

## ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ДАЛАМБЕРА ДЛЯ СОСТАВЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

к.т.н. Горбач Н.И., к.ф.-м.н. Ширвель П.И., Шпургалова М.Ю., Кадышина А.В.

*УО «Белорусский национальный технический университет», Минск*

В работе [1] приведено обоснование характера движения эллиптического маятника с использованием законов сохранения движения центра масс и количества движения механической системы при двух разных начальных условиях движения.

Установлено, что в зависимости от начальных условий центр масс системы либо не перемещается вдоль оси  $x$  (покоится) при  $t = 0; \varphi = \varphi_0 \neq 0; \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = 0$ , либо движется с некоторой постоянной скоростью при  $t = 0; \varphi = \varphi_0 = 0; \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \neq 0$ . При этом в первом случае при отклонении маятника (стержня с шариком) вправо, ползун перемещается влево и наоборот. Во втором случае вся система перемещается в ту сторону, в которую сообщена начальная угловая скорость  $\dot{\varphi}_0$  из состояния равновесия, а ползун и шарик при этом совершают по соответствующим законам колебательные движения.

В работе [1] для составления дифференциальных уравнений движения ползуна и шарика использованы уравнения Лагранжа 2-го рода. Этот способ требует применения несколько громоздких математических преобразований.

Однако более проще можно составить эти уравнения, применив, например, принцип Даламбера или общее уравнение динамики. Такая попытка сделана в работе [2], в которой для составления дифуравнений движения эллиптического маятника применен кинетостатический метод. Не останавливаясь на анализе допущенных в [2] неточностей, приведем решение этой задачи, применив также кинетостатический метод.

Здесь важным является правильно учесть силы инерции как ползуна, так и шарика, имея ввиду, что шарик участвует в сложном движении – переносном вместе с подвижной системой координат, связанной с ползуном, и относительном движении по отношению к этой системе. Поэтому кроме сил инерции нормальной  $\Phi_n$  и касательной  $\Phi_\tau$  в относительном движении к шариком должна быть приложена еще и переносная сила инерции  $\Phi_B$ , что не учтено в работе [2]. Направление этих сил следует увязывать с описанным выше обоснованием характера движения эллиптического маятника.

Рассмотрим сначала решение задачи с учетом начальных условий движения при  $t = 0; \varphi = \varphi_0 \neq 0; \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = 0$ . Независимо от того в какую сторону отклонился маятник из положения равновесия (рис. 1) запишем в соответствии с принципом Даламбера два уравнения статики, которые являются одинаковыми для случаев а) и б).

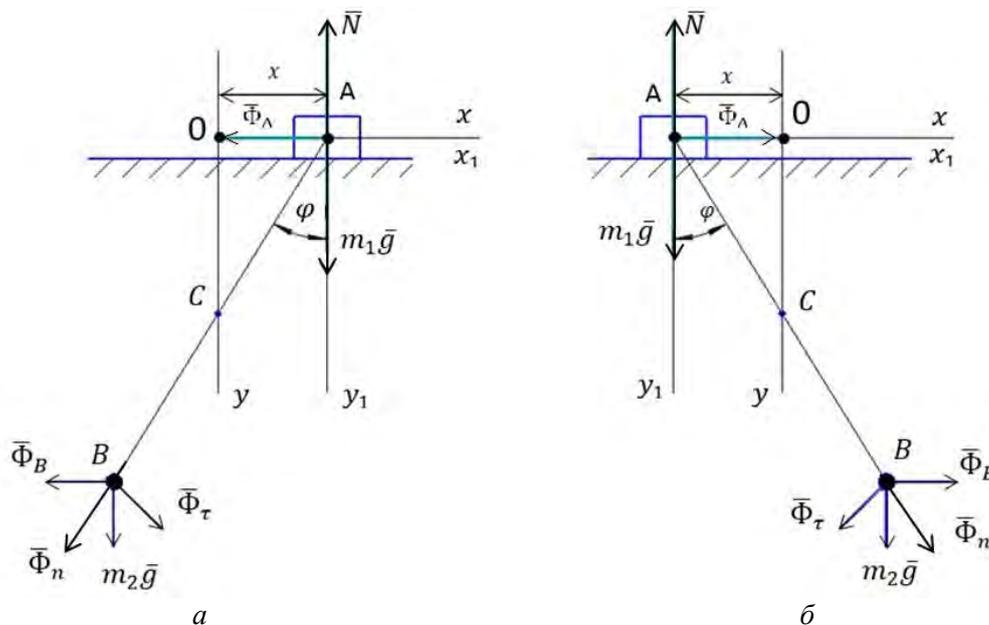


Рис. 1. Схема действия сил при отклонении маятника от положения равновесия на  $\varphi = \varphi_0 \neq 0$

$$\sum X_i = 0; \Phi_A + \Phi_B + \Phi_n \sin \varphi - \Phi_\tau \cos \varphi = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_{iA} = 0; \Phi_B l \cos \varphi - \Phi_\tau l - m_2 g l \sin \varphi = 0 \quad (2)$$

где силы инерции  $\Phi_A = m_1 \ddot{x}$ ,  $\Phi_B = m_2 \ddot{x}$ ,  $\Phi_n = m_2 \dot{\varphi}^2 l$  и  $\Phi_\tau = m_2 \ddot{\varphi} l$ .

С учетом этого уравнения [1] и [2] представим в виде

$$(m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 \dot{\varphi}^2 l \sin \varphi - m_2 \ddot{\varphi} l \cos \varphi = 0 \quad (4)$$

$$m_2 \ddot{x} l \cos \varphi - m_2 \ddot{\varphi} l^2 - m_2 g l \sin \varphi = 0 \quad (3)$$

Уравнения (3) и (4) являются дифференциальными уравнениями движения соответственно ползуна и шарика (стержня).

Для удобства сравнения полученных дифференциальных уравнений с уравнениями, приведенными в работе [1], применяем одинаковые обозначения величин как на рисунках, так и в математических выражениях.

В случае малых колебаний  $\sin \varphi \approx \varphi$ ;  $\cos \varphi \approx 1$ ;  $\dot{\varphi}^2 \sin \varphi = 0$  после некоторых преобразований уравнения (3) и (4) имеют вид

$$(m_1 + m_2) \ddot{x} - m_2 l \ddot{\varphi} = 0 \quad (5)$$

$$l \ddot{\varphi} - \ddot{x} + g \varphi = 0 \quad (6)$$

Уравнения (3) и (4) в точности совпадают с уравнениями (19) и (19''), а уравнения (5) и (6) с уравнениями (21) и (22), полученными при использовании уравнений Лагранжа [1].

Решение дифференциальных уравнений (5) и (6) и анализ полученных результатов приведено в работе [1]. Поэтому в данной работе нет смысла их повторять.

Теперь рассмотрим составление дифференциальных уравнений движения ползуна и шарика с учетом начальных условий движения  $\varphi = \varphi_0 = 0$ ;  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \neq 0$  при  $t = 0$  (рис. 2).

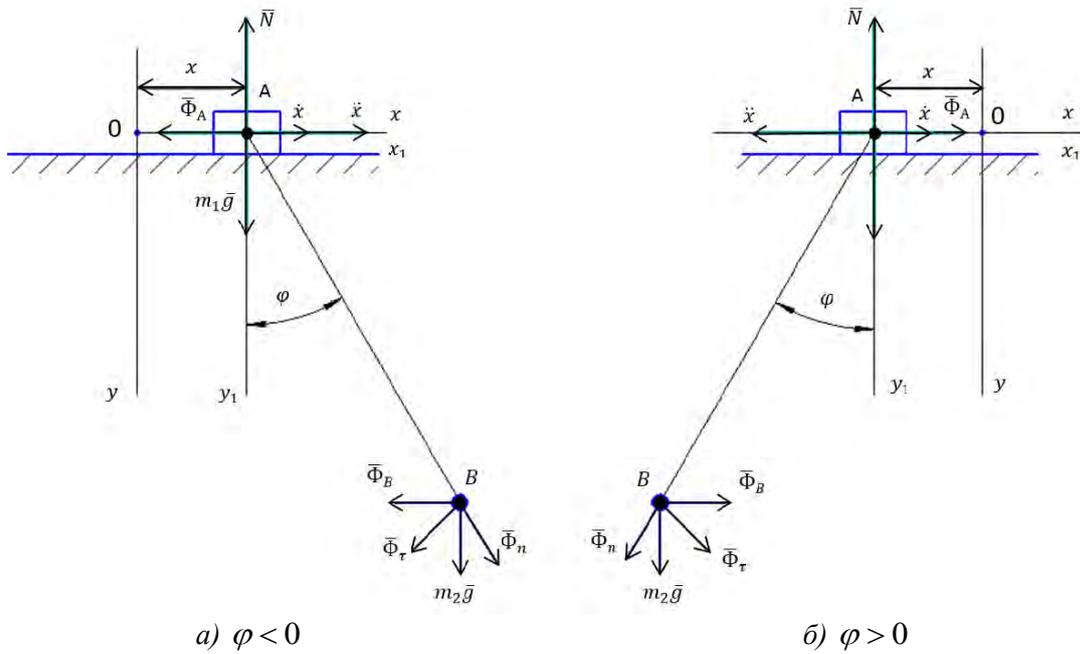


Рис. 2. Схема действия сил при сообщении шару (стержню) начальной угловой скорости из состояния равновесия

Запишем уравнения статики в соответствии с принципом Даламбера, которое для случая а) имеет вид:

$$\sum X_i = 0; \quad -\Phi_A - \Phi_B - \Phi_\tau \cos\varphi + \Phi_n \sin\varphi = 0, \quad (7)$$

$$\sum M_i = 0; \quad -\Phi_\tau l - \Phi_B l \cos\varphi - m_2 g l \sin\varphi = 0. \quad (8)$$

а для случая б):

$$\sum X_i = 0; \quad \Phi_A + \Phi_B + \Phi_\tau \cos\varphi - \Phi_n \sin\varphi = 0, \quad (9)$$

$$\sum M_{iA} = 0; \quad \Phi_\tau l + \Phi_B l \cos\varphi + m_2 g l \sin\varphi = 0. \quad (10)$$

С учетом указанных в предыдущем случае выражений для сил инерции и замены знаков на противоположные уравнения (7), (8), (9) и (10) после некоторых преобразований примут вид

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} \cos\varphi - m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin\varphi = 0, \quad (11)$$

$$l \ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos\varphi + g \sin\varphi = 0. \quad (12)$$

а в случае малых колебаний

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} = 0, \quad (13)$$

$$l \ddot{\varphi} + \ddot{x} + g\varphi = 0. \quad (14)$$

что в точности совпадает с уравнениями (34), (35), (36) и (37), приведенными в работе [1]. Там же даны решения уравнений (36) и (37) и определены законы движения ползуна и шарика, которые, соответственно, имеют вид

$$x = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \left( \dot{\varphi}_0 t - \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin kt \right), \quad (15)$$

$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin kt. \quad (16)$$

Продифференцировав дважды по времени уравнения (15) и (16), получим законы изменения скорости и ускорения ползуна и шарика, что даст возможность установить соотношения между углом отклонения маятника от положения равновесия и направле-

ниями скорости  $\dot{x}$  и ускорения  $x$  ползуна а также угловой скорости  $\dot{\varphi}$  и углового ускорения  $\varphi$  стержня (шарика). В свою очередь это позволит подтвердить или опровергнуть правильность выбора направления переносного и относительного ускорений шарика и ползуна.

$$\dot{x} = \frac{m_2 l \dot{\varphi}_0}{m_1 + m_2} (1 - \cos kt) \quad (17)$$

$$x = \frac{m_2 l k \dot{\varphi}_0}{m_1 + m_2} \sin kt. \quad (18)$$

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \cos kt \quad (19)$$

$$\varphi = -\dot{\varphi}_0 k \sin kt \quad (20)$$

где  $k = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l}}$ .

С учетом числовых данных, приведенных в работе [1],  $m_1 = 80 \text{ г}, m_2 = 20 \text{ г}; l = 20 \text{ см}; \dot{\varphi}_0 = 4,09 \text{ с}^{-1}, k = 7,826 \text{ с}^{-1}$ , а формулы (17)-(20) принимают вид:

$$\dot{x} = 16,36 (1 - \cos kt), \quad (21)$$

$$x = 128,03 \sin kt, \quad (22)$$

$$\dot{\varphi} = 4,09 \cos kt, \quad (23)$$

$$\varphi = -32,0 \sin kt \quad (24)$$

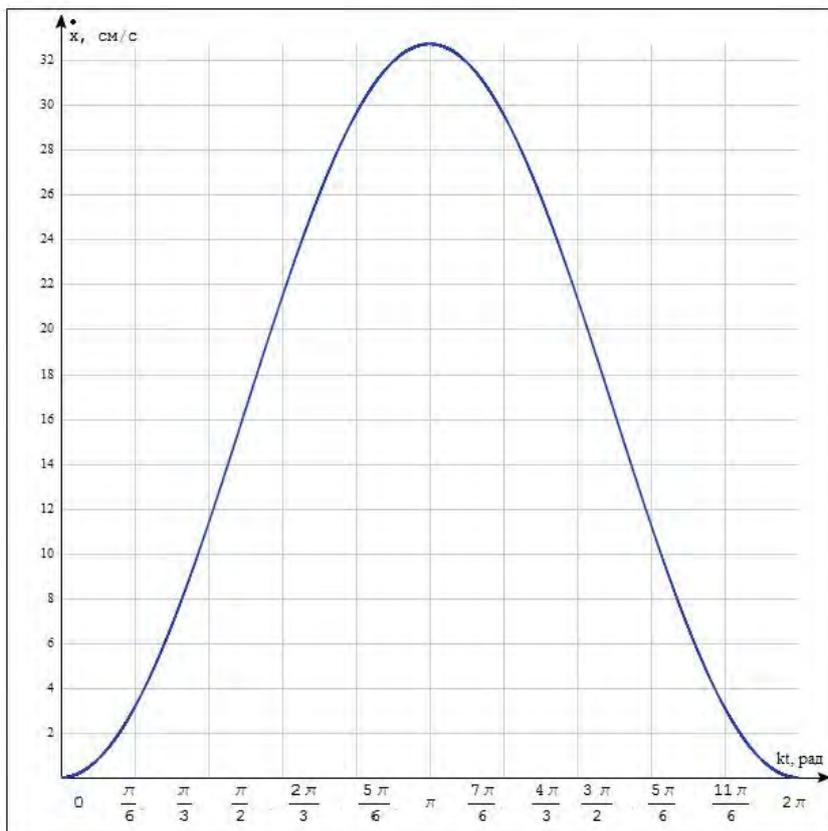
По формулам (21)–(24) за время, соответствующее одному периоду колебаний, определены значения скорости и ускорения ползуна и шарика, которые приведены в таблице 1 и графически представлены на рис.3 и 4.

Таблица 1

$kt, \text{ рад}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\sin kt$	0	0,5	0,866	1,0	0,866	0,5	0	-0,5	-0,866	-1,0	-0,866	-0,5	0
$\cos kt$	1	0,866	0,5	0	-0,5	-0,866	-1,0	-0,866	-0,5	0	0,5	0,866	1,0
$\dot{x} = 16,36(1 - \cos kt), \text{ см/с}$	0	2,192	8,18	16,36	24,54	30,53	32,72	30,53	24,54	16,36	8,18	2,192	0
$x = 128,03 \sin kt, \text{ см/с}^2$	0	64,015	11,07	128,03	11,07	64,015	0	-64,015	-110,07	-128,03	-110,07	-64,015	0

$\varphi = 0,5226 \sin kt$	<i>рад.</i>	0	0,261	0,452	0,523	0,452	0,261	0	-0,261	-0,452	-0,523	-0,452	-0,261	0
	<i>град.</i>	0	14,05	25,89	29,46	25,89	14,95	0	-14,95	-25,89	-29,96	-25,89	-14,05	0
$\dot{\varphi} = 4,09 \cos kt, c^{-1}$		4,09	3,54	2,015	0	-2,045	-3,54	-4,09	-3,54	-2,045	0	2,016	3,54	4,09
$\ddot{\varphi} = -32,05 \sin kt, c^{-1}$		0	-16,3	-27,71	-32,0	-27,71	-16,0	0	16,0	27,71	32,0	27,71	16,0	0

a



б

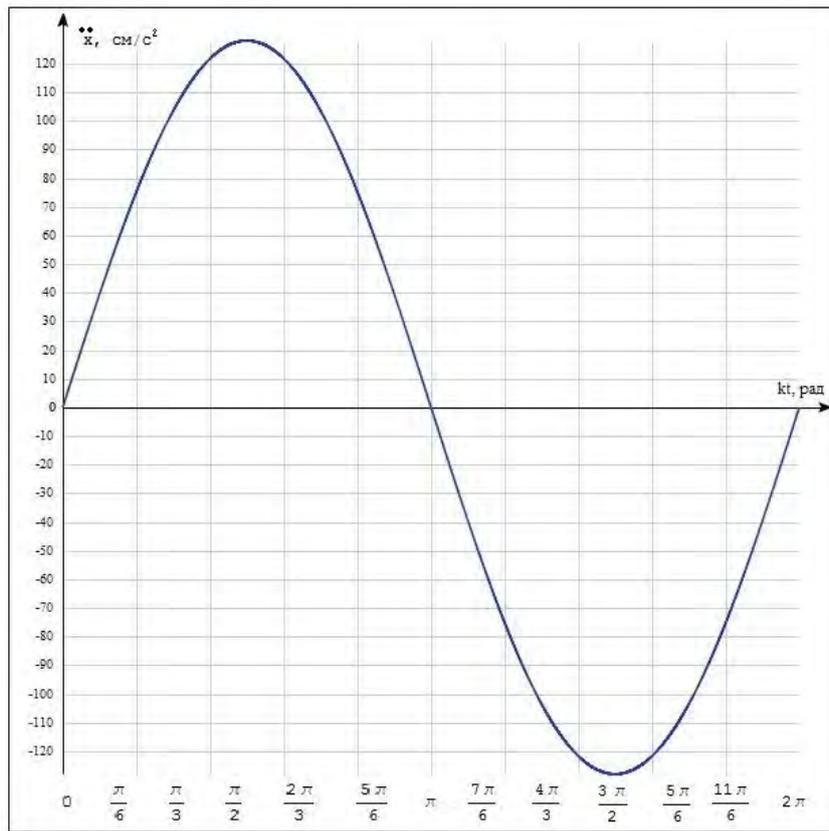
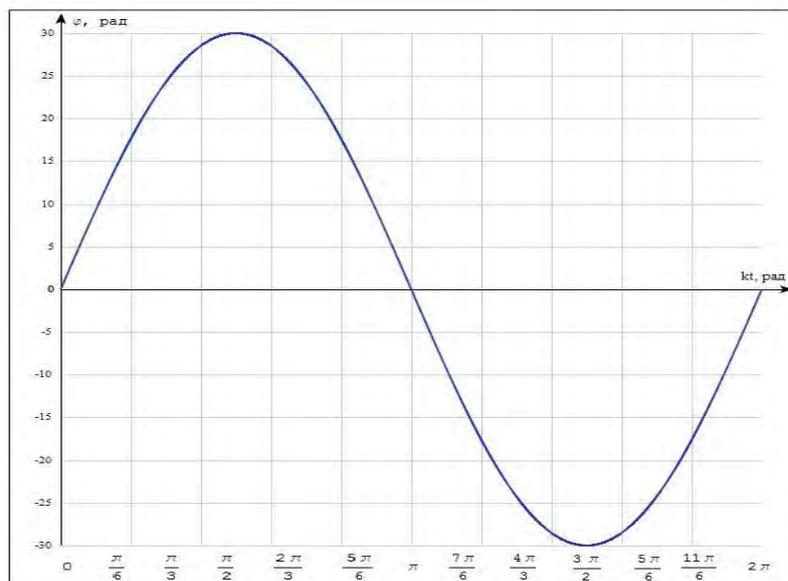


Рис. 3. Изменение скорости  $\dot{x}$  и ускорения  $x$  ползуна за один период колебаний маятника

а



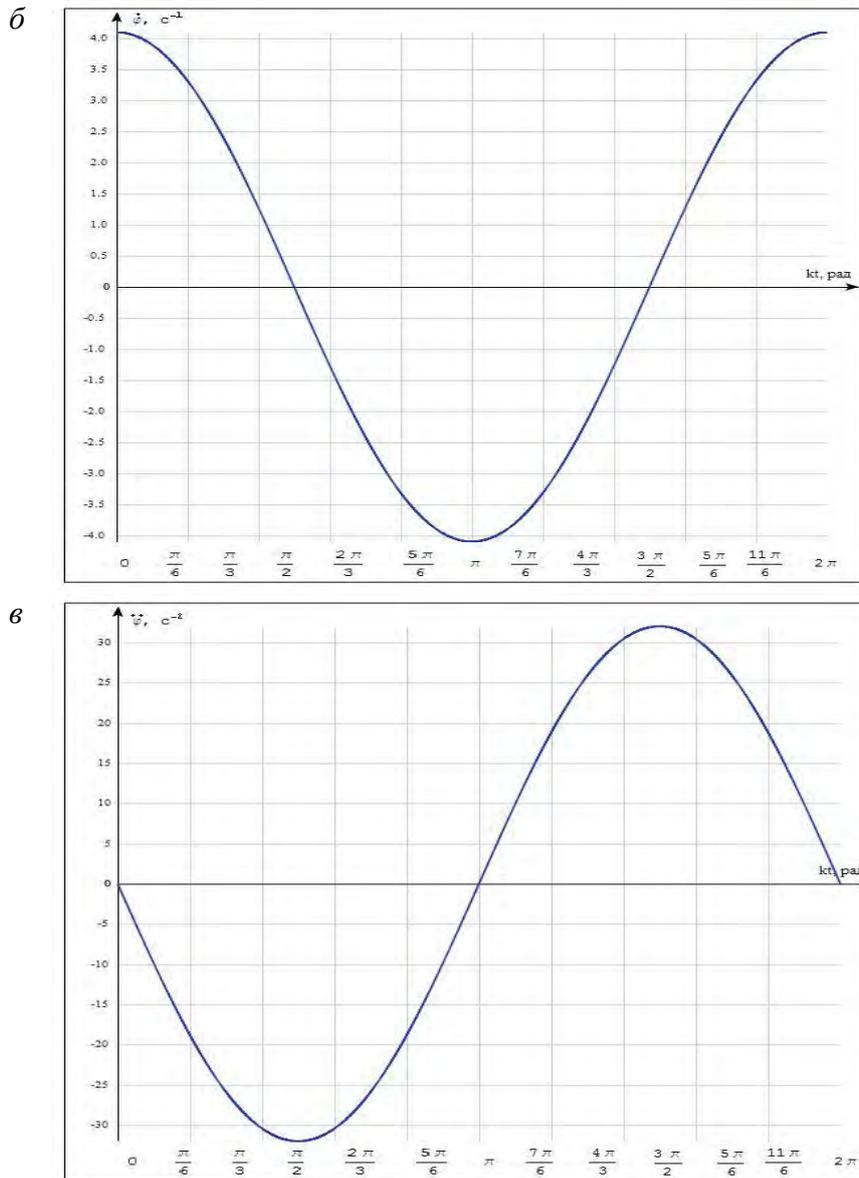


Рис. 4. Изменение угла отклонения  $\varphi$  шарика (стержня) от положения равновесия, его угловой скорости  $\dot{\varphi}$  и углового отклонения  $\varphi$  за один период колебания маятника

Анализируя числовые данные таблицы 1, графики (рис.3, 4) и уравнение (рис.17), заметим, что при любых значениях  $t|\cos kt| \leq 1$  (либо равен нулю), то скорость  $\dot{x}$  ползуна, всегда имеет положительное значение или равна нулю, т.е. ползун движется в ту сторону, в которую сообщена стержню (шарику) начальная угловая скорость  $\dot{\varphi}_0$ . При этом скорость  $\dot{x}$  ползуна равна нулю при  $\cos kt = 1$  (или  $kt = 2\pi(m-1)$ ), а при  $\cos kt = -1$  (или  $kt = 2\pi(2m-1)$ ) имеет максимальное значение, где  $m = 1, 2, 3$  и т.д., число периодов колебаний маятника.

Ускорения же  $x$  ползуна и  $\varphi$  стержня (шарика) при  $kt = \pi(m-1)$  равны нулю. В эти моменты времени угол  $\varphi = 0$ , т.е. шарик находится в положении равновесия. При

отклонении шарика из этого положения вправо  $x > 0$ , а при отклонении влево  $x < 0$ , достигая при этом максимального значения при  $kt = \frac{\pi}{2}(2m-1)$ .

Таким образом, при отклонении шарика из положения равновесия вправо ускорение  $x$  ползуна направлено вправо, а сила инерции влево, и наоборот, при отклонении шарика влево, ускорение  $x$  так же направлено влево, а сила инерции ползуна  $\Phi_A$  и переносная сила  $\Phi_B$  шарика направлены вправо, что соответствует указанным направлениям этих сил на рис 2а) и 2б) и подтверждает правильность выбора направления этих сил при составлении уравнение (7)-(10) и ошибочность решения этой задачи, приведенного в публикации [2].

**Выводы.** В настоящей работе применен кинестатический метод составления дифференциальных уравнений колебаний эллиптического маятника. Полученные уравнения в точности совпадают с уравнениями, вывод которых осуществляется с использованием уравнений Лагранжа второго рода. Это еще раз подтверждает известную истину, что если какая-либо задача может быть решена разными способами, то результат должен быть один и тот же независимо от способа решения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Горбач Н.И., Кадышина А.В., Исследование колебаний эллиптического маятника. // Теоретическая прикладная механика: международный научно-технический журнал. – Минск: БНТУ, 2016. - №31. – с. 298-330.
2. Локтионов А.В. Кинестатический метод расчета уравнения движения малых колебаний эллиптического маятника / А.В. Локтионов // Теоретическая прикладная механика: международный научно-технический журнал. – Минск: БНТУ, 2015. - №30. – с. 226-229.