http://xxx.lanl.gov (arXiv.org/cond-mat. mes-hall / 1308.3460).
3. Додд, Р. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис – М.: Мир, 1988. – 694 с.
4. Zakharov, V.E. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media / Zakharov V.E., Shabat A.B. // Sov. Phys. JETP – 1972. – V. 34, № 1. – P. 62-69.
5. Двайт, Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г.Б. Двайт – М.: Наука, 1978. – 228 с.
6. Chiao, R.Y. Self-trapping of optical beams / R.Y. Chiao, E. Garmire and C.H. Townes // Phys. Rev. Letters – 1964. – V. 13, № 15. – P. 479-481.

УДК 530.182

УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПОПРАВКИ ВТОРОГО ПОРЯДКА К ПЛОТНОСТИ КОНДЕНСАТА БОЗЕ–ЭЙНШТЕЙНА

Князев М.А., Блинкова Н.Г.
Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь

Исследование конденсата Бозе–Эйштейна (BEC) находит широкое применение при решении задач в таких областях физики как атомная физика, физика магнитных явлений, оптика, физика конденсированных состояний [1–3]. Существенно нелинейный характер модели, применяемой для описания свойств данной формы материи, обуславливает появление в ней решений в виде локализованных состояний типа солитонов или солитоноподобных объектов. Для описания солитонов в BEC применяется уравнение Гросс-Питаевского, которое допускает представление в виде уравнений гидродинамики [4]. Поскольку решение нелинейных уравнений в общем случае является сложной задачей, для получения аналитического решения применяют различные приближения. Так, в работе [5] для получения решений типа светлого солитона в квази-одномерном BEC использована построенная в работе [6] система уравнений квантовой гидродинамики с учетом третьего порядка по радиусу взаимодействия. Эта система для атомов, находящихся во внешнем потенциале $V_{ext}(\vec{r},t)$ и взаимодействующих между собой с потенциалом $U(r)$, имеет вид

$$\partial_t n(\vec{r},t) + \partial^\alpha\big(n(\vec{r},t)v^\alpha(\vec{r},t)\big) = 0, \tag{1}$$

$$mn(\vec{r},t)\partial_t v^\alpha(\vec{r},t) + \frac{1}{2}mn(\vec{r},t)\partial^\alpha v^2(\vec{r},t) -$$
$$-\frac{\hbar^2}{4m}\partial^\alpha \Delta n(\vec{r},t) + \frac{\hbar^2}{4m}\partial^\beta\left(\frac{\partial^\alpha n(\vec{r},t)\partial^\beta n(\vec{r},t)}{n(\vec{r},t)}\right) -$$
$$-\Upsilon n(\vec{r},t)\partial_\alpha n(\vec{r},t) - \frac{1}{16}\Upsilon_2\partial_\alpha \Delta n^2(\vec{r},t) =$$
$$= -n(\vec{r},t)\partial^\alpha V_{ext}(\vec{r},t), \tag{2}$$

где $n(\vec{r},t)$ – концентрация частиц, $v^\alpha(\vec{r},t)$ - полевая скорость, Δ - оператор Лапласа, m – масса частицы, $\Upsilon = \frac{4\pi}{3}\int r^3\frac{\partial U(r)}{\partial r}dr$, $\Upsilon_2 = \frac{4\pi}{15}\int r^5\frac{\partial U(r)}{\partial r}dr$.

В работе [5] в (1+1)-мерном случае для системы уравнений (1)–(2) получено явное выражение для поправки $n_1 = n_1(x,t)$ к величине равновесной концентрации частиц BEC n_0. Вычисления проведены на основе теории возмущений с использованием подхода, предложенного в работе [7].

В рамках данного подхода удобно ввести новые независимые переменные, используя следующие формулы:

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(z-ut), \tau = \varepsilon^{3/2}ut, \tag{3}$$

где u – фазовая скорость волны, ε – малый безразмерный параметр. Выражения для концентрации частиц и полевой скорости записываются в виде следующих разложений:

$$n = n_0 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2 + \cdots, \tag{4}$$

$$v = \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \cdots. \tag{5}$$

Считается, что равновесная концентрация n_0 является постоянной величиной.

Вследствие особенностей нелинейного характера задачи обычный прием теории возмущений, основанный на подстановке соотношений (4) и (5) в уравнения (1) и (2) и последующем приравнивании друг другу выражений с одинаковыми степенями ε, не приводит к искомому результату. Если выписать уравнения первого порядка по ε, то удается найти только связь между поправками n_1 и v_1, которая имеет вид $n_1 = n_0 v_1/u$. Для того, чтобы получить явное выражение для n_1, понадобятся также уравнения второго порядка по ε. Однако эти уравнения уже будут включать поправки n_2 и v_2. Тем не менее, рассматриваемая задача такова, что из первого уравнения второго порядка можно выразить поправки второго порядка через поправки первого порядка, а затем подставить их во второе уравнение второго порядка. В результате получается уравнение, которое содержит только n_1. Это уравнение имеет вид уравнения Кортевега-де Фриза и его решение хорошо известно [8]. Имея выражение для n_1, можно найти поправку v_1.

Представляет интерес дальнейшее изучение поведения BEC в гидродинамическом приближении и, в частности, вычисление поправки второго порядка n_2 к равновесной концентрации частиц. В настоящей работе представлено уравнение для поправки n_2, полученное тем же способом как было получено уравнение для поправки n_1 в работе [5]. Для этой цели потребовались уравнения первого, второго и третьего порядков по ε, получающиеся из системы уравнений (1)-(2), а также явное выражение для n_1. Поправки n_3 и v_3, также как и описанном выше случае, удается выразить через n_2 и v_2 при помощи первого из двух уравнений третьего порядка по ε. Подставляя полученные соотношения во второе уравнение третьего порядка по ε, найдем новое уравнение, которое кроме известных коэффициентов и заданных параметров модели будет содержать только n_0, n_1, v_1 и n_2.

Данное уравнение является достаточно сложным. Его можно записать в следующем виде:

$$\left(\frac{\hbar^2}{4m}+\frac{\Upsilon_2 n_0}{8}\right)\partial_\xi^3 n_2-(muv_1-\Upsilon n_1)\partial_\xi n_2-$$

$$-(mu^2-\Upsilon n_0)\partial_\tau n_2-\left(mu\partial_\xi v_1-\Upsilon\partial_\xi n_1\right)n_2=$$

$$=mun_1 v\partial_\xi v_1-mv_1^2\partial_\xi n_1-muv_1\partial_\tau n_1-$$

$$-mn_1 v_1\partial_\xi v_1-mu\partial_\tau(n_1 v_1)+mu^2 v\partial_\tau n_1+$$

$$+mun_1\partial_\tau v_1-\frac{1}{8}\Upsilon_2 n_1\partial_\xi^3 n_1, \qquad (6)$$

где $n_1=\frac{3v}{p_1}\cdot\frac{1}{\cosh^2(\psi)}$, $\quad \psi=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{q_1}}\eta$,

$p_1=\frac{3}{2n_0}$, $\quad q_1=\left(\frac{\hbar^2}{2m}+\frac{1}{8}n_0\Upsilon_2\right)/(2\Upsilon n_0)$,

$\eta=\xi-vt$, v – скорость распространения солитона слева направо. Выражение для n_1 получено в работе [5] при выполнении следующих граничных условий: $n_1=0$ и $\partial_\eta^2 n_1=0$ при $\eta\to\pm\infty$.

Уравнение Кортевега–де Фриза, описывающее поведение функции n_1, хотя и является нелинейным уравнением третьего порядка, тем не менее, содержит только постоянные коэффициенты. Кроме того, уравнение Кортевега-де Фриза является однородным. Полученное же в настоящей работе уравнение (6) для поправки второго порядка n_2 по малому безразмерному параметру ε к равновесной концентрации BEC n_0 не только является нелинейным уравнением третьего порядка в частных производных. Оно является ещё и неоднородным. К тому же и коэффициенты, которые входят в это уравнение, сами являются функциями.

Построение в явном виде аналитического решения этого уравнения даже в частном случае уединенных волн типа солитонов представляется очень сложной задачей. Однако вывод о том, что такое решение уравнения (6) в принципе существует, можно сделать, базируясь на методе, при помощи которого это уравнение получено. При его выводе не было сделано никаких дополнительных предположений, выходящих за рамки гидродинамического приближения.

Что же касается самого солитонного решения, то можно предположить, что для некоторых предельных случаев удастся упростить выражения для коэффициентов уравнения (6) или даже положить их равными некоторым константам. Однако при этом всегда становится возможной ситуация, когда такого рода дополнительные упрощения приведут к потере физического содержания в модели. В этой связи представляется только один возможный способ решения уравнения (6), а именно применение численных методов решения.

При таком подходе в качестве начального условия можно выбрать условие $n_2=0$ при $\tau=0$. Это будет означать, что внешний потенциал $V_{ext}(\vec{r},t)$ включается только в начальный момент времени. Что же касается граничных условий, то их можно выбрать в таком же виде, в каком они были выбраны при определении поправки n_1, то есть считать функцию n_2 и её первую и вторую производные по ξ равными нулю при $\xi\to\pm\infty$. Эти условия фактически являются стандартными при построении частных решений типа солитонов [9].

Литература

1. Кадомцев, Б.Б. Конденсаты Бозе-Эйнштейна / Б.Б. Кадомцев, М.Б. Кадомцев // УФН – 1997. – Т. 167, № 6. – С. 649-664.
2. Питаевский, Л.П. Конденсация Бозе-Эйнштейна в магнитных ловушках / Л.И. Питаевский // УФН – 1998. – Т. 168, № 6. – С. 641-653.
3. Питаевский, Л.П. Конденсаты Бозе-Эйнштейна в поле лазерного излучения / Л.И. Питаевский // УФН – 2006. – Т. 176, № 4. – С. 345-364.
4. Dalfovo, F. Theory of Bose-Einstein condesation in trapped gases / F. Dalfovo, S. Giorgini, L.P. Pitaevski and S. Stringari // Rev. Modern Physics – 1999. – V. 71, № 3. – P. 463-512.
5. Andreev, P.A. Bright-like soliton solution in quasi-one-dimensional BEC in third order on interaction radius / P.A. Andreev, L.S. Kuzmenkov // http://xxx.lanl.gov (arXiv.org/cond-mat. quant-gas/ 1105.553).
6. Andreev, P.A. Problem with the single-particle description and the spectra of intrinsic modes of degenerate boson-fermion systems // P.A. Andreev, L.S. Kuzmenkov / Phys. Rev. A – 2008. – V. 78, № 5. – 053624.
7. Washimi, H. Propagation of ion-acoustic solitary waves of small amplitude // H. Washimi, T. Taniuti / Phys. Rev. Lett. – 1966. – V. 17, № 19. – P. 996-998.
8. Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. – М.: Мир, 1987. – 497 с.
9. Лэм, Дж. (мл.) Введение в теорию солитонов / Дж. Лэм (мл.). – М.: Мир, 1990. – 294 с.