Министерство образования
Республики Беларусь

БНТУ

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Теоретическая механика»

КИНЕМАТИКА

Сборник задач

Минск 2007

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Теоретическая механика»

КИНЕМАТИКА

Сборник задач
для расчетно-графических и индивидуальных работ
по теоретической механике

Минск 2007

УДК 531.~~32~~(076)
ББ~~К 44.081~~
~~К 72~~
К41

Составители:
Л.Н. Беляцкая, Т.Ф. Богинская, Э.Э. Глубокая

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры
«Теоретическая и прикладная механика»
М.Д. Мартыненко,

д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой
«Сопротивление материалов машиностроительного профиля»
Ю.В. Василевич

~~К 72~~ Кинематика: сборник задач для расчетно-графических и индивидуальных работ по теоретической механике / Сост. Л.Н. Беляцкая, Т.Ф. Богинская Э.Э. Глубокая. – Минск: БНТУ, 2007. – 82 с.

Данное издание представляет собой сборник расчетно-графических индивидуальный работ по теоретической механике.

В сборнике изложены теоретические сведения и предложены задачи, охватывающие основные темы раздела «Кинематика» в Соответствии с программой технических вузов.

Предназначается в качестве пособия для студентов втузов всех форм обучения.

ISBN 978-985-479-750-2

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Кинематика – раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движений материальных тел без учета их масс и действующих на них сил.

В классической механике рассматриваются движения макроскопических тел со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света.

Под *движением* материального тела в механике понимают происходящее с течением времени изменение его положения в пространстве по отношению к другим телам.

Описание движения производится в определенной системе отсчета.

Системой отсчета называют систему координат, жестко связанную с одним из материальных тел, по отношению к которому изучается движение другого материального тела с течением времени.

Выбор системы отсчета в кинематике произволен и зависит от целей исследования. Например, при изучении движения колеса автомобиля по отношению к дороге, систему отсчета связывают с землей, а при изучении движения того же колеса по отношению к кузову автомобиля – с кузовом и т.д.

Механическое движение относительно: одно и то же движение будет различным в разных системах отсчета.

Пространство в кинематике рассматривается как трехмерное евклидово, т.е. все геометрические измерения в нем производятся на основании методов геометрии Евклида. Время – мера длительности явления – считается универсальным (абсолютным), т.е. протекающим одинаково во всех рассматриваемых системах отсчета независимо от их движения.

Время t является скалярной, непрерывно изменяющейся величиной, играющей роль независимой переменной, причем $t \geq 0$.

Начало отсчета времени выбирается произвольно.

Предметом кинематики служат следующие модели материальных тел:

- материальная точка,

- *система дискретных материальных* точек (механическая система материальных точек или тел),
- сплошная материальная среда и ее частный вид – абсолютно твердое тело.

Задачи кинематики

Движение рассматриваемого материального тела считается заданным (известным), если указан способ, позволяющий определить его положение в любой произвольный момент времени относительно выбранной системы отсчета.

Положение точки или тела относительно данной системы отсчета определяется соответствующими параметрами (координатами), а движение (или закон движения) – уравнениями, выражающими эти параметры, как функции времени.

Задачи кинематики:

1 задача – установить математический способ задания (описания) движения материального тела по отношению к выбранной системе отсчета;

2 задача (основная) – зная закон движения материального тела, определить кинематические характеристики этого движения (траектории различных движущихся точек, их скорости и ускорения, угловые скорости и угловые ускорения вращающихся тел и др.).

Всякое тело можно рассматривать как систему материальных точек. Чтобы полностью определить движение такого тела относительно данной системы отсчета, необходимо знать движение каждой его точки относительно той же системы отсчета; следовательно, изучению движения системы точек должно предшествовать изучение движения одной точки. Поэтому кинематика делится на два раздела: кинематика точки и кинематика абсолютно твердого тела.

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Материальной точкой называют тело (имеющее массу), размерами и различием движений отдельных точек которого можно пренебречь.

Непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка относительно выбранной системы отсчета, называется *траекторией*.

В зависимости от формы траектории движение точки может быть прямолинейным или криволинейным. На характер траектории влияет выбор системы отсчета, относительно которой рассматривается движение. Так, например, камень, брошенный вертикально вверх с палубы поступательно и равномерно движущегося парохода, будет относительно наблюдателя, находящегося на пароходе, двигаться прямолинейно, а относительно наблюдателя, стоящего на берегу, т.е. связанного с Землей, – криволинейно (по параболе), и т.д.

Движение точки считается заданным, если в любой момент времени можно указать положение точки по отношению к выбранной системы отсчета.

Для задания движения точки пользуются одним из трех способов: векторным, координатным, естественным (натуральным). Первый способ чаще всего применяется при теоретических исследованиях, а два других – при решении различных практических задач.

Все три способа взаимосвязаны, т.е. возможен переход от одного способа задания движения к другому.

Векторный способ задания движения точки

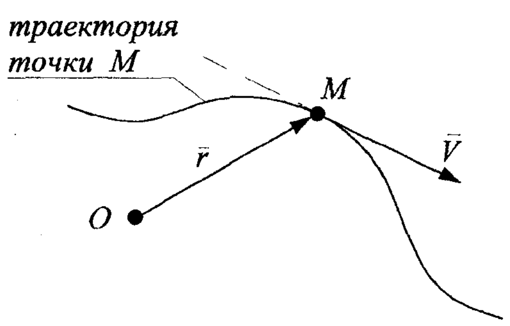


Рис. 1

Положение точки M по отношению к системе отсчета определяется ее радиусом-вектором $\bar{r}$, проведенным из **произвольной неподвижной точки *O*** (начала отсчета) до движущейся точки.

При движении точки ее радиус-вектор с течением времени изменяет величину и направление и, следовательно, представляет собой некоторую векторную величину зависящую от времени

$$\bar{r} = \bar{r}(t). \qquad (1)$$

Уравнение (1) – это *уравнение* (или *закон*) *движения точки в векторной форме.*

Траекторией точки при векторном задании движения будет годограф радиуса-вектора $\bar{r}$.

Скорость точки $\bar{V}$ есть векторная физическая величина, характеризующая изменение с течением времени величины и направления ее радиуса-вектора и равная первой производной по времени от радиуса-вектора точки:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}. \qquad (2)$$

Вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории в сторону движения точки.

Величина вектора скорости определяется равенством:

$$V = \left|\bar{V}\right|. \qquad (3)$$

Ускорение точки $\bar{a}$ есть векторная физическая величина, характеризующая изменение вектора скорости по величине и по направлению и равная первой производной по времени от скорости точки или второй производной от радиуса-вектора точки:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \dot{\bar{V}} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}}. \qquad (4)$$

Вектор ускорения направлен параллельно касательной проведенной к годографу скорости $\bar{V}$ (рис.2).

Геометрическое место концов любого переменного вектора при неизменном положении его начала называется *годографом.*

Годографом скорости называют геометрическое место концов векторов скорости движущейся точки отложенных от одной и той же произвольной точки пространства.

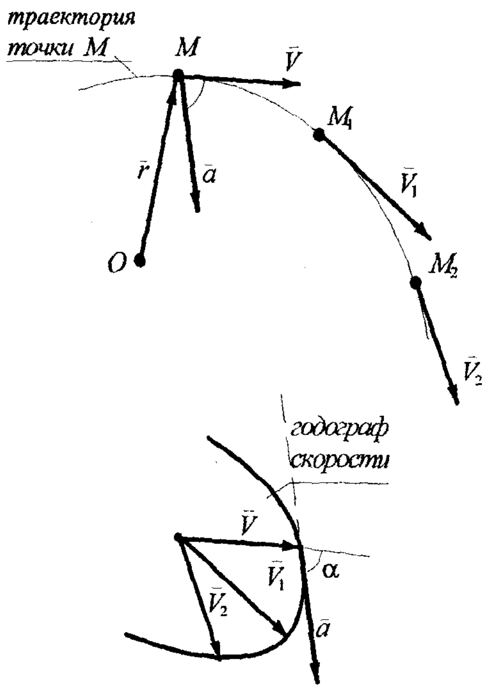


Рис. 2

Величина вектора ускорения определяется равенством:

$$a = |\bar{a}| = \left|\frac{d\bar{V}}{dt}\right| = \left|\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|.$$

Координатный способ задания движения точки

Закон движения

Положение точки относительно системы отсчета определяется какими-нибудь тремя координатами, например, прямоугольными декартовыми x, y, z , которые при движении точки меняются с течением времени.

Чтобы определить движение точки в этой системе координат, надо задать ее координаты как функции времени, т.е.

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \tag{5}$$

Систему уравнений (2) называют *уравнениями* (или *законом*) *движения точки в декартовых координатах.*

Кроме декартовой, в механике для изучения движения точки используются и другие системы координат, в частности, полярные, сферические, цилиндрические и др.

Уравнения траектории точки

Уравнения движения (5), определяющие координаты точки в любой момент времени, представляют уравнения траектории точки в параметрической форме, где роль параметра играет время. Для получения уравнений траектории в явном виде необходимо из уравнений движения (5) исключить время.

Тогда

$$\begin{cases} y = Y(x), \\ z = Z(x) \end{cases} \tag{6}$$

– уравнения траектории точки.

Скорость и ускорение

Скорость и ускорение точки в любой момент времени можно найти, вычислив их величину и определив их направление.

Величина вектора скорости точки определяется по формуле

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}, \tag{7}$$

где $V_x = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x}$, $V_y = \dfrac{dy}{dt} = \dot{y}$, $V_x = \dfrac{dz}{dt} = \dot{z}$ – проекции вектора скорости на оси координат x, y, z.

Направление вектора скорости $\overline{V}$ может быть определено косинусами углов, составляемых им с осями координат:

$$\cos(\overline{V}, x) = \frac{V_x}{V}, \ \cos(\overline{V}, y) = \frac{V_y}{V}, \cos(\overline{V}, z) = \frac{V_z}{V}. \qquad (8)$$

Величина вектора ускорения точки определяется по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ , \qquad (9)$$

где

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \dot{V}_x = \frac{d^2x}{at^2} = \ddot{x}, \ a_y = \frac{dV_y}{dt} = \dot{V}_y = \frac{d^2y}{at^2} = \ddot{y}, \qquad (10)$$

$a_z = \dfrac{dV_z}{dt} = \dot{V}_z = \dfrac{d^2z}{at^2} = \ddot{z}$ – проекции вектора ускорения на оси координат x, y, z

Направление вектора $\overline{a}$ задается косинусами углов, составляемых им с осями координат:

$$\cos(\overline{a}, x) = \frac{a_x}{a}, \ \cos(\overline{a}, y) = \frac{a_y}{a}, \cos(\overline{a}, z) = \frac{a_z}{a}. \qquad (11)$$

Естественный способ задания движения точки

Естественный способ применяется, когда известна траектория точки по отношению к выбранной системе отсчета.

Закон движения

Положение точки M определяется расстоянием $s = OM$ от выбранного на траектории начала отсчета O, измеренным вдоль дуги траектории и взятым с соответствующим знаком (см. рис.)

При движении точки расстояние s меняется с течением времени:

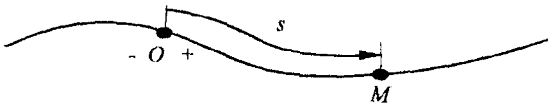


Рис. 3

$$s = s(t), \tag{12}$$

где s – дуговая (криволинейная) координата, отсчитываемая от выбранного начала отсчета на траектории.

Знак s определяют в соответствии с выбранным направлением отсчета дуг.

Зависимость (12) называется естественным уравнением (или законом) движения точки [по траектории].

Заметим, что величина s в уравнении (12) определяет *положение* движущейся точки, а *не пройденный ею путь*, т.к. *путь* – длина участка траектории, которую проходит точка при своем движении за данный промежуток времени.

Таким образом, при естественном способе определения движения точки должны быть заданы:

1) траектория точки;
2) начало отсчета расстояний на траектории с указанием положительного направления отсчета и начальный момент времени;
3) закон движения точки вдоль траектории в виде (12).

Естественные оси координат

При естественном способе задания движения точки в качестве координатных осей принимают оси естественного трехгранника Френе.

Начало подвижной системы отсчета совмещают с движущейся точкой M, а оси направляют по *касательной* τ, *нормали* n и *бинормали* b (рис. 4). Единичные векторы касательной $\bar{\tau}$, нормали $\bar{n}$ и бинормали $\bar{b}$ ориентированы так же, как орты правой системы координат, т.е. $\bar{b} = \bar{\tau} \times \bar{n}$.

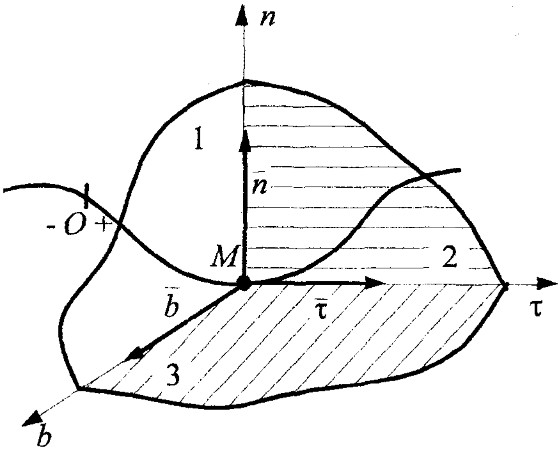


Рис. 4

Полученная система осей называется *естественной*, а прямоугольный триэдр $\bar{\tau}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ с вершиной в точке M – естественным (сопровождающим) трехгранником, движущимся по траектории вместе с точкой M. Следовательно, его ориентация в пространстве изменяется в зависимости от характера траектории и уравнения движения точки по ней.

Плоскости образующие естественный трехгранник (см. рис. 4):

1 – нормальная плоскость,

2 – соприкасающаяся плоскость,

3 – спрямляющая плоскость.

Скорость точки

При задании движения точки естественным способом ее скорость находят по формуле:

$$\bar{V} = V \cdot \bar{\tau}, \qquad (13)$$

где $\bar{\tau}$ – единичный вектор касательной, направленный в сторону возрастающих значений s.

Величина скорости точки определяется по формуле

$$V = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \qquad (14)$$

и не только характеризует численное значение скорости, но и показывает, в какую сторону движется точка.

Вектор скорости, направлен по касательной к траектории в данной точке, причем

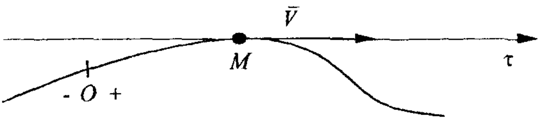


Рис. 5

если $\dot{s} > 0$, вектор $\bar{V}$ направлен в сторону возрастающих значений s,

если $\dot{s} < 0$, вектор $\bar{V}$ направлен в сторону убывающих значений s.

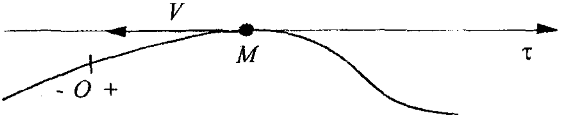


Рис. 6

Ускорение

Ускорение определяется через его проекции на естественные оси координат.

Ускорение точки лежит в соприкасающейся плоскости и определяется как векторная сумма двух взаимно перпендикулярных составляющих:

$$\bar{a} = a_\tau \cdot \bar{\tau} + a_n \cdot \bar{n} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n, \qquad (15)$$

где a_τ называется касательным (или тангенциальным) ускорением,

a_n – нормальным ускорением.

Величина касательного ускорения определяется формулой

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \dot{V} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s} \qquad (16)$$

и характеризует изменение скорости по величине. Оно равно нулю, когда величина скорости остается неизменной. Кроме того, оно обращается в ноль в те моменты времени, когда скорость достигает экстремальных значений.

Вектор $\bar{a}_\tau$ направлен по касательной к траектории, причем

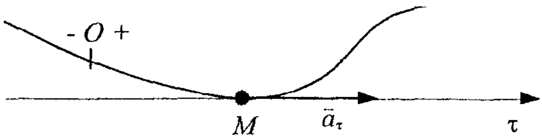


Рис. 7

если $\dot{V} > 0$, вектор $\bar{a}_\tau$ направлен в сторону возрастающих значений s,

если $\dot{V} < 0$, вектор $\bar{a}_\tau$ направлен в сторону убывающих значений s.

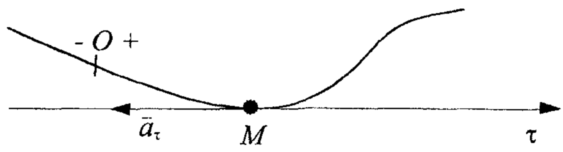


Рис. 8

Величина нормального ускорения определяется формулой

$$a_n = \frac{V^2}{\rho},$$

где ρ – радиус кривизны траектории.

Нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению. Оно равно нулю при прямолинейном движении точки, а также в точках перегиба траектории, т.к. в обоих случаях радиус кривизны обращается в бесконечность. Кроме того, нормальное ускорение обращается в ноль в точках, где $V = 0$.

Вектор нормального ускорения направлен по нормали к центру кривизны кривой (т.е. в сторону вогнутости кривой).

Величина полного ускорения:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \qquad (17)$$

Вектор ускорения точки $\bar{a}$ изображается диагональю параллелограмма, построенного на составляющих $\bar{a}_\tau$ и $\bar{a}_n$ (см. рис. 9)

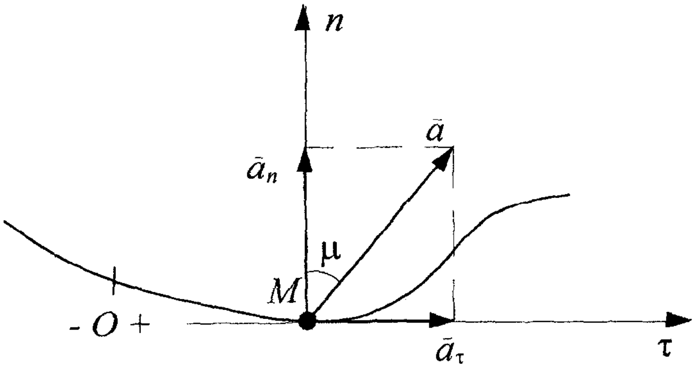


Рис. 9

Отклонение вектора $\bar{a}$ от нормали характеризуется углом μ, определяемым формулой:

$$tg\left(\bar{a}\,\hat{,}\,n\right) = tg\mu = \frac{|a_\tau|}{a_n}. \qquad (18)$$

Вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости (т.к. проекция ускорения на бинормали $a_b = 0$).

Величины касательного и нормального ускорений можно вычислить, если движение точки задано координатным способом ($y = f_1(t),\ x = f_2(y),\ z = f_3(z)$) по формулам:

$$a_\tau = |\bar{a}\cdot\bar{\tau}| = \frac{|\bar{a}\cdot\bar{V}|}{V} = \frac{a_x V_x + a_y V_y + a_z V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}},$$

$$a_n = \left|\bar{a} \times \bar{\tau}\right| = \frac{\left|\bar{a} \times \bar{V}\right|}{V} =$$

$$= \frac{\sqrt{\left(a_x V_y - a_y V_x\right)^2 + \left(a_y V_z - a_z V_y\right)^2 + \left(a_z V_x - a_x V_z\right)^2}}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}, \qquad (19)$$

Частные случаи движения точки

1. Прямолинейное движение. Если траекторией точки является прямая линия, то радиус кривизны равен ∞.

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = 0, \text{ т. к. } \rho = \infty \Rightarrow a = \left|a_\tau\right|. \qquad (20)$$

2. Равномерное движение.

Если при движении точки величина скорости остается постоянной, то такое движение называется *равномерным*.

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0, \text{ т. к. } V = \text{const} \Rightarrow a = a_n. \qquad (21)$$

Закон движения $s = s_0 + Vt$, где s_0 – начальное положение.

2′. Равномерное криволинейное движение

$$\left.\begin{aligned} a_\tau &= 0, \\ a_n &= \frac{V^2}{\rho} \neq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = a_n. \qquad (22)$$

2″. Равномерное прямолинейное движение

$$\left.\begin{aligned} a_\tau &= 0 \\ a_n &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = 0. \qquad (23)$$

3. Равнопеременное (равноускоренное или равнозамедленное) движение.

Если при движении точки касательное ускорение постоянно ($a_\tau = \text{const} \neq 0$) то такое движение называются *равнопеременным* (*равноускоренным*, если $a_\tau > 0$, и *равнозамедленным*, если $a_\tau < 0$).

Закон изменения скорости:

$V = V_0 + a_\tau t$, где V_0 – начальная скорость точки.

Закон движения:

$s = s_0 + V_0 t + \dfrac{a_\tau t^2}{2}$, s_0 – начальное положение точки.

Связь между векторным, координатным и естественным способами задания движения

Аналитически $\bar{r}$ можно представить

$$\bar{r} = \bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}, \tag{24}$$

а дугу, как известно из дифференциальной геометрии,

$$s = s_0 \pm \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt. \tag{25}$$

ЗАДАНИЕ К1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ ПО ЗАДАННЫМ УРАВНЕНИЯМ ЕЕ ДВИЖЕНИЯ

По заданным уравнениям движения точки M установить вид ее траектории и для момента времени $t = t_1$ (с) найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории в соответствующей точке. Необходимые для решения данные приведены в табл 1.

Таблица 1

№№	Уравнения движения		t_1,с
	$x = x(t)$,см	$y = y(t)$,см	
1	$-2t^3+3$	$-5t$	1/2
2	$4\cos(\pi t/3)+2$	$4\sin^2(\pi t/3)$	1
3	$-\cos(\pi t^2/3)+3$	$\sin(\pi t^2/3)-1$	1
4	$4t+4$	$-4/(t+1)$	2
5	$2\sin(\pi t/3)$	$-3\cos(\pi t/3)+4$	1
6	$3t^2+2$	$-4t$	1/2
7	$3t^2-t+1$	$5t^2-5t/3-2$	1
8	$7\sin(\pi t^2/6)+3$	$2-7\cos(\pi t^2/6)$	1
9	$-3/(t+2)$	$3t+6$	2
10	$-4\cos(\pi t/3)$	$-2\sin(\pi t/3)-3$	1
11	$-4t^2+1$	$-3t$	1/2
12	$5\sin^2(\pi t/6)$	$-5\cos^2(\pi t/6)-3$	1
13	$5\cos(\pi t^2/3)$	$-5\sin(\pi t^2/3)$	1
14	$-2t-2$	$-2/(t+1)$	2
15	$4\cos(\pi t/3)$	$-3\sin(\pi t/3)$	1
16	$3t$	$4t^2+1$	1/2
17	$7\sin(\pi t/6)-5$	$-7\cos^2(\pi t/6)$	1
18	$1+\cos(\pi t^2/3)$	$3\sin(\pi t^2/3)+3$	1
19	$-5t^2-4$	$3t$	1
20	$2-3t-6t^2$	$3-3t/2-3t^2$	0
21	$6\sin(\pi t^2/6)-2$	$6\cos(\pi t^2/6)+3$	1
22	$7t^2-3$	$5t$	1/4

23	$3-3t^2+t$	$4-5t^2+5t/3$	1
24	$-4\cos(\pi t/3)-1$	$-4\sin(\pi t/3)$	1
25	$-6t$	$-2t^2-4$	1
26	$8\cos^2(\pi t/6)+2$	$-8\sin^2(\pi t/6)-7$	1
27	$-3-9\sin(\pi t^2/6)$	$-9\cos(\pi t^2/6)+5$	1
28	$-4t^2+1$	$-3t$	1
29	$5t^2+5t/3-3$	$3t^2+t+3$	1
30	$2\cos(\pi t^2/3)-2$	$-2\sin(\pi t^2/3)+3$	1

КИНЕМАТИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Абсолютно твердым телом называют такое тело, расстояние между двумя любыми точками которого всегда остается неизменным.

Каждое тело состоит из совокупности точек, и определение положения тела относительно данной системы отсчета сводится к определению положения каждой точки этого тела относительно той же системы отсчета.

Однако для определения положения тела нет надобности определять положение каждой точки тела. Вместо этого в кинематике твердого тела устанавливают способы определения положения всего тела в целом относительно выбранной системы отсчета. Для этого по аналогии с понятием координат точки устанавливается понятие обобщенных координат тела.

Независимые между собой параметры, однозначно определяющие для каждого момента времени положение тела относительно выбранной системы отсчета, называются *обобщенными координатами тела* (q_j, где $j=1, 2,...$).

В качестве обобщенных координат, выбор которых зависит от конкретной задачи, принимают не только декартовы, сферические и другие координаты, но и любые величины, однозначно определяющие положение рассматриваемого тела и имеющие размерности длины, площади, угла и т.д.

Уравнения движения тела

$$q_j = q_j(t), \ j = 1, 2, ... \tag{26}$$

Однако "механическое" состояние тела в данный момент времени не определяется только значениями обобщенных координат. Дело в том, что при заданных $q_j (j = 1, \ 2, ...)$ тело может обладать произвольными скоростями, а в зависимости от значений последних по истечении элементарного промежутка времени может изменяться и положение тела. Поэтому состояние тела можно полностью определить и даже предугадать его дальнейшее движение, задав одновременно независимые обобщенные координаты и обобщенные скорости.

Производные независимых обобщенных координат q_j по времени представляют собой *обобщенные скорости*:

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}. \tag{27}$$

Очевидно, что каждой обобщенной координате q_j соответствует обобщенная скорость $\dot{q}_j$, причем,она может иметь размерность, отличающуюся от размерности обычной скорости.

Поступательное движение твердого тела

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, содержащая две точки тела, движется параллельно самой себе.

Поступательное движение не следует смешивать с прямолинейным. При поступательном движении тела траектории его точек могут быть любыми кривыми линиями.

Свойства поступательного движения твердого тела определяются следующей теоремой.

Все точки твердого тела при поступательном движении описывают одинаковые траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по величине и по направлению скорости и ускорения.

Из теоремы следует, что изучение поступательного движения тела сводится к задаче кинематики точки.

Уравнениями поступательного движения твердого тела являются уравнения движения любой точки этого тела (обычно уравнения движения его центра тяжести точки C).

$$\bar{r}_C = \bar{r}(t) \text{ или } \begin{cases} x_C = x(t), \\ y_C = y(t), \\ z_C = z(t). \end{cases} \tag{28}$$

Поступательно движущееся тело имеет три обобщенные координаты, однозначно определяющие положение этого тела ($q_1 = x_C$, $q_1 = y_C$, $q_1 = z_C$).

При поступательном движении общую для всех точек тела скорость $\bar{V}$ называют *скоростью поступательного движения тела*, а ускорение $\bar{a}$ – *ускорением поступательного движения*. Векторы $\bar{V}$ и $\bar{a}$ можно, очевидно, изображать приложенными в любой точке тела.

Заметим, что понятия о скорости и ускорении тела имеют смысл только при поступательном движении. Во всех остальных случаях точки тела движутся с разными скоростями и ускорениями и термины «скорость тела» или «ускорение тела» для этих движений теряют смысл.

Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси

Вращательное движение – это движение твердого тела, при котором две точки, принадлежащие телу, остаются во все время движения неподвижными.

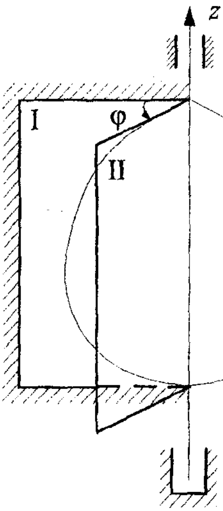


Рис. 10

Прямая, проходящая через эти точки, называется *осью вращения z*. Положение тела, совершающего вращательное движение, определяется углом φ между проведенными через ось вращения неподвижной полуплоскостью I и полуплоскостью II, жестко связанной с телом и вращающейся вместе с ним (рис. 10). При этом за положительное направление отсчета угла φ обычно принимают направление, противоположное направлению вращения часовой стрелки, если смотреть с положительного направления координатной оси z, совмещенной с осью вращения тела.

Все точки тела за один и тот же промежуток времени поворачиваются вокруг оси на одинаковый угол, потому уравнение, определяющее изменение этого угла как функции времени,

$$\varphi = \varphi(t), \tag{29}$$

где φ – угол поворота тела. Это уравнение называется уравнением (или законом) вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Угол поворота тела обычно измеряют в радианах, но иногда в практических задачах его выражают числом оборотов и определяют по формуле

$$\varphi = 2\pi N, \tag{30}$$

где N – число оборотов.

При вращательном движении вокруг неподвижной оси положение тела определяется одной обобщенной координатой $(q = \varphi)$.

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твердого тела являются его угловая скорость и угловое ускорение.

Угловая скорость твердого тела характеризует быстроту изменения угла поворота твердого тела и ее можно определить как вектор, расположенный на оси вращения и равный

$$\overline{\omega} = \omega \overline{k}, \tag{31}$$

где $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ – алгебраическая угловая скорость вращения тела;

$\overline{k}$ – единичный вектор координатной оси z (оси вращения).

Вектор угловой скорости направлен по оси вращения в ту сторону, откуда оно видно происходящим против хода часовой стрелки (рис. 11).

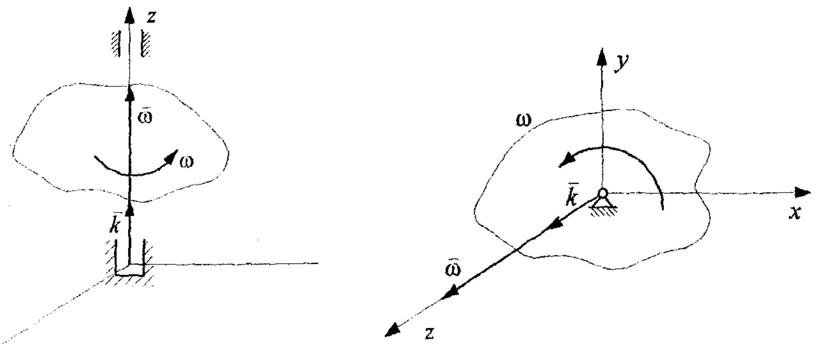
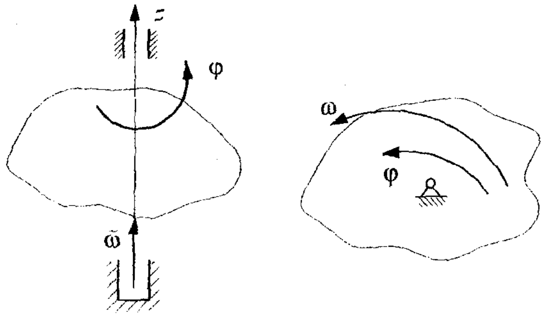


рис. 11

Величина угловой скорости равна модулю вектора $\overline{\omega}$ и определяется как модуль проекции ω_z либо как модуль алгебраической угловой скорости тела при его вращении вокруг неподвижной оси:

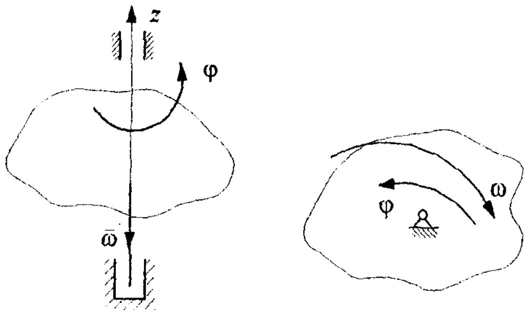
$$\omega = |\overline{\omega}| = |\omega_z| = |\dot{\varphi}|. \tag{32}$$

Знак $\dot{\varphi}$ определяет направление вращения.



Когда $\dot{\varphi} > 0$, направление вращения ω совпадает с положительной координатой φ (рис. 12)

Рис. 12



когда $\dot{\varphi} < 0$, направление вращения ω не совпадает с положительной координатой φ (рис. 13).

Рис. 13

При отсчете угла поворота в радианах и измерении времени в секундах угловая скорость измеряется в $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$ или с^{-1}.

В технике угловую скорость часто определяют числом оборотов в минуту (n об/мин). Связь между этими единицами измерения дается формулой

$$\omega = n\,\frac{2\pi}{60} = \frac{\pi n}{30}\,. \qquad (33)$$

Угловое ускорение характеризует быстроту изменения угловой скорости тела с течением времени и его можно определить как вектор

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \varepsilon\bar{k}, \tag{34}$$

где $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$ – алгебраическое угловое ускорение тела, равное первой производной от алгебраической угловой скорости или второй производной по времени от угла поворота вокруг неподвижной оси.

Величина (модуль) углового ускорения

$$\varepsilon = |\bar{\varepsilon}| = |\varepsilon_z| = |\ddot{\omega}| = |\ddot{\varphi}|. \tag{35}$$

Единица измерения углового ускорения – $\dfrac{\text{рад}}{\text{с}^2}$ или с^{-2}.

Вектор углового ускорения расположен на оси вращения и совпадает с осью вращения z при $\varepsilon_z = \ddot{\varphi} > 0$ или направлен в противоположную сторону при $\varepsilon_z = \ddot{\varphi} < 0$.

Векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ являются скользящими векторами, расположенными на оси вращения тела и не имеющими на ней конкретной точки приложения.

Вращательное движение называется *равномерным*, если во все время движения $\omega = \text{const}$, и *равнопеременным*, если во все время движения $\varepsilon = \text{const} \neq 0$. Вращательное движение называется *ускоренным*, если $\dot{\omega} > 0$, и *замедленным*, если $\dot{\omega} < 0$.

Если ω и ε имеют одинаковые знаки вращение будет ускоренным.

Если ω и ε имеют разные знаки вращение будет замедленным.

Свойством вращательного движения твердого тела можно считать то, что траектории всех точек этого тела являются окружностями, лежащими в плоскостях, перпендикулярных оси вращения.

Центры всех этих окружностей лежат на оси вращения, а радиусы равны кратчайшему расстоянию от этих точек до оси вращения.

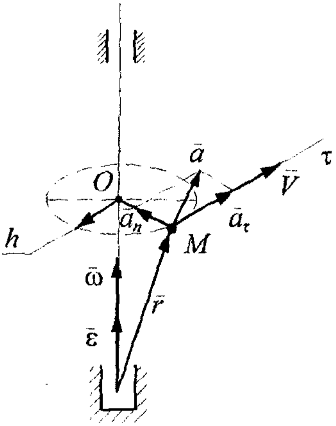


Рис. 14

Скорость точки M тела

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r} \tag{36}$$

Формула (36) называется *векторной формулой Эйлера.*

Величина (модуль) скорости точки тела при этом определится как модуль соответствующего векторного произведения, т.е.

$$V = |\bar{\omega} \times \bar{r}| = \omega r \sin(\bar{\omega}, \bar{r}) = \omega h. \tag{37}$$

Скорость точки M

$$V = \omega \cdot OM. \tag{38}$$

Вектор $\bar{V}$ направлен в сторону вращения по ω.

Ускорение точки M тела

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n. \tag{39}$$

$$a_\tau = a_{\text{вр}} = \dot{V} = \dot{\omega} \cdot OM = \varepsilon \cdot OM,$$

$$a_n = a_ц = \frac{V^2}{OM} = \omega^2 OM, \tag{40}$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = OM\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},\ tg\mu = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

Векторные выражения скорости и ускорения точки вращающегося тела.

$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}$ – формула Эйлера

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{V}. \tag{41}$$

ЗАДАНИЕ К2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ И ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИЯХ

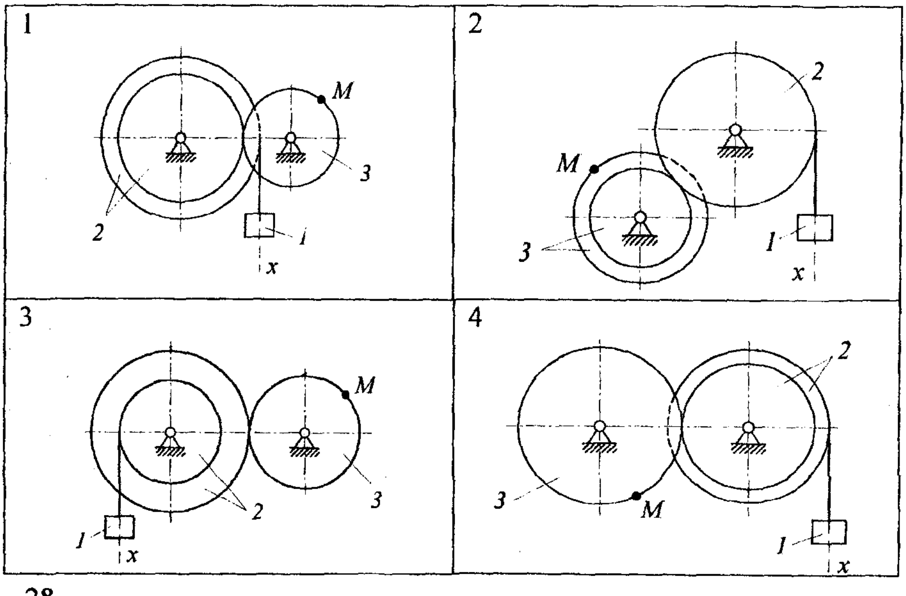
По заданному уравнению прямолинейного поступательного движения груза 1 определить скорость, а также вращательное , центростремительное и полное ускорения точки M механизма в момент времени, когда путь, пройденный грузом, равен s. Схемы механизмов показаны на рис., а необходимые для расчета данные помещены в табл. 2.

Таблица 2

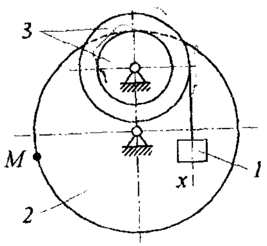
№№	Радиусы, см				Уравнение движения груза 1 $x = x(t)$ (x – в см, t – в с)	s ,м
	R_2	r_2	R_3	r_3		
1	60	45	36	-	$10+100t^2$	0,5
2	80	-	60	45	$80t^2$	0,1
3	100	60	75	-	$18+70t^2$	0,2
4	58	45	60	-	$50t^2$	0,5
5	80	-	45	30	$8+40t^2$	0,1
6	100	60	30	-	$5+60t^2$	0,5
7	45	35	105	-	$7+90t^2$	0,2
8	35	10	10	-	$4+30t^2$	0,5
9	40	30	15	-	$3+80t^2$	0,2
10	15	-	40	35	$70t^2$	0,4
11	40	25	20	-	$5+40t^2$	0,3
12	20	15	10	-	$2+50t^2$	0,1
13	30	20	40	-	$60t^2$	0,4
14	15	10	15	-	$6+20t$	0,1
15	15	10	15	-	$8+40t^2$	0,3

Окончание табл. 2

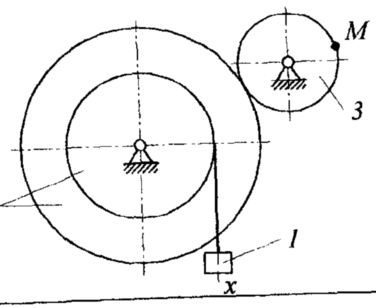
16	20	15	15	-	$3+40t^2$	0,4
17	15	10	20	-	$80t^2$	0,6
18	20	15	10	-	$4+20t$	0,3
19	15	10	20	-	$5+80t^2$	0,2
20	25	15	10	-	$50t^2$	0,3
21	20	10	30	10	$4+90t^2$	0,5
22	40	20	35	-	$10+40t^2$	0,5
23	40	30	30	15	$7+40t$	0,6
24	30	15	40	20	$90t^2$	0,2
25	50	20	60	-	$2+50t$	0,5
26	32	16	32	16	$5+60t^2$	0,1
27	40	18	40	18	$6+30t^2$	0,3
28	40	20	40	15	$50t^2$	0,4
29	25	20	50	25	$30+30t$	0,6
30	30	15	20	-	$5+60t^2$	0,2



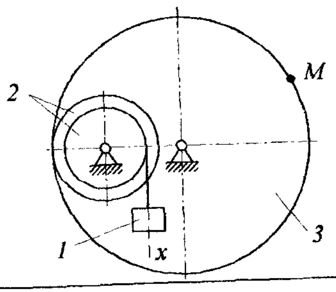
5



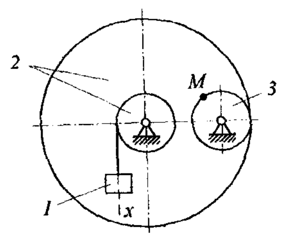
6



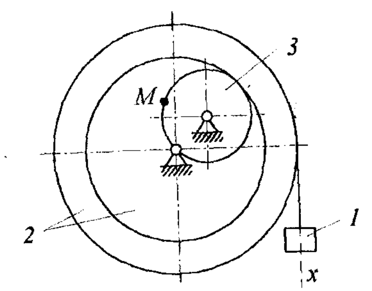
7



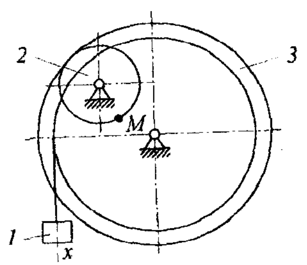
8



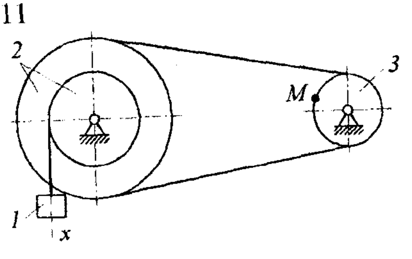
9



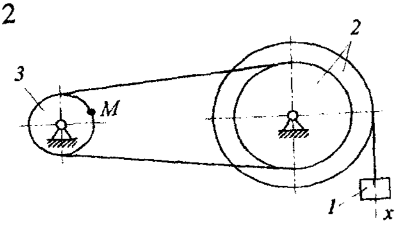
10



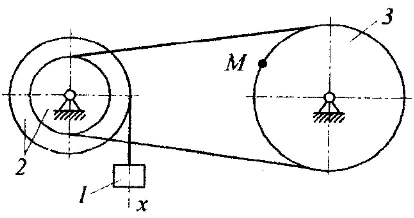
11



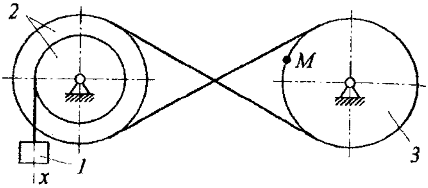
12



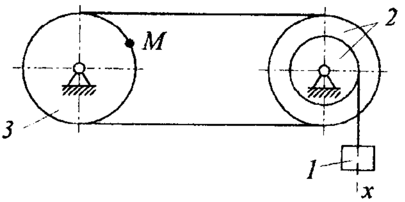
13



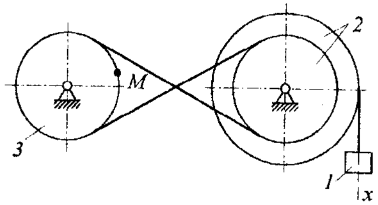
14



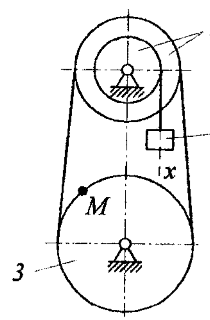
15



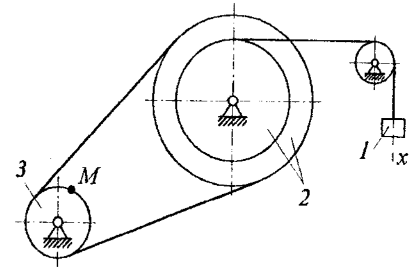
16



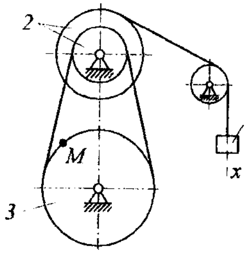
17



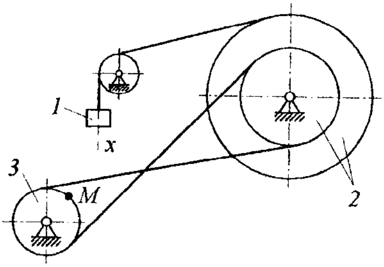
18



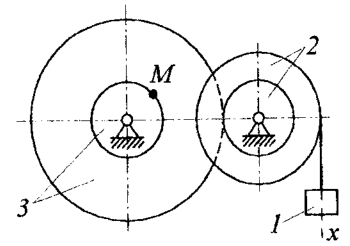
19



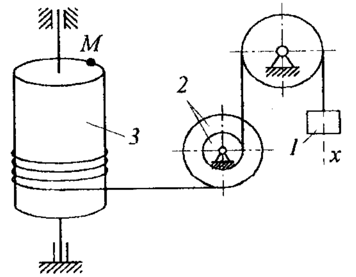
20



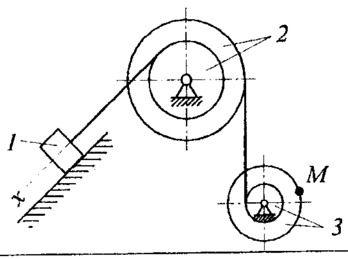
21



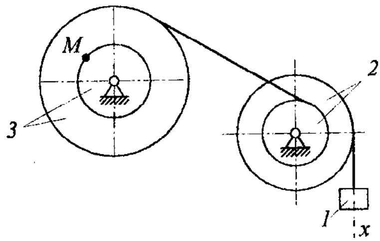
22



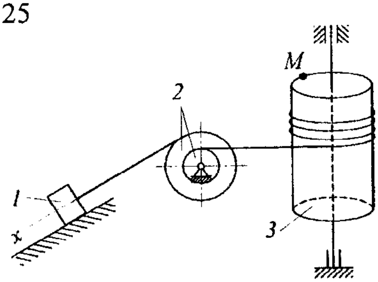
23



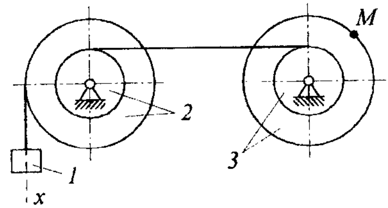
24



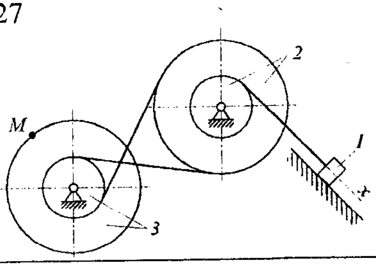
25



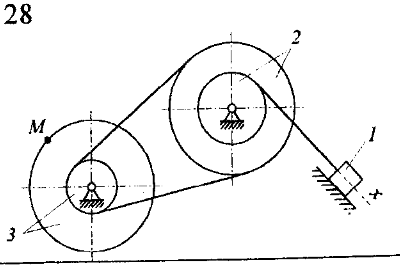
26

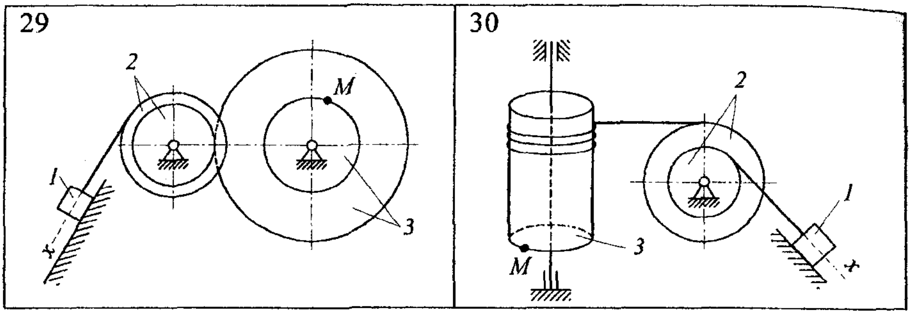


27



28





ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Плоскопараллельным движением твердого тела называется такое движение, при котором все точки тела движутся параллельно какой-нибудь неподвижной плоскости.

Движение всего тела определяется движением сечения тела S плоскостью, параллельной условно неподвижной плоскости N.

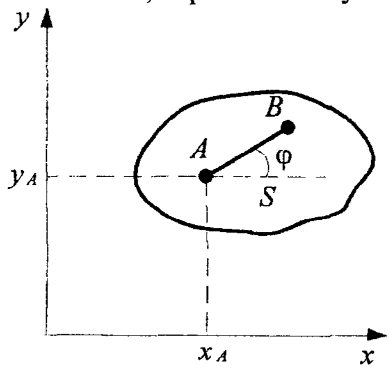


Рис. 15

Положение плоской фигуры определяется положением отрезка AB (рис. 15). Положение отрезка AB определяется тремя параметрами: координатами точки $A(x_A, y_A)$ и углом φ, который отрезок AB образует с осью x.

Произвольная точка A называется полюсом.

Уравнения движения твердого тела
$$\begin{cases} x_A = x(t), \\ y_A = y(t), \\ \varphi = \varphi(t). \end{cases}$$

Плоскопараллельное движение можно представить как совокупность двух движений: поступательного движения, зависящего от выбора полюса, и вращательного движения вокруг полюса, причем угол и направление поворота от выбора полюса не зависят.

Плоскопараллельное движение твердого тела можно рассматривать как вращательное вокруг мгновенной оси вращения.

Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении

Первый способ

Скорость любой точки М тела при плоскопараллельном движении равна геометрической сумме скорости полюса А и скорости данной точки во вращательном движении вокруг полюса.

$$\bar{V}_M = \bar{V}_A + \bar{V}_{MA}, \tag{42}$$

где $\bar{V}_{MA} = \bar{\omega} \times \overline{AM}$,

$$V_{MA} = \omega \cdot AM. \tag{43}$$

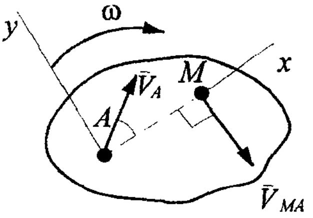


Рис. 16

Вектор $\bar{V}_{MA}$ направлен перпендикулярно к AM в сторону вращения фигуры.

Величину скорости точки M можем найти следующим образом:

1) по теореме косинусов

$$V_M = \sqrt{V_A^2 + V_{MA}^2 + 2V_A V_{MA} \cos(\bar{V}_A, \bar{V}_{MA})}. \tag{44}$$

2) можно спроектировать равенство (1) на взаимно перпендикулярные оси x и y

$$\left.\begin{aligned} V_{Mx} &= V_{Ax} + V_{MAx} \\ V_{My} &= V_{Ay} + V_{MAy} \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_M = \sqrt{V_{Mx}^2 + V_{My}^2}. \tag{45}$$

Второй способ

Теорема о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, соединяющую эти точки.

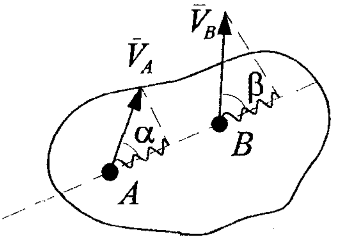


Рис. 17

Проекции скоростей точек плоской фигуры на прямую соединяющую эти точки, равны.

$$np(\bar{V}_A)_{AB} = np(\bar{V}_B)_{AB} \qquad (46)$$

или

$$V_A \cos\alpha = V_B \cos\beta\,. \qquad (47)$$

Третий способ

Определение скорости с помощью мгновенного центра скоростей.

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

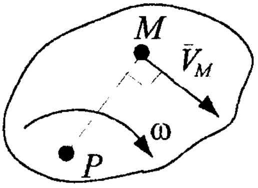


Рис. 18

Через МЦС перпендикулярно плоскости движения проходит мгновенная ось вращения

$$V_M = \omega \cdot MP \Rightarrow \omega = \frac{V_M}{MP}\,. \qquad (48)$$

Способы нахождения МЦС

Для нахождения мгновенного центра скоростей достаточно знать направления скоростей двух каких-либо точек плоской фигуры. Мгновенный центр скоростей находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных из данных точек к направлениям их скоростей.

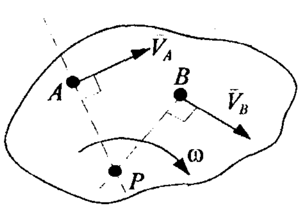


Рис. 19

$$\left.\begin{aligned} V_A &= \omega \cdot AP \\ V_B &= \omega \cdot BP \end{aligned}\right\} \text{ или}$$

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}\,. \qquad (49)$$

Если эти перпендикуляры сливаются в один, то для нахождения мгновенного центра скоростей надо дополнительно знать величины скоростей. Мгновенный центр скоростей находится в этом случае в точке пересечения общего перпендикуляра и прямой, соединяющей концы векторов скоростей.

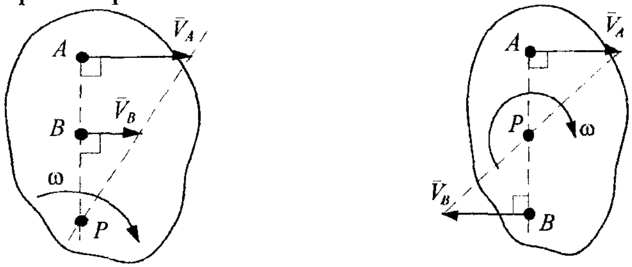


Рис. 20

$$\left.\begin{aligned} V_A &= \omega \cdot AP \\ V_B &= \omega \cdot BP \end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}. \qquad (50)$$

Если же перпендикуляры параллельны, МЦС находится в бесконечности. В этом случае $\omega = 0$, а скорости всех точек плоской фигуры одинаковы по величине и по направлению.

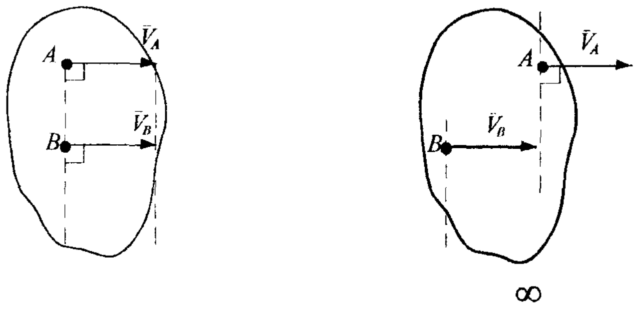


Рис. 21

Такое движение называется *мгновенно поступательным*.

Если движение осуществляется путем качения без скольжения одного цилиндрического тела по неподвижной поверхности другого, то точка их соприкосновения в данный момент является мгновенным центром скоростей.

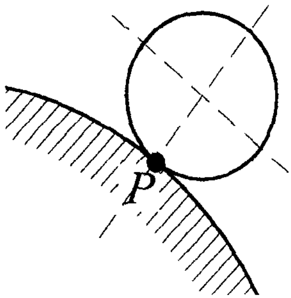


Рис. 22

МЦС – точка касания P.

Если известен вектор скорости $\overline{V}_A$ тела и угловая скорость вращения ω, то мгновенный центр скоростей лежит на линии, перпендикулярной вектору скорости $\overline{V}_A$, на расстоянии AP, равном

$$AP = \frac{V_A}{\omega}$$

и расположенном, так, чтобы направление поворота вектора скорости $\overline{V}_A$ совпадало с направлением вращения тела вокруг мгновенного центра скоростей.

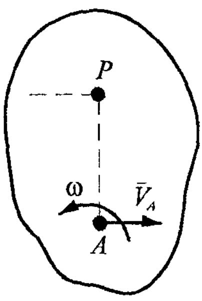


Рис. 23

Определение ускорений точек

Ускорение любой точки М тела равно геометрической сумме ускорения полюса А и ускорения этой точки во вращательном движении вместе с телом вокруг полюса

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}, \tag{51}$$

где $\bar{a}_{MA}$ – это ускорение, которое бы имела точка *M*, если бы она вращалась вокруг полюса *A*.

$$\bar{a}_{MA} = \bar{a}_{MA}^{\tau} + \bar{a}_{MA}^{n}. \tag{52}$$

Касательное (вращательное) –

$$\bar{a}_{MA}^{\tau} = \bar{a}_{MA}^{\text{вр}} = \bar{\varepsilon} \times \overline{AM},\ a_{MA}^{\tau} = a_{MA}^{\text{вр}} = \varepsilon \cdot AM. \tag{53}$$

Нормальное (центростремительное) –

$$\bar{a}_{MA}^{n} = \bar{a}_{MA}^{\text{ц}} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}),\ a_{MA}^{n} = a_{MA}^{\text{ц}} = \omega^2 \cdot AM. \tag{54}$$

Окончательно:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}^{\tau} + \bar{a}_{MA}^{n}. \tag{55}$$

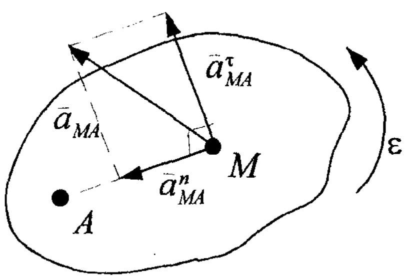


Рис. 24

Величину $a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2}$ находят аналитически – методом проекций.

Основные способы вычисления углового ускорения

1) Если известно $\varphi = \varphi(t)$ или $\omega = \omega(t)$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \tag{56}$$

2) Если известно, что расстояние до МЦС постоянно $(AP = \text{const})$, то

$$\varepsilon = \frac{a_A^\tau}{AP}. \tag{57}$$

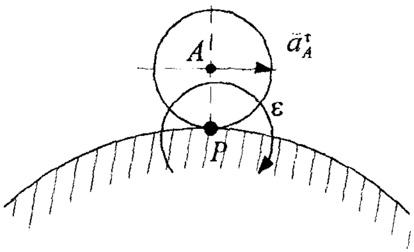


Рис. 25

3) $\varepsilon = \dfrac{a_{BA}^\tau}{BA}$.

ЗАДАНИЕ К3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ

Найти для заданного положения механизма скорости точек *A, B, C* и угловые скорости всех его звеньев, если известна угловая скорость кривошипа ω_{OA}.

Схемы механизмов показаны на рис., а необходимые данные приведены в таблице 3.

Таблица 3

№ варианта	Радиусы, см					ω_{OA}, c^{-1}	Дополнительные данные
	OA	*AB*	*AD*	*BC*	*r*		
1	35	65	–	–	15	2	
2	40	40	40	60	–	1,5	
3	22	–	–	24	11	3	$O_1C = 30$ см
4	20	50	–	24	–	1	
5	35	–	–	-	15	4	$\omega_1 = 1{,}5$ см
6	20	60	–	30	–	1,2	
7	30	60	–	30	–	2	$O_1B = 50$ см
8	12	–	–	-	–	1,5	
9	14	–	40	45	–	1	$BD = BO_1$
10	15	50	–	25	–	–	$V_O = 80$ см/с
11	27	–	–	34	12	2,5	
12	20	25	50	35	–	2	
13	22	44	–	-	15	–	$V_O = 100$ см/с
14	60	25	–	35	–	1,4	
15	25	60	–	–	15	1,6	
16	27	–	–	–	12	1,2	$\omega_1 = 3$ c^{-1}
17	16	–	–	–	8	0,6	
18	22	36	72	25	–	2,4	
19	23	57	–	–	14	1,5	
20	23	56	–	–	–	4	
21	24	24	24	35	–	3	
22	25	–	–	40	10	2	
23	26	–	–	36	12	1	
24	17	12	32	15	–	2,1	
25	28	75	-	15	10	2,5	
26	12	54	25	42	–	2,2	
27	55	–	–	–	10	1,8	

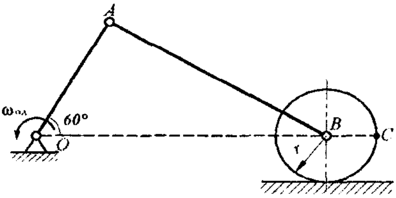
Окончание табл. 3

28	25	–	–	30	10	2,3	$O_1C = 36$ см
29	16	25	50	35	–	2	
30	16	60	–	14	10	1,5	

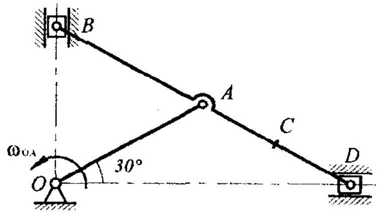
Примечание. Качение колес происходит без скольжения.

* В вариантах 5 и 16 задана также угловая скорость ω_1 шестерни *1*; в вариантах 10 и 13 задана скорость V_O центра *O*.

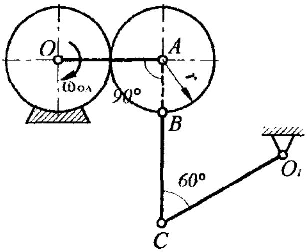
1



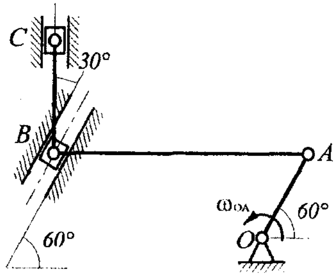
2



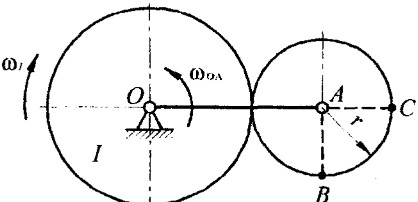
3



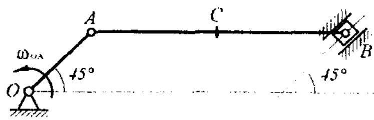
4



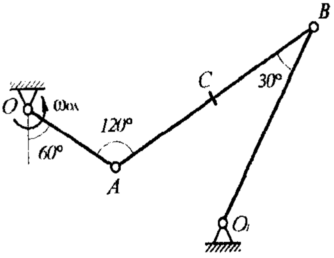
5



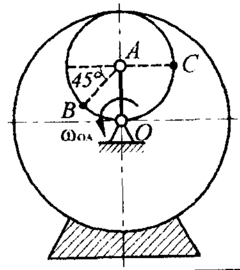
6



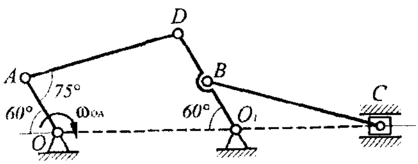
7



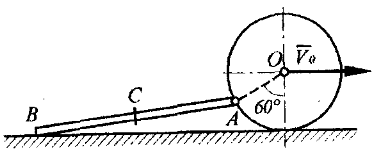
8



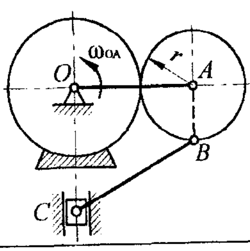
9



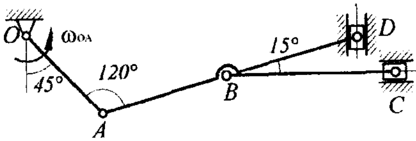
10



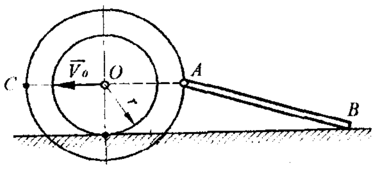
11



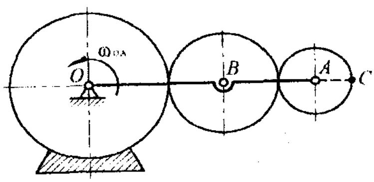
12



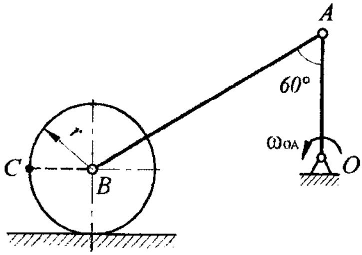
13



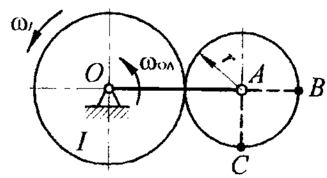
14



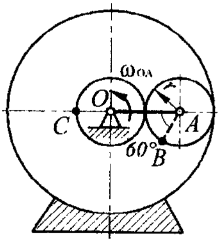
15



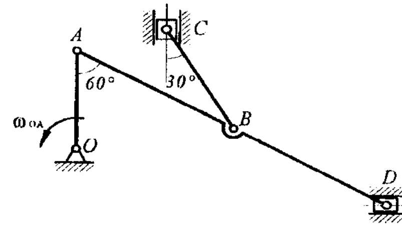
16



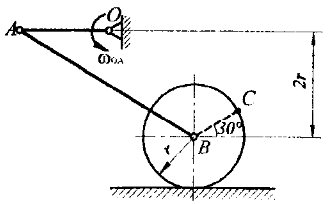
17



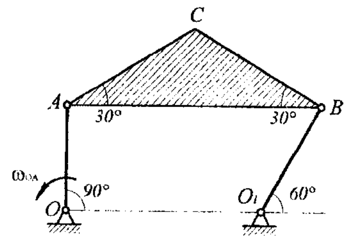
18



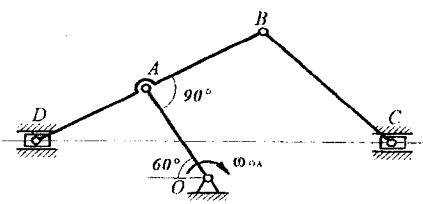
19



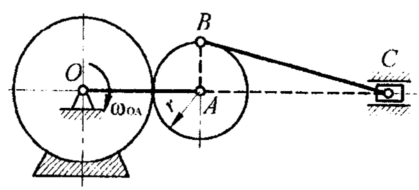
20



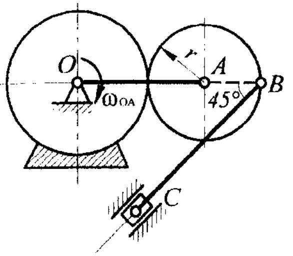
21



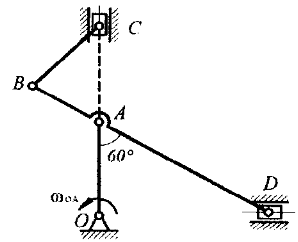
22



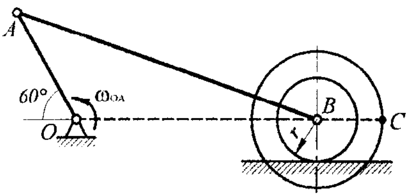
23



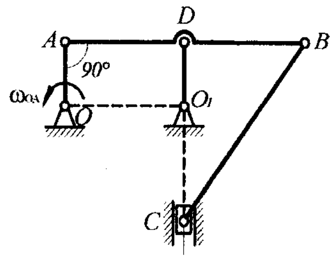
24



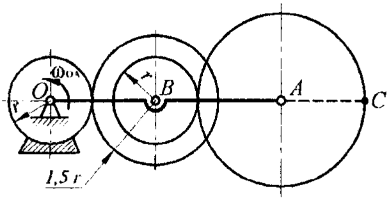
25



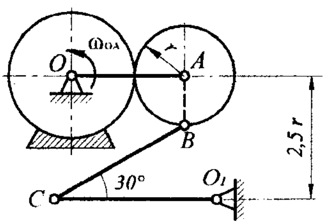
26



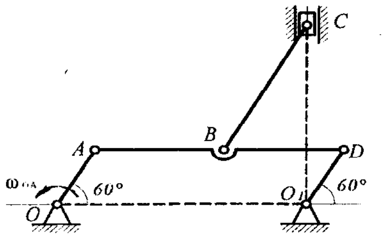
27



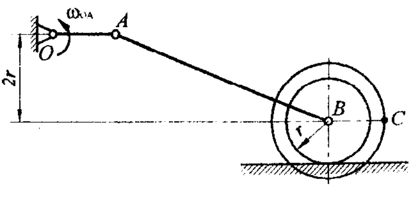
28



29



30



ЗАДАНИЕ К4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ

Найти для заданного положения механизма скорости и ускорения точек *B* и *C*.

Схемы механизмов помещены на рис., а необходимые для расчета данные приведены в таблице 4.

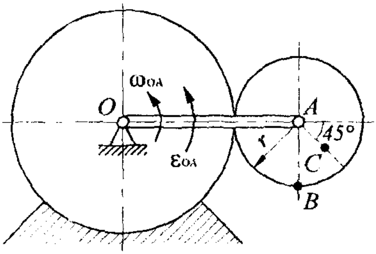
Таблица 4

№ варинта	Радиусы, см				ω_{OA}, с$^{-1}$	ω_1, с$^{-1}$	ε_{OA}, с$^{-2}$	v_A, см./с	ω_A, см/с^2
	OA	*r*	*AB*	*AC*					
1	40	15	–	8	2	–	2	–	–
2	30	15	–	8	3	–	2	–	–
3	–	50	–	–	–	–	-	50	100
4	35	–	–	45	4	–	8	–	–
5	25	–	–	20	1	–	1	–	–
6	40	15	–	6	1	–	0	–	–
7	35	–	75	60	5	–	10	–	–
8	–	–	20	10	–	–	–	40	20
9	–	–	45	30	–	–	–	20	10
10	25	–	80	20	1	–	2	–	–
11	–	–	30	15	–	–	–	10	0
12	–	–	30	20	–	–	–	20	20
13	25	–	55	40	2	–	4	–	–
14	45	15	–	8	3	12	0	–	–
15	40	15	–	8	1	–	1	–	–
16	55	20	–	–	2	–	5	–	–
17	–	30	–	10	–	–	–	80	50
18	10	–	10	5	2	–	6	–	–
19	20	15	–	10	1	2,5	0	–	–
20	–	–	20	6	–	–	–	10	15
21	30	–	60	15	3	–	8	–	–
22	35	–	60	40	4	–	10	–	–
23	–	–	60	20	–	–	–	5	10

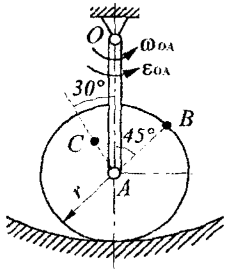
24	25	–	35	15	2	–	3	–	–
25	20	–	70	20	1	–	2	–	–
26	20	15	-	10	2	1,2	0	–	–
27	–	15	–	5	–	–	-	60	30
28	20	–	50	25	1	–	1	–	–
29	12	–	35	15	4	–	6	–	–
30	40	–	-	20	5	–	10	–	–

Примечание. 1.) ω_{OA} и ε_{OA} - угловая скорость и угловое ускорение кривошипа *OA* при заданном положении механизма; 2.) ω_1 - угловая скорость колеса *I*(постоянная); 3.) V_A и a_A –скорость и ускорение точки *A*. 4.)Качение колеса происходит без скольжения.

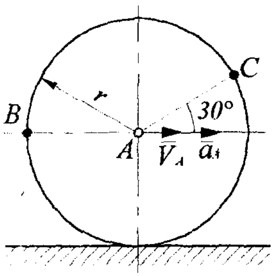
1



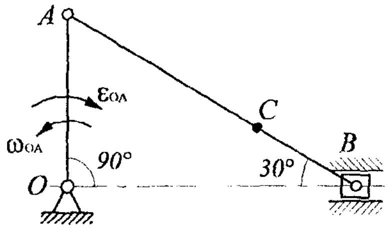
2



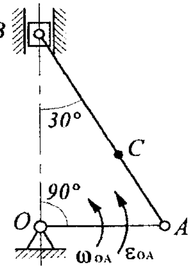
3



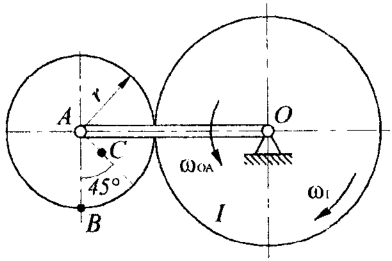
4



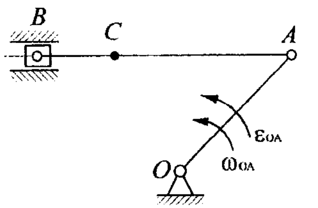
5



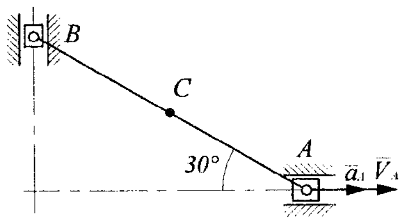
6



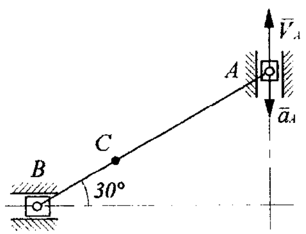
7



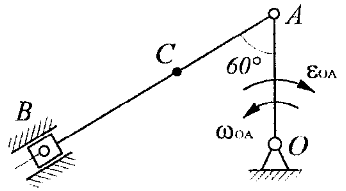
8



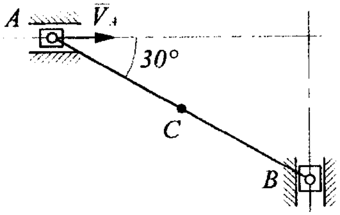
9



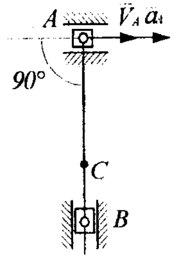
10



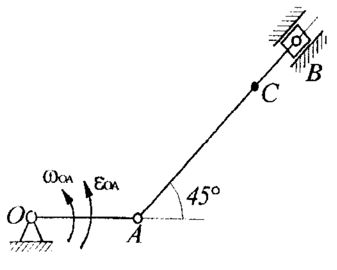
11



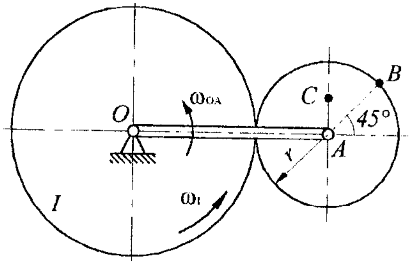
12



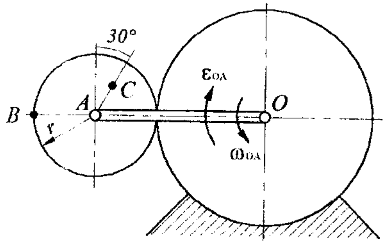
13



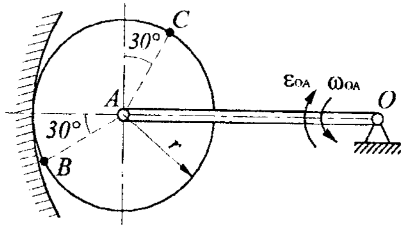
14



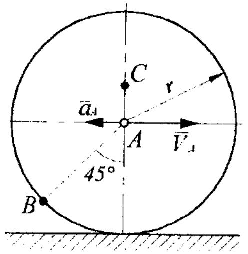
15



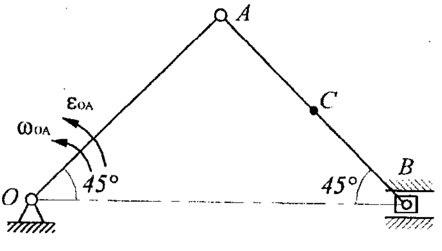
16



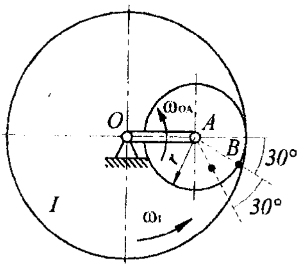
17



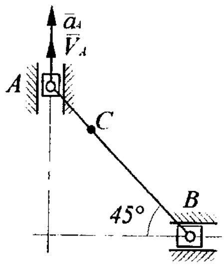
18



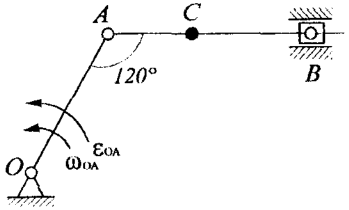
19



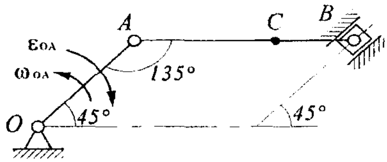
20



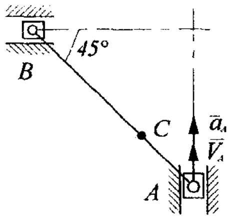
21



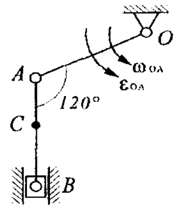
22



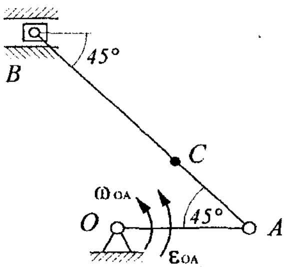
23



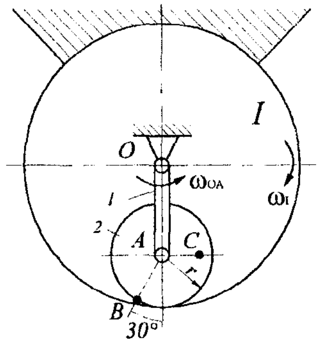
24



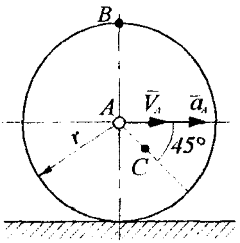
25



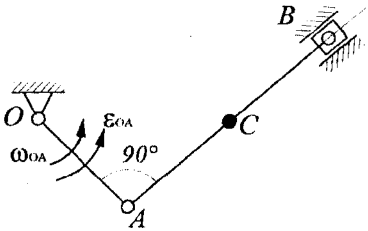
26



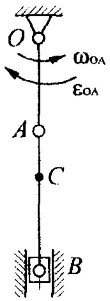
27



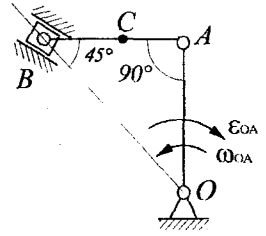
28



29



30



СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

До сих пор мы рассматривали движение точки (или тела) по отношению к одной заданной системе отсчета, которую считали условно неподвижной.

Однако в ряде случаев при решении задач механики оказывается удобным рассматривать движение точки (или тела) одновременно по отношению к двум системам отсчета, из которых одна считается условно неподвижной, а другая определенным образом движется по отношению к первой.

Основные понятия

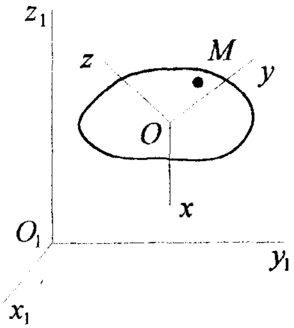


Рис. 26

Сложным (*составным*) называется такое движение, при котором точка движется по отношению к системе отсчета, которая в то же время вместе с точкой движется относительно другой условно неподвижной системы отсчета.

Пусть точка M движется по отношению к системе отсчета $Oxyz$, которая в свою очередь движется относительно условно неподвижной системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$.

Движение точки M по отношению к подвижной системе отсчета называется *относительным*.

Движение подвижной системы отсчета по отношению к неподвижной системе отсчета называется *переносным*.

Движение точки M по отношению к неподвижной системе отсчета называется *абсолютным*.

Подвижная система отсчета (тело) совершает произвольное движение (поступательное, вращательное, плоскопараллельное и другие).

Скорость и ускорение точки относительно неподвижной системы координат будем называть *абсолютной скоростью и абсолютным ускорением* $\left(\bar{V},\ \bar{a}\right)$.

Скорость и ускорение точки относительно подвижной системы координат будем называть *относительной скоростью и относительным ускорением* $\left(\bar{V}_r,\ \bar{a}_r\right)$.

Переносной скоростью и переносным ускорением будем называть скорость и ускорение той точки подвижной системы координат (тела) с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка $\left(\bar{V}_e,\ \bar{a}_e\right)$ относительно неподвижной системы отсчета..

Теорема о сложении скоростей

Абсолютная скорость точки M равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей этой точки.

$$\bar{V} = \bar{V}_e + \bar{V}_r. \qquad (58)$$

Модуль и направление абсолютной скорости можно определить одним из способов:

1) пользуясь теоремой косинусов

$$V = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_e V_r \cos(\bar{V}_e,\ \bar{V}_r)}.$$

2) пользуясь теоремой синусов

$$\frac{V}{\sin(\overline{V}_e, \overline{V}_r)} = \frac{V_e}{\sin(\overline{V}, \overline{V}_r)} = \frac{V_r}{\sin(\overline{V}, \overline{V}_e)}$$

3) аналитически:
проектированием равенства (58) на взаимно перпендикулярные оси *xyz*:

$$\begin{cases} V_x = V_{e_x} + V_{r_x} \\ V_y = V_{e_y} + V_{r_y} \Rightarrow V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}\,. \\ V_z = V_{e_z} + V_{r_z} \end{cases}$$

Теорема Кориолиса

При непоступательном переносном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме переносного, относительного и кориолисова ускорений.

$$\overline{a} = \overline{a}_e + \overline{a}_r + \overline{a}_C\,,$$

$$\overline{a}_C = 2\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r\,,$$

где $\overline{\omega}_e$ – угловая скорость переносного вращения,

$\overline{a}_C$ – кориолисово ускорение.

Замечание: В случае поступательного переносного движения: $\overline{\omega}_e = 0 \Rightarrow \overline{a}_C = 0 \Rightarrow$ абсолютное ускорение точки находится как сумма ее переносного и относительного ускорений.

Ускорение Кориолиса

$\overline{a}_C = 2\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r$, $a_C = 2\omega_e V_r \sin(\overline{\omega}_e, \overline{V}_r)$ т.к это ускорение появляется в случае вращения подвижной системы отсчета, его еще называют поворотным ускорением.

Направление вектора $\overline{a}_C$ можно определить следующими правилами:

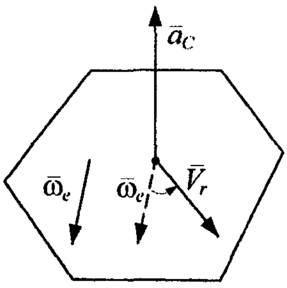


Рис. 27

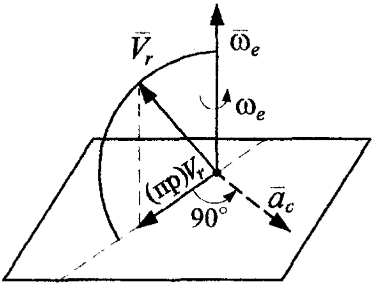


Рис. 28

1. По правилу векторного произведения: $\bar{a}_C$ направлен, как и вектор $\bar{\omega}_e \times \bar{V}_r$, т.е. перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\bar{\omega}_e$ и $\bar{V}_r$ в ту сторону, откуда кратчайший поворот от $\bar{\omega}_e$ к $\bar{V}_r$ виден против часовой стрелки.
2. По правилу Жуковского: для определения направления $\bar{a}_C$ надо проекцию вектора относительной скорости $\bar{V}_r$ на плоскость (пр. $\bar{V}_r$), перпендикулярную вектору угловой скорости $\bar{\omega}_e$, (пр. $\bar{V}_r$), повернуть на угол 90° вокруг оси вращения в направлении (переносного) вращения тела, т.е. по ω_e.

Физический смысл $\bar{a}_C$:

Ускорение Кориолиса характеризует
1) изменение относительной скорости точки, вызванное переносным движением;
2) изменение переносной скорости точки вследствие ее относительного движения.

Ускорение Кориолиса равно нулю в следующих случаях:

а) когда $\bar{\omega}_e = 0$ (переносное движение является поступательным) $\bar{a}_C = 0$, т.к. $\bar{\omega}_e = 0$;

б) в момент времени, когда $\bar{V}_r = 0$ (в те моменты времени, когда проходит изменение направления относительного движения или в случае относительного покоя;

в) $\bar{\omega}_e \parallel \bar{V}_r$.

$$a_C = 2\omega_e V_r \sin(\overline{\omega}_e, \overline{V}_r) = |\sin(\overline{\omega}_e, \overline{V}_r) = \sin 180^\circ = 0| = 0\,.$$

ЗАДАНИЕ К5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АБСОЛЮТНОЙ СКОРОСТИ И АБСОЛЮТНОГО УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ В СЛУЧАЕ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСНОГО ДВИЖЕНИЯ

По заданным уравнениям относительного движения точки M и переносного движения тела D для момента времени $t = t_1$ определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M.

Схемы механизмов показаны на рис., а необходимые для расчета данные приведены в таблице 5.

Примечание: В вариантах 1, 5, 6, 13-16, 23 ,25, 30 OM– дуга окружности; для каждого варианта положение точки M на схеме соответствует положительному значению s_r; на схемах 14 и 30 OM– дуга, соответствующая меньшему центральному углу.

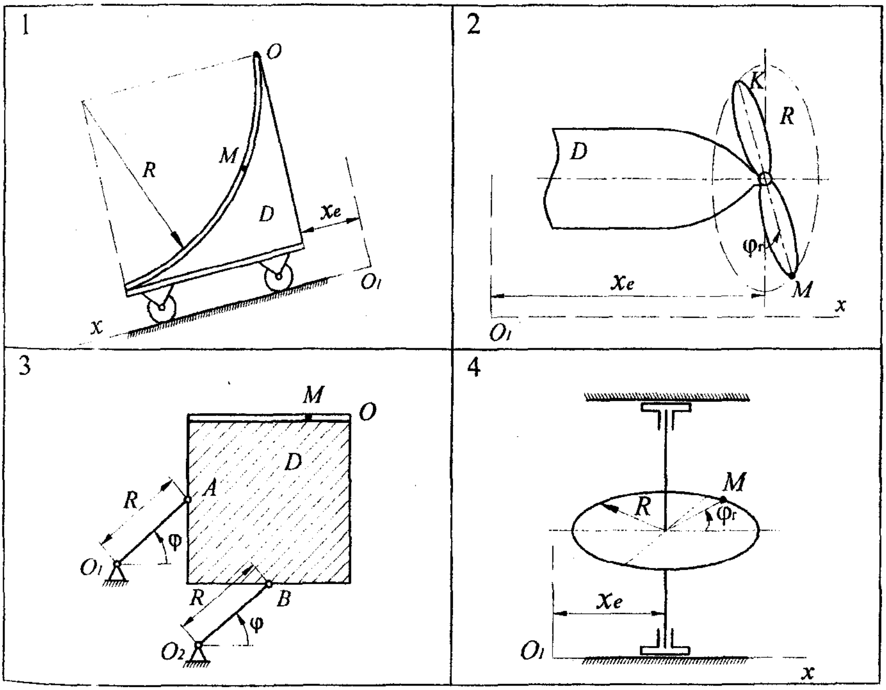


Таблица 5

№ вариантов	$x_e = f_1(t)$, см	$\varphi = f_2(t)$, рад	Уравнения относительного движения: точки M $OM = s_r = f_3(t)$, см	Уравнения относительного движения: тела K $\varphi_r = f_4(t)$, рад	t_1, с$^{-1}$	R, см	Примечание
1	$t^3 + 4t$	–	$4\pi t^2$	–	2	48	
2	$60t^2$	–	–	$0{,}036\pi t^3$	5/3	80	
3	–	$\pi t^2 / 24$	$2t^3+3t$	–	2	15	
4	$2t + 0{,}2t^3$	–	–	$\pi t^3 / 12$	2	20	
5	$7t + 4t^3$	–	$20\pi t^2$	–	1/2	30	
6	$20[1 + +\sin\cdot$ $\cdot(\pi t / 3)]$	–	$\pi(2t^3 + 3t)$	–	1	30	
7	$20t^2 + 3t$	–	–	$\pi t^3 / 3$	1	20	
8	–	$1{,}5\pi t^2$	$9t^3 + 5t$	–	1/3	25	
9	–	$8\pi t^3 / 3$	$16t^2 - 2t + 2$	–	½	30	

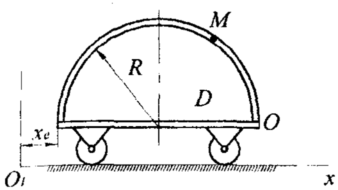
Продолжение табл. 5

10	$250t^2$	–	–	$3\pi t^2$	5/3	60	
11	$-8t+3t^2$	–	$4\sin(\pi t/3)$	-	2	–	
12	–	$4\pi t^2/27$	$2t^3$	–	3/2	25	
13	$4(t+4t^2)$	–	$10\pi\sin(\pi t/6)$	–	1	30	
14	$20[\cos(\pi t/8)+$ $+1]$	–	$5\pi t^2$	–	2	24	
15	$10t^2-0{,}6t^3$	–	$2\pi t^2$	–	3	54	
16	–	$\pi t^2/8$	$5\pi t^3/4$	–	2	30	$O_1O=O_2A=40$ см
17	–	$\pi t^2/24$	$3t^3+5t$	–	2	20	
18	–	$2\pi t^2/3$	$4t^3+9t$	–	½	20	
19	$20t^2+15t$	–	–	$(\pi/3)\cos(2\pi t)$	1/6	15	
20	$25[1+\sin\cdot$ $\cdot(\pi t/3)]$	–	–	$2\pi t^2/3$	1	40	
21	–	$2\pi t^2/3$	$1{,}5t+10t^3$	–	½	20	

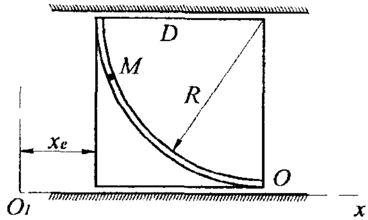
Окончание табл. 5

22	$10+3\sin\cdot$ $\cdot(\pi t/2)$	–	–	$0{,}24\pi t^2$	5/3	30	
23	–	$5\pi t^3/6$	$6\pi t^2$	–	1	18	$O_1O=O_2A=20$ см
24	$20[1+\sin\cdot$ $\cdot(\pi t/2)]$	–	–	$0{,}36\pi t^2$	5/6	50	
25	$20t^2+7t$	–	$5\pi t^3/3$	–	2	40	
26	–	$\pi t^2/12$	t^3+2t	–	2	35	
27	$3t+0{,}27t^3$	–	–	$0{,}15\pi t^2$	10/3	15	
28	$18t^2+2t$	–	–	$(5\pi/6)\sin(\pi t/12)$	2	20	
29	$50t^2$	–	–	$5\pi t^3/48$	2	75	
30	$50[1-\cos\cdot$ $\cdot(\pi t/2)]$	–	$12\pi t^2$	–	5/6	25	

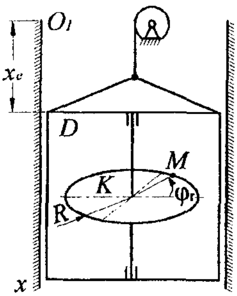
5



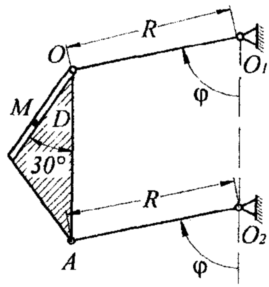
6



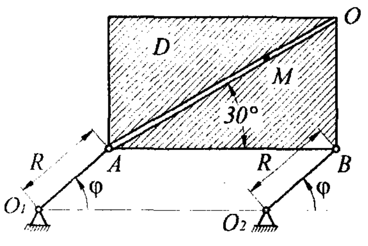
7



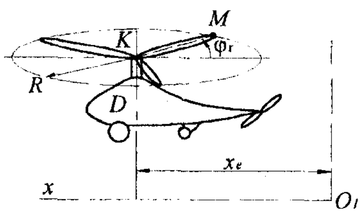
8



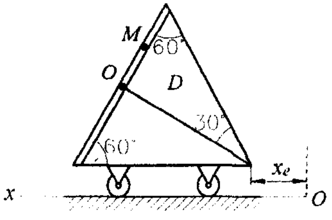
9



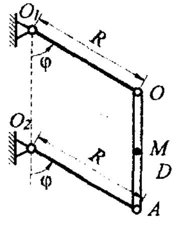
10



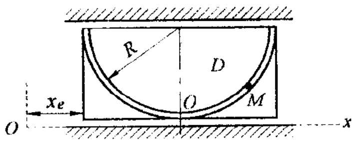
11



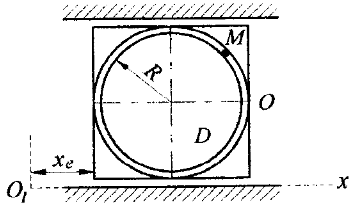
12



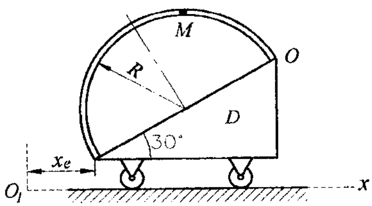
13



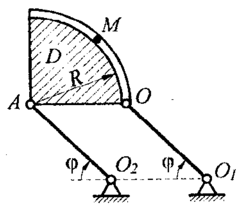
14



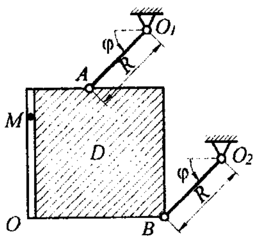
15



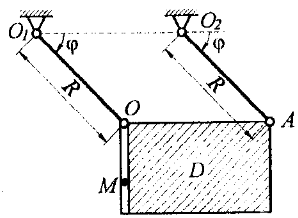
16



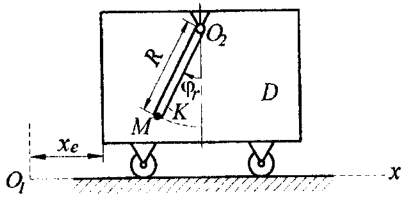
17



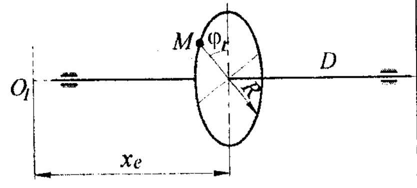
18



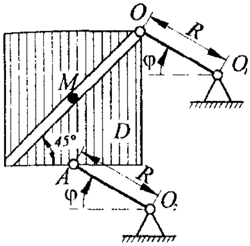
19



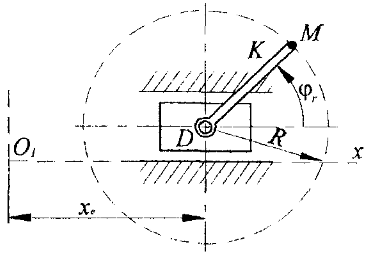
20



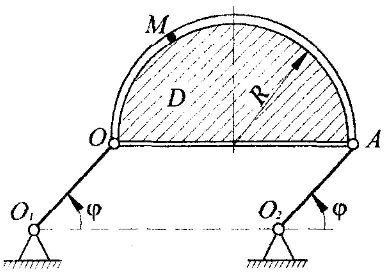
21



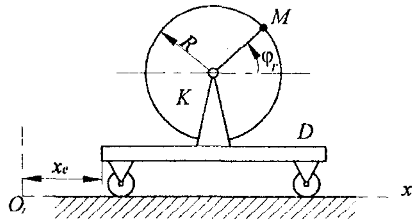
22



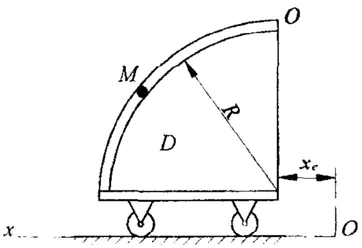
23



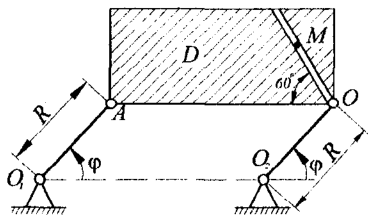
24



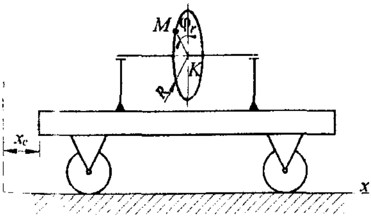
25



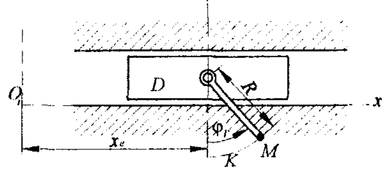
26



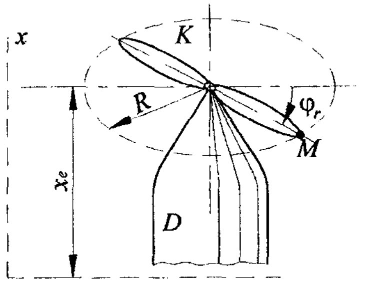
27



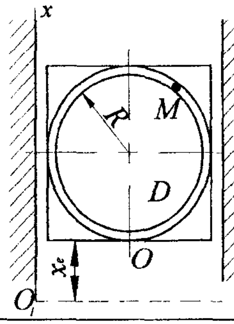
28



29



30



ЗАДАНИЕ К6. ИССЛЕДОВАНИЕ СЛОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Диск радиусом R (варианты 1-12, 23, 24) или квадрат со стороной a (варианты 13-22) вращаются согласно уравнению $\varphi = \varphi(t)$ вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно к плоскости диска или квадрата. Тока M движется по желобу по закону $S = S(t)$. В момент времени t определить для точки M:

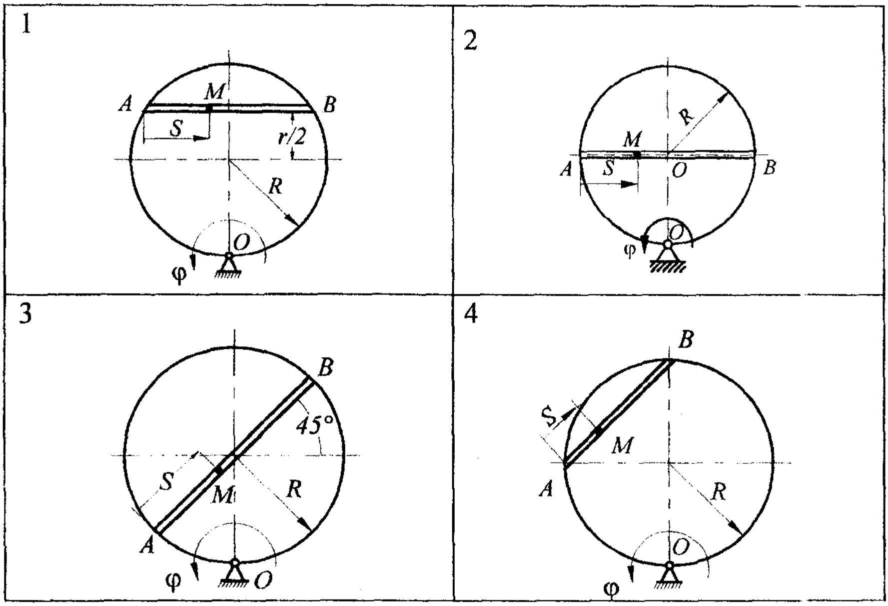
1) относительную скорость;
2) абсолютную скорость;
3) относительное ускорение;
4) переносное ускорение;
5) ускорение Кориолиса.

Таблица 6

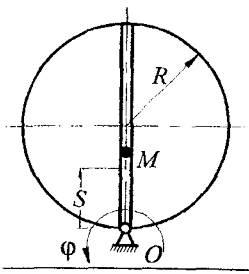
№ варианта	Уравнение движения диска R, рад	Движение точки M, см	R, см	a, см	t, с
1	$\varphi = 5t - 4t^2$	$AM = S = \frac{\sqrt{3}}{2} R\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}t\right)$	5	–	2
2	$\varphi = 4t + 1{,}6t^2$	$AM = S = R\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}t\right)$	25	–	2
3	$\varphi = 0{,}6t^2$	$AM = S = \frac{\sqrt{3}}{2} R\left(1 + \sin\frac{\pi}{4}t\right)$	40	–	2
4	$\varphi = t^3$	$AM = S = \frac{\sqrt{2}}{2} R\left(1 + \cos\frac{\pi}{6}t\right)$	50	–	3

5	$\varphi = t^3 - 5t$	$OM = S = R\,(1 - \cos\frac{\pi}{3}t)$	25	–	3
6	$\varphi = 2t - t^2$	$AM = S = \frac{\sqrt{3}}{2}R\,(1 + \sin\frac{\pi}{4}t)$	50	–	2
7	$\varphi = 10t - 0{,}1t^2$	$OM = S = \pi R\,(1 - \cos\frac{\pi}{2}t)$	25	–	1
8	$\varphi = 8t^2 - 3t$	$AM = S = R\,(1 - \cos\frac{\pi}{2}t)$	30	–	2
9	$\varphi = 2t^3 - t^2$	$AM = S = \frac{\sqrt{3}}{2}R\,(1 + \sin\frac{\pi}{2}t)$	50	–	2
10	$\varphi = 0{,}8t^3$	$AM = S = \frac{\sqrt{3}}{2}R\,(1 - \sin\frac{\pi}{2}t)$	40	–	3
11	$\varphi = t^3 - 5t$	$AM = S = \frac{\sqrt{3}}{2}R\,(1 + \cos\frac{\pi}{4}t)$	30	–	4
12	$\varphi = 2t^2 - 0{,}5t$	$AM = S = \frac{\sqrt{3}}{2}R\,(1 - \cos\frac{\pi}{2}t)$	25	–	0
13	$\varphi = 0{,}6t^2$	$CM = S = \frac{a}{2}\,(1 - \sin\frac{\pi}{2}t)$	–	30	3
14	$\varphi = t^2$	$AM = S = \frac{a}{2}\,(1 - \cos\frac{\pi}{3}t)$	–	30	3
15	$\varphi = 3t - t^2$	$AM = S = \frac{a}{2}\,(1 + \sin\frac{\pi}{4}t)$	–	40	2
16	$\varphi = 0{,}5t^2$	$CM = S = \frac{a}{2}\,(1 - \cos\frac{\pi}{2}t)$	–	35	2
17	$\varphi = 0{,}3t^2$	$OM = S = \frac{a}{2}\,(1 - \cos\frac{\pi}{6}t)$	–	30	3
18	$\varphi = 2t - t^3$	$CM = S = \frac{a}{2}\,(1 + \cos\frac{\pi}{6}t)$	–	25	3
19	$\varphi = 3t - t^2$	$DM = S = \frac{a}{2}\,(1 + \sin\frac{\pi}{6}t)$	–	40	3
20	$\varphi = 2t - t^2/18$	$DM = S = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(1 + \sin\frac{\pi}{4}t)$	–	35	6

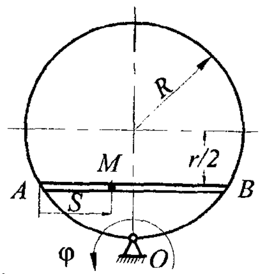
21	$\varphi = 1{,}4t^3$	$AM = S = \pi R\,(1 + \cos\pi/3t)$	50	–	1
22	$\varphi = 1 - 4t^2$	$AM = S = R\,(1 - \sin\frac{\pi}{2}t)$	45	–	3
23	$\varphi = 0{,}1t^3$	$AM = S = \frac{R}{2}\,(1 + \cos\frac{\pi}{2}t)$	50	–	4
24	$\varphi = 0{,}2t^2$	$AM = S = \frac{\sqrt{3}}{2}R\,(1 - \sin\frac{\pi}{2}t)$	40	–	3
25	$\varphi = 12 - 3t^2$	$OM = S = \pi R\,(1 - \cos\pi t)$	30	–	1
26	$\varphi = 6t - t^2$	$AM = S = R\,(1 + \sin\pi/8t)$	25	–	4
27	$\varphi = 12 - 3t^2$	$AM = S = \pi R\,(1 - \cos\pi t)$	30	–	1
28	$\varphi = 6t - t^2$	$AM = S = R\,(1 + \sin\frac{\pi}{2}t)$	25	–	4
29	$\varphi = t - t^2$	$AM = S = \pi R\,(1 + \sin\frac{\pi}{2}t)$	25	–	3
30	$\varphi = 2t\,(1 + t)$	$AM = S = \pi R\,(1 - \cos\pi/2t)$	50	–	4



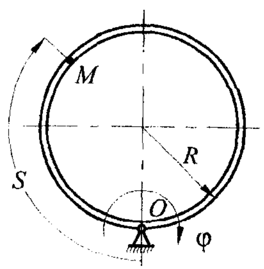
5



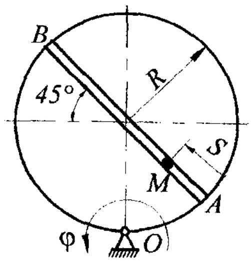
6



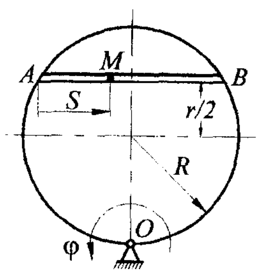
7



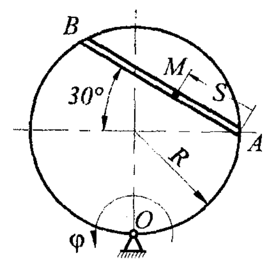
8



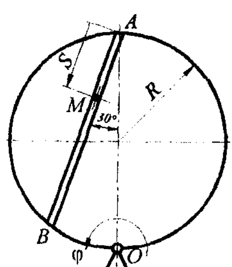
9



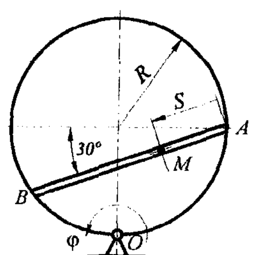
10



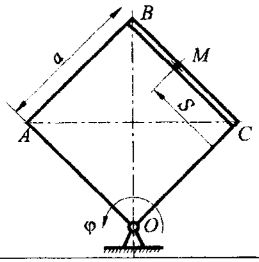
11



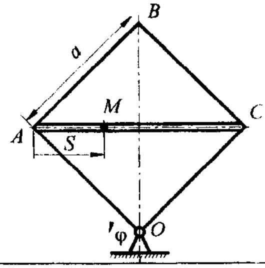
12



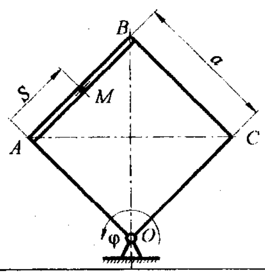
13



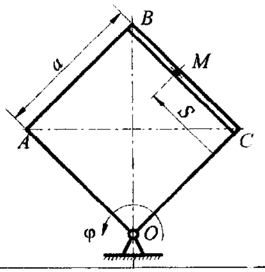
14



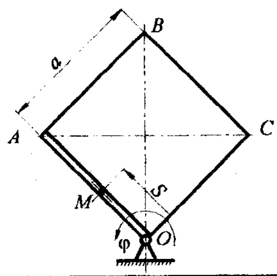
15



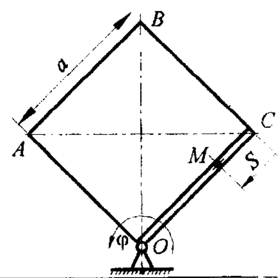
16



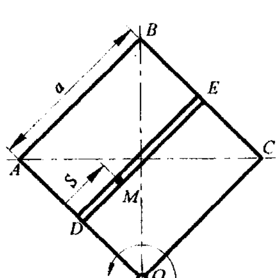
17



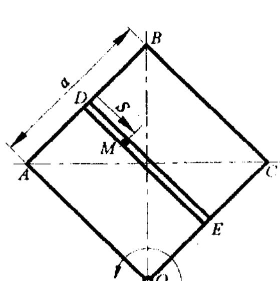
18



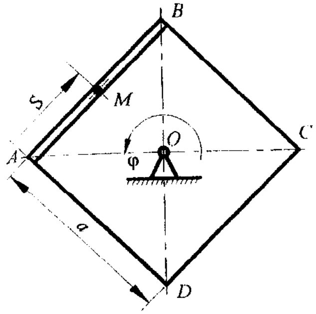
19



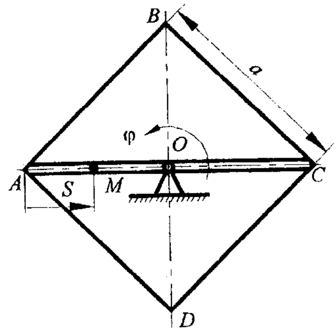
20



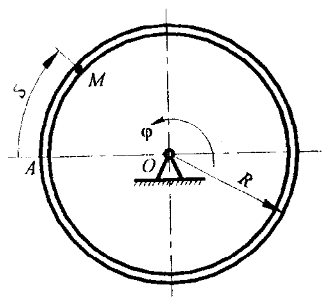
21



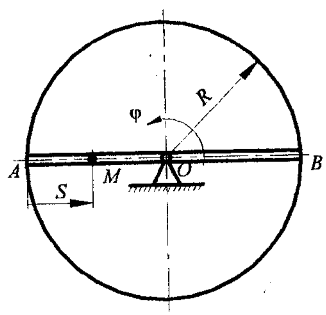
22



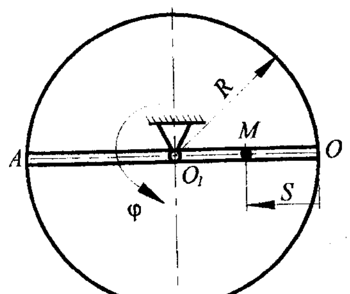
23



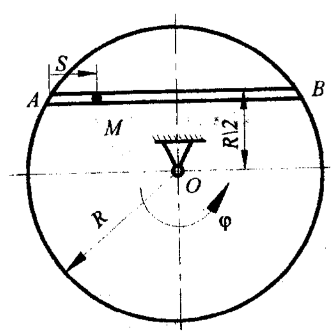
24

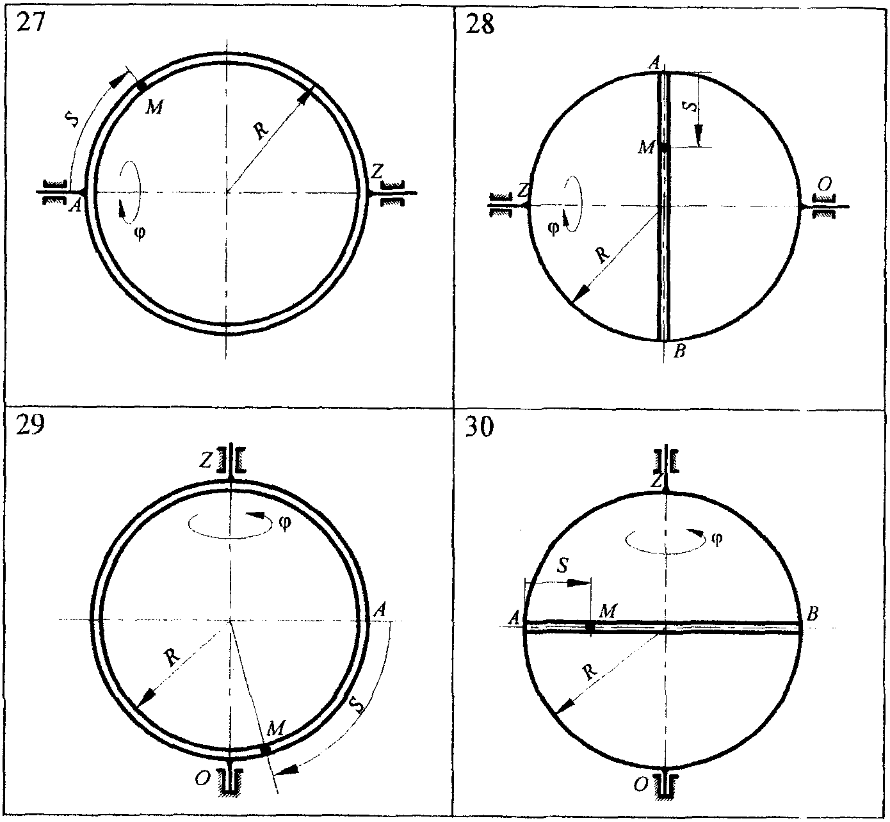


25



26





ЗАДАНИЕ К7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АБСОЛЮТНОЙ СКОРОСТИ И АБСОЛЮТНОГО УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ В СЛУЧАЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСНОГО ДВИЖЕНИЯ

По заданным уравнениям относительного движения точки M и переносного движения тела D определить для момента времени $t = t_1$ абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M.

Схемы механизмов показаны на рис., а необходимые для расчета данные приведены в таблице 7.

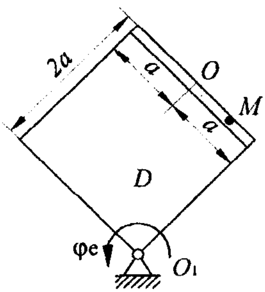
Таблица 7

№ варианта	Уравнение движения тела D $\varphi_e = f_1(t)$, рад	Уравнение относительного движения точки M $OM=s_r=f_2(t)$, см	t_1, с	R, см	a, см	α, град
1	$2t^3 - t^2$	$18\sin(\pi t/4)$	2/3	–	25	–
2	$0{,}4t^2 + t$	$20\sin(\pi t)$	5/3	20	–	–
3	$2t + 0{,}5t^2$	$6t^3$	2	–	30	–
4	$0{,}6t^2$	$10\sin(\pi t/6)$	1	–	–	60
5	$3t - 0{,}5t^3$	$40\pi\cos(\pi t/6)$	2	30	–	–
6	$0{,}75t + 1{,}5t^2$	$150\pi t^2$	1/6	25	–	–
7	$0{,}5t^2$	$20\cos(2\pi t)$	3/8	–	40	60
8	$t^3 - 5t$	$6(t + 0{,}5t^2)$	2	–	–	30
9	$4t + 1{,}6t^2$	$10 + 10\sin(2\pi t)$	1/8	–	–	–
10	$1{,}2t - t^2$	$20\pi\cos(\pi t/4)$	4/3	20	20	–
11	$2t^2 - 0{,}5t$	$25\sin(\pi t/3)$	4	–	25	–
12	$5t - 4t^2$	$15\pi t^3/8$	2	30	30	–
13	$8t^2 - 3t$	$120\pi t^2$	1/3	40	–	–
14	$4t - 2t^2$	$3 + 14\sin(\pi t)$	2/3	–	–	30
15	$0{,}2t^3 + t$	$5\sqrt{2}(t^2 + t)$	2	–	60	45
16	$t - 0{,}5t^2$	$20\sin(\pi t)$	1/3	–	20	–
17	$0{,}5t^2$	$8t^3 + 2t$	1	–	$4\sqrt{5}$	–
18	$8t - t^2$	$10t + t^3$	2	–	–	60
19	$t + 3t^2$	$6t + 4t^3$	2	40	–	–

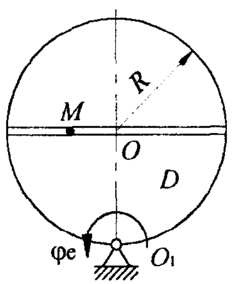
20	$6t+t^2$	$30\pi\cos(\pi t/6)$	3	60	–	–
21	$2t-4t^2$	$25\pi(t+t^2)$	1/2	25	–	–
22	$4t-0{,}2t^2$	$10\pi\sin(\pi t/4)$	2/3	30	–	–
23	$2t-0{,}25t^2$	$3t^2+4t$	2	–	–	30
24	$2t-0{,}3t^2$	$75\pi(0{,}1t+0{,}3t^3)$	1	30	–	–
25	$10t-0{,}1t^2$	$15\sin(\pi t/3)$	5	–	–	–
26	$-2\pi t^2$	$8\cos(\pi t/2)$	3/2	–	–	45
27	$t-0{,}5t^3$	$10\sqrt{2}\pi\cos(2\pi t)$	1/8	30	–	–
28	$2t^3-5t$	$2{,}5\pi t^2$	2	40	–	–
29	$0{,}6t^2$	$6\sqrt{6}\sin(\pi t/16)$	4	36	–	30
30	$2t^2-3t$	$5\sqrt{3}t^3/3$	2	20	–	30

Примечание: В вариантах 5, 6, 10, 12, 13, 20-22, 24, 27, 28 *OM*– дуга окружности; для каждого варианта положение точки *M* на схеме соответствует положительному значению s_r; на схемах 5, 10, 12, 21, 24, 27 *OM*– дуга, соответствующая меньшему центральному углу.

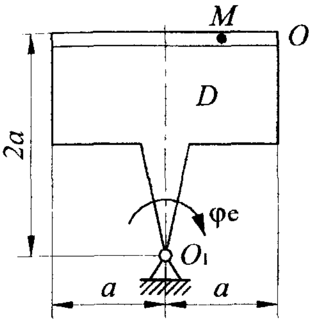
1



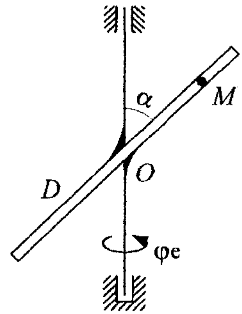
2



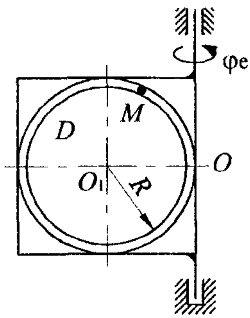
3



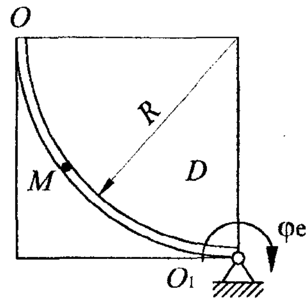
4



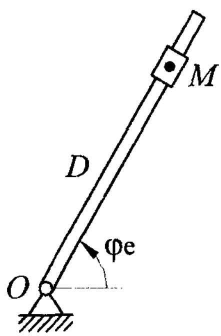
5



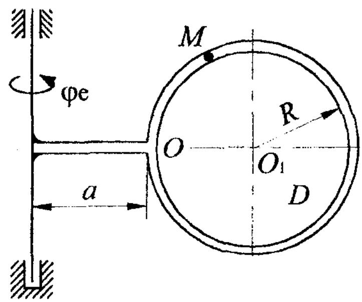
6



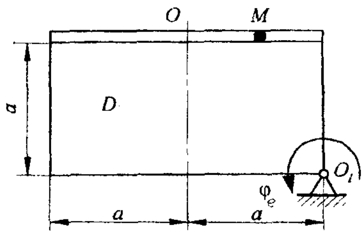
9



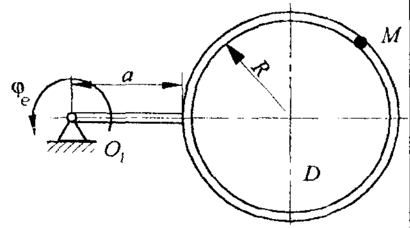
10



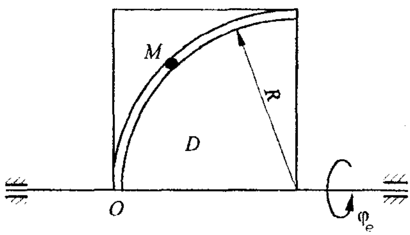
11



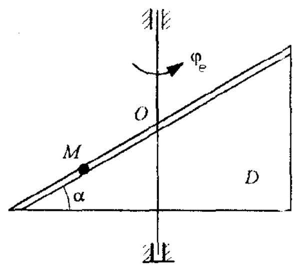
12



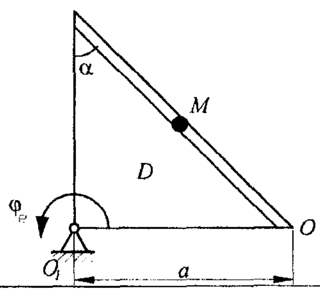
13



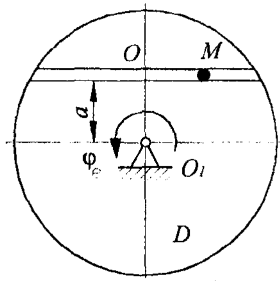
14



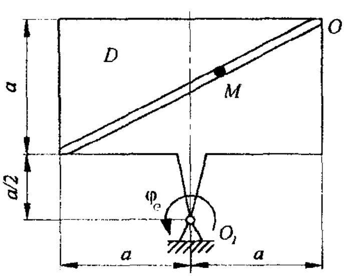
15



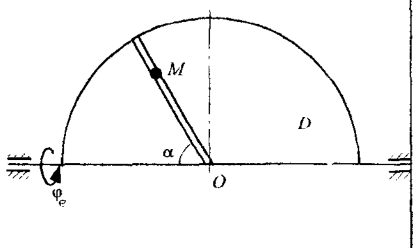
16



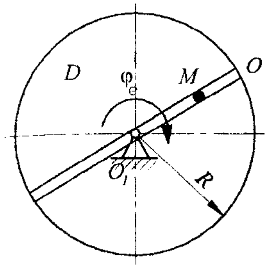
17



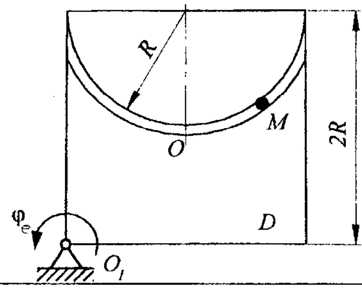
18



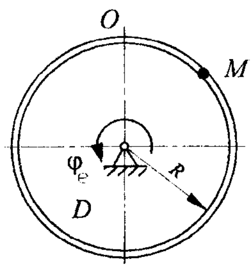
19



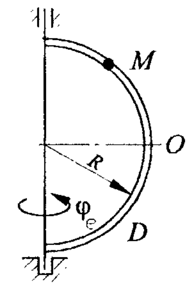
20



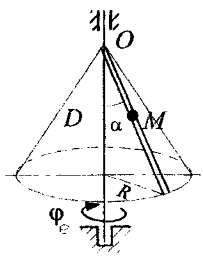
21



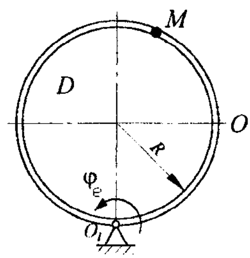
22



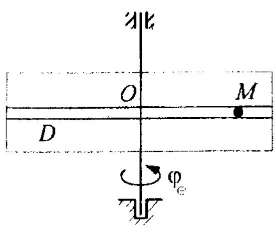
23



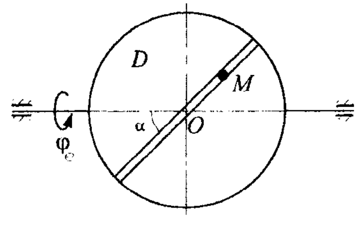
24

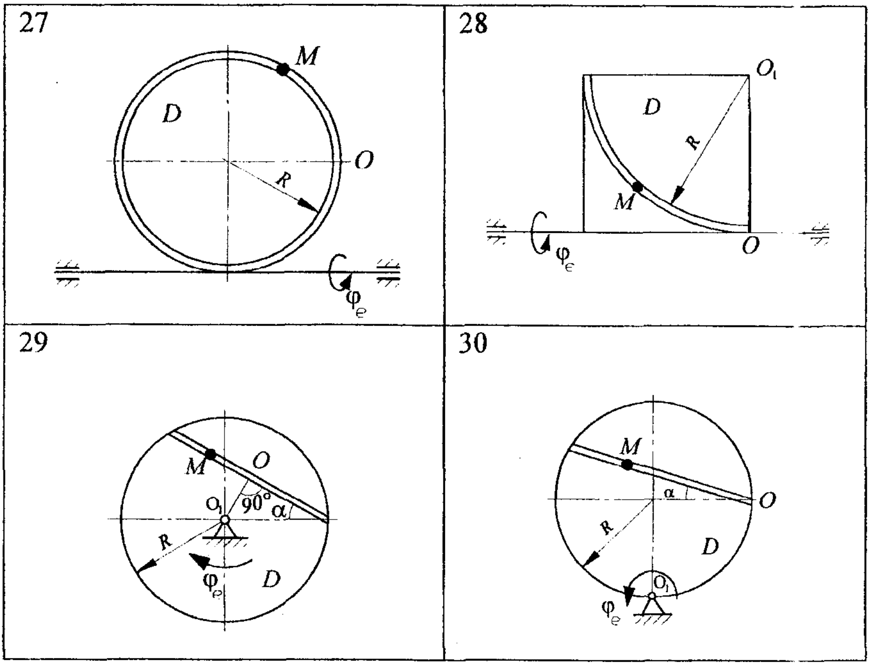


25



26





Кинематика планетарных и дифференциальных цилиндрических зубчатых передач

Планетарной зубчатой передачей называется передача у которой одно центральное колесо неподвижно, а остальные колеса находятся в последовательном зацеплении и приводятся в движение за счет того, что их оси установлены на вращающемся кривошипе, ось вращения которого совпадает с осью неподвижного колеса.

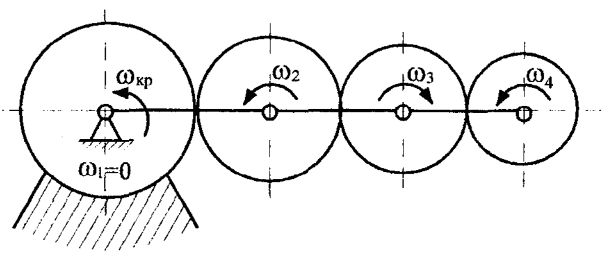


Рис. 29

Если в планетарной передаче сообщить независимое от кривошипа вращательное движение и центральному колесу, то такая зубчатая передача называется *дифференциальной*.

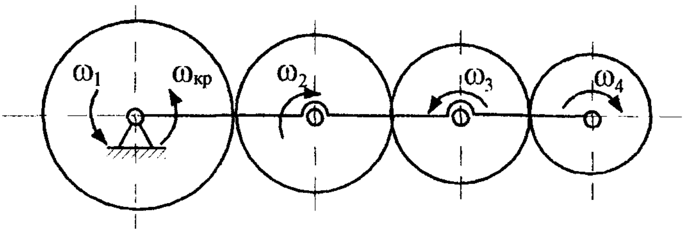


Рис. 30

Соединение зубчатых колес, у которых все зубчатые колеса вращаются относительно неподвижных осей, называются *рядовой зубчатой передачей*.

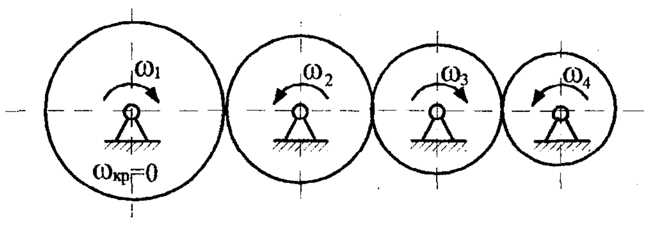


Рис. 31

Всякая рядовая передача характеризуется *передаточным числом* U, под которым понимают отношение угловой скорости ведущего колеса к угловой скорости ведомого:

$$U_{1n} = \left(\frac{\omega_1}{\omega_n}\right)(-1)^m, \qquad (59)$$

где m – число внешних зацеплений.

Определение кинематических характеристик для звеньев планетарных или дифференциальных передач производится следующими способами:

1. **Способ сложения векторов угловых скоростей** вращательных движений: переносного, относительного и абсолютного.

При данном способе применяется геометрическое равенство

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r, \tag{60}$$

где $\bar{\omega}$ – вектор абсолютной угловой скорости;

$\bar{\omega}_e$ – вектор переносной угловой скорости;

$\bar{\omega}_r$ – вектор относительной угловой скорости.

Если оси вращения валов параллельны, то геометрическое равенство (60) заменяют алгебраическим

$$\omega_a = \omega_e + \omega_r .$$

Положение вектора абсолютной угловой скорости определяется по правилам сложения параллельных векторов. Вектор абсолютной угловой скорости совпадает по направлению с мгновенной осью вращения.

2. **Способ использования мгновенного центра скоростей.** В том случае, если положение МЦС известно или может быть определено из условий задачи, величину и направление абсолютной угловой скорости ω_a звена можно получить по формуле

$$\omega = \omega_a = \frac{V_a}{h},$$

где h – расстояние от точки до МЦС,

V_a – абсолютная скорость.

Величина относительной угловой скорости определяется из равенства (60).

3. **Способ «остановки» или метод Виллиса.**

Данный способ является наиболее удобным для определения абсолютных и относительных угловых скоростей элементов дифференциальных и планетарных передач.

Он заключается в преобразовании рассматриваемой зубчатой передачи в рядовую зубчатую передачу и в использовании соответствующих кинематических соотношений.

Для этого мысленно останавливают кривошип планетарной или дифференциальной передачи, сообщив всем звеньям передачи угловую скорость равную угловой скорости кривошипа, но обратно направленную. Тогда угловая скорость кривошипа будет равна нулю, а угловые скорости зубчатых колес будут равны разностям своих начальных угловых скоростей и угловой скорости кривошипа.

После мысленной остановки кривошипа отношение угловой скорости ведущего колеса к угловой скорости n-го ведомого колеса равно соответствующему передаточному числу U_{1n}, получаемому как и для рядового зубчатого зацепления, т.е.

$$\frac{\omega_1 - \omega_{\text{кр}}}{\omega_n - \omega_{\text{кр}}} = U_{1n}(-1)^m, \qquad (61)$$

ω_n – искомая угловая скорость n-го колеса,

ω_1 – угловая скорость ведущего колеса,

$\omega_{\text{кр}}$ – угловая скорость кривошипа,

U_{1n} – передаточное число зубчатой передачи

m – число внешних зацеплений.

Формула (61) называется формулой Виллиса.

Формула Виллиса пригодна для всех видов зубчатых передач, например

при $\omega_1 \neq 0$, $\omega_{\text{кр}} \neq 0$ – дифференциальная передача

при $\omega_1 = 0$, $\omega_{\text{кр}} \neq 0$ – планетарная передача

при $\omega_1 \neq 0$, $\omega_{\text{кр}} = 0$ – рядовая передача.

ЗАДАНИЕ К9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ ЗВЕНЬЕВ ПЛАНЕТАРНОГО РЕДУКТОРА С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ КОЛЕСАМИ

Найти угловые скорости ведомого вала II и сателлитов редуктора. Схемы редукторов показаны на рис., а необходимые для расчета данные приведены в таблице 8.

Таблица 8

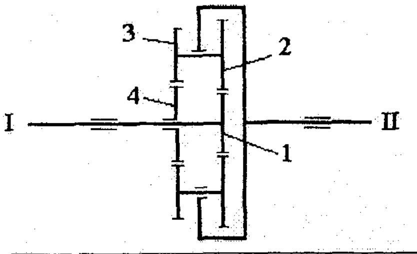
№ варианта	Радиус, см						Частота вращения, об/мин				
	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	n_I	n_1	n_4	n_5	n_6
1	15	20	15	20	–	–	2000	–	–400	–	–
2	30	30	15	45	–	–	3500	–	–	–	–
3	50	15	20	10	10	–	1000	–300	–	–200	–
4	20	30	20	120	–	–	100	–	–	–	–
5	20	25	15	30	–	10	1600	–	–	–	500
6	80	15	35	30	–	–	1200	–200	500	–	–
7	50	10	15	55	–	–	800	–	–	–	–
8	20	15	25	60	–	–	3000	–	–	300	–
9	60	10	20	70	20	15	600	–	–	–	–600
10	90	15	15	30	50	10	200	–	–	–	400
11	25	20	65	15	15	–	2500	–	–	–300	–
12	30	15	30	75	–	–	3300	–	700	–	–
13	20	30	15	35	–	–	300	1000	–	–	–
14	100	30	20	50	–	–	400	–500	–	-	–
15	15	5	9	11	–	–	2700	–	–	200	–
16	75	30	20	25	15	15	1200	–	–	-	– 3000
17	75	20	15	70	15	20	500	–	–	–	1600 -
18	20	12	16	48	18	4	1100	–	–	–	– 2000
19	15	7	5	17	–	–	700	–	200	–	–
20	10	10	12	54	–	–	2000	–	–100	–	–
21	15	10	10	55	20	10	3500	–	–	–	500
22	50	10	15	55	–	–	300	–	–300	–	–
23	15	30	15	60	–	–	2400	–	–	400	–
24	24	12	48	12	8	–	500	–	–	2300	–
25	40	10	20	10	–	–	600	–	–	–200	–
26	50	15	10	25	–	–	500	–300	–	–	–
27	30	10	15	55	6	4	200	–	–	–	1000

Окончание табл. 8

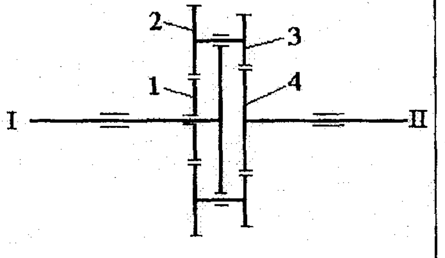
28	40	10	20	50	–	–	400	–	–	–300	-
29	15	15	10	40	10	6	1300	–	–	–	1300
30	50	10	10	50	–	–	400	400	–	–	–

П р и м е ч а н и е. Положительный и отрицательный знаки у угловых скоростей (частот вращения) означают соответственно направление вращения против хода и по ходу часовой стрелки, если смотреть со стороны ведущего вала I.

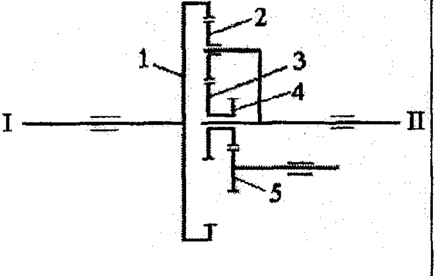
1



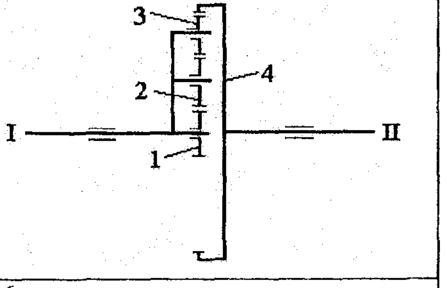
2



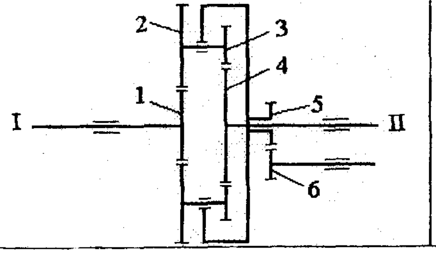
3



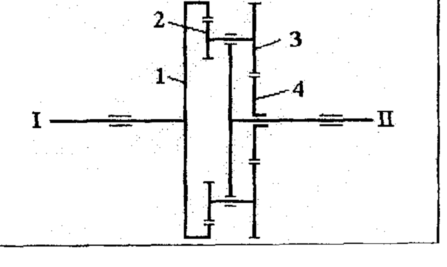
4



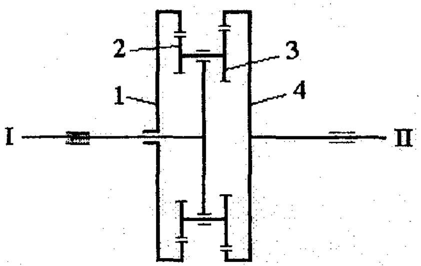
5



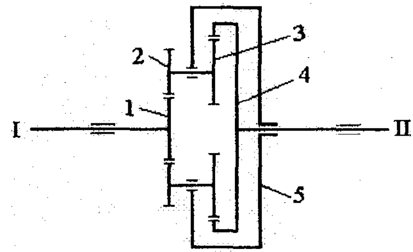
6



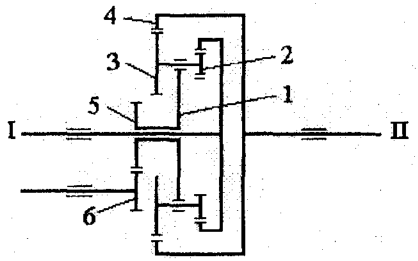
7



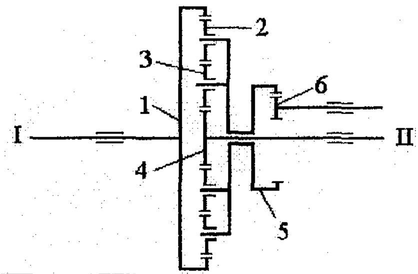
8



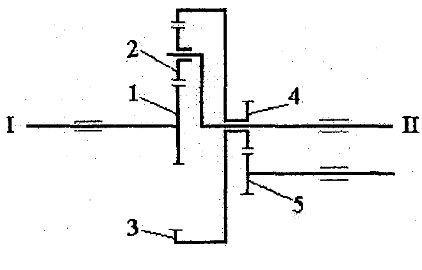
9



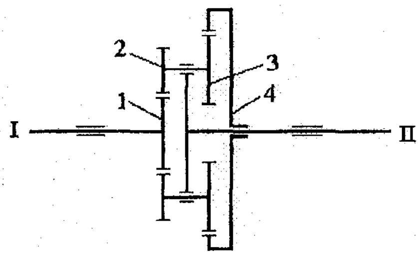
10



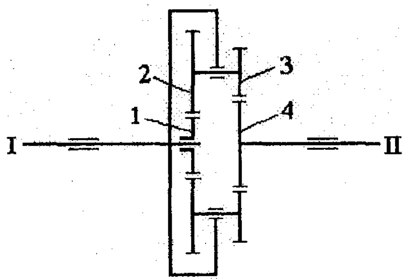
11



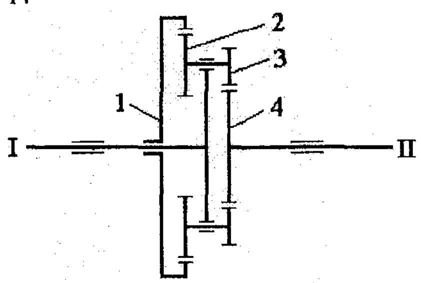
12



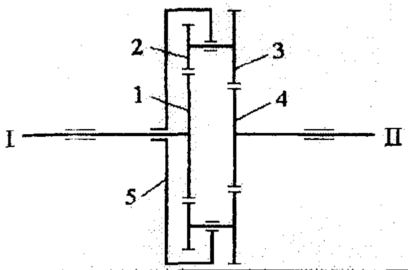
13



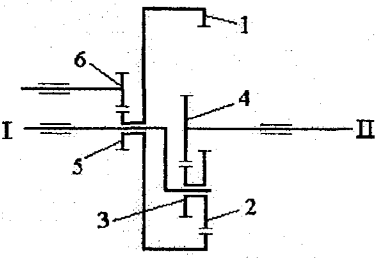
14



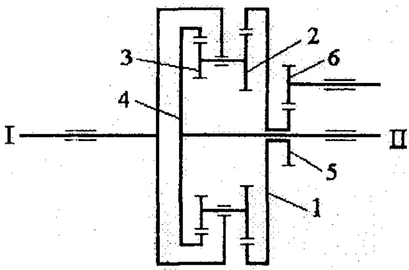
15



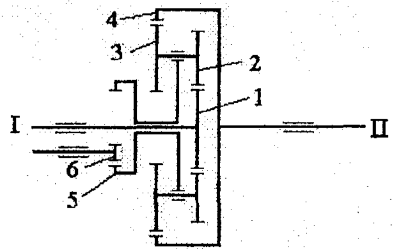
16



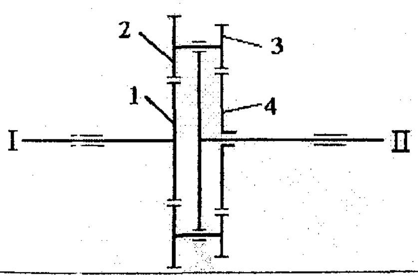
17



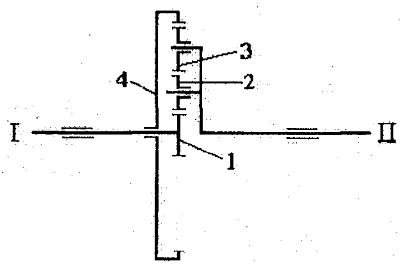
18



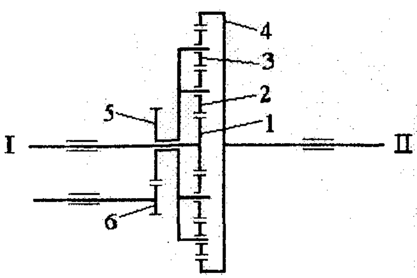
19



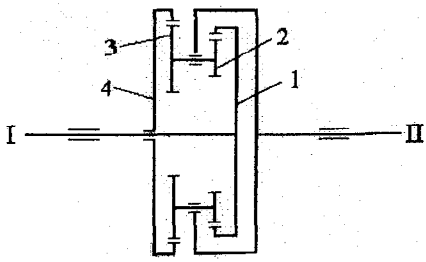
20



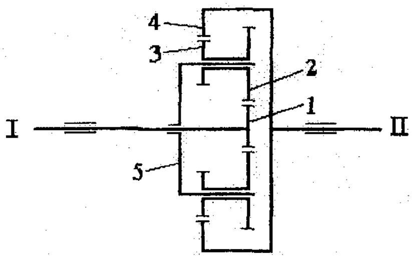
21



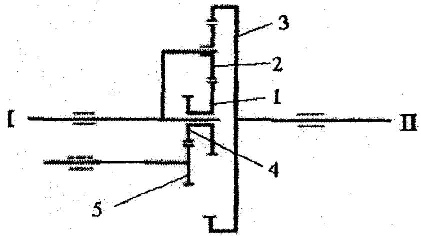
22



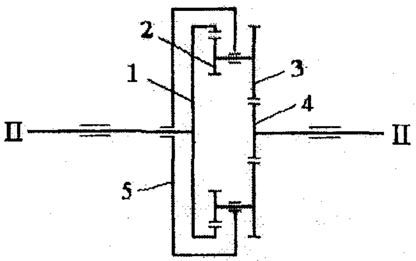
23



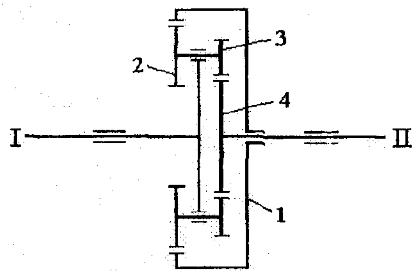
24



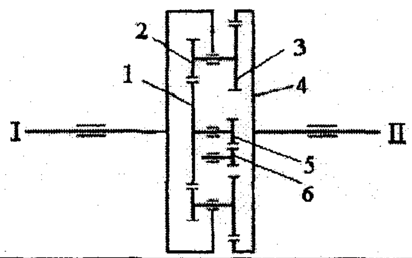
25



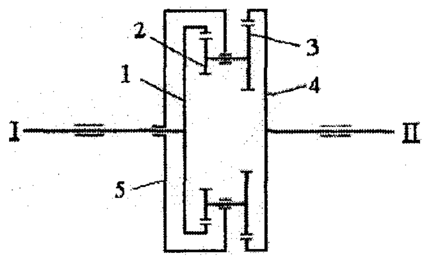
26



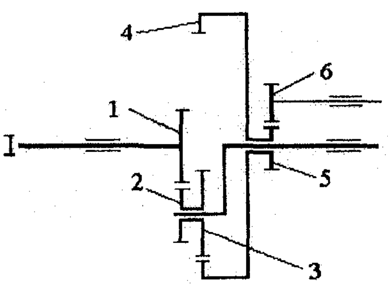
27



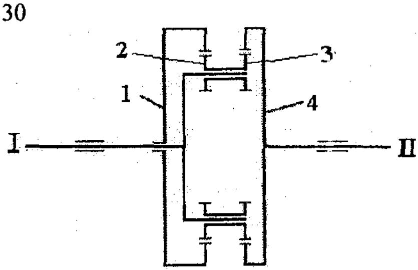
28



29



30



Рекомендуемая литература

1. Курс теоретической механики: Учебник для вузов / В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин /и др./. Под общей ред. К.С. Колесникова. – М: Издво МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.
2. Добронравов, В.В, Никитин, Н.Н. курс теоретической механики. М., 1983.
3. Тарг, С.М. Курс теоретической механики. М., 1963 и последующие издания.
4. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики, ч. II. М., 1971 и последующие издания.
5. Яблонский, А.А., Норейко, С.С. Курс теории колебаний. М., 1966 и последующие издания.
6. Айзенберг, Т.Б., Воронков, И.М., Осецкий, В.М. Руководство к решению задач по теоретической механике. М., 1986.
7. Бать, М.И., Джанелидзе, Г.Ю., Кельзон, А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах, ч. II. М., 1961 и последующие издания.
8. Алехнович, Г.Н. /и др./. Учебно методическое пособие по теоретической механике "Руководство к решению задач по теоретической механике" / Г.Н. Алехнович, Т.Ф. Богинская, Ю.В. Василевич, Е.С. Селицкая, О.Н. Скляр, В.Д. Тульев, А.В. Чигарев – Мн.: БГПА, 1997.

Учебное издание

КИНЕМАТИКА

Сборник задач
для расчетно-графических и индивидуальных работ
по теоретической механике

Составители:
БЕЛЯЦКАЯ Лариса Николаевна
БОГИНСКАЯ Татьяна Фагимовна
ГЛУБОКАЯ Эмма Эдуардовна

Редактор М.И. Гриневич
Технический редактор О.В. Дубовик

Подписано в печать 18.07.2007.
Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 4,88. Уч.-изд. л. 3,81. Тираж 300. Заказ 775.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0131627 от 01.04.2004.
220013, Минск, проспект Независимости, 65.