

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ В ЗАДАЧЕ О РАСТЯЖЕНИИ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНОЙ

Гундина М.А.

Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь

Для описания механического поведения упругопластического материала для задачи о растяжении пластины, содержащей прямолинейную трещину, используются уравнения равновесия в напряжениях, записанные в полярной системе координат.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr,r} + (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})/r + \sigma_{r\varphi,\varphi}/r &= 0, \\ \sigma_{r\varphi,r} + 2\sigma_{r\varphi}/r + \sigma_{\varphi\varphi,\varphi}/r &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где r – безразмерный радиус, $\sigma_{rr}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{\varphi\varphi}$ – физические проекции компонент тензора напряжений.

Для связи тензора деформации с компонентами вектора перемещений использовались соотношения Коши:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= u_{r,r}; \varepsilon_{\varphi\varphi} = u_{\varphi,\varphi}/r + u_r/r, \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2}(u_{\varphi,r} + u_{r,\varphi}/r - u_{\varphi}/r), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{r\varphi}, \varepsilon_{\varphi\varphi}$ – физические проекции компонент тензора деформаций, u_r, u_{φ} – компоненты вектора перемещений.

Определяющие соотношения теории течения с упрочнением выражались следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta s_{rr} &= \delta e_{rr} - \delta \Phi(\Gamma)e_{rr}, \\ \delta s_{\varphi\varphi} &= \delta e_{\varphi\varphi} - \delta \Phi(\Gamma)e_{\varphi\varphi}, \\ \delta s_{r\varphi} &= \delta e_{r\varphi} - \delta \Phi(\Gamma)e_{r\varphi}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\delta s_{ij}, \delta e_{ij}, i, j = r, \varphi$ – приращения компонент девиаторов напряжений и деформаций,

$\Phi(\Gamma) = \sum_{k \geq 1} B_{2k} \Gamma^{2k}$ – функция интенсивности касательных деформаций, Γ – интенсивность деформаций, B_{2k} – постоянные материала.

Рассматривается случай плоской деформации.

Нагрузки на берегах прямолинейной трещины обращаются в нуль:

$$\sigma_{r\varphi}|_{\varphi=\pm\pi} = 0, \quad \sigma_{\varphi\varphi}|_{\varphi=\pm\pi} = 0. \quad (4)$$

Решение найдено в виде асимптотических разложений:

$$u_r(r, \varphi) = \sum_{n \geq 0} U_n(\varphi) r^{\lambda_n}, \quad u_{\varphi}(r, \varphi) = \sum_{n \geq 0} V_n(\varphi) r^{\lambda_n}. \quad (5)$$

Интенсивность деформаций имеет вид

$$\Gamma = \frac{2}{3} \left((\varepsilon_{rr}^2 - \varepsilon_{rr}\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^2 + 3\varepsilon_{r\varphi}^2) \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} (F(\varphi))^{\frac{1}{2}},$$

где $F(\varphi) = \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} a_{k\ell} r^{\lambda_k + \lambda_{\ell} - 2}$.

Представление среднего напряжения σ описывается следующим образом

$$\sigma = \sum_{n \geq 0} W_n(\varphi) r^{\lambda_n - 1}, \quad (6)$$

где $W_n(\varphi)$ – функции, подлежащие определению в процессе решения задачи.

Для произвольного приближения получаем краевую задачу о собственных значениях

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}(U_n'' + (\lambda_n - 1)V_n') + (\lambda_n - 1)(\lambda_n + 1)U_n - V_n' + \right. \\ \left. + (\lambda_n - 1)W_n \right) r^{\lambda_n - 2} - B \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m \geq 0} (\mu_{k\ell m} - 3)\alpha_{k\ell m} + \\ \left. + (\alpha_{k\ell m} - \beta_{k\ell m}) + \frac{1}{2}\gamma'_{k\ell m} \right) r^{\mu_{k\ell m} - 4} = 0, \\ \sum_{n \geq 0} \left(V_n'' + \frac{1}{2}(\lambda_n + 5)U_n' + W_n' + \frac{1}{2}(\lambda_n - 1)(\lambda_n - 3) \right. \\ \left. \times V_n \right) r^{\lambda_n - 2} - B \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m \geq 0} \left(\frac{1}{2}(\mu_{k\ell m} - 1)\gamma'_{k\ell m} + \beta'_{k\ell m} \right. \\ \left. + \beta'_{k\ell m} \right) r^{\mu_{k\ell m} - 4} = 0, \sum_{n \geq 0} ((\lambda_n + 1)U_n + V_n') r^{\lambda_n - 1} = 0 \end{aligned}$$

Граничные условия

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n \geq 0} (U_n' + (\lambda_n - 1)V_n) r^{\lambda_n - 1} - \right. \\ \left. - B \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m \geq 0} \gamma_{k\ell m} r^{\mu_{k\ell m} - 3} \right) \Big|_{\varphi=\pm\pi} = 0, \\ \left(\sum_{n \geq 0} (V_n' + U_n + W_n) r^{\lambda_n - 1} - \right. \\ \left. - B \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m \geq 0} \beta_{k\ell m} r^{\mu_{k\ell m} - 3} \right) \Big|_{\varphi=\pm\pi} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

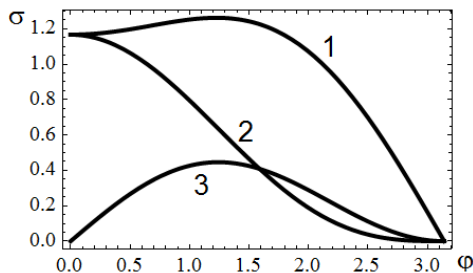
В общем случае условие разрешимости краевой задачи имеет вид

$$\lambda_n - 2 = \mu_{k\ell m} - 4 \quad (k + \ell + m = n + 1, n = 0, 1, 2, \dots).$$

На рисунке 1 представлены угловые распределения компонент напряжений, соотнесенных к пределу текучести, для стали с упругопластическими характеристиками: $G = 7,9 \cdot 10^4$ МПа, $B_2 = 3,212414 \cdot 10^{-6}$, $\sigma_T = 400$ МПа при значении нагрузки $P = 70$ МПа, при длине трещины в 20 мм, соотнесенной к ширине исходного образца с шириной в 200 мм в случае трещины нормального отрыва.

Величина поправки последующих приближений для σ_{rr} для трещины нормального отрыва нахо-

дится в диапазоне 1–4 % для первого приближения, а для второго этого интервал – 0,008–0,2 %, тогда как для $\sigma_{r\varphi}$ значения для первого – 1–5,5 %; для второго – 0,03–0,8 %, для $\sigma_{\varphi\varphi}$ от 1 % до 6 % для первого и от 0,02 до 0,5 % для второго.



1 – σ_{rr} ; 2 – $\sigma_{\varphi\varphi}$; 3 – $\sigma_{r\varphi}$

Рисунок 1 – Распределение компонент тензора напряжений на расстоянии $r = 0,4$ мм от вершины трещины при изменении φ рад

В качестве 100% берется максимум функции, которая представляет собой сумму нулевого, первого и второго приближения. Учитывая, что максимум суммы трех функций, может не совпадать с суммой максимумов трех функций, процентный вклад рассматривается именно по отношению к норме функции суммы трех приближений.

Для нулевого приближения косинус-преобразование Фурье полученных функций U_0, V_0, W_0 примут вид для $\lambda_0 = 0,5$:

$$U_0 = 0,003 - 0,001 \cos(\varphi) - 0,003 \cos(2\varphi) + 0,001 \cos(3\varphi),$$

$$V_0 = -0,014 + 0,017 \cos(\varphi) - 0,002 \cos(2\varphi), \quad (15)$$

$$W_0 = 0,010 + 0,007 \cos(\varphi) - 0,001 \cos(2\varphi) + 0,001 \cos(3\varphi).$$

Также получена оценка найденных значений компонент вектора перемещений и тензора напряжений в сравнении с результатами, полученными в рамках деформационной теории пластичности (рисунок 2).

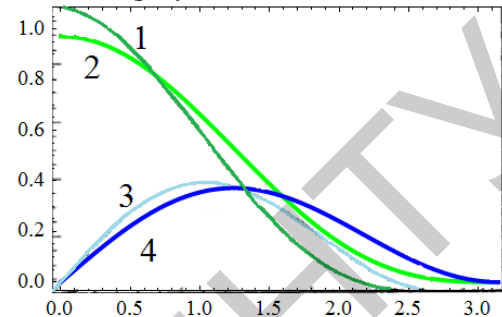


Рисунок 2. – Распределение безразмерных компонент тензора напряжений в рамках деформационной теории (1 – $\sigma_{\varphi\varphi}$; 3 – σ_{rr}); в рамках теории течения (2 – $\sigma_{r\varphi}$; 4 – $\sigma_{r\varphi}$)

Также как и для решения в рамках деформационной теории нормальное напряжение достигает своего наибольшего значения при $\varphi = 0$. Наибольшая концентрация напряжений наблюдается в окрестности вершины трещины. Характер монотонности компонент напряжений совпадает. График компоненты $\sigma_{r\varphi}$ достигает наибольшего значения при 90° , как и в сравниваемых результатах. Обезразмеривание осуществляется следующим образом:

$$\hat{\sigma}_{i,j} = \frac{\sigma_{i,j}}{\max(\sigma_{\varphi\varphi})}.$$

Отклонения между этими кривыми в первом и во втором случае не превышает 2 %.

УДК 519.682

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ПРИБОРОСТРОИТЕЛЬНОГО ПРОИЗВОДСТВА

Нестеренко А.О., Выслоух С.П.

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», Киев, Украина

В приборостроении весьма важным является подготовка и налаживание процесса изготовления необходимого продукта. Некачественное выполнение указанных работ приведет к значительным затратам финансовых ресурсов и времени, что является важным фактором, который может отрицательно повлиять в дальнейшем на судьбу всего производственного процесса [1].

На сегодняшний день актуальной является задача быстрого и качественного изготовления сложных приборов различного назначения и применения. Изготавливая изделия в сжатые сроки и приемлемой стоимостью, перед исполнителем

стоит задача сохранения уровня качества на указанном пределе и даже его повышения.

Современные технологии производства в приборостроении постоянно совершенствуются, что является движущей силой, которая дает возможность создавать новейшие изделия для решения множества ранее трудно решаемых и нерационально затратных сложных задач экономики и промышленности государства. Для решения данной задачи применяются различные методы улучшения технологии производства. Все они направлены на повышения качества и сокращения времени изготовления изделия.