УДК 539.3

ДЕФОРМИРОВАНИЕ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ, ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПО КОНТУРУ, НА ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА

Козел А.Г.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

Введение. С каждым годом в строительстве, авиационной и космической технике, судостроении и машиностроении требования к характеристикам конструкций возрастают, что приводит к появлению новых материалов, обладающих высокими прочностными и жесткостными характеристиками. В связи с этим получили широкое распространение слоистые конструкции, в том числе трёхслойные. Эти конструкции при относительно небольшой массе способны обеспечить не только заданные показатели прочности и повышение изгибной жёсткости, но и противостоять тепловым, химическим, радиационным и некоторым другим негативным воздействиям.

Большую роль в развитии теории и методов расчета трёхслойных элементов конструкций сыграли ключевые работы В.В. Болотина[1], А.Г. Горшкова[2], Д.В. Леоненко [3], Ю.М. Плескачевского [4], Э.И. Старовойтова [5 – 8] и многих других зарубежных и отечественных авторов.

К настоящему времени достаточно полно исследован осесимметричный изгиб несимметричных по толщине упругих трёхслойных круговых пластин с лёгким заполнителем, связанных с упругим основанием Винклера [4, 5]. Математической моделью этого основания учитывается сжимаемость основания, но его связностью (распределительной способностью) пренебрегается. Поэтому возникает необходимость исследования деформирования трёхслойных элементов конструкций, связанных с упругим основанием структуры более сложной, чем основание Винклера. Требуемая модель основания была предложена П.Л. Пастернаком[9].

В работах [10–12] получены уравнения равновесия упругой трехслойной круговой пластины, связанной с основанием Пастернака. Здесь приведено общее аналитическое решение, и рассмотрен случай изгиба пластины под действием равномерно распределенной нагрузки при жёсткой заделке контура пластины.

Постановка задачи. Рассматривается задача об осесимметричном изгибе несимметричной по толщине упругой трехслойной пластины с легким заполнителем на основании Пастернака. В тонких несущих слоях принимаются гипотезы Кирхгофа, в несжимаемом по толщине заполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$. На контуре пластины предполагается жесткая диафрагма, которая препятствует относительному сдвигу слоев. Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат, связанной со срединной плоскостью заполнителя (рис. 1).

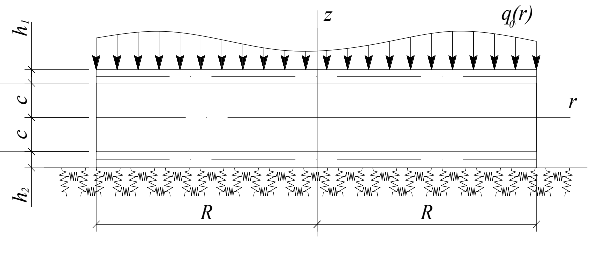

Рис. 1. Схема деформирования круговой пластины

Перпендикулярно верхнему слою пластины действует распределенная нагрузка $q_0(r)$. Реакция основания описывается моделью Пастернака:

$$q_r(r) = -\kappa_0 w + t_f \Delta w \tag{1}$$

где κ_0, t_f – коэффициенты сжатия и сдвига, Δ – оператор Лапласа.

Уравнения равновесия в усилиях получены из вариационного принципа Лагранжа:

$$\begin{gathered} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w,_r) = 0, \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w,_r) = 0, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w,_r) = -(q_0 + q_R), \end{gathered} \tag{2}$$

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате; q_0 – интенсивность внешней распределенной нагрузки; $w(r)$ – прогиб; $u(r)$ – радиальное перемещение координатной плоскости; a_n – коэффициенты, определяемые через модули упругости материалов и геометрические параметры слоев,

$$a_1 = \sum_{k=1}^{3} h_k K_k^+, \; a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \; a_3 = h_1\left(c + \tfrac{1}{2}h_1\right)K_1^+ - h_2\left(c + \tfrac{1}{2}h_2\right)K_2^+,$$

$$a_4 = c^2\left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \tfrac{2}{3} c K_3^+\right), \; a_5 = c\left[h_1\left(c + \tfrac{1}{2}h_1\right)K_1^+ + h_2\left(c + \tfrac{1}{2}h_2\right)K_2^+ + \tfrac{2}{3}c^2 K_3^+\right],$$

$$a_6 = h_1\left(c^2 + c h_1 + \tfrac{1}{3}h_1^2\right)K_1^+ + h_2\left(c^2 + c h_2 + \tfrac{1}{3}h_2^2\right)K_2^+ + \tfrac{2}{3}c^3 K_3^+,$$

где h_k – толщина k-го слоя ($k = 1,2,3$), $K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3}G_k$, $K_k^- \equiv K_k - \frac{2}{3}G_k$, G_k, K_k – модули сдвига и объёмного деформирования; L_k – линейные дифференциальные операторы

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg),_r\right),_r \equiv g,_{rr} + \frac{g,_r}{r} - \frac{g}{r^2},$$

$$L_3(g) \equiv \frac{1}{r}\big(r L_2(g)\big),_r \equiv g,_{rrr} + \frac{2g,_{rr}}{r} - \frac{g,_r}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Краевая задача по определению прогиба рассматриваемой пластины замыкается присоединением к системе дифференциальных уравнений (2) граничных условий на контуре $r = R$:

- при жёсткой заделке контура пластины

$u = \psi = w = w,_r$;

- при шарнирном опирании контура пластины

$u = \psi = w = M_r$;

- в случае свободного контура пластины

$$\psi = 0, \; T_r = M_r = M_{r,r} = 0. \tag{3}$$

Здесь внутренние усилия T_r, M_r выражаются через искомые перемещения следующими формулами:

$$T_r = \sum_{k=1}^{3} h_k\left(K_k^+ u,_r + \frac{u}{r}K_k^-\right) + c(K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2)\psi,_r + c(K_1^- h_1 - K_2^- h_2)\frac{\psi}{r} -$$

$$-\left[K_1^+ h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right) - K_2^+ h_2\left(c + \frac{h_2}{2}\right)\right]w,_{rr} - \left[K_1^- h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right) - K_2^- h_2\left(c + \frac{h_2}{2}\right)\right]\frac{w,_r}{r}.$$

$$M_r = \left[K_1^+ h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right) - K_2^+ h_2\left(c + \frac{h_2}{2}\right)\right]u,_r + \left[K_1^- h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right) - K_2^- h_2\left(c + \frac{h_2}{2}\right)\right]\frac{u}{r} +$$

$$+\left[cK_1^+ h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right) + cK_2^+ h_2\left(c + \frac{h_2}{2}\right) + \frac{2}{3}c^3 K_3^+\right]\psi,_r + \left[cK_1^- h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right) + cK_2^- h_2\left(c + \frac{h_2}{2}\right) + \frac{2}{3}c^3 K_3^-\right]\frac{\psi}{r} -$$

$$-\left[K_1^+h_1\left(c^2+ch_1+\frac{h_1^2}{3}\right)+K_2^+h_2\left(c^2+ch_2+\frac{h_2^2}{3}\right)+\frac{2}{3}c^3K_3^+\right]w,_{rr}-$$

$$-\left[K_1^-h_1\left(c^2+ch_1+\frac{h_1^2}{3}\right)+K_2^-h_2\left(c^2+ch_2+\frac{h_2^2}{3}\right)+\frac{2}{3}c^3K_3^-\right]\frac{w,_r}{r}.$$

Граничные условия (3) служат для определения констант интегрирования после решения системы (2).

Решение краевой задачи. Рассмотрим процедуру решения системы (2) уравнений. С помощью первых двух уравнений системы (2) в третьем уравнении обнуляем коэффициенты перед функциями u и ψ. В результате приходим к следующим выражениям для радиального перемещения и сдвига через прогиб $w(x)$, который удовлетворяет дифференциальному уравнению четвертого порядка:

$$u=b_1w,_r+C_1r+\frac{C_2}{r},$$

$$\psi=b_2w,_r+C_3r+\frac{C_4}{r}, \qquad (4)$$

$$w,_{rrrr}+\frac{2}{r}w,_{rrr}-\frac{1}{r^2}w,_{rr}+\frac{1}{r^3}w,_r-t_fD(w,_{rr}+\frac{1}{r}w,_r)+\kappa_0Dw=q_0D\ ,.$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – константы интегрирования, коэффициенты

$$b_1=\frac{a_1a_4-a_2a_5}{a_1a_4-a_2^2},\ b_2=\frac{a_1a_5-a_2a_3}{a_1a_4-a_2^2},\ D=\frac{a_1(a_1a_4-a_2^2)}{(a_1a_6-a_3^2)(a_1a_4-a_2^2)-(a_1a_5-a_2a_3)^2}.$$

В связи с ограниченностью предполагаемого решения в начале координат для сплошных пластин необходимо положить $C_2=C_4=0$.

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее третьему уравнению в системе (4), и введем в нем замену переменной $x=\kappa r$:

$$w,_{xxxx}+\frac{2}{x}w,_{xxx}-\frac{1}{x^2}w,_{xx}+\frac{1}{x^3}w,_x-2t_0^2(w,_{xx}+\frac{1}{r}w,_x)+w=0$$

или

$$\Delta^2w-2t_0^2\Delta w+w=0,$$

где $\kappa^4=\kappa_0D$, $q=q_0D$, $2t_0^2=t_{f1}/\kappa^2$, $t_{f1}=t_fD$.

Общий интеграл третьего дифференциального уравнения в (4) может быть теперь представлен в виде

$$w=w_1+w_2+w_p, \qquad (5)$$

где w_p – частное решение рассматриваемого уравнения, w_1 и w_2 – фундаментальная система частных интегралов, удовлетворяющая однородным уравнениям

$$w_1,_{xx}+\frac{1}{x}w_1,_x+aw_1=0,$$

$$w_2,_{xx}+\frac{1}{x}w_2,_x+\bar{a}w_2=0.$$

После ряда преобразований решение уравнения (5) получаем в виде:

$$w=C_5J_0(\sqrt{a}x)+C_6H_0^{(1)}(\sqrt{a}x)+C_7J_0(\sqrt{\bar{a}}x)+C_8H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}x)+w_p,$$

где $J_0(\sqrt{a}x)$ и $J_0(\sqrt{\bar{a}}x)$ – функции Бесселя первого рода, нулевого порядка, комплексных аргументов $\sqrt{a}x$ и $\sqrt{\bar{a}}x$; $H_0^{(1)}(\sqrt{a}x)$ и $H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}x)$ – функции Ханкеля первого и второго рода, нулевого порядка от тех же аргументов.

Изгиб пластины под действием равномерно распределенной нагрузки. Пусть на рассматриваемую пластину действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q_0 = const$ (рис. 2).

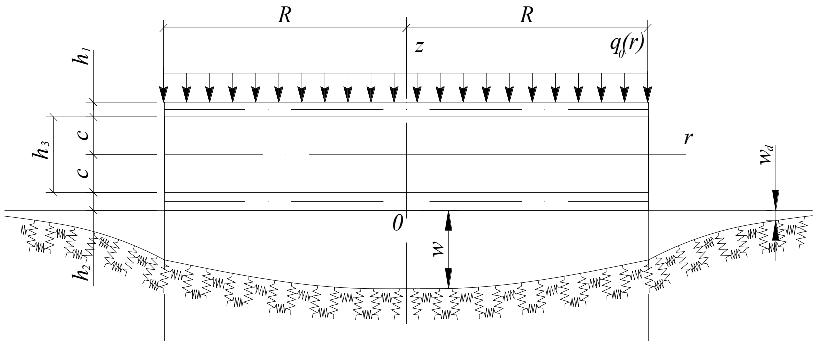

Рис. 2. Трехслойная пластина под действием равномерно распределенной нагрузки

Дифференциальное уравнение изгиба такой пластины принимает вид:

$$\Delta^2 w - 2t_0^2 \Delta w + w = \frac{q_0 D}{\kappa^4} = \frac{q_0}{\kappa_0}, \tag{6}$$

В области внешней по отношению к пластине реакция основания отсутствует. В ней, справедливо однородное дифференциальное уравнение, которое в безразмерных координатах имеет вид [8]:

$$\Delta w_d - \alpha_0^2 w_d = 0, \tag{7}$$

где $\alpha_0^2 = \dfrac{\kappa_0}{t_f \kappa^2} = \dfrac{\sqrt{\kappa_0}}{t_f \sqrt{D}} = \dfrac{\kappa^2}{t_f D}$.

Общее решение дифференциальных уравнений (6) и (7) может быть представлено в виде:

$$w = C_5 J_0(\sqrt{a}x) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{a}x) + C_7 J_0(\sqrt{\bar{a}}x) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}x) + \frac{q_0}{\kappa_0},$$
$$w_d = C_9 I_0(\alpha_0 x) + C_{10} K_0(\alpha_0 x), \tag{8}$$

где $I_0(\alpha_0 x)$, $K_0(\alpha_0 x)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода (функция Макдональда) нулевого порядка аргумента $\alpha_0 x$.

Таким образом, прогиб в задаче об изгибе равномерно распределенной нагрузкой трехслойной пластины, лежащей на упругом основании Пастернака, определено с точностью до шести постоянных интегрирования.

Т.к. прогиб в центре пластины должен быть конечным, а функции Ханкеля $H_0^{(1)}(\sqrt{a}x)$ и $H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}x)$ в начале координат уходят в бесконечность, то в решении (8) для сплошных пластин необходимо положить $C_6 = C_8 = 0$.

Поскольку функция $I_0(\alpha_0 x)$ при $r \to \infty$ неограниченно возрастает, что противоречит условию затухания осадок упругого основания вдали от места приложения нагрузки ($w_d \to 0$ при $r \to \infty$), то отсюда следует, что $C_9 = 0$.

В итоге получаем прогиб пластины w и осадку поверхности свободного основания w_d в виде

$$w = C_5 J_0(\sqrt{a}x) + C_7 J_0(\sqrt{\bar{a}}x) + \frac{q_0}{\kappa_0},$$
$$w_d = C_{10} K_0(\alpha_0 x)$$

Полное решение поставленной задачи выпишем в общем виде:

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r, \tag{9}$$

$$\psi = b_2 w,_r + C_3 r\,,$$
$$w = C_5 J_0(\sqrt{a}x) + C_7 J_0(\sqrt{\bar{a}}x) + \frac{q_0}{\kappa_0}\,,$$
$$w_d = C_{10} K_0(\alpha_0 x)\,.$$

Общее решение (9) можно использовать для исследования любого симметричного изгиба трёхслойной круговой пластины, при опирании её на упругом основании. При этом конкретная задача сводится к определению постоянных интегрирования C_1, C_3, C_5, C_7, C_{10} из соответствующих граничных условий и условий равновесия пластины.

Рассмотрим случай жесткой заделки контура пластины. Тогда должны выполняться первые из граничных условий в (3). В результате получаем линейную систему уравнений

$$\begin{gathered} b_1 w,_r(R) + C_1 R = 0\,, \\ b_2 w,_r(R) + C_3 R = 0\,, \\ C_5 J_0(\sqrt{a}\kappa R) + C_7 J_0(\sqrt{\bar{a}}\kappa R) + \frac{q_0}{\kappa_0} = 0\,, \\ \sqrt{a} C_5 J_1(\sqrt{a}\kappa R) + \sqrt{\bar{a}} C_7 J_1(\sqrt{\bar{a}}\kappa R) = 0\,. \end{gathered} \tag{10}$$

Решив систему уравнений (10) получим следующие константы интегрирования:

$$\begin{gathered} C_1 = C_3 = 0\,, \\ C_5 = \frac{q_0 J_1(\sqrt{\bar{a}}\kappa R)}{\kappa_0 (J_1(\sqrt{a}\kappa R) J_0(\sqrt{\bar{a}}\kappa R) - J_1(\sqrt{\bar{a}}\kappa R) J_0(\sqrt{a}\kappa R)}\,, \\ C_7 = \frac{q_0 J_1(\sqrt{a}\kappa R)}{\kappa_0 (\sqrt{\bar{a}} J_1(\sqrt{\bar{a}}\kappa R) J_0(\sqrt{a}\kappa R) - \sqrt{a} J_0(\sqrt{\bar{a}}\kappa R) J_1(\sqrt{a}\kappa R))}\,. \end{gathered} \tag{11}$$

Также при $r = R$ осадка и прогиб должны совпадать $w(R) = w_d(R)$, поэтому $C_{10} = 0$, т.к. $w(R) = 0$.

Таким образом, решение (9) с константами интегрирования (11) описывает перемещения в трёхслойной пластине на упругом основании Пастернака в случае заделки её контура при равномерно распределенной нагрузке.

Выводы. Предложенная механико-математическая модель и решение краевой задачи об изгибе несимметричной по толщине упругой трёхслойной круговой пластины на основании Пастернака позволяют исследовать НДС при любых осесимметричных нагрузках и граничных условиях.

Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (проект Т16Р-010).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин, В.В. Механика многослойных конструкций / В.В.Болотин, Ю.Н.Новичков − М.: Машиностроение, 1980. − 375 с.*
2. *Горшков, А. Г. Теория упругости и пластичности / А.Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д.В. Тарлаковский – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 416 с.*
3. *Плескачевский, Ю. М. Деформирование трехслойного упругого стержня нагрузками различных форм в температурном поле / Ю.М. Плескачевский, Э.И.Старовойтов, Д.В. Леоненко // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник.– Мн.: 2017. − Вып. 32. – С. 5–12*
4. *Плескачевский, Ю. М. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.*

5. *Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 380 с.*
6. *Старовойтов, Э.И. Термосиловое деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки / Э.И. Старовойтов, Ф.Б. Нагиев // Теоретическая и прикладная механика. Вып. 31.– Мн.: БНТУ. –2016. – С. 176–184.*
7. *Старовойтов, Э.И. Повторное знакопеременное нагружение упругопластических тел в нейтронном потоке / Э.И. Старовойтов, Д.М. Савицкий // Теоретическая и прикладная механика. – 2015. – Минск: БНТУ. Вып. 30. – С. 20–29.*
8. *Старовойтов, Э.И. Термосиловое деформирование трехслойных упругопластических стержней / Э.И. Старовойтов, Д.М. Савицкий // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – Вып. 29. – С. 51–57.*
9. *Власов, В.З. Балки, плиты, оболочки на упругом основании / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960. – С. 226-235.*
10. *Козел, А.Г. Математическая модель деформирования круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Проблемы физики, математики и техники. – Гомель: ГГУ им. Ф.Скорины. – 2017. – № 1(30). – С. 42-46.*
11. *Козел, А.Г. Деформирование круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. – Минск: БНТУ. – 2017. – Вып. 32. – С. 235-240.*
12. *Козел, А.Г. Перемещения в круговой трехслойной пластине на двухпараметрическом основании / А.Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 90-95.*