

УДК 510.3

ПАРАДОКС БАНАХА - ТАРСКОГО

Серебряков Б.Е.

Научный руководитель – Метельский А.В., д. ф.-м. н., профессор.

1. Плитка шоколада.

Если плитку 4 на 8 разрезать и переставить таким образом кусочки как показано на рисунке, то у вас останется все та же плитка 4 на 8 и еще лишний кусок. В реальности плитка после манипуляций становится немного меньше, если точнее, то на этот оставшийся кусок.

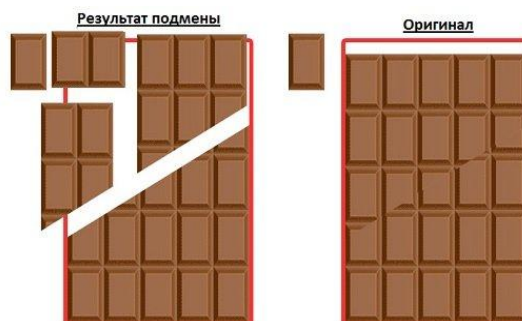


Рисунок 1. Иллюзия с шоколадом.

Одной из самых странных теорем современной математики является парадокс Банаха - Тарского. Парадокс утверждает, что возможно взять любой объект, разделить его на пять различных частей и эти части сложить таким образом без растягиваний, чтобы получились 2 копии оригинального объекта. Прежде чем подойти к сути этого парадокса нужно разобраться в некоторых вопросах.

2. Бесконечности.

Прежде всего, что такое бесконечность? Это не число, его не на числовой оси не найти. Есть разные виды бесконечности: счетная и несчетная. Первая – это, например, совокупность всех натуральных чисел. Счетной она называется потому, что от одного до другого числа можно досчитать за конечный промежуток времени. Вторая(несчетная) – это, например, число всех вещественных чисел. Вы не сможете посчитать от 0 до 1, называя все вещественные числа из промежутка $x[0,1]$.

3. Парадокс Гильберта.

Представьте себе отель с бесконечным числом комнат. В каждой

комнате живет по человеку. Получается, что свободных мест нет, да? Нет. Бесконечность не поддается здравому смыслу. Чтобы заселиться в отель еще одному человеку, нужно чтобы все остальные жильцы подвинулись в соседние комнаты: 1 - ый во 2 - ю, 2 - ой в 3 - ю и т.д. То же самое и с выселением. Все что нужно сделать - это переместить жильца из комнаты с номером N в комнату с номером $N - 1$. Иначе говоря, бесконечность минус 1, по-прежнему бесконечность.

От темы парадокса Банаха - Тарского мы не отошли, все это взаимосвязано.

4. Окружность.

Парадокс Гильберта можно применить и к кругу. Если мы уберем одну точку, то окружности больше нет. Из парадокса об отеле мы выяснили, что это не имеет значения. Если мы будем нумеровать точки, и откладывая на окружности по часовой стрелке дуги на длину радиуса, мы не окажемся на одной и той же точке больше одного раза. Число получаемых при этом на окружности точек хоть и бесконечное, но исчисляемое. Поэтому при «выселении» одной точки, передвинув все остальные на место предыдущей мы закроем «вакансию». Для этого мы проворачиваем окружность против часовой стрелки.

5. Гипервебстер.

Ян Стюарт однажды предложил хорошую концепцию для словаря, назвав ее Гипервебстером. Этот словарь содержит любое слово, любой длины, состоящее из 26 букв английского алфавита. Гипервебстер содержит абсолютно всю информацию, правдивую или ложную, все, что когда-либо случилось или произойдет.

6. Парадокс Банаха - Тарского.

Именно теперь мы готовы обсудить главный парадокс: что если мы превратим 3-х мерный объект в Гипервебстер? Можем ли мы из его части получить весь объект целиком? Да. Вращая куски сферы по шагам, количество которых огромно, если быть точнее несчетное множество, мы получим 2 сферы по принципу окружности, о которой сказано ранее.

Так почему же мы не можем сделать это в реальной жизни, скажем, с шаром из золота? Проблема в том, что сделать это можно только с материалом, который делим до бесконечности, чего нет в действительности. Необходимые части настолько экзотические, что у них нет меры, или объема. Парадокс Банаха — Тарского говорит о том, что как бы мы ни определяли объем, всегда найдутся множества, которые не имеют объема (неизмеримые множества), или же приведенный выше

пример покажет, что $2=1$. Для того, чтобы получить 2 копии, необходимо эти части всего лишь проворачивать, как было с окружностью (все точки нужно было передвинуть поворотом против часовой стрелки).

И все-таки, возможно ли это в реальности или в этом парадоксе математика с физикой расходятся? Ответ неизвестен. Было много различных теорий, которые считались невозможными, но ровно до тех пор, пока не развилась наука. Некоторые ученые придерживаются того, что все-таки возможно. Научные работы проводят связь с этим парадоксом, но применимы в отношении очень малых субатомных частиц, которые при столкновении производят больше частиц по количеству превосходящие первоначальное.

То, что для нас неувидительно, является лишь малой частью от того, что существует.

Литература

1. <http://dgleahy.com/p47.html>
2. http://ru.math.wikia.com/wiki/Парадокс_Банаха_--_Тарского
3. <http://www.mccme.ru/mmmf-lectures/books/books/books.php?book=20&page=10>
4. <http://hijos.ru/2013/11/08/paradoks-banaha-tarskogo/>