

ИССЛЕДОВАНИЯ СТРУЙНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ВНЕШНЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

к.ф.-м.н. Конон П.Н., маг. Макоед А.Г.

Белорусский государственный университет, Минск

Постановка задачи и исследование устойчивости движения. Рассматривается движение осесимметричной струи плотности ρ_0 , вытекающей из отверстия радиуса R_0 со скоростью U_0 в поле капиллярных и гравитационных сил. Движение исследуется в цилиндрической системе координат r, z, θ с началом в центре выходного отверстия, ось z при этом направлена по линии действия силы тяжести. Размерные составляющие скорости и давления для осесимметричной струи:

$$\begin{aligned} v_z = u^* = u^*(r, z, t^*), \quad v_r = v^* = v^*(r, z, t^*), \quad v_\theta = w^* = 0, \\ p^* = p^*(r, z, t^*). \end{aligned} \quad (1)$$

Учитывается сильное невязкое взаимодействие с окружающей средой, причем давление среды $p_c^* = p_c^*(r, z, t^*)$ - заданная функция координат и времени. Форма поверхности струи $D^* = D^*(z, t^*)$ является неизвестной.

При $v^* \ll u^*$, что имеет место при образовании достаточно длинных волн, движение жидкости описывается уравнениями пограничного слоя. Предположим также, что давление в струе слабо зависит от r и равно давлению на поверхности. Введём безразмерные величины t, x, y, h, u, v, p_c :

$$\begin{aligned} t^* = R_0 U^{-1} t, \quad r = R_0 y, \quad z = R_0 x, \quad D^* = R_0 h, \\ u^* = U_0 u, \quad v^* = U_0 v, \quad w^* = 0, \quad p_c^* = \rho_0 U_0^2 p_c. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения осесимметричного движения жидкости в струе и уравнения неразрывности будут иметь вид:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vv_y = Fr^{-1} - \sigma \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{h} - h_{xx} \right) + Re^{-1} \left(u_{yy} + \frac{1}{y} u_y \right) - \frac{\partial p_c}{\partial x}, \\ u_x + v_y + \frac{1}{y} v = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

При выводе (3) учтено, что выражение для давления с учетом кривизны поверхности струи и переменного внешнего давления в случае длинных волн определяется выражением:

$$p(x, t) = p_c(x, t) + \sigma \left(\frac{1}{h} - h_{xx} \right). \quad (4)$$

Условие непротекания определяет следующее уравнение поверхности

$$h_t + uh_x = v \quad (5)$$

Из предположения отсутствия трения на поверхности имеем:

$$u_y = 0, \quad y = h(x, t), \quad (6)$$

а из предположений симметрии течения получаем два условия на оси

$$v = 0, \quad u_y = 0, \quad y = 0. \quad (7)$$

В сечении $x = 0$ задан профиль скорости и толщина струи:

$$v = 0, \quad u = u(0, y, t), \quad h = h(0, t). \quad (8)$$

Характер течения зависит от безразмерных параметров

$$Fr^{-1} = \frac{gR_0}{U_0^2}, \quad Re^{-1} = \frac{\nu}{U_0 R_0}, \quad We^{-1} = \sigma = \frac{T}{\rho_0 R_0 U_0^2}, \quad (9)$$

где Fr – число Фруда, Re – число Рейнольдса, We – число Вебера, ν – коэффициент кинематической вязкости, g – ускорение силы тяжести, Γ – коэффициент поверхностного натяжения.

Пусть начальный профиль струи равномерный, то есть $u(0, y, t) = f(t)$. Тогда в случае длинных волн, незначительно изменяющих зависимость течения от y , движение описывается системой уравнений для $u(x, t), h(x, t)$:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= Fr^{-1} - \sigma \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{h} - h_{xx} \right) - \frac{\partial p_c}{\partial x}, \\ h_t + uh_x + \frac{1}{2}u_x h &= 0, \quad v = -\frac{1}{2}u_x h. \end{aligned} \quad (10)$$

Следует отметить, что вязкие члены уравнения (3) при данном предположении исчезли.

Рассмотрим периодические по x возмущения с волновым числом α , которые представляют собой волны, распространяющиеся вдоль полуограниченной струи с изменяющейся по времени амплитудой.

Введём как и в [3] независимые переменные ξ, τ и функции $u_k(\xi, \tau), h(\xi, \tau)$:

$$\xi = \alpha x - \omega t, \quad \tau = \alpha \sigma^{\frac{1}{2}} t, \quad u = 1 + \sigma^{\frac{1}{2}} u_k. \quad (11)$$

После преобразований системы (10) будем иметь следующие уравнения для u_k и h , где индекс k опущен:

$$\begin{aligned} u_\tau + (c^* + u)u_\xi &= h^{-2}h_\xi + \alpha^2 h_{\xi\xi\xi} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial p_c}{\partial \xi}, \\ h_\tau + (c^* + u)h_\xi + \frac{1}{2}hu_\xi &= 0, \quad v = -\frac{1}{2}\alpha\sigma^{-\frac{1}{2}}hu_\xi. \end{aligned} \quad (12)$$

В системе (12) параметр c^* определяется по формуле:

$$c^* = (1 - c)\sigma^{-\frac{1}{2}}, \quad c = \omega\alpha^{-1}. \quad (13)$$

Надо заметить, что в предлагающейся модели совместного течения среды вязкое взаимодействие на границе не рассматривается. Среда и струя взаимодействуют через внешнее по отношению к жидкости давление p_c , причем принимается $p_c = k(\alpha x - \omega t) = k\xi, k = const$.

Рассмотрим нелинейные решения системы (12), периодические по ξ .

$$\begin{aligned} h &= h_0 + h_1 \cos \xi + H_1 \sin \xi + h_2 \cos 2\xi + H_2 \sin 2\xi + \dots \\ u &= u_0 + u_1 \cos \xi + U_1 \sin \xi + u_2 \cos 2\xi + U_2 \sin 2\xi + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь величины $u_0, u_1, U_1, u_2, U_2, h_0, h_1, H_1, h_2, H_2$ являются неизвестными функциями времени τ . Сбрав члены при одинаковых тригонометрических функциях до второго приближения, получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} u'_0 &= -\frac{k}{\sigma}, \quad h'_0 = -\frac{1}{4}(H_1 u_1 - h_1 U_1), \\ u'_1 &= -U_1(c^* + u_0 - \omega) - H_1(\alpha^2 - h_0^{-2}) - \frac{1}{2}u_1 U_2 + \frac{1}{2}U_1 u_2 - \\ &\quad - h_0^{-3}(h_1 H_2 - H_1 h_2), \\ h'_1 &= -H_1(c^* + u_0 - \omega) - \frac{1}{2}h_0 U_1 - \frac{3}{4}H_2 u_1 + \frac{3}{4}h_2 U_1, \\ U'_1 &= u_1(c^* + u_0 - \omega) + h_1(\alpha^2 - h_0^{-2}) + \frac{1}{2}U_1 U_2 + \frac{1}{2}u_1 u_2 + h_0^{-3}(H_1 H_2 - h_1 h_2), \\ H'_1 &= h_1(c^* + u_0 - \omega) + \frac{1}{2}h_0 u_1 + \frac{3}{4}h_2 u_1 + \frac{3}{4}H_2 U_1, \\ u'_2 &= -2U_2(c^* + u_0 - \omega) - 2H_2(4\alpha^2 - h_0^{-2}) - u_1 U_1 - 2h_1 H_1 h_0^{-3}, \\ h'_2 &= -2H_2(c^* + u_0 - \omega) - h_0 U_2 - \frac{3}{4}H_1 u_1 - \frac{3}{4}h_1 U_1, \\ U'_2 &= 2u_2(c^* + u_0 - \omega) + 2h_2(4\alpha^2 - h_0^{-2}) + \frac{1}{2}u_1^2 - \frac{1}{2}U_1^2 + h_1^2 - H_1^2 + \end{aligned} \quad (15)$$

$$+2h_0h_2h_0^{-3},$$

$$H'_2 = 2h_2(c^* + u_0 - \omega) + h_0u_2 + \frac{3}{4}h_1u_1 - \frac{3}{4}H_1U_1.$$

Численные расчёты и анализ результатов. В итоге получили систему (15) из 10 дифференциальных уравнений первого порядка. Для ее решения должны быть заданы начальные значения функций $h_k(0), H_l(0), u_k(0), U_l(0), k = 0, 1, 2, l = 1, 2$. По крайней мере одно из этих значений должно быть ненулевым. Волновое число α определяет длину волны вдоль осевой координаты и считается заданным. Параметр c^* определяется по формуле (13). Численное интегрирование системы проводится по формулам Рунге-Кутты 4-го порядка точности с помощью встроенных функций пакета Wolfram. При $\tau = 0$ на течение накладывалось возмущение формы струи $h_1(0) = \varepsilon$. Другие начальные условия равны нулю. Значение волнового числа было взято из промежутка $0 < \alpha < 1$. Эти α соответствуют неустойчивым возмущениям по линейной теории. Временем распада струи будем считать тот момент, когда на длине волны впервые появляется точка ξ_0 , в которой $h(\xi_0) = 0$.

На рисунке 1 изображено развитие возмущений поверхности со временем при $\omega = 0.07, \alpha = 0.4, \sigma = 0.35, c^* = 1.3945, \varepsilon = 0.001$ для $k = 0$ (сплошная линия) и $k = 5$ (штриховая линия). При малых значениях времени возмущения достаточно малы, и форма поверхности близка к гармонической. С ростом времени становится заметна роль второй гармоники на развитие возмущений. Колебания становятся нелинейными, и при $\tau = 11.262$ для $k = 0$ и $\tau = 11.257$ для $k = 5$ видно образование второго максимума на длине волны. Наличие второго максимума поверхности определяет возможность образования капель разного размера, что наблюдается в действительности при распаде струй. С учетом полученных данных можно сделать вывод о том, что с увеличением значения k время распада струи на капли уменьшается, и возмущения развиваются более интенсивно.

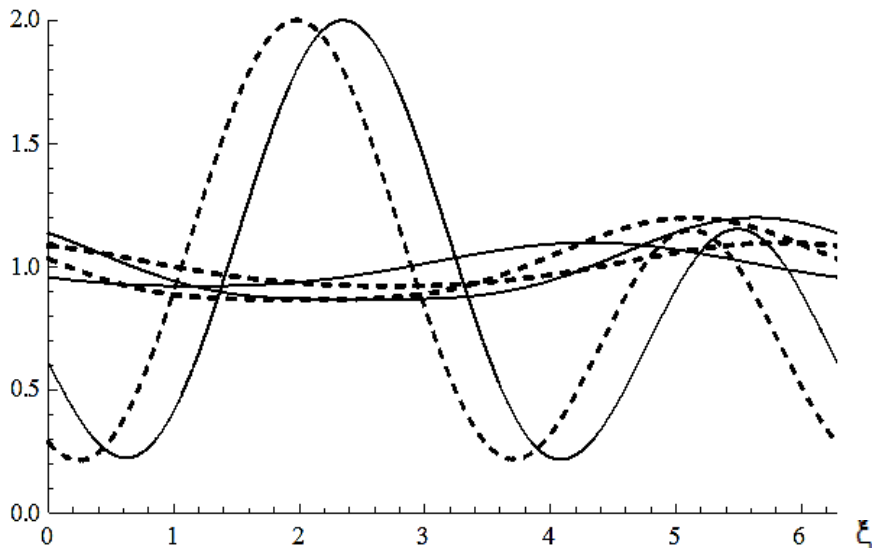


Рис. 1. Развитие возмущений поверхности $h(\xi)$ со временем при $k = 0$, (сплошная линия) в различные моменты $\tau = 8, \tau = 9, \tau = 11.262$ и $k = 5$ (штриховая линия) в моменты $\tau = 8, \tau = 9, \tau = 11.257$

Зависимость измененной продольной компоненты u_k и поперечной компоненты скорости v из последнего соотношения (12) от переменной ξ в момент появления второго максимума при $\tau = 11.262$ и тех же значений для остальных параметрах показано

на рисунке 2. Максимальные значения поперечной скорости по длине струи соответствуют наибольшим значениям ее поверхности.

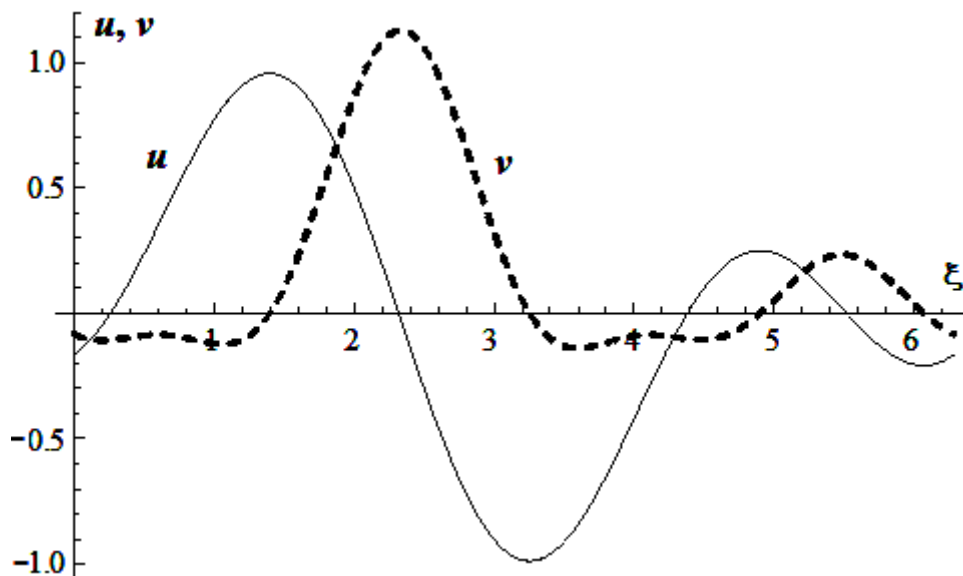


Рис.2. Зависимость изменения продольной компоненты скорости и поперечной компоненты от переменной ξ при $k = 0$ в момент времени $\tau = 11.262$
 $h(\xi)$

Работа выполнена в рамках задания 2.48 ГПНИ Беларуси «Энергетические системы, процессы и технологии».

ЛИТЕРАТУРА

1. Шкадов В.Я., Маркова М.М. Нелинейное развитие капиллярных волн в струе жидкости // Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, №3, с.30-37.
2. Чесноков Ю.Г. Нелинейное развитие капиллярных волн в струе вязкой жидкости // Журнал технической физики, 2000, т.70, вып.8, с.31-38.
3. Шкадов В.Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости // Ин-т механики МГУ. Научн. тр.- М., 1973. Вып. 25.- 192 с.
4. Кулаго А.Е., Конон П.Н. Определение ускорений точек поверхности возмущенной струи Сб. трудов ВНИПИ Теплопроект «Конструкция и строительство специальных сооружений».-М.,1983.- С. 39-48.