследования, поэтому «Механика материалов» соответственно относится к разделу «Механика твердых *деформируемых сред*».

|| Механика материалов представляет собой область знаний, включающих науку о сопротивлении материалов с элементами теории упругости, теории пластичности и теории разрушения.

Изучением вопросов механики твердых деформируемых тел занимается также ряд смежных дисциплин – механика стержневых систем, строительная механика машин и сооружений, механика тонкостенных конструкций, теория упругости, теория пластичности и ползучести, механика разрушения и т. д., между которыми не существует строгой границы. Однако ведущую роль при решении задач прочности конструкций играют сопротивление материалов и механика материалов.

Являясь, по сути, прикладной теорией упругости, механика материалов способна решать как инженерные задачи с использованием приближенных методов расчета, так и задачи высоконаучного характера с привлечением более сложного математического аппарата.

В механике материалов одинаково важную роль играют и теоретическая часть, и экспериментальная. Экспериментальные исследования обеспечивают проверку теории и применяемых расчетных формул, но главной задачей является определение механических свойств материалов и в этом отношении механика материалов целиком базируется на материаловедении.

В теоретической части механика материалов широко применяет физику, математику и во многих вопросах опирается на теоретическую механику, хотя некоторые правила и методы теоретической механики требуют здесь дополнения и принципиального уточнения. Это хорошо иллюстрируется примерами, представленными ниже на рис. 1.1 и 1.2.

На стержень действуют две одинаковые силы $F_1 = F_2$ (см. рис. 1.1). С точки зрения теоретической механики все три случая

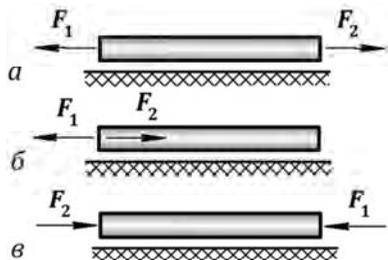


Рис. 1.1

эквивалентны, так как они получены один из другого путем переноса сил по линии действия и равновесие стержня здесь не нарушено. Но, с точки зрения механики материалов, все три случая по нагружению принципиально различны: *a* – стержень растянут; *б* – стержень не нагружен; *в* – стержень сжат. Следовательно, если рассматривать

вопрос прочности этого стержня, то такой перенос сил недопустим, так как это принципиально изменяет вид нагружения.

Балка нагружена одинаковым количеством элементов равного веса (см. рис. 1.2). С точки зрения теоретической механики, все три случая здесь также эквивалентны, так как получены один из другого путем приведения системы сил (рис. 1.2, *a*) к равнодействующей (рис. 1.2, *б*) и путем разложения ее на составляющие (рис. 1.2, *в*). Однако, с точки зрения механики материалов, это три принципиально различных условия нагружения: во втором случае балка изгибается в 1,6 раз больше, чем в первом, а в третьем – не нагружена вовсе. Таким образом, и этот пример показывает, что операции сложения и разложения сил, принятые в теоретической механике, при исследовании прочности элементов недопустимы.

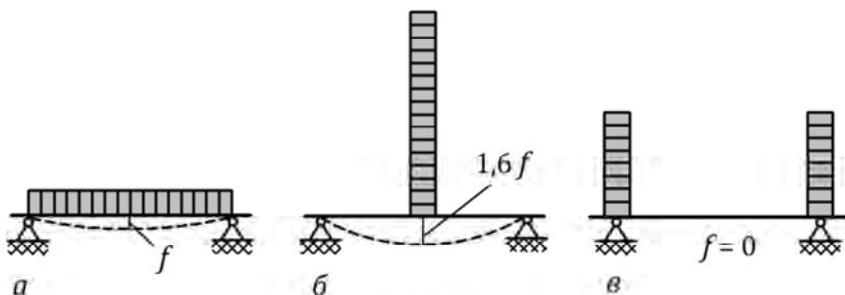


Рис. 1.2

Однако из представленных примеров не следует делать вывод, что прием переноса сил или приведение системы сил к равнодей-

ствующей нельзя вообще применять в механике материалов. Как будет показано далее, этот и многие другие методы и приемы, взятые из теоретической механики, будут широко использоваться при решении задач прочности и жесткости конструкций.

Опираясь в теоретической части на математику, физику и теоретическую механику, а в экспериментальной – на материаловедение, механика материалов, в свою очередь, служит фундаментом при изучении таких дисциплин, как детали машин и механизмов, динамика и прочность машин, строительная механика машин, механика стержневых систем и т. д., а также целого ряда специальных предметов. Поэтому «Механика материалов», основываясь на учении о *сопротивлении материалов*, является фундаментальной общетехнической дисциплиной, изучаемой во всех технических вузах по подготовке инженерных кадров, и служит основой технического образования инженера любой специальности.

В процессе эксплуатации машин и механизмов, а также строительных сооружений, элементы конструкций, взаимодействуя друг с другом, подвергаются постоянному действию нагрузок. В результате такого взаимодействия элементы могут разрушаться или получать большие остаточные деформации, что можно рассматривать как эквивалент разрушению, поскольку в большинстве случаев деталь с необратимо измененной формой не способна выполнять свои основные функции. Чтобы обеспечить безопасную, надежную и долговечную работу конструкции, каждый ее элемент уже на стадии проектирования должен быть рассчитан соответствующим образом с учетом всех условий эксплуатации. Основными расчетами в механике материалов являются расчеты деталей на **ПРОЧНОСТЬ**, **ЖЕСТКОСТЬ** и **УСТОЙЧИВОСТЬ**.

|| **ПРОЧНОСТЬ** – это способность элементов конструкции сопротивляться действию внешних сил без разрушения или получения больших остаточных деформаций.

Под разрушением понимают нарушение целостности элемента, а возникновение больших остаточных деформаций связано с необратимым изменением размеров и формы детали, которое также рассматривается как потеря прочности. Примеры работы элементов под нагрузкой и возможная потеря прочности при различных случаях нагружения представлены на рис. 1.3.

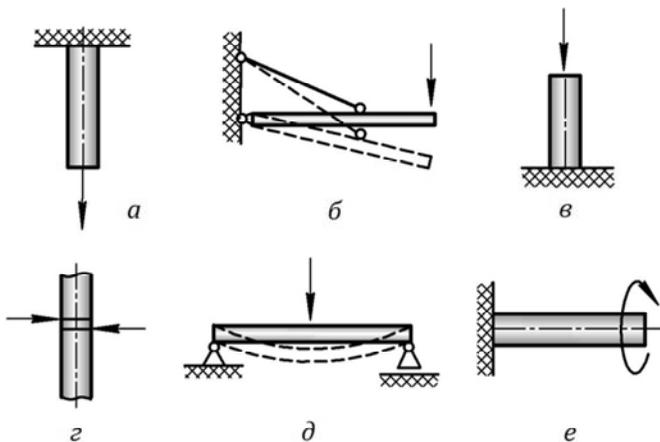


Рис. 1.3. Виды нагружения элементов:
a, б – растяжение; *в* – сжатие; *г* – сдвиг; *д* – изгиб; *е* – кручение

Расчеты на прочность предполагают определение размеров деталей и рабочих нагрузок, при которых будет исключена возможность разрушения элементов и обеспечена их надежная работа.

При длительной эксплуатации детали в условиях циклических и переменных нагрузок наступает **усталость** материала – процесс постепенного накопления в нем повреждений, проявляющийся в образовании и развитии трещин, изменяющий свойства материала и приводящий, в конечном итоге, к разрушению. Потеря прочности в этом случае называется **усталостным разрушением**, и основными расчетами для таких деталей являются расчеты на **ВЫНОСЛИВОСТЬ**, то есть на способность материала противостоять **усталости**.

|| **ЖЕСТКОСТЬ** – это способность элементов под нагрузкой сохранять первоначальные размеры и форму или деформироваться в пределах установленных норм.

Расчеты на прочность являются основными расчетами и, если прочность элемента не обеспечена, выполнять для него другие расчеты не имеет смысла. Однако обеспечение прочности не всегда является достаточным условием успешной эксплуатации конструкции. На практике встречаются случаи, когда нарушение ее работоспособности происходит не от потери прочности, а от

потери жесткости, то есть вследствие значительных деформаций элементов, как это показано на примере зубчатого зацепления (рис. 1.4). Поэтому для таких конструкций расчеты на жесткость обязательны и необходимы. Расчеты на жесткость предполагают оценку упругой податливости элемента и определение для него таких нагрузок и размеров, при которых возникающие в нем деформации не превышают заданных технических норм.

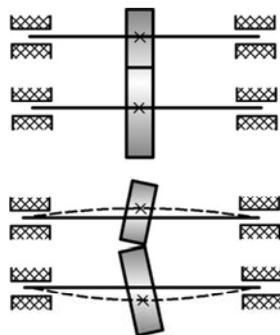


Рис. 1.4

УСТОЙЧИВОСТЬ – это способность элементов конструкций сохранять под нагрузкой первоначальную равновесную форму.

В механике при изучении равновесия твердых тел под действием внешних сил рассматриваются три формы равновесия: *устойчивое*, *неустойчивое* и *безразличное* (критическое). Любое отклонение тела от положения равновесия приводит к возникновению сил, которые при устойчивом равновесии возвращают тело в исходное положение, при неустойчивом – необратимо увеличивают это отклонение, а при безразличном – эти силы перемещают тело в новое положение равновесия. В отношении упругих тел, работающих под нагрузкой, потеря устойчивости наступает тогда, когда форма упругого равновесия перестает быть устойчивой и заменяется другой, критической или неустойчивой (это явление называется *бифуркацией*). Критическое и тем более неустойчивое равновесие является потенциально опасными для элемента, так как в работающем механизме они не могут сохраняться бесконечно долго. Неустойчивое равновесие неминуемо будет потеряно, элемент внезапно и резко изменяет свою форму, деформации быстро нарастают и элемент разрушается. Примеры потери устойчивости при сжатии и изгибе представлены на рис. 1.5. В основном потере устойчивости подвержены

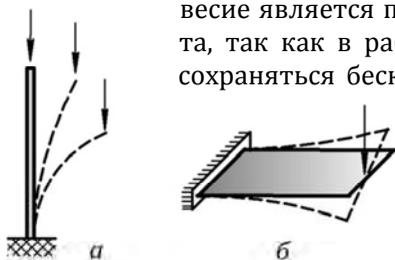


Рис. 1.5. Потеря устойчивости: а – при сжатии; б – при изгибе

тонкостенные элементы и элементы большой длины – тонкие длинные стержни, пластины, цилиндрические и сферические оболочки и т. д. Для таких элементов, часто встречающихся в инженерных конструкциях, расчет на устойчивость является главным и обязательным.

Расчеты, выполняемые в механике материалов, бывают **проверочные** и **проектировочные**. *Проверочный* расчет выполняется для детали с уже заданными размерами и для заданных условий ее эксплуатации. *Проектировочный* расчет предполагает, исходя из требований, предъявляемых к детали, разработку ее формы и расчет размеров, а также определение наибольшей безопасной нагрузки на нее. Проверочные и проектировочные расчеты неразрывно связаны между собой и постоянно «переплетаются» на протяжении всего процесса конструирования детали.

Помимо основных требований по прочности, жесткости и устойчивости, к элементам предъявляются также требования *надежности* и *долговечности*. **Надежность** – это свойство объекта сохранять работоспособное состояние в течение некоторого времени или некоторой наработки, а **долговечность** – это свойство длительно сохранять работоспособность до наступления предельного состояния при определенных условиях эксплуатации. Для ответственных элементов дополнительным требованием является способность выдерживать *аварийные нагрузки (перегрузки)*.

Немаловажным требованием, предъявляемым к элементам конструкций, является требование **экономичности**. Понятие экономичности включает в себя *стоимость материала* и его *количество*, требуемое для детали, а также ее *технологичность*, то есть возможность изготовления без применения специальных технологий, дорогостоящего оборудования и инструмента. Выбор материала должен быть рациональным, основанным на его механических свойствах, способных обеспечить прочность детали в условиях эксплуатации. Размеры детали также должны быть рациональными и обоснованными. Не следует думать, что для детали с большими размерами будет обеспечена дополнительная прочность. Это ошибочное представление, так как лишний вес не является гарантом прочности, а часто именно он, как внешняя сила, способствует разрушению элемента. И это особенно опасно, когда деталь работает в условиях динамических нагрузок, например, при колебаниях, вращательном движении и т. д.

Но часто кроме основных требований к элементам конструкций предъявляется целый ряд *специальных* требований, что связано с особыми условиями работы конструкции. Например, требование легкости (в авиационной технике), прочности в условиях высоких или низких температур, больших скоростей нагружения и т. д. Как правило, они приводят к повышению стоимости деталей, однако их необходимо выполнять, так как это связано с безопасностью и надежностью работы конструкции.

Таким образом, обобщая вышесказанное относительно области исследований механики материалов, этой науке можно дать следующее определение:

Механика материалов, основываясь на учении о сопротивлении материалов, представляет собой науку об инженерных методах расчета деталей машин и механизмов на прочность, жесткость и устойчивость при одновременном выполнении требований надежности, долговечности и экономичности.

2. ОБЪЕКТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Несмотря на многообразие форм всех существующих деталей машин, механизмов и строительных сооружений, их можно привести к четырем простейшим формам: **брус**, или **стержень** (рис. 2.1), **пластина** (рис. 2.2), **оболочка** (рис. 2.3) и **массив** (рис. 2.4).

Брус или стержень – это тело, один из размеров которого (длина l) значительно больше двух других размеров (размеров поперечного сечения – a, b), то есть $l \gg a, b$.

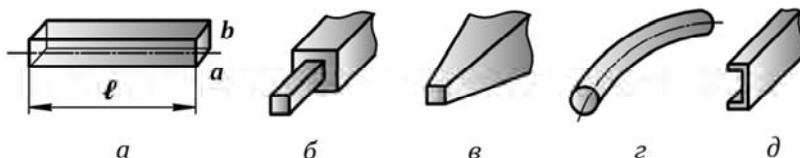


Рис. 2.1. Брус или стержень:

a – призматический; b – ступенчатый; $в$ – переменного сечения;
 $г$ – кривой; $д$ – тонкостенный

Стержни бывают постоянного и переменного сечения, ступенчатые и тонкостенные. Стержни постоянного сечения называют *призматическими*. Основной геометрической характеристикой бруса или стержня является его *ось* – линия, проходящая через центры тяжести поперечных сечений. *Поперечным сечением* называется сечение, перпендикулярное к геометрической оси стержня. В зависимости от формы оси различают стержни *прямые* и *кривые*.

Их расчет представляет собой *одномерную (линейную)* задачу, решение которой зависит от одной переменной координаты.

Пластина – это тело, у которого один из размеров (толщина t) много меньше двух других – a , b , то есть $t \ll a, b$.



Рис. 2.2. Пластина

Пластины могут быть круглыми, прямоугольными или иметь другую форму. Пластинами являются плоские днища и крышки резервуаров, диски турбомашин, перекрытия сооружений и т. д. Задачи по расчету пластин являются *двумерными (плоскими)*, и их решение определяется двумя переменными координатами.

Оболочка – это тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расположенными на близком расстоянии друг от друга.



Рис. 2.3. Оболочка

Основной геометрической характеристикой пластины и оболочки является *срединная поверхность* – геометрическое место точек, равноудаленных от обеих поверхностей. Если срединная поверхность плоская – это пластина, если криволинейная – оболочка. По форме срединной поверхности оболочки бывают цилиндрические, конические, сферические и др. К оболочкам также относятся неплоские стенки тонкостенных резервуаров, котлов, обшивка крыла самолета, корпуса подводных лодок, аппаратов химического оборудования и т. д.

Пластины и оболочки могут иметь постоянную или переменную толщину.

Массив – это тело, у которого все три размера имеют величину одного порядка.

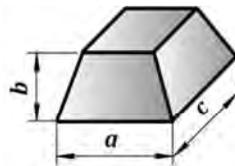


Рис. 2.4. Массив

Задачи по расчету массивных тел являются трехмерными, или пространственными.

В механике материалов преимущественно изучаются *элементы стержневого типа* и составленные из них конструкции. При этом рассматриваются стержни, обладающие достаточной жесткостью, то есть не претерпевающие значительных деформаций. Элементы низкой жесткости – гибкие брусья, упругие нити, оболочки и пластины – рассматриваются в прикладной теории упругости, позволяющей более точно поставить задачу без упрощающих гипотез и допущений и, следовательно, получить более точное решение.

3. ВНЕШНИЕ СИЛЫ. КЛАССИФИКАЦИЯ ВНЕШНИХ СИЛ

При работе любого механизма элементы взаимодействуют друг с другом и, воспринимая воздействие со стороны соседних элементов, передают его другим деталям конструкции. Находясь в таком взаимодействии, элементы машин и механизмов подвергаются постоянному действию нагрузок. *Мерилом механического взаимодействия тел является СИЛА*, а поэтому каждый элемент находится под действием сил, создаваемых со стороны других элементов. Однако при расчете такого элемента нет необходимости изображать всю конструкцию или узел целиком. Достаточно показать элемент изолированно, а действие на него контактирующих деталей заменить силами, которые для него являются *ВНЕШНИМИ*. В дальнейшем под этим термином будем понимать любую передачу давления или движения на рассматриваемый элемент со стороны окружающей среды или соседних частей конструкции.

Внешние силы по определенным признакам могут быть классифицированы следующим образом:

① **Активные и реактивные силы**

Активные – это силы (их называют «нагрузкой»), воздействующие на элемент в соответствии с условиями работы конструкции, то есть заложенные в основу ее функционирования.

Реактивные – это силы, действующие со стороны опор, то есть реакции опор. Так как любой элемент, находящийся в составе конструкции, закреплен внутри нее, то действующие на него активные силы передаются на опоры и возникают реакции опор. Следует помнить, что реакции опор – это тоже внешние силы, действующие на элемент, но со стороны опор. Они дополняют систему сил до равновесной и, как любая внешняя нагрузка, также участвуют в расчетах на прочность.

② *Объемные и поверхностные силы*

Объемные – это силы, которые распределены по объему тела и приложены к каждой единице объема. Примерами таких сил является сила тяжести, инерции, магнитного притяжения.

Поверхностные – это контактные силы, приложенные к участкам поверхности. Они характеризуют непосредственное контактное взаимодействие рассматриваемого элемента с окружающими объектами или средой (вода, воздух, пар и т. д.).

③ *Сосредоточенные и распределенные нагрузки*

Сосредоточенную нагрузку рассматривают двух видов – *сосредоточенная сила* и *сосредоточенный момент* (рис. 3.1):

★ *Сосредоточенная сила* (F) – это сила, которая передается на элемент через небольшую площадку контакта, имеющую размеры значительно меньшие, чем размеры нагружаемого элемента. Поэтому принято считать, что эта сила условно приложена в точке. Размерность силы – [Н] или [кН]: $1\text{кН}=10^3\text{Н}$.

★ *Сосредоточенный момент* (m) – это момент пары сил, плоскость действия которого приложена в определенном сечении элемента. Положение плоскости момента по отношению к оси стержня определяет вид деформации, создаваемый этим моментом. Например, момент m_1 вызывает изгиб стержня, момент m_2 – кручение (рис. 3.1). Размерность момента – [Н·мм] и [кН·м]: $1\text{кН}\cdot\text{м}=10^6\text{Н}\cdot\text{мм}$.

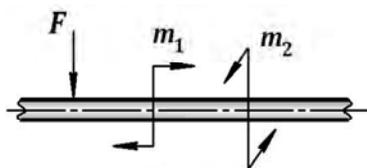


Рис. 3.1. Сосредоточенные нагрузки

Распределенные нагрузки – это нагрузки, приложенные непрерывно к участкам больших размеров; при составлении расчетной схемы эти нагрузки нельзя заменять сосредоточенными силами,

они должны оставаться распределенными. В зависимости от способа приложения такой нагрузки – на протяжении некоторой длины, площади или объема – различают:

★ *Объемно-распределенные* нагрузки, то есть нагрузки, распределенные по объему тела. Как было сказано выше, примером такой нагрузки является собственный вес, сила инерции, сила магнитного притяжения. Размерность – $[кН/м^3]$.

★ *Поверхностно-распределенные* нагрузки, то есть распределенные по некоторой поверхности (давление воды на плотину, ветровая нагрузка на стену и т. д.). Размерность – $[кН/м^2]$.

★ *Линейно-распределенные* – это нагрузки, распределенные по длине элемента. Такая нагрузка иногда называется *погонной*. Для элементов стержневого типа, учитывая небольшие размеры поперечного сечения по сравнению с длиной, их собственный вес рассматривают как линейно-распределенную нагрузку. Размерность – $[кН/м]$.

Любая *распределенная нагрузка характеризуется интенсивностью* q – единицей силы, отнесенной к единице объема, площади или длины для рассмотренных выше видов распределенных нагрузок соответственно.

В механике материалов главным образом рассчитываются элементы стержневого типа, поэтому основное внимание будет уделено линейно-распределенной нагрузке. Характер ее изменения по длине участка стержня представляет график, называемый *грузовой эпюрой*. Линейно-распределенная нагрузка может быть

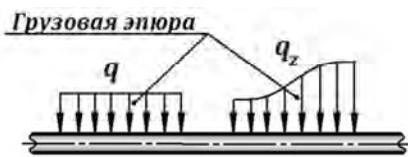


Рис. 3.2. Линейно-распределенная нагрузка

равномерно распределенной, то есть иметь постоянную интенсивность на протяжении всего участка действия, а также неравномерно распределенной с интенсивностью, изменяющейся по некоторому закону (рис. 3.2).

При решении задач, связанных с распределенной нагрузкой, возникает необходимость определения величины и точки приложения ее равнодействующей. Следует помнить, что равнодейст-

вующая линейно-распределенной нагрузки равна площади грузовой эпюры и приложена в ее центре тяжести.

④ Статические и динамические нагрузки

Статические – это нагрузки, которые медленно и плавно прикладываются к элементу, возрастая от нуля до конечного значения, а затем на протяжении времени остаются неизменными ни по величине, ни по направлению, ни по точке приложения.

Из физики известно, что любая сила является причиной изменения состояния движения и это изменение всегда происходит с ускорением. Наличие ускорения вызывает появление сил инерции, направленных в сторону, обратную ускорению, и воздействующих на элемент как дополнительная нагрузка. При значительных ускорениях силы инерции весьма ощутимы, поэтому расчет элементов следует производить с учетом их воздействия. Однако при статическом нагружении, когда силы медленно и плавно прикладываются к элементу, ускорения настолько незначительны, что ими и возникающими силами инерции можно пренебречь.

Динамические – это нагрузки, изменяющиеся во времени с большой скоростью (ударные, импульсные, внезапные нагрузки, резко воздействующие на элемент, циклические и повторно-переменные нагрузки, колебания и т. д.). Все динамические нагрузки характеризуются значительными ускорениями и силами инерции, которыми здесь пренебрегать нельзя и которые необходимо учитывать при выполнении расчетов на прочность.

⑤ Постоянные и временные нагрузки

Внешние нагрузки различаются не только по способу и скорости их приложения, но и по длительности действия. Иногда в расчетах на прочность фактор длительности воздействия нагрузки является принципиально важным. Например, при вынужденных колебаниях систем. Если предполагается, что элемент будет работать в таких условиях в течение короткого времени (*временная нагрузка*), то основной акцент в расчетах делается на возможное возникновение резонанса и его предотвращение. Если же упругие колебания элемента предполагаются в течение длительного времени (*постоянная нагрузка*), то такая нагрузка рассматривается как циклическая и здесь основные расчеты будут связаны с усталостной прочностью материала и возможностью усталостного разрушения элемента.

4. ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ. МЕТОД СЕЧЕНИЙ. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ДЕФОРМАЦИЙ

Каждое тело состоит из частиц, которые находятся на определенном расстоянии друг относительно друга и удерживаются на этом расстоянии силами внутреннего взаимодействия. Эти силы определяют целостность твердого тела, они всегда уравновешены и в механике материалов не рассматриваются.

Но если к телу приложить внешнюю нагрузку, частицы смещаются, межчастичные расстояния нарушаются и элемент деформируется. При таком изменении межчастичных расстояний в материале всегда возникают *ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ*, представляющие собой проявление межмолекулярного взаимодействия. Они называются *силами упругого сопротивления* или *силами упругости*, их вектор всегда направлен в сторону, обратную деформации, а значит, они стремятся вернуть частицы в исходное состояние и восстановить первоначальные размеры и форму элемента. *Силы упругости* являются исключительно результатом действия внешних сил и при отсутствии внешней нагрузки не возникают.

Для оценки состояния материала и прочности элемента внутренние силы играют основную роль, поэтому при выполнении инженерных расчетов их определение является крайне важным и первостепенным вопросом.

В механике материалов для определения внутренних сил существует так называемый *МЕТОД СЕЧЕНИЙ*, который позволяет «увидеть» эти силы, установить направление их действия и вычислить по величине. При этом данный *метод* определяет только *равнодействующие* внутренних сил, приложенные в центре тяжести сечения, однако именно с них начинается решение любой задачи: по их направлению устанавливается вид деформации, которой подвергается элемент, а численное значение используется во всех расчетных формулах.

Основная идея метода заключается в том, что если элемент находится в равновесии, значит, в равновесии будет находиться любая отсеченная его часть. А это означает, что внутренние силы, возникающие в любом поперечном сечении, можно определить из условия равновесия отсеченной части, рассматривая их как внешние силы, действующие на эту часть. Более подробно суть *метода сечений* представлена ниже (рис. 4.1).

Рассмотрим элемент, нагруженный системой сил (активных и реактивных), уравновешенных между собой:

Мысленно рассекаем элемент плоскостью (рис. 4.1, а) и одну из частей (любую) отбрасываем, «открывая» таким образом сечение (рис. 4.1, б).

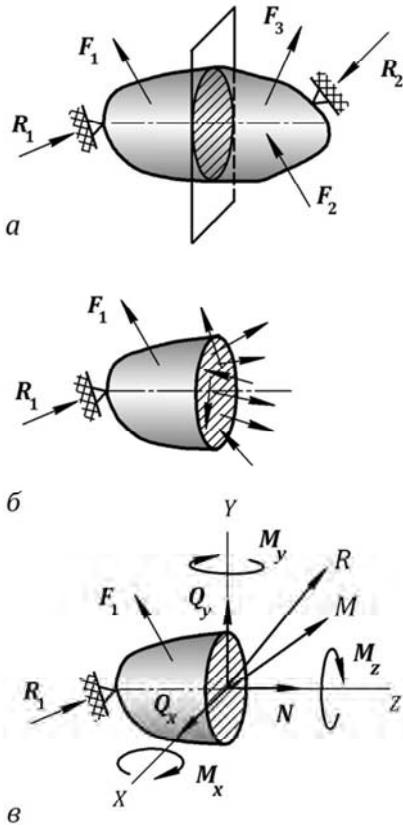


Рис. 4.1. Метод сечений для определения внутренних сил

★ Раскладываем *главный вектор* R и *главный момент* M на направление осей и плоскостей выбранной системы координат и получаем шесть составляющих – *три силы* и *три момента*, которые называются *внутренними силовыми факторами*, или *внутренними усилиями* (рис. 4.1, в). Каждое из внутренних усилий имеет строгое

★ Действие отброшенной части на оставшуюся заменяем системой внутренних сил, которые определяют взаимодействие между частицами элемента, расположенными по разные стороны проведенного сечения. Так как реальное тело представляет собой конгломерат произвольно ориентированных зерен, внутренние усилия от их граней будут иметь различное направление и величину, создавая сложный характер распределения сил по сечению (рис. 4.1, б).

★ Согласно правилу приведения системы сил к одной точке, изучаемому в теоретической механике, переносим эти силы к центру тяжести сечения и получаем новую систему сил с присоединенными к ним парами. Сложив соответствующие векторы по правилу многоугольника, приводим систему сил к *главному вектору* R и *главному моменту* M (рис. 4.1, в).

название, определенное расположение относительно сечения и связано со своим видом деформации:

N – **продольная сила** – направлена по оси элемента перпендикулярно к сечению, связана с деформацией **РАСТЯЖЕНИЕ** или **СЖАТИЕ** (в зависимости от направления);

Q_x, Q_y – **поперечные силы** – лежат в плоскости сечения и связаны с деформацией **СДВИГ**;

M_x, M_y – **изгибающие моменты** – создают изгиб элемента относительно соответствующих осей, то есть вызывают **ИЗГИБ**;

M_z – **крутящий момент** – связан с деформацией **КРУЧЕНИЕ**.

★ Для определения численного значения внутренних усилий составляем уравнения равновесия для отсеченной части элемента:

$$\begin{aligned}\sum X = 0 &\rightarrow Q_x, & \sum M_x = 0 &\rightarrow M_x; \\ \sum Y = 0 &\rightarrow Q_y, & \sum M_y = 0 &\rightarrow M_y; \\ \sum Z = 0 &\rightarrow N, & \sum M_z = 0 &\rightarrow M_z.\end{aligned}\tag{4.1}$$

На основании формул (4.1) можно сформулировать *общее правило* определения внутренних усилий:

Внутренние силы N, Q_x, Q_y численно равны алгебраической сумме проекций на соответствующие оси всех внешних сил (включая реакции опор), приложенных по одну сторону от сечения.

Внутренние моменты M_x, M_y, M_z численно равны алгебраической сумме моментов относительно соответствующих осей всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения.

Таким образом, если известна полная система внешних сил, действующих на тело, то, используя метод сечений, всегда можно определить внутренние усилия в любом произвольно взятом его сечении. Данное положение является основополагающим обстоятельством в механике твердого деформируемого тела.

Если в сечении действует только одно внутреннее усилие, а остальные равны нулю, значит, мы имеем дело с *простейшей деформацией* и таких деформаций четыре:

– **растяжение** или **сжатие** (они рассматриваются как одна деформация, но только в отношении применяемых расчетных формул, а с точки зрения механических свойств, проявляемых материалом при растяжении и сжатии, это два различных случая нагружения);

– **сдвиг** (в одном направлении);

– **изгиб** (в одной плоскости);

– **кручение**.

Если в сечении действуют два и более внутренних усилия, возникает комбинация простейших деформаций и такой вид нагружения называется *сложным сопротивлением*.

В заключении к вопросу о внутренних силах следует заметить, что они по принципу действия и противодействия являются взаимными: правая часть элемента действует на левую так же, как левая на правую. Поэтому, если в элементе (см. рис. 4.1) отбросить левую часть и рассматривать то же сечение, но на правой части, внутренние силы в каждой точке здесь будут иметь такую же величину, но обратное направление. А это значит, что при выполнении метода сечений отбрасывать можно любую часть элемента (левую или правую, верхнюю или нижнюю), но предпочтение следует отдавать наиболее простому варианту.

5. НАПРЯЖЕНИЯ

Внутренние усилия, рассмотренные выше и определяемые методом сечений, являются величинами *равнодействующими*, приложенными в центре тяжести сечения. Они представляют собой статический эквивалент всех *внутренних сил*, действующих в сечении, и не дают представление о том, чему равны эти силы в каждой точке сечения и каков характер их распределения. В то же время для оценки прочности элемента именно эта информация является наиболее важной. Так как разрушение или появление текучести начинается в наиболее нагруженных точках, то для исследования прочности и прогнозирования наступления предельного состояния необходимо знать закон распределения внутренних сил по сечению.

Как было сказано выше, любая распределенная нагрузка характеризуется интенсивностью. *Численной мерой интенсивности внутренних сил в сечении является НАПРЯЖЕНИЕ*.

Рассмотрим сечение элемента (рис. 5.1) и выделим здесь в окрестности некоторой точки бесконечно малую площадку размером ΔA , в пределах которой равнодействующая внутренних сил равна ΔR . В механике материалов неявно предполагается, что внутренние усилия в площадках, выделяемых в окрестности точки, распределены равномерно и поэтому средняя величина внутренних сил здесь может быть определена как $R_{\text{ср}} = \Delta R / \Delta A$. Если размеры площадки бесконечно уменьшать, то она в конечном итоге «стянется» в точку, а предел отношения $\Delta R / \Delta A$ даст нам полное напряжение p в точке:

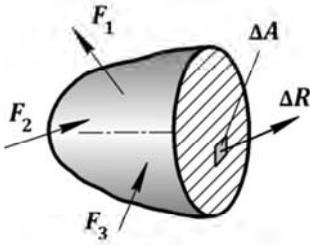


Рис. 5.1

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} (\Delta R / \Delta A) = p.$$

Напряжение в точке тела - это внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади.

Размерность напряжения - $[MPa] = H/mm^2$ ($1MPa = 10 \text{ кг} / \text{см}^2$).

Полное напряжение не является удобной мерой оценки внутренних сил, поэтому его следует разложить на составляющие, каждое из которых имеет свое направление в сечении (рис. 5.2):

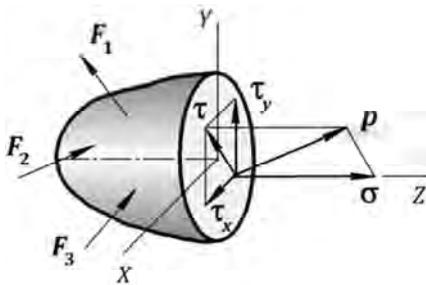


Рис. 5.2

σ - нормальное напряжение, действует перпендикулярно сечению;

τ - касательное напряжение, лежит в плоскости сечения и его, в свою очередь, можно разложить по направлению координатных осей.

Тогда полное напряжение в точке будет

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} = \sqrt{\sigma^2 + \tau_x^2 + \tau_y^2}.$$

Разложение полного напряжения на нормальное и касательное имеет определенный физический смысл. Нормальные напряжения возникают тогда, когда частицы материала, расположенные по обе стороны от сечения, стремятся отдалиться или приблизиться друг к другу. Касательные напряжения являются результатом сдвига частиц друг относительно друга в плоскости сечения. Таким образом, нормальные напряжения связаны с изменением размеров и объема элемента, но не искажают его форму, то есть не искажают первоначально прямые углы. Касательные напряжения, наоборот, вызывают искажение формы элемента, но не изменяют его объем. Это принципиально разные виды деформирования, которые требуют соответствующих расчетов с участием соответствующих напряжений. Поэтому в дальнейшем при оценке прочности элементов будем пользоваться не понятием p , а его составляющими – нормальным σ и касательным τ напряжениями.

На рис. 5.2 рассмотрены напряжения в заданной точке конкретного сечения. Но если через *эту же точку* провести другие секущие площадки, ориентированные по-другому, то в ней, но в новых сечениях, будут действовать уже другие нормальные и касательные напряжения. Таким образом, в каждой точке элемента величина и направление напряжений определяются не только действующей внешней нагрузкой, но и ориентацией сечения, проходящего через точку.

Совокупность нормальных и касательных напряжений, действующих в различных секущих площадках, проходящих через данную точку, называется напряженным состоянием в точке.

Исследование напряженного состояния в точке является важнейшей задачей при проектировании элемента и моделировании его работы под нагрузкой. Оно предполагает расчет и анализ напряжений в точке тела по всем направлениям. Определив величину и направление большего из этих напряжений, для обеспечения прочности элемента его следует ограничить некоторым допустимым значением, безопасным для данного материала:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]; \quad \tau_{\max} \leq [\tau]. \quad (5.1)$$

Вышеуказанная запись (5.1) называется *условием прочности*, которое является главным основанием для проведения любых расчетов на прочность.

Как было рассмотрено ранее, каждое внутреннее усилие – $N, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_z$ и каждая составляющая напряжений – σ и τ являются результатом возникновения определенного вида деформаций. На основании этого, существуют зависимости, которые связывают внутренние усилия только с соответствующими им напряжениями:

$$\begin{aligned} N &= \int \sigma dA, & M_x &= \int (\sigma y) dA; \\ Q_x &= \int \tau_x dA, & M_y &= \int (\sigma x) dA; \\ Q_y &= \int \tau_y dA, & M_z &= \int (\tau_x y + \tau_y x) dA. \end{aligned} \quad (5.2)$$

При изучении каждого вида деформаций зависимости (5.2) будут использованы при выводе конкретных расчетных формул для напряжений.

6. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ

В механике материалов рассматриваются реальные физические тела, которые под действием внешних сил деформируются, то есть изменяют свои размеры и форму. Это происходит из-за перемещения частиц внутри материала и нарушения межчастичных расстояний. В большинстве случаев изменения размеров и формы после приложения нагрузки невелики и не представляют опасности для работы конструкции. Однако иногда, когда деформации в элементах превышают некоторые установленные нормы, работоспособность системы может быть нарушена, даже если все ее элементы сохранили свою прочность и целостность. Это нарушение происходит из-за *потери жесткости*, что для работы конструкции также опасно, как и потеря прочности. Поэтому в ряде случаев кроме *расчетов на прочность*, которые являются главными и основными, обязательными для элементов и узлов также являются *расчеты на жесткость*.

При изучении вопроса деформаций следует помнить, что в механике материалов рассматриваются в основном системы *кине-*

матически неизменяемые, то есть системы, на которые наложены связи, достаточные, чтобы полностью исключить ее перемещение в пространстве или на плоскости как жесткого целого. В этом случае предполагаются только перемещения частиц внутри материала и деформации, вызванные этими перемещениями. Если под действием внешних сил система движется, она является *кинематически изменяемой* и называется *механизмом*. Деформации, возникающие в таких системах, также определяются только внутренним перемещением частиц и изменением межчастичных расстояний, а *составляющая перемещений, связанная с переносом тела как жесткого целого, из расчета исключается*. Таким образом, любая система, работающая под нагрузкой, при изучении в ней деформаций принимается как *кинематически неподвижная*.

Перемещения

Перемещения бывают *линейные* и *угловые*. Они представляют собой изменения положения точек внутри или на поверхности тела, вызванные действием внешних сил, и приводят к изменению размеров и формы элемента. *Линейные* перемещения предполагают поступательное движение точки вдоль прямой линии, а *угловые* характеризуются поворотом отрезка, соединяющего две близко расположенные точки, на некоторый угол.

Линейные и *угловые* перемещения – величины *абсолютные* и измеряются в единицах длины и градусах соответственно.

Рассмотрим элемент (рис. 6.1) и выделим в нем до его нагружения некую точку B . После приложения внешней нагрузки все точки тела меняют свое положение и рассматриваемая точка B перемещается в положение B_1 .

Вектор $\overline{BB_1}$, начало которого лежит в точке недеформированного тела, а конец – в той же точке деформированного тела, называется вектором полного перемещения точки.

Раскладываем вектор $\overline{BB_1}$ по координатным осям и получаем проекции u, v, w , определяющие *линейные перемещения* точки A в направлении осей $X-Y-Z$ соответственно. На основании условия сплошности материала вектор полного перемещения каждой точ-

ки, а также его проекции, являются непрерывными функциями координат точек $u = f(x, y, z)$, $v = f(x, y, z)$, $w = f(x, y, z)$, а значит, перемещения связаны с некоторой системой отсчета и в разных точках тела они неодинаковы.

Если внутри элемента представить отрезок прямой, расположенный определенным образом, то после нагружения тела он повернется на некоторый угол – это и будет *угловое перемещение*. Угол поворота также характеризуется вектором и его можно разложить по координатным плоскостям в системе осей $X-Y-Z$.

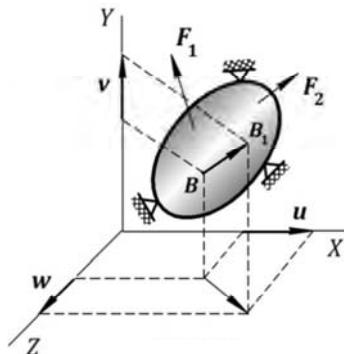


Рис. 6.1

По сравнению с размерами элементов перемещения точек, рассматриваемые выше, являются величинами бесконечно малыми, и это позволяет при решении многих инженерных задач принимать целый ряд принципиальных допущений и упрощений, о которых будет рассказано ниже.

Деформации

При определении перемещений, возникающих в деформируемом элементе, следует принимать во внимание, что смещения точек могут происходить не только как их собственные перемещения, вызванные непосредственным действием нагрузки, но также могут быть связаны с переносом точки за счет перемещений, возникающих в других нагруженных областях тела. В последнем случае смещение точки происходит за счет перемещения части элемента как жесткого целого и никак не связано с действующей (или отсутствующей) в точке нагрузкой. Пример такого перемещения представлен на рис. 6.2,



Рис. 6.2

где для рассмотренных элементов все точки участка BC перемещаются не от непосредственного действия силы F_1 , а за счет удлинения (рис. 6.2, а) или изги-

ба (рис. 6.2, б) участка AB . Если в точке C приложить силу F_2 , то перемещения точек того же участка BC будут представлять собой суммарный результат, включающий перемещение от силы F_2 и перемещение участка BC как жесткого целого от силы F_1 . При таком нагружении суммарное перемещение справедливо для всех точек рассмотренных элементов.

Зависимость перемещений каждой точки от смещения других точек не позволяет принимать *ПЕРЕМЕЩЕНИЕ* в качестве *характеристики степени деформирования в данной точке*. Для оценки этой величины слагаемое, связанное с переносом точки вместе с частью элемента как жесткого целого, необходимо исключить и рассматривать только перемещение точки от действующей здесь нагрузки. Учитывая, что перемещения в точках неодинаковы и при переходе от одной точки к другой изменяются, степень деформирования в них также будет различна. Для оценки интенсивности изменения этих величин по объему элемента и, соответственно, интенсивности изменения его размеров и формы, вводится понятие *ДЕФОРМАЦИИ*. При этом следует помнить, что деформация связана только с перемещениями от действующей в точке нагрузки, из которых исключено перемещение тела как жесткого целого.

Термин «деформация» используется в двояком понимании. С одной стороны, он применяется в *качественном смысле* как буквально любое изменение размеров и формы тела, но с другой стороны – в теории упругости и механике материалов – понятие «деформация» имеет строгое *количественное значение*.

|| *Деформация – это количественная мера изменения геометрических размеров в окрестности точки.*

Деформации бывают *абсолютные* и *относительные, линейные и угловые*.

АБСОЛЮТНАЯ деформация характеризует интегральную реакцию тела на внешнее воздействие и выражает абсолютное изменение какой-либо величины. *Абсолютная линейная деформация* определяется как разность между конечным и исходным расстоянием между точками деформируемого тела, а *абсолютная угловая деформация* – как разность между первоначально прямым и конечным углом, образуемым двумя отрезками, проходящими через

точку деформируемого объекта. Абсолютная линейная деформация связана с линейными перемещениями точек и проявляется в изменении размера элемента, а абсолютная угловая деформация определяется угловыми перемещениями и проявляется в искажении его формы, то есть изменении прямых углов. Примером абсолютной деформации является удлинение стержня, прогиб балки, угол закручивания вала и т. д. Абсолютные деформации не связаны с системой отсчета, они зависят только от начальных размеров элемента и не характеризуют механические свойства материала.

Абсолютные линейные и угловые деформации измеряются в единицах длины и градусах соответственно.

Абсолютные деформации, обуславливающие изменение размеров и формы элемента, приводят к перемещению его участков, сечений, узловых точек и т. д. Однако не следует путать понятия «деформация» и «перемещение», они не эквивалентны и в общем случае не совпадают по величине и направлению. В отдельных схемах нагружения перемещения равны деформациям и возникают в том же направлении, однако чаще деформации и создаваемые ими перемещения различны по величине и происходят в разном направлении. Например, в стержневой системе (рис. 6.3, а) удлинение стержня BC совпадает с перемещением его сечения B ,

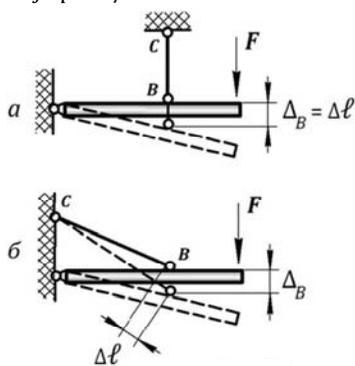


Рис. 6.3

однако при другом положении стержня (рис. 6.3, б) его удлинение $\Delta\ell$ и перемещение сечения B уже будут иметь различную величину и направление. Следует также учитывать, что иногда перемещения вообще не связаны с деформацией и возникают в результате переноса части элемента как жесткого целого. Пример такого перемещения рассмотрен выше (см. рис. 6.2, а, б). Поэтому, исследуя деформации и перемещения, необходимо понимать, что эти понятия не эквивалентны и в общем случае представляют собой разные вещи.

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ деформация выражает относительное изменение какой-либо величины и определяется отношением абсолютного изменения этой величины к ее начальному значению. Относительная деформация является важным и необходимым понятием в инженерных расчетах. Она характеризует реакцию отдельной точки тела на внешнее нагружение и, в отличие от абсо-

лутной, позволяет оценить степень деформированности элемента, то есть степень воздействия на него деформации и последствия этого воздействия. При неравных абсолютных деформациях элементы могут иметь одинаковую степень деформированности, и наоборот, при одной и той же абсолютной деформации степень деформированности элементов может быть различной. Так, при сжатии двух заготовок длиной 50 и 30 мм до половины их высоты *абсолютные деформации* $\Delta\ell$ элементов будут составлять 25 и 15 мм соответственно, а *относительные* $(\Delta\ell / \ell)100\%$ будут одинаковыми и равными 50%. Следовательно, обе детали при разных абсолютных деформациях имеют одинаковую степень деформированности и с точки зрения прочности находятся в одинаковом механическом состоянии. И наоборот, при одинаковой абсолютной деформации элементы могут иметь различную степень деформированности, совершенно не опасную для одних и разрушительную для других. Так, удлинение на $\Delta\ell = 1$ мм для буксирного каната длиной 1 км несущественно и безопасно, а такое же удлинение для детали механизма часов однозначно приведет к ее разрушению. Поэтому при оценке прочности и жесткости конструкций рассматриваются именно *относительные деформации* элементов.

Определим относительные деформации, возникающие в точках нагруженного тела, и дадим им количественную оценку.

Рассмотрим в элементе до нагружения точки A и B , расположенные на расстоянии ℓ друг от друга (рис. 6.4, a). После приложения внешних сил указанные точки перемещаются в положения A_1 и B_1 соответственно и расстояние между ними изменяется на величину $\Delta\ell_{AB}$, представляющую собой *абсолютную линейную деформацию* в точке A по направлению AB . Отношение приращения $\Delta\ell_{AB}$ к начальной длине ℓ дает значение среднего удлинения на отрезке AB – $\varepsilon_{cp} = \Delta\ell_{AB} / \ell$. Если точку B приближать к точке A , то в пределе получаем

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} (\Delta\ell_{AB} / \ell) = \varepsilon_{AB},$$

где ε_{AB} – относительная линейная деформация в точке A по направлению AB .

В той же точке, но в другом направлении, линейная деформация будет иметь другую величину. Относительная деформация не связана с какой-либо длиной, она рассматривается только для точки и является количественной мерой изменения размеров в заданном направлении. Относительная деформация – величина безразмерная, она вычисляется в отвлеченных единицах или в процентах и для упругих металлических тел является величиной весьма малого порядка.

Для определения угловых деформаций рассмотрим в элементе до его нагружения первоначально прямой угол $\angle CAB$ (рис. 6.4, б), образованный отрезками CA и AB , проходящими через точку A . После приложения нагрузки вслед-

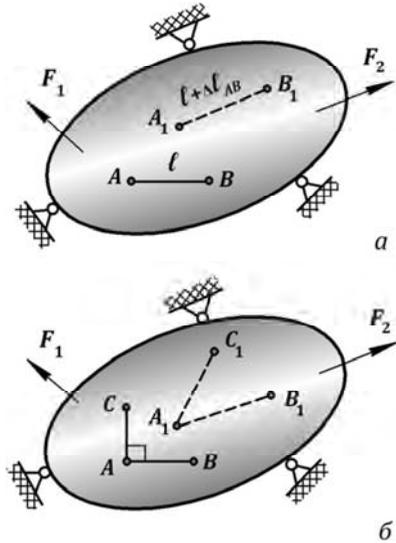


Рис. 6.4

ствие перемещения точек соответственно в A_1, B_1 и C_1 отрезки примут другое положение и образуют новый угол $\angle C_1A_1B_1$. Если точки C и B бесконечно приближать к точке A , то изменение угла в пределе будет

$$\lim_{\substack{C \rightarrow A \\ D \rightarrow A}} (\angle CAB - \angle C_1A_1B_1) = \lim_{\substack{C \rightarrow A \\ D \rightarrow A}} (\pi/2 - \angle C_1A_1B_1) = \gamma_{CAB},$$

где γ_{CAB} – угловая деформация (относительный сдвиг или угол сдвига) в точке A в плоскости CAB .

В другой плоскости, проведенной через ту же точку, будет возникать другая угловая деформация, которая является мерой изменения прямого угла между двумя линейными элементами, проходящими через точку, до деформирования взаимно перпендикулярными. Относительный сдвиг не связан с какой-либо конкретной формой,

он рассматривается только для точки и характеризует возникающие в ней искажения и их степень. Относительный сдвиг выражен в радианах и является величиной безразмерной.

Как было отмечено выше, линейные и угловые деформации в точках тела по различным направлениям и плоскостям имеют различное значение, а значит, *зависят не только от положения точки, но и от направления возникновения*. Как правило, определяют деформации не в произвольном направлении, а в заданной для точки системе координат $X-Y-Z$. И тогда, разложив *линейную* ϵ_{AB} и *угловую* γ_{CAB} деформации по координатным осям и плоскостям, получаем проекции $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ и $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$, определяющие *относительные линейные и угловые деформации* в точке A по направлению осей и плоскостей выбранной системы. При этом в теории упругости и механике материалов под *точкой тела* понимают некоторый бесконечно малый объем, выделенный в ее окрестности, имеющий форму кубика или параллелепипеда с гранями, ориентированными в заданной системе координат. Рассмотрение точки в форме бесконечно малого параллелепипеда является удобным подходом при исследовании деформаций и оценке изменения размеров и формы всего элемента. Разбив деталь на множество малых частей (параллелепипедов), каждая из которых рассматривается как бесконечно малый элемент объема, и определив линейные и угловые деформации, возникающие в гранях каждого элемента, можно смоделировать его форму после деформации, а затем, сложив элементы вместе, построить модель всего тела в деформированном состоянии.

Рассмотрим точку A , выделив в ее окрестности бесконечно малый параллелепипед, помещенный в систему координат $X-Y-Z$ и имеющий размеры граней dx, dy и dz (рис. 6.5). При нагружении тела размеры и форма выделенного микроэлемента изменятся. Размеры изменятся вследствие линейных деформаций, возникающих в направлении осей, где $\Delta(dx), \Delta(dy)$ и $\Delta(dz)$ представляют

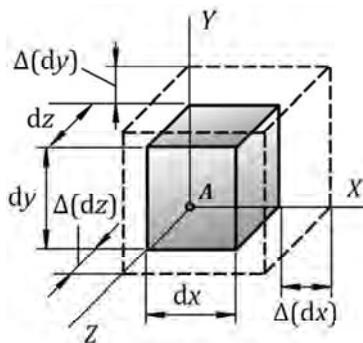


Рис. 6.5

собой абсолютные линейные деформации граней, а относительные деформации в точке A соответственно будут

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta(dx)}{dx}; \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta(dy)}{dy}; \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta(dz)}{dz}.$$

Угловые деформации $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ в этой же точке A , возникающие в координатных плоскостях, приведут к искажению соответствующих граней, то есть к нарушению первоначально прямых углов и изменению формы, как это показано для грани в плоскости XU (рис. 6.6). Угловая деформация в этой плоскости, или угол сдвига, определится суммарным поворотом сторон dx и dy :

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2.$$

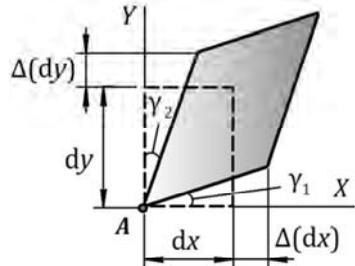


Рис. 6.6

Следует внести пояснения, касающиеся угловой деформации, – почему ее называют «относительным сдвигом» и почему, определяемая как изменение прямого угла, она является величиной относительной и безразмерной. Если для рассмотренной выше грани (см. рис. 6.6) исключить изменение размеров и представить только изменение формы, зафиксировав

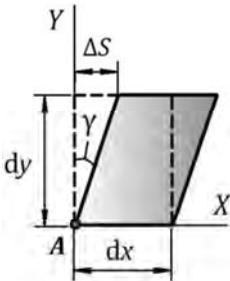


Рис. 6.7

для удобства нижнюю сторону (рис. 6.7), то ее угловая деформация в указанной плоскости будет равна углу γ , который определяется через тангенс как отношение абсолютного сдвига ΔS (смещение верхней стороны относительно нижней) к расстоянию между сдвигающимися сторонами и который в силу малости упругих деформаций принимается равным радианному значению угла, то есть $\text{tg} \gamma^\circ = \Delta S / dy \approx \gamma$ [рад]. Отсюда понятно, что угловая деформация или угол сдвига, выраженный в радианах и приравниваемый к тангенсу, является величиной относительной и безразмерной. Это же справедливо и для углов γ_1 и γ_2 , определяемых через тангенсы в соответствующих треугольниках (см. рис. 6.6), а также для их суммарного значения γ_{xy} , определяющего полный угол сдвига грани в плоскости XU .

При исследовании деформаций, возникающих в гранях параллелепипеда, принято считать, что удлинение грани вдоль координатной оси соответствует положительной линейной деформации, а укорочение – отрицательной. Угол сдвига считается положительным, если происходит уменьшение первоначально прямого угла, и отрицательным – при его увеличении.

Относительная линейная деформация ε и угол сдвига γ представляют собой две основные характеристики деформации, определяющие *полную деформацию* в точке. Их вычисляют в строго заданном направлении, в другом направлении они имеют другую величину. Таким образом, в каждой точке деформированного тела в различных направлениях и плоскостях возникают различные линейные и угловые деформации.

|| Совокупность линейных и угловых деформаций по различным направлениям и плоскостям для одной и той же точки называется деформированным состоянием в точке.

Исследование деформированного состояния в различных точках позволяет определить перемещения точек и установить координаты их нового положения. Зная условия закрепления элемента, можно создать его модель в деформированном виде и рассчитать возникающие изменения размеров и формы. Однако чтобы эти изменения не превышали определенных технических норм и не стали причиной нарушения работоспособности конструкции, деформации, возникающие в элементе, необходимо ограничить некоторым установленным допусковым значением:

$$\Delta_{\max} \leq [\Delta], \quad (6.1)$$

где Δ – это общее обозначение для *линейных* и *угловых* деформаций.

Запись (6.1) называется *условием жесткости* и является базовой формулой для расчетов деталей на жесткость.

По своему качественному значению деформации бывают *упругими* и *пластическими*, а способность материала воспринимать эти деформации называется соответственно *упругостью*, *пластичностью* или *хрупкостью*.

Деформации, полностью исчезающие после снятия нагрузки, называются УПРУГИМИ, а способность тел после разгрузки полностью восстанавливать первоначальные размеры и форму называется УПРУГОСТЬЮ.

Деформации, сохраняемые телом после снятия нагрузки, называются ПЛАСТИЧЕСКИМИ или ОСТАТОЧНЫМИ, а способность материала претерпевать большие остаточные деформации без разрушения и сохранять их после разгрузки называется ПЛАСТИЧНОСТЬЮ.

Способность материала разрушаться без заметных остаточных деформаций называется ХРУПКОСТЬЮ.

Для нормальной эксплуатации машин и механизмов деформации элементов конструкций должны быть, как правило, упругими, а вызываемые ими перемещения не должны превышать определенных допускаемых норм. Только в некоторых случаях допускаются небольшие остаточные деформации, например, для металлических конструкций, работающих в условиях высоких температур.

На фактор *влияния температуры*, особенно при ее длительном воздействии, следует обратить особое внимание, так как указанные условия способны принципиально изменять свойства материалов. Так, при длительном воздействии температуры у металлов проявляется свойство *ползучести (крип)*, которое заключается в том, что с течением времени наблюдается самопроизвольное возникновение пластических деформаций и происходит это при постоянном напряжении, которое при кратковременном действии вообще не привело бы к текучести металла. Со свойством *ползучести* связано свойство *релаксации* – самопроизвольного изменения во времени напряжений при неизменной деформации, что приводит, например, к ослаблению затяжки болтовых соединений, работающих при высоких температурах. При работе элементов в условиях высоких или низких температур могут проявляться и другие механические свойства. Например, при нагреве пластичность металлов повышается, однако существуют диапазоны температур, в которых происходит охрупчивание материала (*красноломкость*), снижение пластичности при одновременном повышении прочности (*синеломкость*) или охрупчивание при температурах, близких к температуре плавления (*горячеломкость*). Работа материалов в условиях низких температур (криогенная

техника) приводит к проявлению *хладноломкости*, которой подвержены железо, хром, молибден, вольфрам (в отличие от меди, никеля, алюминия), борьба с которой является весьма сложной задачей. Большое влияние на свойства материалов оказывает также *скорость нагружения*. Увеличение скорости снижает пластичность металла и делает его более хрупким при любых температурных условиях, но особенно ярко это проявляется при высоких температурах.

Таким образом, материалы способны проявлять различные свойства, которые определяются не только их собственными механическими свойствами, но и условиями нагружения, а также температурно-временными факторами. Поэтому выполняя расчеты на прочность и жесткость, необходимо учитывать не только свойство материала, но и условия его эксплуатации. Влияние температуры, времени и скорости нагружения на механические свойства материалов неоднозначно и не может быть описано единой теорией, однако существует огромный экспериментальный материал, который следует использовать в указанных расчетах.

7. РЕАЛЬНЫЙ ОБЪЕКТ И РАСЧЕТНАЯ СХЕМА

Расчет реального объекта с учетом всех его особенностей и условий эксплуатации является задачей крайне сложной из-за неисчерпаемости исходных данных. Строгая постановка задачи с учетом всей специфики исследуемого объекта требует применения сложного математического аппарата и выполнения громоздких вычислительных операций, что, в принципе, и делается во многих теориях механики деформируемого тела, однако является сложным и неприемлемым при решении практических инженерных задач. Чтобы такой расчет был возможен, в механике материалов реальный объект рассматривают в упрощенном варианте и при постановке задачи учитывают только те особенности, которые наиболее важны и принципиально влияют на результат решения. Поэтому, приступая к расчету детали или конструкции, прежде всего устанавливают, какие факторы являются *существенными*, требующими обязательного учета, а какие – *несущественными*, не влияющими на суть задачи, которые можно не рассматривать при ее решении. В результате такого анализа создается *РАСЧЕТНАЯ СХЕМА* объекта.

Расчетной схемой называется реальный объект, освобожденный от несущественных факторов, не влияющих на работу этого объекта.

Исследование реального объекта начинается с выбора расчетной схемы, которая представляет собой некую идеализированную систему, отражающую наиболее существенные свойства реального объекта, определяющие его поведение под нагрузкой. Создание расчетной схемы – важный и исключительно ответственный этап при постановке задачи. От правильности ее выбора зависит точность и трудоемкость расчетов, которые даже при небольшой корректировке расчетной схемы могут существенно измениться. Грамотно выбранная расчетная схема позволит получить наиболее точные результаты расчета, близкие к действительности, однако при неудачном ее выборе задача может стать нерешаемой или привести к ошибочным результатам.

Переход от реального объекта к расчетной схеме представлен на рис. 7.1 и предполагает схематизацию геометрии элемента и его материала, внешних сил и опорных конструкций, а также принятие ряда гипотез и допущений.

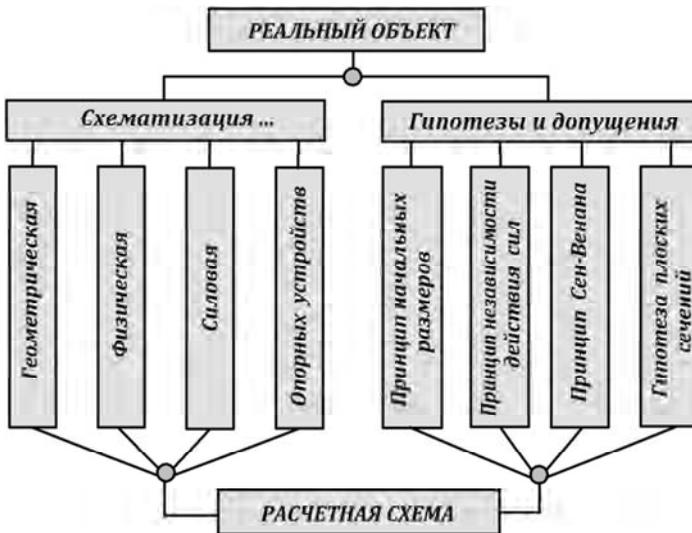


Рис. 7.1. Создание расчетной схемы

Геометрическая схематизация

Геометрическая схематизация означает выбор геометрической модели элемента, то есть приведение его реальной конфигурации к некоторому упрощенному варианту. Как было отмечено ранее, все многообразие форм деталей машин и механизмов можно привести к четырем простейшим формам (см. рис. 2.1–2.4) – *брус* или *стержень*, *пластина*, *оболочка* и *массив*. Поэтому для исследуемого объекта, прежде всего, необходимо установить, какой простейшей геометрической форме он соответствует. Используя эту форму в последующих расчетах, ее следует изображать не в объеме, а в виде либо *геометрической оси* – для элементов стержневого типа, либо *срединной поверхности* – для пластин и оболочек. Форма и размеры сечения на расчетной схеме не показываются, однако они учитываются в расчетных формулах в виде соответствующих геометрических характеристик сечения.

Физическая схематизация

Физическая схематизация означает принятие структуры и свойств материала в некотором идеализированном виде. Реальные материалы обладают разнообразными физическими свойствами и имеют характерную для них микроструктуру. Однако в механике материалов для упрощения расчетов материалы условно наделяют идеализированными свойствами: материал принимается как *идеально сплошной, однородный и изотропный* и считается *идеально упругим*.

|| ***Сплошностью материала называют его способность заполнять любой, даже бесконечно малый, геометрический объем без каких-либо полостей и пустот.***

Предпосылка сплошности позволяет не учитывать дискретную, атомическую или кристаллическую структуру вещества, наличие межатомных промежутков или дефектов в виде полостей и пустот между кристаллами. Это оправдано тем, что размеры деталей неизмеримо превышают не только размеры межатомных расстояний, но и величину кристаллических зерен. Сплошной материал можно дробить на частицы любой степени малости с гарантированным сохранением их свойств. Поэтому схематизация материала как *идеально сплошного* позволит при теоретическом анализе

и исследовании напряженного состояния в точке выделять в ее окрестности бесконечно малый объем без нарушения физических свойств материала, заключенного в этом объеме. Отсутствие полостей и пустот позволит при переходе от точки к точке считать напряжения плавно изменяющимися, что дает возможность при расчетах использовать математический аппарат непрерывных функций. Модель идеально сплошной среды универсальна и принимается как основополагающая не только в механике материалов, но и в теории упругости, пластичности, в гидро- и газодинамике, что объединяет изучение всех этих материалов в единую науку – механику сплошной среды.

Однородным называют материал, который во всех точках имеет одинаковые механические свойства.

Изотропным называют материал, обладающий одинаковыми свойствами по всем направлениям.

Как известно, материалы имеют различное строение и обладают разными свойствами. Они бывают аморфными, кристаллическими, слоистыми, волокнистыми и т. д. Реальные материалы, как правило, *неоднородны* из-за наличия примесей, включений и дефектов структуры. Большинство материалов являются также *анизотропными*, то есть имеют различные свойства по разным направлениям. Это материалы с направленной, природной или искусственно созданной структурой, например, дерево, бумага, пластмасса, стеклопластик, фанера, железобетон, ткани, армированные композиционные материалы и т. д. Даже отдельно взятый кристалл металла является анизотропным. Однако в механике материалов, как и в смежных с ней науках, основная теория строится для *идеально однородных* и *изотропных тел*, поэтому большинство из названных выше материалов принимаются *однородными* и *изотропными*. Схематизация материала как *идеально однородного* и *изотропного* позволяет наделять любой бесконечно малый объем, выделенный в элементе, свойствами всего реального объекта. Неоднородность свойств не учитывается, а для материалов с ярко выраженной анизотропией выполняются отдельные расчеты по разным направлениям, например, для дерева – вдоль и поперек волокон. В случае необходимости учет особенностей того или

иного материала делается введением в расчет специальных поправочных коэффициентов.

И наконец, в схематизации материала для него принимается модель *идеально упругого* тела, то есть тела, способного полностью после снятия нагрузки освобождаться от деформаций и восстанавливать свои первоначальные размеры и форму. В зависимости от характера взаимосвязи между нагрузкой и деформацией *идеально упругие* тела могут быть либо *линейно-упругими* (рис. 7.2, а), когда между указанными величинами существует пропорциональная зависимость, либо *нелинейно-упругими* (рис. 7.2, б), когда эта

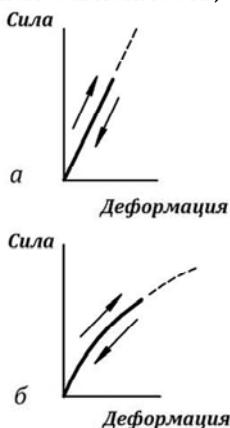


Рис. 7.2. Диаграмма деформирования:

а – линейно-упругого тела;

б – нелинейно-упругого тела

зависимость не соблюдается. Большинство конструкционных материалов, используемых в машиностроении и строительстве, проявляют *линейную упругость*, и поэтому при расчете элементов конструкций для них принимается модель *линейно-упругого* тела. Однако иногда те же материалы при упругом деформировании проявляют свойства *нелинейной упругости*. И если для деталей машин, механизмов и строительных сооружений этим проявлением можно пренебречь, то при проектировании устройств и приборов высокой точности (например, измерительной техники) оно становится решающим.

Механика материалов, являясь инженерной наукой, направлена на расчет машиностроительных конструкций, а поэтому рассматривает тела как *линейно-упругие*, подчиняющиеся **закону пропорциональности**. Этот закон является основным законом в механике материалов и называется **законом Гука**:

Внутренняя сила упругости, возникающая в теле при его деформации, прямо пропорциональна величине этой деформации.

Следует заметить, что абсолютно упругих материалов в природе не существует и реальные тела всегда проявляют отступление от идеальной упругости. Если это отступление невелико, то им

можно пренебречь, однако если с увеличением нагрузки отклонение от упругости становится весьма заметным и существенным становится проявление других свойств материала, то для расчетной схемы применяется уже его другая модель, изучаемая соответствующими науками. Так, модель упругопластического и жесткопластического материала рассматривается в теории пластичности, ползучесть материала – в теории ползучести, модель тела с трещинами – в теории разрушения и т. д.

Принятие модели материала как *идеального* и *совершенного* во всех отношениях упрощает решение многих задач, делая возможным применение доступного математического аппарата. Реальные механические свойства материала, не отражаемые при схематизации, но определяющие его поведение под нагрузкой, учитываются при выполнении расчетов введением в расчетные формулы соответствующих механических характеристик.

Силовая схематизация

Силовая схематизация предполагает постановку задачи в отношении внешних сил, действующих на исследуемый объект, то есть создание модели нагружения. В расчетной схеме изучаемый элемент рассматривается изолированно от других деталей, но так как мерой механического взаимодействия тел является сила, их действие заменяется силами, характер и направление которых, а также область воздействия, зависят от взаимного расположения элементов и границы контакта между ними. Указанные силы для исследуемого объекта являются внешними, определенным образом распределенными по площадкам воздействия (рис. 7.3). Однако при создании расчетной схемы распределенные нагрузки, приложенные к площадкам малой величины, приводятся к *сосредоточенной силе* (рис. 7.3, а) или *моменту* (рис. 7.3, б), а нагрузки, действующие на больших площадях, остаются *распределенными* по поверхности (рис. 7.3, в) либо приводятся к *линейной* нагрузке, распределенной по длине (рис. 7.3, г). Затем схематизированные таким образом силы в соответствии с геометрической формой элемента переносятся либо к *его оси* (для деталей стержневого типа), либо к *срединной поверхности* (для пластин и оболочек). При этом следует помнить, что замена системы сил статически эквивалентной, приведение сил к равнодействующей и их перенос

осуществляется в соответствии с правилами и методами, принятыми в теоретической механике. В результате такого переноса устанавливается окончательный вид нагружения исследуемого объекта. Следует помнить, что нагрузки, согласно классификации внешних сил, по скорости нагружения бывают *статическими* и *динамическими*, а по продолжительности действия – *постоянными* и *временными*. При создании силовой модели на расчетной схеме указывается только вид нагружения и место приложения сил, а скорость нагружения и длительность действия, что также определяет условия работы детали, учитываются в расчетах применением соответствующих формул и методик.

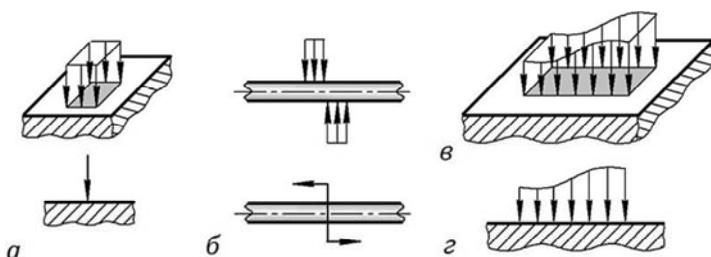


Рис. 7.3

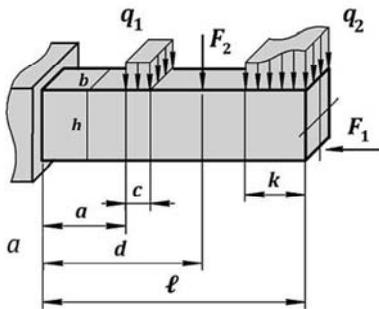
Рассмотрим пример схематизации внешних сил и создания расчетной схемы для элемента стержневого типа (рис. 7.4).

На стержень действуют две поверхностные нагрузки – равномерно-распределенная на участке «с» интенсивностью q_1 и неравномерно-распределенная на участке «к» интенсивностью q_2 , а также две сосредоточенные силы F_1 и F_2 , к которым, как было сказано выше, приведена некоторая система сил, действующих на малой площадке в указанном направлении (рис. 7.4, а).

Определяем действие равномерно распределенной нагрузки q_1 . Площадка приложения этой нагрузки мала по сравнению с размерами элемента, поэтому ее действие можно рассматривать как действие *сосредоточенной силы*, равной равнодействующей распределенной нагрузки – $F = R_1 = q_1 bc$ – и приложенной в центре системы сил. Таким образом, сосредоточенная сила F будет лежать в плоскости симметрии стержня (*главная плоскость*) пер-

пендикулярно его оси посередине длины участка «с». Переносим силу F по линии действия к оси стержня (рис. 7.4, б).

Устанавливаем действие нагрузки q_2 , приложенной к площадке $b \times k$ и изменяющейся вдоль оси стержня по некоторому заданному закону. Эта нагрузка приложена к участку большой протяженности, поэтому при составлении расчетной схемы ее нельзя заменять сосредоточенной силой. Она также симметрична относительно главной плоскости, поэтому приводим ее к виду *линейно-распределенной нагрузки*, лежащей



в плоскости симметрии и действующей на участке «к» (рис. 7.4, б). Интенсивность линейной нагрузки, полученной путем приведения к ней поверхностной нагрузки, равна интенсивности последней, умноженной на ширину элемента:

$$q_3 = q_2 b.$$

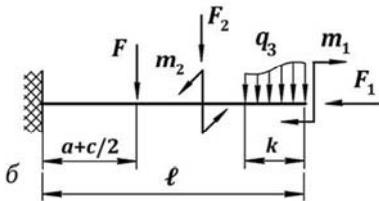


Рис. 7.4. Схематизация сил

Силы F_1 и F_2 также переносим к оси стержня. Согласно правилу, принятому в теоретической механике, при параллельном переносе сила переносится как сила и момент, поэтому перенос указанных сил приведет к появлению следующих нагрузок: сила F_1 вызовет

сжатие стержня и изгиб моментом $m_1 = F_1 (h/2)$; перенос силы F_2 , приложенной в указанном сечении, создает две нагрузки – изгибающую силу F_2 и крутящий момент $m_2 = F_2 (b/2)$, приложенный в этом же сечении (рис. 7.4, б).

Следует еще раз напомнить, что сосредоточенные силы, приложенные в точках и распределенные по линии нагрузки, в реальности не существуют. Эти понятия получают только в результате схематизации внешних нагрузок, и свойственны они исключительно расчетной схеме.

Схематизация опорных устройств

Известно, что любое пространственное тело (система) обладает шестью степенями свободы, а значит, под действием внешних сил имеет возможность получать три поступательных и три вращательных перемещения в заданной системе координат. Для плоских систем таких перемещений возможно три – два поступательных в плоскости конструкции и одно вращательное относительно оси, перпендикулярной к плоскости. Указанные перемещения предполагают движение тела как жесткого целого, превращая его в *механизм*, и чтобы эти перемещения исключить, на систему накладываются связи, частично или полностью ограничивающие ее движение по указанным направлениям. Наложение одной связи снимает одну степень свободы, поэтому чтобы полностью обеспечить *кинематическую неизменяемость (неподвижность)* системы, на пространственную конструкцию должно быть наложено шесть связей, на плоскую – три. Механика материалов, объектом исследования которой является не движение тела как единого целого, а внутренние относительные перемещения частиц, приводящие к деформациям элементов, рассматривает именно *кинематически неизменяемые системы*, то есть системы, в которых элементы только деформируются, но не изменяют свое положение в пространстве или на плоскости относительно выбранной системы координат, принимаемой за систему отсчета.

Следует правильно понимать, что деформации возникают не только в неподвижно зафиксированных элементах, но и в движущихся деталях, совершающих поступательное или вращательное движение, например, элементы кривошипно-шатунного механизма, валы зубчатых и ременных передач и т. д. Однако само по себе движение не приводит к появлению деформаций, деформации связаны исключительно с процессами, происходящими внутри материала, и являются результатом изменения относительного положения частиц. Поэтому при исследовании деформаций в движущихся объектах составляющая перемещения частиц, связанная с движением тела как жесткого целого, из расчета исключается и такой элемент рассматривается как условно неподвижный или кинематически неизменяемый относительно системы отсчета, в которой он находится в момент исследования.

Связи, накладываемые на систему, конструктивно обеспечиваются специальными фиксирующими устройствами, которые называются **опорами**, при помощи которых элемент крепится к другим

элементам конструкции, принимаемым за неподвижные. Существует множество видов опор, отличающихся по своим конструктивным формам и способу наложения связей. Однако при выполнении инженерных расчетов реальная конструкция опорных устройств не рассматривается, а производится ее *схематизация по числу накладываемых связей и направлению их действия*.

При нагружении тела внешними силами в соответствии с условиями его эксплуатации (*активные силы*) возникают опорные реакции (*реактивные силы*), действующие на элемент со стороны опор в направлении наложенных связей. Эти силы дополняют систему сил до равновесной и, являясь для элемента также внешней нагрузкой, участвуют в расчетах на прочность как основной исследуемой детали, так и самой опоры. Поэтому при создании модели нагружения в число внешних сил включаются как *активные*, так и *реактивные* силы. Определение реакций опор выполняется на основании принципа «освобожденности от связей», одного из основных положений механики, согласно которому тело с наложенными связями можно рассматривать как свободное, если мысленно отбросить связи и заменить их действие силами – реакциями связей. Рассматривая таким образом исследуемый объект, опорные реакции находят из уравнений равновесия, составленных для всей системы *активных* и *реактивных* сил, действующих на него.

При составлении уравнений равновесия во избежание ошибочных расчетов крайне важной является правильная расстановка опорных реакций, соответствующих виду опоры. *Схематизация опорных устройств* по числу и направлению накладываемых связей для плоских систем и конструкций позволяет привести их к следующим основным видам: ***шарнирно-подвижная опора, шарнирно-неподвижная опора, жесткая заделка*** или ***защемление, скользящая заделка***.

Шарнирно-подвижная опора (рис. 7.5), также называемая *каток*, накладывает на систему только одну связь, отнимая одну степень свободы: она позволяет движение вдоль плоскости качения и поворот относительно опорного шарнира (рис. 7.5, *a*), однако препятствует перемещению в направлении, перпендикулярном плоскости качения. Именно в этом направлении и возникает реакция R_A , которая на шарнирно-подвижной опоре является *единственной опорной реакцией*. Она направлена по линии действия связи, то

есть в направлении, по которому перемещение укрепленного конца элемента невозможно. Схематическое изображение шарнирно-подвижной опоры показано на рис. 7.5, б, в, г.

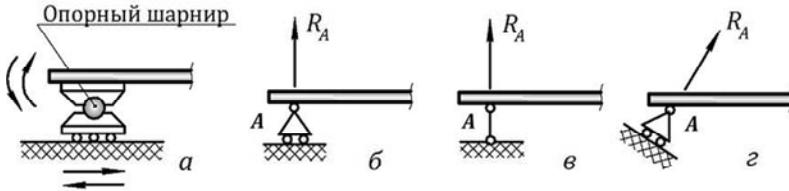


Рис. 7.5

В трехмерных конструкциях шарнирно-подвижные опоры могут либо допускать, либо исключать перемещение опорного узла в направлении, перпендикулярном плоскости листа, то есть «вперед-назад».

Шарнирно-неподвижная опора (рис. 7.6) накладывает на систему две связи, отнимая две степени свободы: она позволяет только поворот относительно опорного шарнира (рис. 7.6, а), но препятствует любому поступательному перемещению в плоскости конструкции. Это приводит к возникновению реакции R , действующей со стороны шарнира на опирающийся конец элемента. Величина и направление этой реакции неизвестны, известна только точка ее приложения, поэтому ее раскладывают в две составляющие, направленные вдоль и перпендикулярно плоскости качения. Таким образом, на шарнирно-неподвижной опоре возникают две реакции – горизонтальная H_A и вертикальная R_A . Схематическое изображение шарнирно-неподвижной опоры представлено на рис. 27, б, в.

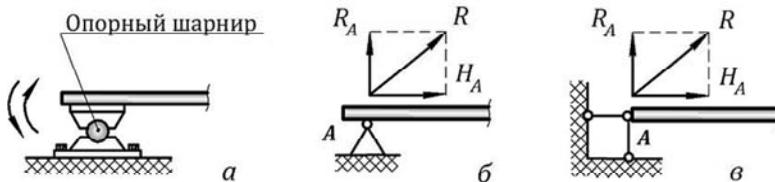


Рис. 7.6

Жесткая заделка, или заземление, (рис. 7.7) отнимает от системы все три степени свободы, накладывая в плоскости действия внешних сил три связи, не допускающие ни линейных, ни угловых

перемещений опорного сечения. Поэтому в жесткой заделке возникают *три реакции опоры*: вертикальная R_A , горизонтальная H_A и *момент защемления* M_A . Схематическое изображение жесткой заделки представлено на рис. 7.7, б, а на рис. 7.7, в показана комбинация шарнирно-подвижных опор, реализующая вариант жесткого закрепления элемента.

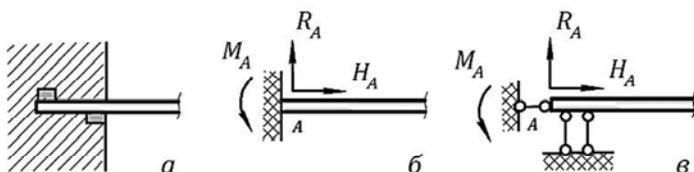


Рис. 7.7

Скользкая заделка (рис. 7.8, а) – это схема соединения стержня и втулки в плоскости. Она ограничивает возможность углового и одного из линейных перемещений опорного конца стержня и допускает только перемещение вдоль оси опоры, поэтому на *скользящей заделке* возникают *две реакции* – R_A и M_A . Вариантом такой опоры является *бискользкая заделка* (рис. 7.8, б), которая в плоскости допускает поступательное перемещение элемента как в горизонтальном, так и вертикальном направлении, но препятствует повороту в этой плоскости. На такой опоре будет возникать только *реактивный момент* M_A .

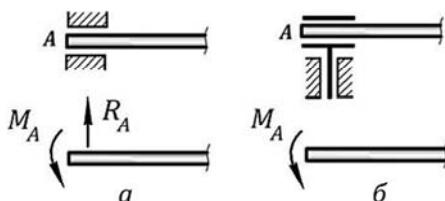


Рис. 7.8

Аналогичная схематизация опорных устройств выполняется и в пространственных конструкциях, где используются такие же понятия, как шарнирно-подвижная и шарнирно-неподвижная опора, жесткое защемление и скользящая заделка. Однако здесь накладываемые связи рассматриваются в трехмерном пространстве,

и в соответствии с этим в заданной системе координат устанавливается число и направление опорных реакций, которые также определяются из уравнений статики.

Рассмотренная выше схематизация реальных объектов используется практически во всех разделах механики деформируемого тела. Это позволяет значительно упростить решение многих задач и значительно расширить круг исследований. Для одного и того же реального объекта может быть предложено несколько расчетных схем в зависимости от требуемой точности расчета и от того, какая сторона явления интересует исследователя. В то же время одной расчетной схеме может быть поставлено в соответствие много различных реальных объектов. Это весьма важное обстоятельство, так как, исследуя некоторую схему, можно получить решение целого класса реальных задач, сводящихся к данной схеме.

В завершении вопроса о выборе расчетной схемы следует еще раз подчеркнуть, что постановка задачи начинается именно с этого шага, первого и самого главного, от которого зависит правильность последующего решения. Прежде чем обращаться к математическим формулам и расчетным методикам, необходимо серьезно и вдумчиво проанализировать задачу, рассмотрев реальный объект исключительно с позиции тех факторов, которые являются для него существенными при исследовании поставленной цели и действительно повлияют на результат решения. При изучении любого научного или инженерного вопроса правильная постановка задачи является гарантом ее успешного решения.

8. ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ И ДОПУЩЕНИЯ

Реальная конструкция всегда чрезвычайно сложна, как и условия ее эксплуатации. Поэтому постановка инженерных задач, помимо выбора расчетной схемы, всегда сопровождается принятием целого ряда гипотез и допущений, позволяющих упростить решение и использовать несложный математический аппарат. При этом, как показывают экспериментальные исследования, а также расчеты, выполненные более строгими методами теории упругости, указанные допущения не вносят большой погрешности в результаты решения и достаточно достоверно математически отражают поведение объекта в процессе нагружения.

Принцип начальных размеров

В силу малости упругих деформаций, возникающих в элементах конструкций, при составлении уравнений равновесия изменением размеров и формы конструкции можно пренебречь и рассматривать ее в недеформированном виде, принимая как абсолютно твердую.

При упругом деформировании перемещения точек и деформации элементов бесконечно малы по сравнению с их размерами, поэтому практически не изменяют форму конструкции и мало влияют на взаимное расположение нагрузок и их расстояние до опор. Это позволяет при составлении уравнений равновесия деформации не учитывать и рассматривать конструкцию (как и любую ее часть) в недеформированном виде как имеющую те же размеры и форму, что и до нагружения.

В основе этого принципа лежит аксиома о затвердевании, согласно которой равновесие деформируемого тела не изменится, если оно «затвердеет», то есть превратится в абсолютно твердое. Эта аксиома имеет важное значение при изучении деформируемых тел и широко используется в практике инженерных расчетов. Она устанавливает связь между статикой абсолютно твердого тела и статикой деформируемого тела и означает, что условия, при которых удовлетворяется равновесие абсолютно твердого тела, будут также соблюдаться и для деформируемого тела. Это позволяет применять ко всем деформируемым телам и конструкциям уравнения равновесия, принятые в статике абсолютно твердых тел.

Проиллюстрируем применение принципа начальных размеров следующими примерами.

Пример 1

Для консольной балки (рис. 8.1), нагруженной на конце консоли силой F , требуется определить реакции в заделке. В результате

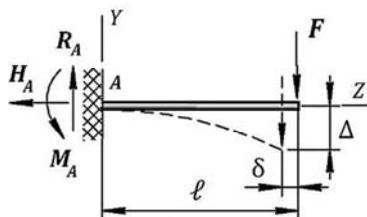


Рис. 8.1

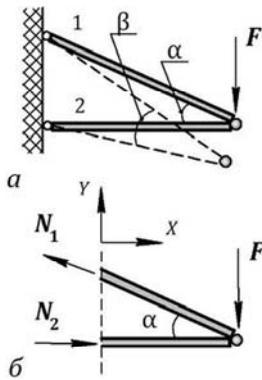
нагружения балка изгибается и точка приложения силы получает вертикальное Δ и горизонтальное δ перемещения. Балка является плоской системой, поэтому согласно схематизации опор в заделке возникают три реакции, которые определяются из уравнений равновесия:

$$\sum Z=0: H_A=0; \quad \sum Y=0: R_A=F; \quad \sum M_A=0: M_A=F(\ell-\delta)\approx F\ell,$$

где, учитывая, что в силу малости деформаций смещение силы к опоре значительно меньше длины балки ($\delta \ll \ell$), уменьшением расстояния между ними можно пренебречь и при определении момента защемления M_A плечо силы принимать равное ℓ .

Пример 2

В шарнирно-стержневой конструкции (рис. 8.2) требуется определить внутренние усилия в стержнях. Конструкция состоит из двух сходящихся стержней и нагружается в шарнирном узле силой



F , от действия которой элементы деформируются и форма конструкции изменяется (рис. 8.2, а). Для определения внутренних усилий в стержнях используем метод сечений, для чего отсекаем узел, действие отброшенной части на него заменяем внутренними силами N_1 и N_2 (рис. 8.2, б) и составляем уравнения равновесия для отсеченной части. Так как конструкция изменила форму и угол между стержнями также изменился ($\alpha \neq \beta$), возникает проблема при составлении уравнений равновесия, поскольку деформации элементов и изменение угла неизвестны.

Однако, учитывая, что упругие деформации, возникающие в стержнях, бесконечно малы и перемещения точек весьма незначительны, при составлении уравнений равновесия искажением формы конструкции пренебрегаем и рассматриваем ее как недеформированную, то есть как абсолютно твердую:

$$\begin{aligned} \sum X=0: N_2 - N_1 \cos \alpha &= 0; & \text{откуда получаем} & N_1 = F / \sin \alpha; \\ \sum Y=0: N_1 \sin \alpha - F &= 0, & & N_2 = F / \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Принцип начальных размеров широко используется в механике материалов при определении реакций опор и внутренних усилий в элементах, однако он категорически неприменим в случае больших перемещений, а также при малых перемещениях, если форма конструкции качественно меняется. Примером такой конструкции

является система, состоящая из двух шарнирно соединенных стержней, лежащих на одной прямой (рис. 8.3, а). Системы подобного рода являются *кинематически изменяемыми*, то есть под действием

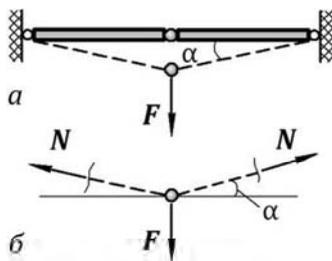


Рис. 8.3

внешней нагрузки допускают перемещения элементов, не сопровождающиеся их деформациями. Конструкция, представленная на рис. 8.3, а, обладает *мгновенной подвижностью* и называется *мгновенным механизмом*. И если изменяемость системы возникает, как правило, из-за недостатка связей, то *мгновенная изменяемость* возникает при их неправильной установке.

В данной конструкции все три шарнира расположены на одной прямой, а значит, приложение даже незначительной силы F приведет к качественному изменению ее формы. При определении внутренних сил N в стержнях и составлении уравнений равновесия *принцип начальных размеров* здесь использовать нельзя. Расчет следует выполнять с учетом изменения формы, то есть с учетом угла α , при котором продольные силы будут равны $N = F / 2 \sin \alpha$ (рис. 8.3, б). В противном случае, принимая угол $\alpha = 0$, получаем усилия в стержнях бесконечно большими.

Таким образом, вопрос о возможности применения *принципа начальных размеров* следует решать в каждом отдельном случае с учетом вида конструкции и характера действующей нагрузки.

*Принцип независимости действия сил
(принцип наложения или принцип суперпозиции)*

Результат воздействия на конструкцию нескольких внешних факторов (силовых, температурных) равен сумме результатов воздействия каждого фактора в отдельности и не зависит от порядка их приложения.

Данный принцип означает, что если к системе приложено несколько сил, то внутренние усилия, напряжения, деформации и перемещения в элементах можно определить от каждой силы в отдельности, а затем результат их совместного действия получить как сумму действий каждой отдельной нагрузки. Это же

справедливо и для случаев, когда одновременно с силовым имеет место и температурное воздействие на исследуемый объект.

Рассмотрим применение *принципа независимости действия сил* на следующем примере.

Для консольной балки, нагруженной системой сил, требуется определить перемещение конца консоли Δ (рис. 8.4, а). Для этого рассматриваем балку под действием каждой отдельной нагрузки и определяем перемещение, вызванное этой нагрузкой: от распределенной нагрузки q (рис. 8.4, б) – Δ_q (вниз), от сосредоточенной силы F (рис. 8.4, в) – Δ_F (вниз) и от сосредоточенного момента m (рис. 8.4, г) – Δ_m (вверх). Прогиб концевое сечения вычисляем как сумму прогибов от каждой нагрузки в отдельности с учетом соответствующих направлений перемещений:

$$\Delta = \Delta_q + \Delta_F - \Delta_m.$$

Конечный результат – величина и направление прогиба – зависит от величины внешних нагрузок и перемещений, вызванных этими нагрузками.

Аналогично, используя *принцип суперпозиции*, можно определить внутренние усилия, напряжения и деформации в любом заданном сечении балки.

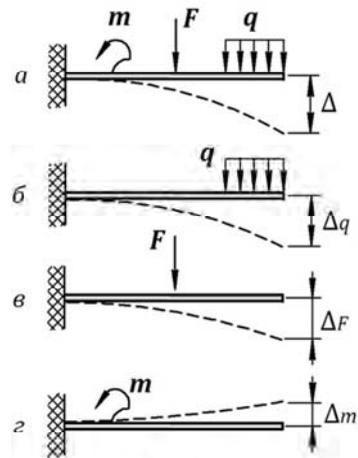


Рис. 8.4

Принцип независимости действия сил является одним из основных способов решения большинства задач механики. Он позволяет упростить сложную задачу, разложив ее на ряд простых, и при большом количестве внешних нагрузок получить решение как результат наложения частных решений. *Однако этот принцип справедлив не всегда.* Его можно применять, только когда перемещения точек приложения сил очень малы, по сравнению с размерами элемента, и только для материалов, подчиняющихся закону Гука, то есть линейно-деформируемых материалов. Только в этом случае упругую деформацию, вызванную многими силами, действующими одновременно, можно рассматривать как сумму упругих деформаций от каждой силы в отдельности.

Принцип Сен–Венана

В точках, достаточно удаленных от места приложения нагрузки, напряжения и деформации мало зависят от способа приложения этой нагрузки.

Согласно этому принципу уравновешенная система сил, приложенная к некоторой части твердого тела, создает неравномерность напряжений и деформаций *только в области зоны нагружения*, но по мере удаления от нее неравномерность исчезает и характер распределения этих величин уже не зависит от способа приложения сил, то есть способ нагружения имеет значение только на малом расстоянии от места нагружения. А это означает, что система реально действующих сил, приложенных к небольшой части конструкции, может быть заменена на статически эквивалентную систему сил и такая замена существенно не повлияет на напряженно-деформированное состояние в точках, расстояния до которых значительно превышают размеры загруженного участка. Именно это положение, установленное Сен-Венаном, лежит в основе схематизации внешних сил, где при создании модели нагружения реальная нагрузка заменяется на статически эквивалентную. Характер приложения нагрузки будет значительно влиять на напряжения и деформации только в непосредственной близости от места ее приложения, однако при удалении от зоны нагружения напряженно-деформированное состояние уже не будет зависеть от способа нагружения и будет определяться только статическим эквивалентом действующей нагрузки.

Рассмотрим сущность принципа Сен-Венана на примере.

Деталь (рис. 8.5, а) на небольшом участке длиной a нагружена распределенной нагрузкой q_z , изменяющейся по заданному закону. Равнодействующая этой нагрузки равна $R = \int_a q_z dz$. Если на том же участке нагрузку заменить равномерно распределенной с такой же равнодействующей R (рис. 8.5, б) или сосредоточенной силой $F = R$ (рис. 8.5, в), то все три случая нагружения будут *статически эквивалентными*. Во всех этих случаях напряженные состояния детали в пределах участка нагружения будут, конечно, различными, однако на некотором удалении от рассматриваемого участка (например, в точке В) они окажутся практически одина-

ковыми. Принцип Сен-Венана не указывает конкретное расстояние, на котором внутренние усилия, напряжения и деформации уже не зависят от способа приложения внешних сил, однако экспериментально установлено, что это расстояние имеет порядок размера участка, на котором приложена нагрузка, то есть $b \approx a$, а для элементов стержневого типа составляет порядка одного линейного размера поперечного сечения элемента.

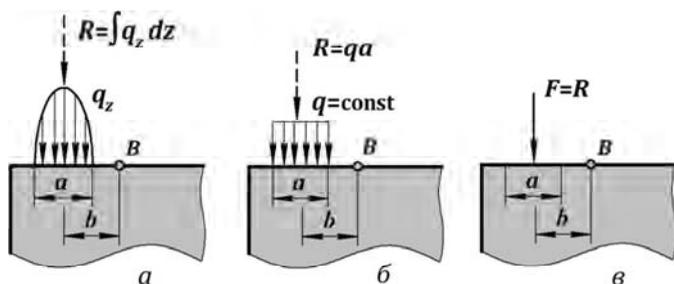


Рис. 8.5

Принятие принципа Сен-Венана предполагает рассмотрение только той части элемента, которая достаточно удалена от места приложения нагрузки и от опорных узлов, где для расчета напряжений и деформаций справедливы формулы, принятые в механике материалов. Однако вблизи этих мест характер изменения напряжений и деформаций является намного более сложным, требующим других подходов и методов определения (рис. 8.6). Исследованием напряжено-деформированного состояния в местах нагружения детали и зонах ее крепления занимается математическая теория упругости, основанная на более точной постановке задачи и использовании соответствующего математического аппарата.

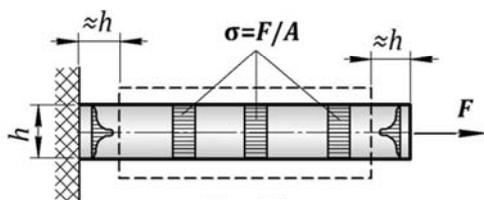


Рис. 8.6

Принцип Сен-Венана не имеет теоретического доказательства, однако он подтверждается многочисленными опытными данными и играет большую роль в механике деформируемого тела. Он позволяет схематизировать силы, заменяя реальные нагрузки их ста-

тическим эквивалентом, дает возможность правильной организации экспериментальных исследований для проверки и анализа напряженно-деформированного состояния в местах крепления конструкции и действия нагрузок. Принцип Сен-Венана соблюдается во всех точных решениях теории упругости и, несмотря на некоторую неопределенность в количественном отношении, его физическая сущность крайне важна для расчета конструкций.

*Гипотеза плоских сечений
(гипотеза Бернулли)*

|| ***Сечения, перпендикулярные оси элемента и плоские до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными оси после деформации.***

Эта гипотеза играет исключительно важную роль в практике инженерных расчетов. В ее основе лежит предположение о том, что деформации внутри элемента имеют такой же характер, как и на его поверхности, поэтому сечения остаются плоскими и нормальными к оси. Для некоторых видов нагружения, например, для растяжения, сжатия, чистого изгиба и кручения, эта гипотеза является реальным фактом, однако для большинства случаев деформирования, а также для зон нагружения и крепления элементов, она принимается как допущение. На ее основе строятся многие теории и делается вывод большинства формул, достоверность которых подтверждена экспериментальными исследованиями.

Допущение об отсутствии начальных напряжений

Практически все реальные детали и элементы конструкций в процессе их изготовления, обработки или сборки получают внутренние напряжения, которые сохраняются и остаются в теле до приложения рабочих нагрузок. В стальных и чугунных отливках такие напряжения возникают вследствие неравномерного охлаждения, в стальных деталях – вследствие их термической или механической обработки, в деревянных конструкциях – вследствие неравномерного высыхания, в бетоне – в процессе твердения и т. д. Внутренние напряжения также возникают в результате сборки некоторых узлов и соединений, например, запрессовки колес на ось при создании колесных пар железнодорожных вагонов,

посадки ступицы колеса с натягом, в сварных соединениях и др. Начальные напряжения, как правило, невелики, и их во внимание не принимают, однако, когда есть основание предполагать, что они значительны и могут представлять угрозу, их определяют экспериментальным путем и учитывают в дальнейших расчетах.

Допущение точности расчетов

Принятые схематизации при разработке расчетной схемы, гипотезы и допущения, используемые при создании теорий и выводе формул, а также разброс экспериментальных данных по определению механических свойств материалов не позволяют получить высокую точность инженерных расчетов. Погрешность, как правило, не превышает 3–5 %, а в некоторых случаях считается приемлемой даже до 10–15 %.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что подразумевают понятия «деформируемая» и «недеформируемая» среда? К какому разделу механики относится наука «Механика материалов» и что она изучает?

2. Дайте определения понятиям прочность, жесткость, устойчивость. Поясните на примерах.

3. Что является объектами исследования в механике материалов? Что такое брус (стержень), пластина, оболочка, массив? Что такое геометрическая ось и срединная поверхность?

4. По каким признакам и как классифицируют внешние нагрузки? Укажите обозначения и размерность.

5. Что такое «силы упругого сопротивления» и как они определяются? В чем суть метода сечений? С какими видами деформаций связаны внутренние усилия, возникающие в сечении элемента?

6. Что такое «напряжение» и что оно характеризует? Какие известны виды напряжений, как они действуют в сечении и какие виды деформаций они вызывают? Размерность напряжений.

7. Что такое напряженное состояние в точке? Для чего важно исследование напряженного состояния?

8. Что такое деформация? Какие известны деформации и что такое деформированное состояние в точке?

9. Какие деформации называются упругими, пластическими, или остаточными? Что такое упругость, пластичность, хрупкость?

10. Что такое «расчетная схема», в чем заключается ее выбор и чем она отличается от реального объекта?

11. Что означает модель идеально сплошного однородного изотропного тела? Почему свойства изучаемых материалов необходимо схематизировать таким образом?

12. Что означает схематизация внешних сил при создании расчетной схемы? Пояснить на примере.

13. Схематизация опорных устройств. Какие известны основные виды опор, применяемых для плоских систем, и какие опорные реакции на них возникают?

14. Основные гипотезы и допущения в механике материалов. Что такое «принцип начальных размеров»? Когда недопустимо его применение?

15. Принцип независимости действия сил и пределы его применимости.

16. Принцип Сен-Венана. В чем его суть?

17. В чем заключается гипотеза плоских сечений?

Список использованных источников

1. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, 1986. – 512 с.
2. Биргер, И. А. Сопротивление материалов / И. А. Биргер, Р. Р. Мавлютов. – М. : Наука, 1986. – 560 с.
3. Татур, Г. К. Общий курс сопротивления материалов / Г. К. Татур. – Минск : Вышэйшая школа, 1974. – 462 с.
4. Дарков, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М. : Высшая школа, 1975. – 742 с.
5. Степин, П. А. Сопротивление материалов / П. А. Степин. – М. : Высшая школа, 1968. – 424 с.
6. Подскребко, М. Д. Сопротивление материалов / М. Д. Подскребко. – Минск : Вышэйшая школа, 2007. – 797 с.

Учебное издание

РЕУТ Лариса Ефимовна

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ В МЕХАНИКЕ МАТЕРИАЛОВ

Пособие по учебной дисциплине
«Механика материалов»
для студентов специальности 1-36 01 01
«Технология машиностроения»

Редактор *Е. С. Кочерго*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 17.01.2018. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 3,43. Уч.-изд. л. 2,68. Тираж 100. Заказ 201.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.