УДК 621.865:004.896

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МОБИЛЬНОГО МЕХАТРОННОГО КОМПЛЕКСА В НЕПРЯМОУГОЛЬНОЙ И СВЯЗНОЙ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

асп. [1]**Конон И.И.**, к.ф.-м.н. [1]**Ширвель П.И.**, инженер [2]**Трифанков Д.В.**,

[1]*Белорусский национальный технический университет*
[2]*ОАО «АГАТ-системы управления» – управляющая компания холдинга "Геоинформационные системы управления" АГАТ*

Ранее в [1] рассматривалась механико-математическая модель и вывод определяющих зависимостей уравнений движения мультикоптера. В настоящей работе рассмотрим процесс решения задач расчета и анализа движения полета мобильного мехатронного комплекса мультикоптерного типа. Как и ранее рассматриваем мультикоптер как твердое тело с шестью степенями свободы: три составляющих линейного перемещения и три составляющих углового смещения. В первом приближении используем систему координат, начало которой совпадает с центром тяжести летающего аппарата (рис. 1). Оси x и z лежат в симметричной плоскости, а ось y перпендикулярна ей. Составляющие углового смещения относительно осей координат обозначены φ, θ и ψ (крен, тангаж и рыскание, соответственно) [2].

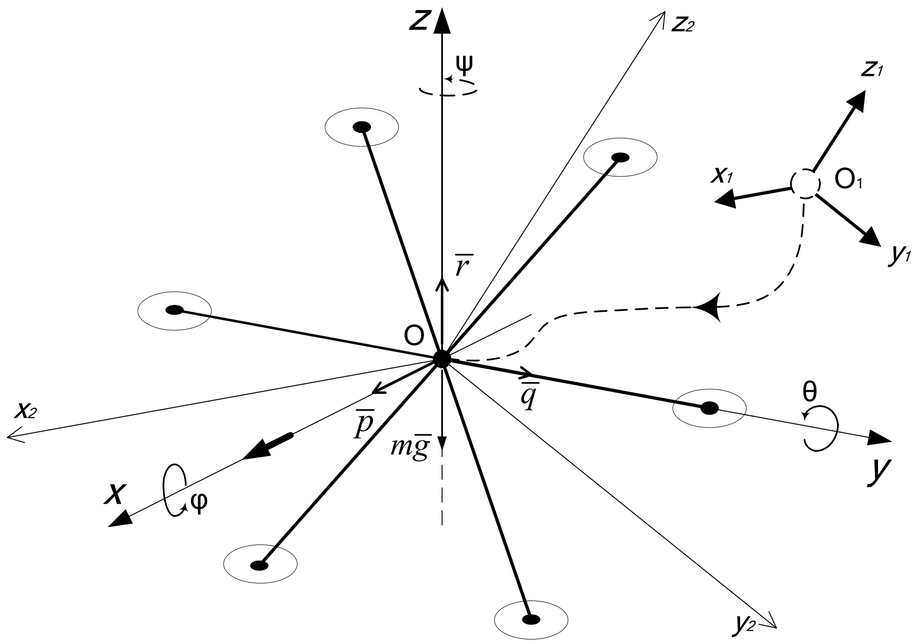

Рис. 1. Схема движения мультикоптера, система координат и отсчет положения в пространстве

Представленные в [1] уравнения описывают обобщенное движение мультикоптера с учетом принятых допущений [3]. Выражая из этих систем динамических уравнений угловые ускорения и скорости поворота, получим систему дифференциальных уравнений вращения мультикоптера вокруг центра масс:

$$\dot{\omega}_x = \frac{I_z M_x}{I_x I_z - I_{xz}^2} + \frac{I_{xz} M_y}{I_x I_z - I_{xz}^2} + \frac{(I_x - I_y + I_z) I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2}\omega_x\omega_y + \frac{(I_y - I_z) I_z - I_{xz}^2}{I_x I_z - I_{xz}^2}\omega_y\omega_z;$$

$$\dot{\omega}_y = \frac{M_y}{J_y} - \frac{(J_x - J_z)\omega_x\omega_z}{J_y} - \frac{J_{xz}({\omega^2}_x - {\omega^2}_z)}{J_y}; \qquad (1)$$

$$\dot{\omega}_z = \frac{I_{xz} M_x}{I_x I_z - I_{xz}^2} + \frac{I_x M_y}{I_x I_z - I_{xz}^2} + \frac{(I_x^2 - I_y I_x + I_{xz}^2)}{I_x I_z - I_{xz}^2}\omega_x\omega_y + \frac{(I_y - I_x - I_z) I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2}\omega_y\omega_z.$$

Переписав последнюю систему в более компактном виде, имеем:

$$\frac{d\omega_x}{dt} = \frac{1}{K}\left[I_z M_x + I_{xz} M_y + (I_x - I_y + I_z) I_{xz}\omega_x\omega_y + (I_y I_z - I_z^2 - I_{xz}^2)\omega_y\omega_z\right];$$

$$\frac{d\omega_y}{dt} = \frac{1}{J_y}\left[M_y - (J_x - J_z)\omega_x\omega_z - J_{xz}({\omega^2}_x - {\omega^2}_z)\right]; \qquad (2)$$

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{1}{K}\left[I_{xz} M_x + I_x M_y + (I_x^2 - I_y I_x + I_{xz}^2)\omega_x\omega_y + (I_y - I_x - I_z) I_{xz}\omega_y\omega_z\right],$$

где $K = I_x I_z - I_{xz}^2$. Здесь $\omega_x, \omega_y \omega_z$ – проекции вектора угловой скорости мультикоптера на оси связной системы координат; M_x, M_y, M_z – проекции результирующего момента крена, тангажа и рыскания; J_x, J_y, J_z, J_{xz} – осевые и центробежный моменты инерции мультикоптера.

Уравнения (2), описывающие основные движения мобильной мехатронной системы крен, тангаж и рыскание, можно значительно упростить, если расположить строительные оси мультикоптера (связную систему координат) по его главным осям инерции. Для такого частного случая, все центробежные моменты инерции будут равны нулю, включая и I_{xz}=0 (конечно же, при условии, что мы заранее вычислили направление главных осей инерции летательного аппарата). Кроме того, отметим, что в любом случае, принятая вертикальная симметрия мультикоптера относительно плоскости *x-z* (при постоянстве массы) даст значение I_{xz} много меньшее, чем I_x, I_y и I_z. Т.е. в любом случае I_{xz} при проведении практических расчетов можно будет в определенной степени пренебречь.

Необходимо подчеркнуть, что если полученная общая система дифференциальных уравнений (2) еще может быть решена в угловых скоростях, то уже найденные скорости вращения не могут быть проинтегрированы для отыскания угловых перемещений φ, θ и ψ. Другими словами, из систем уравнений (1) или (2) нельзя однозначно определить ориентацию мультикоптера в пространстве, так как не представляется возможным найти набор всех параметров, которые бы определяли ориентацию аппарата по имеющимся их производным по времени. В тоже время искомая ориентация в пространстве может быть определена с помощью угловых координат Эйлера (далее используем 3 угловых параметра: φ – угол крена, θ – угол тангажа и ψ – угол рысканья). Теперь необходимо установить взаимосвязь между изменением во времени угловых координат Эйлера и скоростями в связной системе координат. Для этого примем $\dot{\overline{\psi}}, \dot{\overline{\theta}}, \dot{\overline{\varphi}}$ векторами угловых скоростей, ассоциированными со скоростями поворотов в соответствующих угловых направлениях ψ, θ, φ. Тогда суммарный вектор вращения или мгновенная угловая скорость может быть представлена:

$$\overline{\omega} = \dot{\overline{\psi}} + \dot{\overline{\theta}} + \dot{\overline{\varphi}} \qquad (3)$$

$\dot{\overline{\psi}}, \dot{\overline{\theta}}, \dot{\overline{\varphi}}$ направлены по осям непрямоугольной системы координат (рисунок 2).

Далее получим выражения проекций мгновенной угловой скорости мультикоптера через углы крена, тангажа и рысканья и их производные. Заметим, что векторы $\dot{\bar{\psi}}, \dot{\bar{\theta}}, \dot{\bar{\varphi}}$ не взаимно ортогональны – $\dot{\bar{\psi}}, \dot{\bar{\theta}}, \dot{\bar{\varphi}}$ направлены по осям непрямоугольной системы координат (как видно из рисунка). Теперь общие зависимости могут быть записаны между скоростями в связной системе координат $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ и скоростями $\dot{\bar{\psi}}, \dot{\bar{\theta}}, \dot{\bar{\varphi}}$ в Эйлеровых координатах. Заметим, что $\dot{\bar{\psi}}, \dot{\bar{\theta}}, \dot{\bar{\varphi}}$ не взаимно ортогональная тройка векторов (рисунок 2). Общие зависимости между скоростями в связной системе координат $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ и скоростями $\dot{\bar{\psi}}, \dot{\bar{\theta}}, \dot{\bar{\varphi}}$ в Эйлеровых координатах можно записать суммированием соответствующих ортогональных проекций на оси *Oxyz* (см. рисунок). Для этого необходимо составить кинематические уравнения, характеризующие вращения мультикоптера относительно осей неподвижной (инерционной системы координат). В полученных выше уравнениях заданы проекции угловой скорости относительно связанных с телом осей координат: $\omega_x, \omega_y, \omega_z$. Как видно из рисунка, при переходе из инерционной системы в систему связную с телом осуществляется вращении мультикоптера последовательно на угол ψ с угловой скоростью $\dot{\psi}$ относительно оси *Oz*, на угол θ с угловой скоростью $\dot{\theta}$ вокруг оси *Oy'* и на угол φ с угловой скоростью $\dot{\varphi}$ вокруг оси *Ox*. Таким образом, проекции угловой скорости $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$ будут направлены по осям <u>непрямоугольной</u> системы координат $Ozy'x$.

Заметим, что используя ранее разработанные матрицы поворота R_x, R_y, R_z связь $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ с угловыми скоростями крена, тангажа и рыскания $\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ можно представить

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix} = R_x\left(\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ 0\\ 0\end{bmatrix} + R_y\left(\begin{bmatrix}0\\ \dot{\theta}\\ 0\end{bmatrix} + R_z\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}\right)\right) = R_x\cdot\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ 0\\ 0\end{bmatrix} + R_xR_y\cdot\begin{bmatrix}0\\ \dot{\theta}\\ 0\end{bmatrix} + R_xR_yR_z\cdot\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}; \quad (4)$$

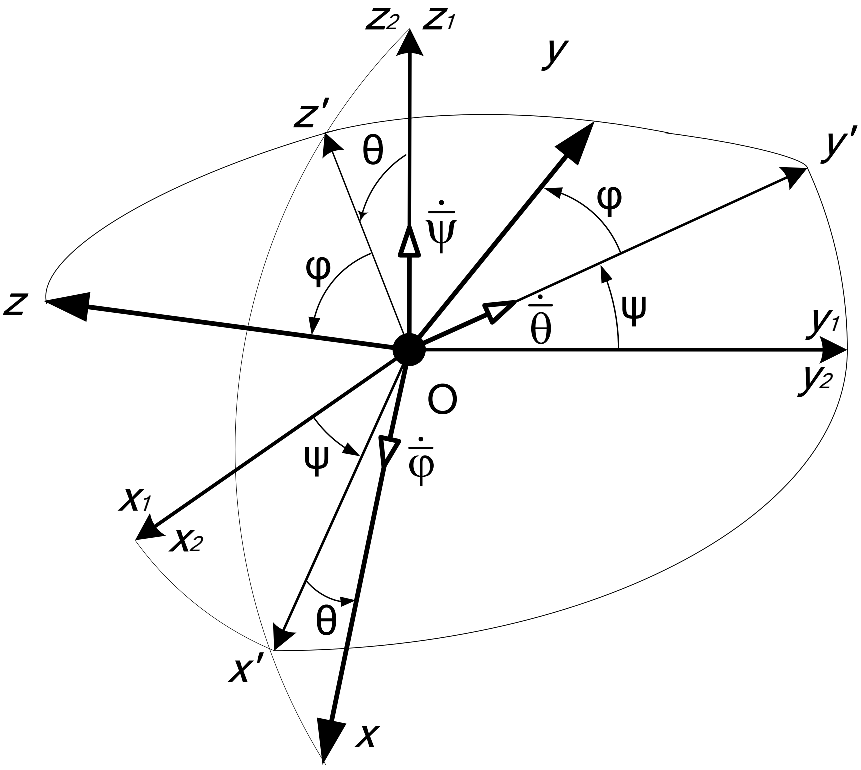

Рис. 2. Схема определения проекций угловой скорости на оси подвижных координат, выраженные через скорости Эйлера

После проведения всех преобразований получим следующие проекции угловой скорости на оси подвижных координат, выраженные через скорости Эйлера

$$
\begin{aligned}
\omega_x &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cdot \sin\theta; \\
\omega_y &= \dot{\theta} \cdot \cos\varphi - \dot{\psi} \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi; \\
\omega_z &= \dot{\theta} \cdot \sin\varphi + \dot{\psi} \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi;
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Систему уравнений (5) можно разрешить относительно производных углов Эйлера. Обратное преобразование, соответственно, дает искомое изменение углов Эйлера, которые будут определяться через известные проекции угловой скорости [4-5]. Таким образом, изменения углов Эйлера определяются через проекции угловой скорости:

$$
\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= \omega_x - \omega_z \cos\varphi \cdot tg\theta + \omega_y \sin\varphi \cdot tg\theta; \\
\dot{\theta} &= \omega_y \cos\varphi + \omega_z \cdot \sin\varphi; \\
\dot{\psi} &= \frac{-\omega_y \sin\varphi + \omega_z \cos\varphi}{\cos\theta}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Уравнения (6) являются кинематическими уравнениями, описывающими движение мобильной мехатронной системы. При проведении расчета может возникнуть неопределенность, когда аппарат поднимается вертикально вверх или опускается вертикально вниз (при угле тангажа $\theta=\pi/2$).

С учетом последних выражений мы можем найти изменение скоростей мультикоптера при переходе от связной с телом системы координат к Эйлеровым скоростям: можно заменить в (2) вращательные скорости относительно связной системы координат Эйлеровыми угловыми скоростями. Скорости изменения углов Эйлера могут быть проинтегрированы по времени, и мы получим угловые перемещения (координаты Эйлера), которые определят текущую ориентацию объекта в пространстве.

Таким образом, решение общих уравнений вращательного движения мультикоптера может быть представлено следующей расчетной схемой для систем дифференциальных уравнений относительно угловых перемещений:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} dt \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} dt \tag{8}$$

Если задать начальные условия

$$\begin{aligned} &\omega_x = p = p_0, \quad \omega_y = q = q_0, \quad \omega_z = r = r_0 \quad при \quad t = 0; \\ &\phi = \phi_0, \qquad \theta = \theta_0, \qquad \psi = \psi_0 \qquad при \quad t = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

то система уравнений (1) или (2) определит единственным образом положение мультикоптера во все время движения, если все проекции моментов сил M_x, M_y, M_z известны.

Уравнения (6-9), (1) или (2) образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений, описывающую движение свободного твердого тела. Алгоритм их решения может быть следующим: сначала находим угловую скорость в связной системе координат $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, а потом переходим к мгновенным угловым скоростям $\dot{\bar{\psi}}, \dot{\bar{\theta}}, \dot{\bar{\phi}}$ и $\dot{\bar{\psi}} \to \psi, \dot{\bar{\theta}} \to \theta, \dot{\bar{\phi}} \to \phi$ Определяем ориентацию ψ, θ, ϕ, т.е. угловые перемещения Эйлера в переменных крен, тангаж и рыскание.

Представленные выше зависимости (5), проекции угловой скорости на оси подвижных координат, выраженные через скорости Эйлера, можно использовать для разработки матрицы перехода от непрямоугольной к связанной системе координат, которую зададим в виде:

$$R_{non-ortho}^{body} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sin\theta \\ 0 & \cos\phi & -\cos\theta\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix} \tag{10}$$

тогда

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = R_{non-ortho}^{body} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sin\theta \\ 0 & \cos\phi & -\cos\theta\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \tag{11}$$

При проведении практических расчетов потребуется также провести обратное преобразование $R_{body}^{non-ortho}$, которое находят по обычным правилам вычисления обратных матриц [5]:

$$R_{Body\_to\_Non-ortho} = R^{-1}{}_{Non-ortho\_to\_Body} = \frac{\tilde{R}}{\left|R_{Non-ortho\_to\_Body}\right|} \tag{12}$$

Нетрудно видеть, что определитель в (12) равен

$$\left|R_{Non-ortho\_to\_Body}\right| = \cos\theta \tag{13}$$

Записав союзную (взаимную) матрицу, получим для (12)

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\phi\cdot\sin\theta & -\cos\phi\cdot\sin\theta \\ 0 & \cos\theta\cdot\cos\phi & \cos\theta\sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \tag{14}$$

Таким образом, связь между проекциями угловой скорости в разных базисах окончательно выражается следующими уравнениями:

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix} = R_x\left(\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ 0\\ 0\end{bmatrix} + R_y\left(\begin{bmatrix}0\\ \dot{\theta}\\ 0\end{bmatrix} + R_z\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}\right)\right) = R_x\cdot\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ 0\\ 0\end{bmatrix} + R_xR_y\cdot\begin{bmatrix}0\\ \dot{\theta}\\ 0\end{bmatrix} + R_xR_yR_z\cdot\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}; \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dot{\varphi}+\dot{\psi}\sin\theta\\ \dot{\theta}\cos\phi-\dot{\psi}\cos\theta\sin\phi;\\ \dot{\psi}\cos\theta\cos\phi+\dot{\theta}\sin\phi;\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & \sin\theta\\ 0 & \cos\phi & -\cos\theta\sin\phi\\ 0 & \sin\phi & \cos\theta\cos\phi\end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}; \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix} = R_{body}^{non-ortho}\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix} = \frac{1}{\cos\theta}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\phi\cdot\sin\theta & -\cos\phi\cdot\sin\theta\\ 0 & \cos\theta\cdot\cos\phi & \cos\theta\sin\phi\\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix} \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix} = R_{body}^{non-ortho}\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \sin\phi\cdot tg\theta & -\cos\phi\cdot tg\theta\\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\\ 0 & -\dfrac{\sin\phi}{\cos\theta} & \dfrac{\cos\phi}{\cos\theta}\end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix} \tag{18}$$

Разработанная матрица перехода от непрямоугольной к связной системе координат позволяет легко конвертировать и устанавливать взаимосвязь между изменением во времени угловых координат Эйлера и скоростями в связной системе координат, описывая основные движения мобильной мехатронной системы крен, тангаж и рыскание в соответствии с основополагающими принципами динамики полета [3,6].

**Работа выполняется в рамках совместного проекта БРФФИ-Минобразование Т16МВ-013 (№ госрегистрации: 20162767 от 12.07.2016)*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ширвель, П. И. Механико-математическое моделирование динамики полета мультикоптерного летательного аппарата/ П.И. Ширвель, А.В. Чигарев, И.И. Конон//Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический сборник. - Вып. 32. – 2017. – С. 105 – 116.*
2. *Горбатенко С. А. и др. Механика полета. Общие сведения. Уравнения движения. – М.: Машиностроение, 1969.*
3. *Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1973.*
4. *Горбатенко С. А. и др. Расчет и анализ движения летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1971.*
5. *Лурье А. И. Аналитическая механика — М.:Физматлит — 1961 г. — 824 с.*
6. *M. V. Cook. Flight Dynamics Principles: A Linear Systems Approach to Aircraft Stability*