МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный
технический университет

Кафедра «Высшая математика № 3»

Л. Я. Глушанкова
И. А. Голубева

ЭЛЕМЕНТЫ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Пособие

Минск
БНТУ
2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика № 3»

Л. Я. Глушанкова
И. А. Голубева

ЭЛЕМЕНТЫ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Пособие для студентов специальностей
1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций»,
1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,
1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью»,
1-70 03 01 «Автомобильные дороги»,
1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»,
1-70 04 01 «Водохозяйственное строительство»,
1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна»,
1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов»,
1-70 07 01 «Строительство тепловых и атомных электростанций»

Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию в области строительства и архитектуры

Минск
БНТУ
2017

УДК 517.5(075.8)
ББК 22.161.5я7
Г55

Рецензенты:
кафедра математики и информатики Минского филиала МЭСИ
(зав. кафедрой, доц. *В. Н. Курбацкий*);
канд. физ.-мат. наук, доц. *А. А. Самодуров*

Глушанкова, Л. Я.

Г55 Элементы уравнений математической физики : пособие для студентов строительных специальностей 1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций», 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство», 1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью», 1-70 03 01 «Автомобильные дороги», 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены», 1-70 04 01 «Водохозяйственное строительство», 1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна», 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов», 1-70 07 01 «Строительство тепловых и атомных электростанций» / Л. Я. Глушанкова, И. А. Голубева. – Минск: БНТУ, 2017. – 26 с.

ISBN 978-985-550-651-6.

Пособие составлено в соответствии с дисциплиной «Математика» для студентов строительных специальностей.

Предназначено для студентов как дневной, так и заочной формы обучения с целью помочь усвоить теоретический материал и закрепить его при решении задач.

УДК 517.5(075.8)
ББК 22.161.5я7

ISBN 978-985-550-651-6

© Глушанкова Л. Я.,
Голубева И. А., 2017
© Белорусский национальный
технический университет, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ЗАНЯТИЕ 1

Классификация уравнений математической физики

Уравнением математической физики относительно функции $u = u(x, y)$ двух независимых переменных x, y называется уравнение, связывающее независимую функцию двух переменных $u(x, y)$, независимые переменные x, y и частные производные от неизвестной функции до второго порядка включительно.

$$F\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0, \qquad (1.1)$$

где F – заданная функция своих аргументов.

Уравнение (1.1) называется линейным относительно старших производных, если оно имеет вид

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$
$$+ G\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \qquad (1.2)$$

где A, B, C – функции переменных x, y;

G – линейная функция относительно $u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

В зависимости от значений коэффициентов A, B, C в точке $M_0(x_0, y_0)$ уравнение (1.2) может принадлежать к одному из трех типов: гиперболическому, эллиптическому и параболическому.

Уравнение (1.2) называется уравнением гиперболического типа в точке $M_0(x_0, y_0)$, если в этой точке выражение $B^2 - AC > 0$; уравнение эллиптического типа в точке M_0, когда $\left.\left(B^2 - AC\right)\right|_{M=M_0} < 0$ и уравнение параболического типа в точке $M_0(x_0, y_0)$, если в точке $M_0(x_0, y_0)$ выражение $B^2 - AC = 0$.

Если выражение $B^2 - AC$ сохраняет определенный знак в каждой точке данной области, то уравнение (1.2) называется уравнением соответствующего типа в области D. Если же выражение $B^2 - AC$ меняет знак в области D, то оно называется уравнением смешанного типа.

Простейшим уравнением гиперболического типа является волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.3}$$

которое описывает процессы распространения различных видов волн: упругих, звуковых, электромагнитных.

Функция $u = u(x, t)$ описывает положение точки с координатой x в момент времени t.

Примером уравнения эллиптического типа является уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1.4}$$

к исследованию которого приводят задачи о стационарном распределении тепла, электрических и магнитных полях, задачи гидравлики и равновесия.

Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.5}$$

с которым связаны задачи нестационарных процессов распространения тепла, фильтрации жидкости и газа в пористой среде, явления диффузии, относится к уравнению параболического типа. Здесь $u = u(x, t)$ – функция, которая может описывать распределение температуры в стержне, явления диффузии и другие. Уравнения (1.3)–(1.5) называются основными уравнениями математической физики.

Примеры. Определить тип уравнения.

1) $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \left(\sin^2 x + 1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3xy\frac{\partial u}{\partial x} = u = 0.$

Решение.

Так как $A = 2;$ $B = -3\cos x;$ $C = -\left(\sin^2 x + 1\right),$ то $B^2 - AC =$

$$= \left(3\cos x\right)^2 - 2\left(-\sin^2 x - 1\right) = 9\cos^2 x + 2\sin^2 x + 2 > 0,$$

$$\forall \left(x, y\right) \in R_2.$$

Значит, данное уравнение гиперболического типа.

2) $e^{2x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2e^{x+y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + e^{2y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - xu = 0.$

Решение.

$A=e^{2x}, \quad B=e^{x+y}, \quad C=e^{2y};$

$$B^2-AC=\left(e^{x+y}\right)^2-e^{2x}e^{2y}=e^{2(x+y)}-e^{2(x+y)}=0,$$

$\forall(x,y)\in R_2.$

Уравнение параболического типа во всем пространстве.

3) $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

Решение.

Здесь $A=y, \quad B=0, \quad C=1.$

$$B^2-AC=-y.$$

Значит, при $y<0$ – уравнение гиперболического типа, при $y=0$ – параболического и при $y>0$ – уравнение эллиптического типа.

Задачи для самостоятельного решения

Определить тип уравнения.

1.1. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

1.2. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad x>0.$

1.3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.4. $\left(1 + x^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(1 + y\right)^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} - 2u = 0.$

1.5. $\sin^2 x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y \sin x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

Общее решение уравнения

Решением уравнения (1.2) называется функция $u = u\left(x, y\right)$, имеющая соответствующие частные производные, которая, будучи подставлена в уравнение вместо неизвестной функции и ее частных производных, обращает уравнение в тождество по независимым переменным.

Уравнение (1.2) имеет бесчисленное множество решений.

Решение уравнения математической физики, содержащее две произвольные функции, называется общим. Решение, получаемое из общего при определенных значениях произвольных функций, называют частным решением уравнения.

Для нахождения частного решения уравнения (1.2) задают начальные и граничные условия.

Примеры. Найти общее решение уравнения.

1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$

Решение.

Запишем заданное уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0.$$

Отсюда следует, что $\frac{\partial u}{\partial x}$ не зависит от y, то есть

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f(x),$$

где $f(x)$ – произвольная функция переменной x. Интегрируя последнее уравнение по x, получим

$$u(x,y)=\int f(x)\,\mathrm{d}x+\psi(y),$$

где $\psi(y)$ – произвольная функция переменной y.

Первое слагаемое в правой части последнего равенства представляет собой произвольную функцию от x, которую обозначим через $\varphi(x)$.

Тогда общее решение исследуемого уравнения

$$u(x,y)=\varphi(x)+\psi(y).$$

2) $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}=0.$

Решение.

Обозначим $\frac{\partial u}{\partial x}=v(x,y)$. Тогда уравнение примет вид

$$x\frac{\partial v}{\partial x}+v=0.$$

Это уравнение можем рассматривать как уравнение первого порядка относительно функции *v*, где *y* играет роль параметра. Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\frac{\partial v}{v}=-\frac{\partial x}{x},$$

$$\ln|v|=-\ln|x|+\ln|f_1(y)|.$$

Откуда следует, что $v(x,y)=\dfrac{f_1(y)}{x}$.

Здесь $f_1(y)$ – произвольная функция переменной *y*.

Возвращаясь к функции $u(x, y)$, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{f_1(y)}{x},$$

$$u(x,y)=\int\frac{f_1(y)}{x}dx+f_2(y),$$

где $f_2(y)$ – произвольная функция *y*.

И окончательно, общее решение искомого уравнения

$$u(x,y)=\ln|x|f_1(y)+f_2(y).$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти общее решение уравнения.

1.6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0.$

1.7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.8. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{1}{2x}\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.9. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0.$

1.10. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{2}{y}\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0.$

Колебания бесконечной струны. Метод Даламбера

Имеется бесконечная струна. Надо найти колебания этой бесконечной струны в любой момент времени t и в любой точке x, если начальное положение струны равно $\varphi(x)$, а начальная скорость $\psi(x)$. То есть, надо решить задачу Коши для уравнения колебаний струны.

Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$u(x,0)=\varphi(x),$$

$$u_t'(x,0)=\psi(x),$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – функции, заданные на всей числовой прямой.

Если функция $\varphi(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, а $\psi(x)$ – дифференцируемая функция, то решение поставленной задачи Коши может быть найдено по формуле Даламбера

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\mathrm{d}z.$$

Примеры.

1) Найти колебания бесконечной струны, если начальное положение струны задается функцией x^2, а начальная скорость равна нулю (физическая постоянная a = 4).

Решение.

Запишем задачу Коши:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\begin{cases} u(x,0)=x^2 \\ u_t'(x,0)=0 \end{cases}.$$

Решение этой задачи ищем по формуле Даламбера

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\mathrm{d}z=$$

$$=\frac{(x-2t)^2+(x-2t)^2}{2}+0=\frac{x^2-4xt+4t^2+x^2+4xt+4t^2}{2}=x^2+4t^2.$$

$$u(x,t)=x^2+4t^2.$$

2) Решить методом Даламбера задачу Коши:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\begin{cases} u(x,0)=0 \\ u_t'(x,0)=\sin x \end{cases}.$$

Решение.

Здесь $a=3,\quad \varphi(x)=0,\quad \psi(x)=\sin x.$

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\mathrm{d}z=$$

$$=0+\frac{1}{6}\int\limits_{x-3t}^{x+3t}\sin z\mathrm{d}z=0-\frac{1}{6}\cos z\Big|_{x-3t}^{x+3t}=\frac{1}{6}\big(\cos(x-3t)-\cos(x+3t)\big)=$$

$$= -\frac{1}{3}\sin\frac{x-3t+x+3t}{2}\sin\frac{x-3t-x-3t}{2} = \frac{1}{3}\sin x \sin 3t.$$

$$u(x,t) = \frac{1}{3}\sin x \sin 3t.$$

3) Найти колебания бесконечной струны, если начальное положение струны задается функцией x^3, а начальная скорость равна x $(a=1)$.

Решение.

Запишем математическую модель этой задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\begin{cases} u(x,0) = x^3 \\ u_t'(x,0) = x \end{cases}.$$

По формуле Даламбера

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{(x-t)^3+(x+t)^3}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} z\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{x^3-3x^2t+3xt^2-t^3+x^3+3x^2t+3xt^2+t^3}{2} + \left.\frac{z^2}{4}\right|_{x-t}^{x+t} =$$

$$= x^3 + 3xt^2 + \frac{1}{4}\left(x^2 + 2xt + t^2 - x^2 + 2xt - t^2\right) = x^3 + xt + 3xt^2.$$

$$u\left(x,t\right) = x^3 + xt + 3xt^2.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.11. Решить задачу Коши для неограниченной струны методом Даламбера:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\begin{cases} u\left(x, 0\right) = \sin 2x \\ u_t'\left(x, 0\right) = 0 \end{cases}.$$

1.12. Найти колебания бесконечной струны, если начальное положение струны x^2, а начальная скорость – $\cos 2x$.

1.13. Найти колебания бесконечной струны, если начальное положение равно нулю, а начальная скорость – $\sin\dfrac{x}{2}$.

ЗАНЯТИЕ 2

Распространение тепла в стержне. Метод Фурье разделения переменных

Дан тонкий однородный стержень длины l с начальной температурой $\varphi(x)$. Концы стержня $x=0$ и $x=l$ закреплены. Надо найти температуру стержня в любой момент времени в любой точке x.

Математической моделью этой физической задачи является первая краевая задача для уравнения распространения тепла в стержне длины l.

В области $0<x<l, t\geq 0$ найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad 0\leq x\leq l$$

и однородным граничным условиям:

$$u(0,t)=0,$$
$$u(l,t)=0,\quad t\geq 0,$$

где $\varphi(x)$ непрерывна и имеет непрерывную первую производную на отрезке $[0,l]$ и $\varphi(0)=\varphi(l)=0$.

Решение этой задачи ищется методом Фурье разделения переменных. В [1] получена формула для решения:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

где $A_n=\dfrac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\dfrac{\pi n}{l}x.$

Примеры.

1) Найти функцию $u(x,t)$ распределения температуры в стержне длиной l, если на концах стержня поддерживается нулевая температура, а начальное распределение температуры стержня задано формулой

$$\varphi(x)=u(x,0)=\begin{cases} x & \text{при} \quad 0\le x\le \dfrac{l}{2} \\ l-x & \text{при} \quad \dfrac{l}{2}\le x\le l \end{cases}.$$

Решение.

Решением первой краевой задачи для уравнения распространения тепла в стержне

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\varphi(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le \dfrac{l}{2} \\ l-x, & \dfrac{l}{2}\le x\le l \end{cases},$$

$$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(l,t)=0 \end{cases}$$

является функция

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

где $A_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x=\frac{2}{l}\left\{\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{\pi n}{l}x\mathrm{d}x+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{\pi n}{l}x\mathrm{d}x\right\}.$

Вычислим

$$\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{\pi n}{l}x\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix}u=x; & \mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ \sin\frac{\pi n}{l}x\mathrm{d}x=\mathrm{d}v; & v=-\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{l}x\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{l}{\pi n}x\cos\frac{\pi n}{l}x\Big|_0^{\frac{l}{2}}+\frac{l}{\pi n}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{\pi n}{l}x\mathrm{d}x=$$

$$=-\frac{l}{\pi n}\cdot\frac{l}{2}\cos\frac{\pi n}{2}+\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2\sin\frac{\pi n}{l}x\Big|_0^{\frac{l}{2}}=$$

$$=-\frac{l^2}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{l^2}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}.$$

$$\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{\pi n}{l}x\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix}u=l-x; & \mathrm{d}u=-\mathrm{d}x\\ \sin\frac{\pi n}{l}x\mathrm{d}x=\mathrm{d}v; & v=-\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{l}x\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{l(l-x)}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{l}x\Bigg|_{\frac{l}{2}}^{l}-\frac{l}{\pi n}\int\limits_{\frac{l}{2}}^{l}\cos\frac{\pi n}{l}x\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{l^2}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{l^2}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}.$$

$$A_n=\frac{2}{l}\left(-\frac{l^2}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{l^2}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}+\frac{l^2}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{l^2}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}\right)=$$

$$=\frac{4l}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}=\frac{4l}{\pi^2(2k+1)^2}(-1)^k,$$

ибо $\sin\frac{\pi n}{2}=\begin{cases}0, & \text{при}\quad n=2k\\ (-1)^k, & \text{при}\quad n=2k+1\end{cases}.$

Таким образом, решение

$$u(x,t)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}x.$$

2) Найти функцию $u(x,t)$ распределения температуры в стержне длиной l, если на конце стержня $x=0$ поддерживается нулевая температура, а конец стержня $x=l$ теплоизолирован; начальная температура стержня равна x.

Решение.

Надо найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = x$$

и граничным условиям:

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u_t'(l, t) = 0 \end{cases}.$$

Частное решение уравнения ищем методом Фурье:

$$u(x, t) = X(x) T(t).$$

Подставляя в уравнение, получаем

$$T'(t) X(x) = a^2 T(t) X''(x)$$

или $\dfrac{1}{a^2} \dfrac{T'(t)}{T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)}$.

Равенство возможно, когда левая и правая части представляют собой одну и ту же постоянную, которую обозначим через b.

Тогда

$$T'(t) - a^2 b T(t) = 0, \tag{2.1}$$

$$X''(x) - bX(x) = 0. \qquad (2.2)$$

Решение должно удовлетворять также граничным условиям:

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0,$$

$$u'_x(l,t) = X'(l)T(t) = 0.$$

Таким образом, для определения функции $X(x)$ приходим к задаче Штурма–Лиувиля:

Найти такие значения параметра b, при которых существует нетривиальное решение задачи:

$$X''(x) - bX(x) = 0,$$

$$\begin{cases} X(0) = 0 \\ X'(l) = 0 \end{cases},$$

а также найти эти решения.

Исследуем знак постоянной b.

Пусть $b = \lambda^2 > 0.$ Общее решение уравнения (2.2)

$$X(x) = c_1 e^{-\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x},$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

Используя граничные условия, получаем

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -\lambda\left(c_1 e^{-\lambda l} + c_2 e^{-\lambda l}\right) = 0 \end{cases}.$$

Откуда следует, что $c_1 = c_2 = 0$, и, следовательно, $X(x) \equiv 0.$

При $b = 0$ общее решение уравнения (2.2) равно

$$X(x) = c_1 x + c_2.$$

Используя граничные условия, имеем $c_1 = c_2 = 0$ и $X(x) \equiv 0.$

Если $b = -\lambda^2 < 0,$ то

$$X(x) = c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x,$$

$$\begin{cases} 0 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 \\ 0 = \lambda\left(-c_1 \sin\lambda l + c_2 \cos\lambda l\right) = \lambda c_2 \cos\lambda l \end{cases}.$$

Пусть $c_2 \neq 0,$ значит, $\cos\lambda e = 0$ или $\lambda = \lambda_n = \dfrac{\pi(2n+1)}{2l}.$

Следовательно, нетривиальное решение задачи Штурма–Лиувиля равно

$$X_n(x) = c_2 \sin\frac{\pi(2n+1)}{2l} x.$$

Решением уравнения (2.1) является функция

$$T_n(t) = B_n e^{-\left(\frac{a\pi^2(n+1)}{2l}\right)^2 t},$$

где B_n – произвольная постоянная, и функции

$$u_n(x,t)=A_n e^{-\left(\frac{a\pi(2n+1)}{2l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}x,\quad A_n=c_2B_n$$

являются частными решениями исходного уравнения, удовлетворяющими граничным условием при любых A_n.

Ряд $$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\left(\frac{a\pi(2n+1)}{2l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}x \qquad (2.3)$$

будет решением исходной задачи, если

$$\varphi(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}x.$$

Откуда

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}x\mathrm{d}x. \qquad (2.4)$$

Таким образом, если $\varphi(x)$ непрерывна и имеет непрерывную первую производную на отрезке [0, l], то решение задачи 2) можно найти по формулам (2.3), (2.4).

Вычислим коэффициент A_n по формуле (2.4):

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}x\mathrm{d}x=\frac{2}{l}\int_0^l x\sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}x\mathrm{d}x=$$

$$=\left|\begin{matrix} u = x, \quad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}x\mathrm{d}x = \mathrm{d}v,\ v = -\frac{2l}{\pi(2n+1)}\cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x \end{matrix}\right| =$$

$$=\frac{2}{l}\left(-\frac{2l\cdot x}{\pi(2n+1)}\cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x\Bigg|_0^l+\left(\frac{2l}{\pi(2n+1)}\right)^2\sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}x\Bigg|_0^l\right)=$$

$$=0+\frac{8l}{\pi^2(2n+1)^2}\sin\frac{\pi(2n+1)}{2}=\frac{8l}{\pi^2(2n+1)^2}(-1)^n.$$

Решением задачи 2 является

$$u(x,t)=\frac{8l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}e^{-\left(\frac{\alpha\pi(2n+1)}{2l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}x.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Дан тонкий однородный стержень длиной l, изолированный от внешнего пространства, начальная температура которого равна $\varphi(x)=\frac{cx(l-x)}{l^2}$. Концы стержня поддерживаются при температуре, равной нулю. Определить температуру стержня в моменте времени $t>0$.

2.2. Найти решение задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(x,0)=x^2,$$

$$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u'_x(1,t)=0 \end{cases}.$$

2.3. Дан тонкий однородный стержень длиной l, начальная температура которого равна $x-1$. Конец стержня $x=0$ теплоизолирован, а конец $x=l$ поддерживается при нулевой температуре. Найти температуру стержня в любой момент времени.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов, М. М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка / М. М. Смирнов. – Минск: БГУ, 1974. – 232 с.
2. Смирнов, М. М. Задачи по уравнениям математической физики / М. М. Смирнов. – Москва: Наука, 1968. – 112 с.

Учебное издание

ГЛУШАНКОВА Лариса Яковлевна
ГОЛУБЕВА Ирина Анатольевна

ЭЛЕМЕНТЫ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Пособие для студентов специальностей
1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций»,
1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,
1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью»,
1-70 03 01 «Автомобильные дороги»,
1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»,
1-70 04 01 «Водохозяйственное строительство»,
1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна»,
1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов»,
1-70 07 01 «Строительство тепловых и атомных электростанций»

Редактор *Т. В. Грищенкова*
Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 30.11.2017. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 1,57. Уч.-изд. л. 1,23. Тираж 50. Заказ 933.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.