УДК 539.3

ДЕФОРМИРОВАНИЕ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ С ЛЕГКИМ СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Захарчук Ю.В.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

Введение. Деформированию и колебаниям слоистых, в том числе трехслойных элементов конструкций, посвящены многочисленные исследования. Постановки и методы решения соответствующих краевых и начально-краевых задач приведены в монографиях [1–9]. Исследования деформирования трехслойных стержней и оболочек при квазистатических нагрузках содержатся в работах [10–15].

Следует отметить, что деформирование трехслойных круговых пластин исследовалось только в случае несжимаемого заполнителя. Это вызвано определенными математическими трудностями при постановке и решении соответствующих краевых задач. Однако учет сжимаемости заполнителя в большей степени адекватно описывает деформирование трехслойных элементов конструкций.

1. Постановка краевой задачи. Рассмотрим упругую круговую трехслойную пластину со сжимаемым-растягиваемым заполнителем (рисунок 1). Постановку задачи и ее решение проведем в цилиндрической системе координат r, φ, z. Систему координат свяжем со срединной плоскостью заполнителя. В тонких несущих слоях с толщинами $h_1 \neq h_2$ справедливы гипотезы Кирхгофа: нормаль остается несжимаемой, прямолинейной и перпендикулярной к деформированной срединной поверхности. В заполнителе, воспринимающем нагрузку в тангенциальном и вертикальном направлениях, нормаль остается прямолинейной, поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$. Обжатие по толщине принимается линейным.

На внешний слой стержня действует симметричная распределенная нагрузка с вертикальной $q = q(r)$ и горизонтальной $p = p(r)$ составляющими. На контуре пластинки предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев и обжатию заполнителя ($\psi = 0$, $v = 0$ при $r = r_0$). Через $w(r)$ и $u(r)$ обозначены прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя, $v(r)$ – функция, характеризующая сжимаемость заполнителя. Обозначим через h_k толщину k–го слоя (k = 1, 2, 3 – номер слоя), при этом h_3=2c.

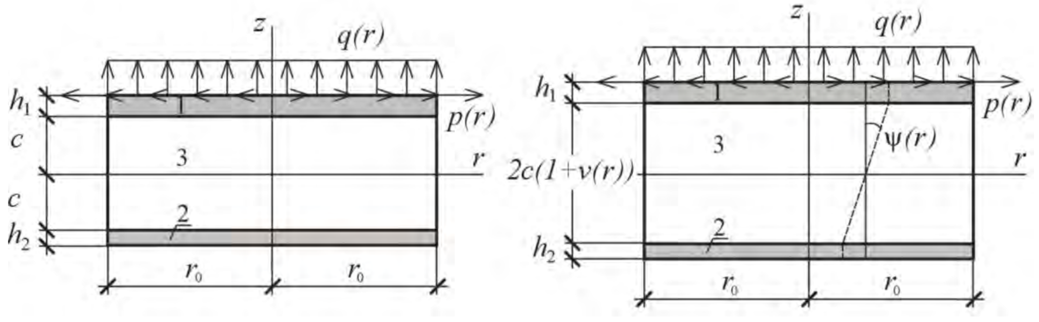

Рис.1. Схема деформирования круговой трехслойной пластины

Продольные и поперечные перемещения в слоях $u^{(k)}(r, z)$ и $w^{(k)}(r, z)$ можно выразить через четыре искомые функции $w(r)$, $u(r)$, $\psi(r)$ и $v(r)$ следующими соотношениями:

▪ в несущих слоях *1, 2*

$$u_r^{(1)} = u + c\psi - z\left(w,_r + v,_r c\right), \ w^{(1)} = w\left(r\right) + v\left(r\right)c, \ \left(c \le z \le c + h_1\right),$$

$$u_r^{(2)} = u - c\psi - z\left(w,_r - v,_r c\right),\ w^{(2)} = w(r) - v(r)c,\ \left(-c - h_2 \le z \le -c\right),$$

▪ в заполнителе *3*

$$u_r^{(3)} = u + z\psi - z\left(w,_r + v,_r z\right),\ w^{(3)}(r,z) = w(r) + v(r)z,\ \left(-c \le z \le c\right), \tag{1}$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной поверхности заполнителя; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Компоненты тензора деформаций в слоях получим из перемещений (1), используя соотношения Коши:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_r^{(1)} = u,_r + c\psi,_r - z\left(w,_{rr} + v,_{rr} c\right),\ \varepsilon_\varphi^{(1)} = \frac{1}{r}\left(u + c\psi - z\left(w,_r + v,_r c\right)\right),\ \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0,\ \left(c \le z \le c + h_1\right),\\
\varepsilon_r^{(2)} = u,_r - c\psi,_r - z\left(w,_{rr} - v,_{rr} c\right),\ \varepsilon_\varphi^{(2)} = \frac{1}{r}\left(u - c\psi - z\left(w,_r - v,_r c\right)\right),\quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0,\ \left(-c - h_2 \le z \le -c\right),\\
\varepsilon_r^{(3)} = u,_r + z\psi,_r - z\left(w,_{rr} + v,_{rr} z\right),\ \varepsilon_\varphi^{(3)} = \frac{1}{r}\left(u + z\psi - z\left(w,_r + v,_r z\right)\right),\\
\varepsilon_{rz}^{(3)} = \tfrac{1}{2}\left(\psi - v,_r z\right),\ \varepsilon_z^{(3)} = v,\ \left(-c \le z \le c\right).
\end{gathered} \tag{2}$$

Таким образом, через введенные четыре искомые функции $w(r)$, $u(r)$, $\psi(r)$ и $v(r)$ выражены перемещения (1) и деформации (2) в круговой пластине со сжимаемым заполнителем.

Используя компоненты тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha = r, \varphi$), введем обобщенные внутренние усилия и моменты в пластине:

$$\begin{gathered}
T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^{3} T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz,\ M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^{3} M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz,\\
S_\alpha^{(3)} = \int_{-c}^{c} \sigma_\alpha^{(3)} z^2 dz,\ H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c\left(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}\right),\ D_\alpha = S_\alpha^{(3)} + c\left(M_\alpha^{(1)} - M_\alpha^{(2)}\right),
\end{gathered} \tag{3}$$

где интегралы берутся по толщине k-го слоя.

Уравнения равновесия рассматриваемой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем получим, используя вариационный принцип Лагранжа:

$$\delta A = \delta W,$$

где $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$ – суммарная вариация работы внешних сил δA_1 и контурных усилий δA_2; δW – вариация работы внутренних сил упругости.

Вариация работы внешней поверхностной нагрузки будет:

$$\delta A_1 = \iint_S (q\delta w + p\delta u) r dr d\varphi. \tag{4}$$

Вариация работы контурных усилий T_r^0, H_r^0, M_r^0, Q^0, D_r^0, M_{rz}^0:

$$\delta A_2 = \int_0^{2\pi} (T_r^0 \delta u + H_r^0 \delta\psi + M_r^0 \delta w,_r + Q^0 \delta w + D_r^0 \delta v,_r + M_{rz}^0 \delta v) d\varphi. \tag{5}$$

Вариация работы сил упругости не учитывает в заполнителе работу нормальных $\sigma_z^{(3)}$ и касательных $\sigma_{rz}^{(3)}$ напряжений:

$$\delta W = \iint_S \left[\sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta\varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\varphi^{(k)} \delta\varepsilon_\varphi^{(k)}) dz \right] r dr d\varphi \tag{6}$$

где двойной интеграл распространен по срединной поверхности заполнителя S.

Вариации перемещений в слоях следуют из (1), деформаций – из (2). После необходимых преобразований имеем:

$$\delta W = \iint_S \left[T_r \delta u,_r + H_r \delta\psi,_r - M_r \delta w,_{rr} - D_r \delta v,_{rr} + \frac{1}{r}\left(T_\varphi \delta u + H_\varphi \delta\psi - M_\varphi \delta w,_r - D_\varphi \delta v,_r\right) \right] r dr d\varphi \tag{7}$$

где внутренние усилия T_α, M_α, H_α, D_α ($\alpha = r, \varphi$) введены соотношениями (3).

Вариацию потенциальной энергии проинтегрируем в полярной системе координат. Подынтегральное выражение в (7) можно разбить на два интеграла, вынося в первом из них операцию дифференцирования за общую скобку, а во втором – группируя слагаемые при одинаковых виртуальных перемещениях:

$$\delta W = \int_0^{2\pi} \left\{ rT_r \delta u + rH_r \delta\psi - rM_r \delta w,_r + \left[(rM_r),_r - M_\varphi \right] \delta w - rD_r \delta v,_r + \right.$$

$$\left. + \left[(rD_r),_r - \mathrm{D}_\varphi \right] \delta v \right\} d\varphi - \iint_{r\,\varphi} \left\{ \left[(rT_r),_r - T_\varphi \right] \delta u + \left[(rH_r),_r - H_\varphi \right] \delta\psi + \right.$$

$$\left. + \left[(rM_r),_{rr} - M_\varphi,_r \right] \delta w + \left[(rD_r),_{rr} - D_\varphi,_r \right] \delta v \right\} d\varphi dr\,.$$

Приравняем полученное выражение к работе внешних и контурных усилий (4), (5) и потребуем выполнение этого равенства при любых значениях варьируемых перемещений. Это возможно при равенстве нулю коэффициентов при независимых вариациях искомых функций. Отсюда следует система дифференциальных уравнений равновесия в усилиях, описывающая деформирование круглой трехслойной пластинки со сжимаемым заполнителем:

$$\begin{cases} T_r,_r + \dfrac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = -p, \\ H_r,_r + \dfrac{1}{r}(H_r - H_\varphi) = 0, \\ M_r,_{rr} + \dfrac{1}{r}(2M_r,_r - M_\varphi,_r) = -q, \\ D_r,_{rr} + \dfrac{1}{r}\left(2D_r,_r - D_\varphi,_r\right) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

На контуре пластины $r = r_0$ должны выполняться силовые условия:

$$T_r = T_r^0,\ H_r = H_r^0,$$

$$M_r = M_r^0,\ M_r,_r + \frac{1}{r}(M_r - M_\phi) = Q^0,$$

$$D_r = D_r^0,\ D_r,_r + \frac{1}{r}\left(D_r - \mathrm{D}_\phi\right) = M_{rz}^0\,.$$

Выразим внутренние обобщенные усилия (3) через перемещения. Для этого напряжения в слоях рассматриваемой пластины представим через деформации с помощью закона Гука в девиаторно-шаровой форме:

$$\sigma_{ij}^{(k)} = s_{ij}^{(k)} + \sigma^{(k)}\delta_{ij} \tag{9}$$

где

$$s_{ij}^{(k)} = 2G_k \text{э}_{ij}^{(k)},\ \text{э}_{ij}^{(k)} = \varepsilon_{ij}^{(k)} - \varepsilon^{(k)}\delta_{ij},\ \sigma^{(k)} = K_k\,\theta^{(k)} = 3K_k\varepsilon^{(k)},\ \varepsilon^{(k)} = \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)} + \varepsilon_z^{(k)}),$$

$$(i, j = r, \varphi, z;\ k = 1, 2, 3).$$

Шаровая и девиаторная части тензора деформаций в (9) будут

$$\varepsilon^{(k)} = \tfrac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}),\ \text{э}_r^{(k)} = \varepsilon_r^{(k)} - \tfrac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}) = \tfrac{2}{3}\varepsilon_r^{(k)} - \tfrac{1}{3}\varepsilon_\varphi^{(k)},$$

$$\text{э}_\varphi^{(k)} = \tfrac{2}{3}\varepsilon_\varphi^{(k)} - \tfrac{1}{3}\varepsilon_r^{(k)},\ (k = 1, 2),\ \ \varepsilon^{(3)} = \tfrac{1}{3}(\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}),\ \ \text{э}_r^{(3)} = \tfrac{2}{3}\varepsilon_r^{(3)} - \tfrac{1}{3}\varepsilon_\varphi^{(3)} - \tfrac{1}{3}\varepsilon_z^{(3)}, \tag{10}$$

$$\text{э}_\varphi^{(3)} = \tfrac{2}{3}\varepsilon_\varphi^{(3)} - \tfrac{1}{3}\varepsilon_r^{(3)} - \tfrac{1}{3}\varepsilon_z^{(3)},\ \ \text{э}_z^{(3)} = \tfrac{2}{3}\varepsilon_z^{(3)} - \tfrac{1}{3}\varepsilon_r^{(3)} - \tfrac{1}{3}\varepsilon_\varphi^{(3)},\ \text{э}_{rz}^{(3)} = \varepsilon_{rz}^{(3)}.$$

Компоненты тензора напряжений связаны с деформациями (10) законом Гука:

$$\sigma_r^{(k)} = 2G_k\text{э}_r^{(k)} + 3K_k\varepsilon^{(k)}\delta_{ij} = \left(K_k + \tfrac{4}{3}G_k\right)\varepsilon_r^{(k)} + \left(K_k - \tfrac{2}{3}G_k\right)\varepsilon_\varphi^{(k)} = K_k^+\varepsilon_r^{(k)} + K_k^-\varepsilon_\varphi^{(k)},\ (k = 1, 2),$$

$$\sigma_r^{(3)} = K_3^+\varepsilon_r^{(3)} + K_3^-\left(\varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}\right),\ \ \sigma_\varphi^{(k)} = K_k^+\varepsilon_\varphi^{(k)} + K_k^-\varepsilon_r^{(k)},\ (k = 1, 2), \tag{11}$$

$$\sigma_\varphi^{(3)} = K_3^+\varepsilon_\varphi^{(3)} + K_3^-\left(\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}\right),\ \ \sigma_z^{(3)} = K_3^+\varepsilon_z^{(3)} + K_3^-\left(\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)}\right),\ \ \sigma_{rz}^{(3)} = 2G_3\varepsilon_{rz}^{(3)},$$

где введены обозначения

$$K_k^+ = K_k + \tfrac{4}{3} G_k\,,\ K_k^- = K_k - \tfrac{2}{3} G_k\,.$$

Используя соотношения (9), (10), (11), выразим обобщенные внутренние усилия и моменты через искомые функции $w(r)$, $u(r)$, $\psi(r)$ и $v(r)$. Подставив их в систему дифференциальных уравнений равновесия в усилиях (8), получим в итоге систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую перемещения в круглой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем:

$$\begin{gathered}
\mathrm{L}_2(a_1 u + a_2\,\psi - a_3 w,_r - a_5 v,_r) + 2cK_3^- v,_r = -p\,,\\
\mathrm{L}_2(a_2 u + a_4\,\psi - a_5 w,_r - a_7 v,_r) = 0\,,\\
\mathrm{L}_3(a_3 u + a_5\,\psi - a_6 w,_r - a_8 v,_r) = -q\,,\\
\mathrm{L}_3(a_5 u + a_7\,\psi - a_8 w,_r - a_9 v,_r) + \frac{2}{3}c^3 K_3^- \left(v,_{rr} + \frac{v,_r}{r} \right) = 0\,,
\end{gathered} \tag{12}$$

где коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2 (*оператор Бесселя*), L_3 определяются соотношениями:

$$a_1 = \sum_{k=1}^{3} h_k K_k^+\,,\ a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+)\,,$$

$$a_3 = h_1\left(c + \tfrac{1}{2}h_1\right)K_1^+ - h_2\left(c + \tfrac{1}{2}h_2\right)K_2^+\,,\ a_4 = c^2\left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \tfrac{2}{3}cK_3^+\right),$$

$$a_5 = c\left[h_1\left(c + \tfrac{1}{2}h_1\right)K_1^+ + h_2\left(c + \tfrac{1}{2}h_2\right)K_2^+ + \tfrac{2}{3}c^2 K_3^+ \right],$$

$$a_6 = h_1\left(c^2 + ch_1 + \tfrac{1}{3}h_1^2\right)K_1^+ + h_2\left(c^2 + ch_2 + \tfrac{1}{3}h_2^2\right)K_2^+ + \tfrac{2}{3}c^3 K_3^+\,,$$

$$a_7 = c^2\left[h_1\left(c + \tfrac{1}{2}h_1\right)K_1^+ - h_2\left(c + \tfrac{1}{2}h_2\right)K_2^+ \right],$$

$$a_8 = c\left[h_1\left(c^2 + ch_1 + \tfrac{1}{3}h_1^2\right)K_1^+ - h_2\left(c^2 + ch_2 + \tfrac{1}{3}h_2^2\right)K_2^+ \right],$$

$$a_9 = c^2\left(h_1\left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3}\right)K_1^+ + h_2\left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3}\right)K_2^+ + \frac{2}{5}c^3 K_3^+ \right),$$

$$\mathrm{L}_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg),_r \right),_r \equiv g,_{rr} + \frac{g,_r}{r} - \frac{g}{r^2}\,,\ \ \mathrm{L}_3(g) \equiv \frac{1}{r}\big(r\,\mathrm{L}_2(g)\big),_r \equiv g,_{rrr} + \frac{2g,_{rr}}{r} - \frac{g,_r}{r^2} + \frac{g}{r^3}\,.$$

Краевая задача замыкается добавлением к (12) кинематических граничных условий. При жесткой заделке контура пластины должны выполняться условия

$$u = \psi = w = v = w,_r = 0 \ \text{ при } \ r = r_0\,.$$

При шарнирном опирании контура пластины

$$u = \psi = w = v = M_r = 0 \ \text{ при } \ r = r_0\,.$$

В случае свободного контура

$$\psi = v = 0\,,\ T_r = M_r = M_r,_r = 0\,. \tag{13}$$

Следует отметить, что если в системе (12) положить $v(r) \equiv 0$, то первые три уравнения в ней совпадут с известной системой уравнений равновесия для круговой пластины с несжимаемым заполнителем [4].

2. Решение краевой задачи.

Проведя необходимые преобразования в системе (12), приходим к следующей системе уравнений

$$u = -\frac{1}{a_2}\left(a_4\psi - a_5 w,_r - a_7 v,_r\right) + C_1\frac{r}{2} + C_2\frac{1}{r}\,,$$

$$\psi = \frac{1}{\left(a_2 a_5 - a_3 a_4\right)}\Big[\left(a_2 a_6 - a_3 a_5\right) w,_r + \left(a_2 a_8 - a_3 a_7\right) v,_r \Big] -$$

$$- \frac{a_2}{\left(a_2 a_5 - a_3 a_4\right)} \mathrm{L}_3^{-1}(q) + C_3\frac{r}{4}\left(2\ln r - 1\right) + C_4\frac{r}{2} + C_5\frac{1}{r}\,,$$

$$w=-\frac{d_6}{d_5}v-\frac{d_7}{d_5}\int_0^r \mathrm{L}_3^{-1}\left(v,_{rr}+\frac{v,_r}{r}\right)\mathrm{d}r+\frac{d_8}{d_5}\int_0^r \mathrm{L}_3^{-1}(q)\,\mathrm{d}r+\frac{C_6}{4}r^2\left(\ln r-1\right)+\frac{C_7}{4}r^2+C_8\ln r+C_9,$$

$$\Delta\Delta v+\beta^2\Delta v=q_1. \tag{14}$$

Здесь L_2^{-1}, L_3^{-1} – линейные интегральные операторы, обратные дифференциальным операторам (12)

$$\mathrm{L}_2^{-1}(f)\equiv\frac{1}{r}\int r\int f\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r,\quad \mathrm{L}_3^{-1}(f)\equiv\frac{1}{r}\int r\int\frac{1}{r}\int rf\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r;$$

оператор Лапласа

$$\Delta=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right),\quad \Delta\Delta v\equiv\mathrm{L}_3\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right);$$

коэффициенты

$$d_1=\left(a_2a_6-a_3a_5\right)\left(a_2^2-a_1a_4\right)-\left(a_2a_3-a_1a_5\right)\left(a_2a_5-a_3a_4\right),$$

$$d_2=\left(a_2a_8-a_3a_7\right)\left(a_2^2-a_1a_4\right)-\left(a_2a_5-a_1a_7\right)\left(a_2a_5-a_3a_4\right),\ d_3=2ca_2\left(a_2a_5-a_3a_4\right)K_3^-,$$

$$d_4=a_2\left(a_2^2-a_1a_4\right),\quad d_5=\left(a_2a_6-a_3a_5\right)\left(a_2a_7-a_4a_5\right)-\left(a_2a_8-a_5^2\right)\left(a_2a_5-a_3a_4\right),$$

$$d_6=\left(a_2a_8-a_3a_7\right)\left(a_2a_7-a_4a_5\right)-\left(a_2a_9-a_5a_7\right)\left(a_2a_5-a_3a_4\right),\ d_7=\frac{2}{3}c^3a_2\left(a_2a_5-a_3a_4\right)K_3^-,$$

$$d_8=a_2\left(a_2a_7-a_4a_5\right),\quad \beta^2=\frac{d_3d_5-d_1d_7}{d_2d_5-d_1d_6};$$

приведенная нагрузка

$$q_1=\frac{d_4d_5-d_1d_8}{d_2d_5-d_1d_6}q. \tag{15}$$

Таким образом, функция сжимаемости должна удовлетворять неоднородному дифференциальному уравнению четвертого порядка $(14)_4$. Рассмотрим это уравнение. Вынося оператор Лапласа за скобку, получим

$$\Delta(\Delta v+\beta^2 v)=q_1,$$

или

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)\left(\Delta v+\beta^2 v\right)=q_1.$$

После двукратного интегрирования имеем

$$\Delta v+\beta^2 v=\int_0^r\frac{1}{r}\int_0^r rq_1\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r+C_{10}\ln r+C_{11}. \tag{16}$$

Используя оператор Лапласа (15) уравнение (16) сводим к неоднородному уравнению Бесселя:

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}+\beta^2 v=q_2. \tag{17}$$

где функция

$$q_2(r)=\int_0^r\frac{1}{r}\int_0^r rq_1\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r+C_{10}\ln r+C_{11}.$$

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее уравнению (17):

$$\Delta v_0+\beta^2 v_0=0.$$

Его решение v_0 будет

$$v_0=C_{12}J_0(\beta r)+C_{13}Y_0(\beta r). \tag{18}$$

где $J_0(\beta r)$ –*функция Бесселя* первого рода нулевого порядка, $Y_0(\beta r)$ – *функция Бесселя* второго рода нулевого порядка (*функция Неймана*).

Частное решение v_r уравнения (17) можно получить, используя два независимых решения однородного уравнения (18):

$$v_r = Y_0(\beta r)\int \frac{J_0(\beta r) q_2(r)}{W} \mathrm{d} r - J_0(\beta r)\int \frac{Y_0(\beta r) q_2(r)}{W} \mathrm{d} r \,. \tag{19}$$

где W – *определитель Вронского*. В нашем случае

$$W\left\{J_0, Y_0\right\} = Y_{0},_{r} J_0 - J_{0},_{r} Y_0 = \frac{2}{\pi r} \,.$$

Искомое решение уравнения (17) выпишем в виде суммы общего решения однородного уравнения (18) и частного решения (19). В результате

$$v = C_{12} J_0(\beta r) + C_{13} Y_0(\beta r) + \frac{\pi}{2}\left(Y_0(\beta r)\int J_0(\beta r) q_2(r) r \,\mathrm{d} r - J_0(\beta r)\int Y_0(\beta r) q_2(r) r \,\mathrm{d} r \right).$$

Остальные перемещения вычисляются последовательно по формулам (14).

Следует отметить, что для сплошных круглых пластин из условия ограниченности решения в начале координат следует положить

$$C_2 = C_3 = C_5 = C_6 = C_8 = C_{10} = C_{13} = 0 \,.$$

Заключение. Приведенная постановка и предложенное решение позволяет рассчитывать напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым заполнителем при различных нагрузках и граничных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин, В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков − М.: Машиностроение, 1980. − 375 с.*
2. *Горшков, А.Г. Теория упругости и пластичности / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Тарлаковский – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 416 с.*
3. *Плескачевский, Ю. М. Деформирование металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая – Минск: Бел. навука. 2004. – 342 с.*
4. *Плескачевский, Ю. М. Динамика металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – Минск: Бел. навука. 2004. – 386 с.*
5. *Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 380 с.*
6. *Плескачевский, Ю.М. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.*
7. *Старовойтов, Э. И. Сопротивление материалов / Э. И.Старовойтов – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.*
8. *Старовойтов, Э.И. Трехслойные стержни в терморадиационных полях / Э.И. Старовойтов, М.А. Журавков, Д.В. Леоненко // Минск: Беларуская навука, 2017. – 275 с.*
9. *Starovoitov, E. I. Foundations of the theory of elasticity, plasticity and viscoelasticity / E. I. Starovoitov, F.B. Nagiyev – Apple Academic Press, Toronto, New Jersey, Canada, USA, 2012. – 346 p.*
10. *Старовойтов, Э.И. Термосиловое деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки / Э.И. Старовойтов, Ф.Б. Нагиев // Теоретическая и прикладная механика. Вып. 31.– Мн.: БНТУ. –2016. – С. 176–184.*
11. *Плескачевский, Ю. М. Деформирование трехслойного упругого стержня нагрузками различных форм в температурном поле / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник.– Мн.: 2017. − Вып. 32. – С. 5–12.*

12. *Старовойтов, Э.И. Повторное знакопеременное нагружение упругопластических тел в нейтронном потоке / Э.И. Старовойтов, Д.М. Савицкий // Теоретическая и прикладная механика. – 2015. – Минск: БНТУ. Вып. 30. – С. 20–29.*
13. *Старовойтов, Э.И. Термосиловое деформирование трехслойных упругопластических стержней / Э.И. Старовойтов, Д.М. Савицкий // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – Вып. 29. – С. 51–57.*
14. *Старовойтов, Э.И. Колебания круглых трехслойных пластин, связанных с упругим основанием / Э.И. Старовойтов, В.Д. Кубенко, Д.В. Тарлаковский // Изв. ВУЗов. Авиационная техника. – 2009. – №2. – С. 16–19.*
15. *Starovoitov, E.I. Circular sandwich plates under local impulsive loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Т. 39, №8. – P. 945-952.*