

532
B31

3418



Министерство образования
Республики Беларусь

**БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра «Гидропневмоавтоматика и гидропневмопривод»

И. А. Веренич

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
(Кинематика жидкости.
Одномерное течение газа)

Учебно-методическое пособие

Минск 2008

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Гидропневмоавтоматика и гидропневмопривод»

И. А. Веренич

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
(Кинематика жидкости.
Одномерное течение газа)

Учебно-методическое пособие к практическим занятиям
для студентов специальности 1-36 01 07
«Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Республики Беларусь
по образованию в области транспорта
и транспортной деятельности*

Минск 2008

УДК 533.6 (075.8)

ББК 22.253

В 31

Рецензенты:

А. С. Поварехо, В. К. Недбальский

Веренич, И. А.

В 31 Механика жидкости и газа: учебно-методическое пособие к практическим занятиям для студентов специальности 1-36 01 07 «Гидроприводные системы мобильных и технологических машин» / И.А. Веренич. – Минск: БНТУ, 2008. – 65 с.

ISBN 978-985-479-973-5.

Пособие содержит задачи и примеры их решения из разделов «Кинематика жидкости», «Потенциальные потоки», «Обтекание тел» и «Одномерные газовые потоки». Даются краткие теоретические сведения и общие методические указания по решению задач. Предназначено для практических занятий, подготовки к экзаменам. Может быть использовано при выполнении курсовых работ.

ISBN 978-985-479-973-5

© Веренич И. А., 2008
© БНТУ, 2008

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебно-методическое пособие составлено в соответствии с типовой программой АТФ-19/29 тип по дисциплине «Механика жидкости и газа», утвержденной УМО вузов Республики Беларусь 27.12.2002 г.

Высокий научный уровень исследований гидрогазодинамических процессов и явлений, повышение внимания к их преподаванию и изучению в высших учебных заведениях связаны с необходимостью подготовки специалистов по созданию высокоэффективных энергосберегающих гидроневмо систем и аппаратов. С развитием вычислительной гидрогазодинамики и углублением фундаментальных исследований аналитические методы в гидрогазодинамике не утратили своего значения.

Подобранные для данного пособия задачи, отражающие определенный круг вопросов прикладной гидромеханики, призваны помочь студентам в освоении рассмотренных в пособии разделов курса: «Кинематика жидкой среды» и «Одномерное течение газа». Данные задачи не являются частными, а охватывают комплекс учебной информации, способствуя творческому подходу к изучению дисциплины.

Кинематика жидкости – один из важнейших разделов гидромеханики. При его изучении очень важно уметь находить уравнения семейств линий тока и траектории жидких частиц, положение точек разветвления потоков, что необходимо для установления особенностей обтекания тел различной формы (например, обтекание лопаток гидромуфт, гидротрансформаторов, центробежных насосов, компрессоров, направляющих гидроневмоаппаратов и т. п.).

При исследовании обтекания тел широко используется теория вихрей, поэтому в пособии отражены вопросы, связанные с определением циркуляции жидкости расчетом взаимодействия вихрей с поступательным потоком. Часть задач посвящена определению комплексных потенциалов

простых и сложных течений, определению формы обтекаемых контуров по заданным комплексным потенциалам, нахождению полей скоростей.

В пособие включен раздел «Одномерное течение газа», имеющий важное значение при подготовке студентов по специальности «Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин».

В основу материала учебно-методического пособия положен конспект лекций автора данного пособия по дисциплине «Механика жидкости и газа», учебники «Техническая гидромеханика» Емцева Б.Т., «Техническая гидродинамика» Кудинова А.А. и другие учебники и сборники задач.

Пособие можно использовать на практических занятиях, при самостоятельной подготовке к экзамену и при выполнении курсовой работы.

1. КИНЕМАТИКА ЖИДКОСТИ

При изучении движения жидкости преимущественное распространение получил метод Эйлера, согласно которому рассматривают поле скоростей в точках пространства, занятого движущейся жидкостью. Поле скоростей задается в следующем виде:

$$u_x = f_1(x, y, z, t); \quad u_y = f_2(x, y, z, t); \quad u_z = f_3(x, y, z, t),$$

где u_x, u_y, u_z — проекции скорости на декартовы оси координат;
 x, y, z — координаты точек пространства;
 t — время.

Движение, для которого поле скоростей зависит не только от координат, но и от времени, называется *неустановившимся*. Если $u_x = f_1(x, y, z), u_y = f_2(x, y, z), u_z = f_3(x, y, z)$, то движение *установившееся (стационарное)*.

К числу важнейших понятий в кинематике относятся понятия о *линиях тока и траекториях движущихся частиц*.

Линиями тока называют векторные линии поля скоростей, т. е. кривые, в каждой точке которых в данный момент времени вектор скорости совпадает по направлению с касательной.

Дифференциальное уравнение линий тока имеет вид

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}. \quad (1.1)$$

Под *траекторией* понимают геометрическое место последовательных положений движущейся частицы в рассматриваемой системе координат.

Уравнение траекторий записывается следующим образом:

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} = dt. \quad (1.2)$$

При установившемся движении траектории и линии тока совпадают.

Проекция ускорения жидкой частицы на декартовы оси координат в переменных Эйлера определяются из соотношений

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}; \\ a_y &= \frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z}; \\ a_z &= \frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Первые члены правых частей системы уравнений (1.3) отражают изменение проекций скоростей в данной точке пространства из-за нестационарности поля скоростей и носят название *локальных ускорений*, остальные члены связаны с неоднородностью поля скоростей и называются *конвективными ускорениями*.

Закон сохранения массы в гидромеханике в общем случае представляется в виде уравнения неразрывности (сплошности)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0,$$

где ρ — плотность жидкости.

Для несжимаемой жидкости уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0$$

или в проекциях на декартовы оси координат

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (1.4)$$

Движение несжимаемых сплошных сред возможно лишь в случае, если для рассматриваемого поля скоростей справедливо равенство (1.4).

Поток вектора скорости через поверхность S называется объемным расходом и является скалярной величиной, определяемой по формуле

$$Q = \iint_S \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS,$$

где \vec{n} – нормаль к поверхности.

В координатной форме $Q = \iint_S u \cos(\widehat{nu}) \, dS$, или

$$Q = \iint_S (u_x n_x + u_y n_y + u_z n_z) \, dS.$$

Физически поток вектора скорости представляет собой секундный объемный расход жидкости через поверхность S .

Совокупность линий тока, проходящих через все точки бесконечно малого замкнутого контура, образует поверхность, называемую *трубкой тока*. Жидкость, заключенная внутри трубки тока, называется *струйкой*.

Уравнение сплошности для струйки несжимаемой жидкости имеет следующий вид:

$$dQ = u dA = \text{const}, \quad (1.5)$$

где dQ – элементарный объемный расход через поперечное сечение струйки;

dA – площадь сечения струйки.

Из уравнения (1.5) следует, что элементарный объемный расход постоянен вдоль струйки.

Для потока конечных размеров уравнение неразрывности имеет вид

$$Q = vA = \text{const},$$

где v – средняя скорость в рассматриваемом сечении;

A – площадь поперечного сечения потока.

Угловая скорость вращения жидкой частицы

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{u},$$

где $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости;

$\operatorname{rot} \vec{u}$ – вихрь вектора скорости жидкой частицы.

В проекциях на декартовы оси координат

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right); \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right); \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

При потенциальном (безвихревом) движении вихрь вектора скорости

$$\operatorname{rot} \vec{u} = 0, \quad (1.7)$$

В координатной форме запишется так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

В потенциальном поле существует скалярная функция φ , связанная с вектором скорости такой зависимостью:

$$u = \operatorname{grad} \varphi.$$

Эта функция называется *потенциалом скорости*. Зная потенциал скорости для плоского течения, определим проекции скорости из следующих соотношений:

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Кривые $\varphi(x, y) = \text{const}$ называются *эквипотенциальными линиями*. Для полярных координат на плоскости

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta},$$

где u_r и u_θ – проекции вектора скорости частицы \vec{u} соответственно на направление полярного радиуса-вектора r и на направление, ему перпендикулярное.

Уравнение неразрывности для потенциального движения несжимаемой жидкости обращается в уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0,$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Для плоского течения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Следовательно, потенциал скорости является гармонической функцией.

В полярных координатах уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0.$$

Циркуляцией скорости по контуру C называется криволинейный интеграл вида

$$\Gamma = \int_C \bar{u} \, dS$$

либо

$$\Gamma = \int_C (u_x dx + u_y dy + u_z dz).$$

В потенциальном поле циркуляция вдоль дуги $\overset{\cup}{AB}$

$$\Gamma = \varphi_A - \varphi_B,$$

т. е. она равна разности значений потенциалов скорости в конечных точках кривой. Поэтому циркуляция по замкнутому контуру равна нулю, если внутри контура нет особых точек (если потенциал является однозначной функцией).

Для плоского потока несжимаемой жидкости существует функция $\psi(x, y)$, называемая *функцией тока*, для которой справедливы условия

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

В полярных координатах

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Выражение $\psi(x, y) = \text{const}$ является уравнением семейства линий тока.

Для безвихревого движения функция тока и потенциал скорости удовлетворяют уравнениям Лапласа

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0.$$

Разность значений функций тока на двух смежных линиях тока равна расходу между ними, т. е.

$$\psi_B - \psi_A = Q.$$

Разность значений потенциалов скорости равна циркуляции

$$\phi_A - \phi_B = \Gamma.$$

Функции ϕ и ψ определяют из соотношений

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1.9)$$

которые являются условиями Коши-Римана. Они показывают, что линии $\phi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ взаимно ортогональны.

Для решения практических задач широко используется метод наложения потенциальных потоков, который является следствием линейности уравнения Лапласа.

Так, если имеются два потока с потенциалами ϕ_1 и ϕ_2 , то потенциал скорости нового результирующего потока

$$\phi = \phi_1 + \phi_2.$$

Аналогично функция тока будет равна алгебраической сумме функций токов исходных потоков

$$\psi = \psi_1 + \psi_2.$$

При выполнении условий (1.9) две гармонические функции φ и ψ можно считать действительной и мнимой частями некоторой аналитической функции комплексного переменного, т. е.

$$W(z) = \varphi + i\psi.$$

Функция $W(z)$ называется комплексным потенциалом или характеристической функцией течения.

Производная аналитической функции $\frac{dW}{dz}$ называется комплексной или сопряженной скоростью, которую можно записать

$$v = \frac{dW}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i \frac{\partial\psi}{\partial x} = u_x - iu_y.$$

По модулю комплексная скорость равна модулю вектора скорости, т. е.

$$\left| \frac{dW}{dz} \right| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = u.$$

В полярных координатах

$$\frac{dW}{dz} = \frac{r}{z} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} + i \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) = \frac{r}{z} (v_r - i v_\theta). \quad (1.10)$$

При этом

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta},$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

Характеристические функции некоторых простейших плоских потенциальных потоков:

поступательный поток $W = (a - ib)z$, a и b — постоянные;
 плоский источник $W = a \ln z$, ($a > 0$);

плоский сток

$$W = a \ln z, (a < 0);$$

диополь

$$W = \frac{a}{z};$$

плоский циркуляционный поток

$$W = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z.$$

Отображение области A (рис. 1.1) плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ в область A_1 , которая расположена в плоскости переменного $\zeta = \xi + i\eta$, осуществляемого с помощью аналитической функции $\zeta = f(z)$, называется *конформным отображением*. Функция $\zeta = f(z)$ называется *отображающей функцией*. Модуль производной этой функции характеризует изменение линейных размеров при преобразовании, а ее аргумент – угол поворота радиус-вектора.

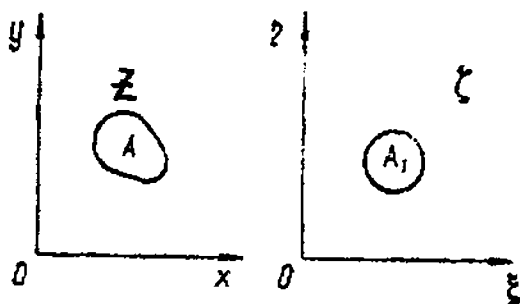


Рис. 1.1. Отображение точек области A в плоскости z в точки области A_1 плоскости ξ

Конформное отображение позволяет перейти от известных элементарных потоков к составлению комплексных потенциалов потоков, обтекающих тела более сложных форм. Отображающую функцию обычно находят по известным формулам конформных преобразований.

Циркуляция и расход при конформном отображении не изменяются, т. е. $\Gamma_z = \Gamma_\xi$, $Q_z = Q_\xi$.

Движение, при котором условие (1.7) не соблюдается, т. е. $\text{rot } \vec{v} \neq 0$, называется *вихревым*. Вихревое (вращательное)

движение жидких частиц характеризуется угловыми скоростями, величина которых может быть определена по (1.8).

Модуль вектора угловой скорости

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}.$$

Под *вихревой линией* понимают линию в потоке жидкости, в каждой точке которой в данный момент времени вектор угловой скорости совпадает по направлению с касательной. Дифференциальные уравнения вихревой линии имеют вид

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z},$$

Понятие о вихревой линии аналогично понятию о линии тока. Часть жидкости, ограниченная вихревой поверхностью, проведенной через бесконечно малый замкнутый контур, образует вихревую трубку. Жидкость, ограниченная вихревой трубкой, называется *вихревой нитью*. Существует аналогия с поверхностью тока и трубкой тока. Интенсивность вихревой трубки

$$i = \iint_S \bar{\omega}_n dS,$$

где $\bar{\omega}_n$ – проекция вектора угловой скорости $\bar{\omega}$ на нормаль к поверхности S .

В соответствии со второй теоремой Гельмгольца интенсивность вихревой трубки не изменяется с течением времени. Для элементарной вихревой трубки с точностью до величин высших порядков малости $\omega_n A = \text{const}$.

Связь между интенсивностью вихревой трубки и циркуляцией скорости по замкнутому контуру, расположенному по поверхности трубки, устанавливается с помощью теоремы Стокса

$$\Gamma = \oint \bar{u} d\bar{l} = 2 \iint_S \omega_n dS = 2i.$$

Задачей расчета полей скоростей методами теории потенциальных движений является определение сил, действующих на тело.

Для нахождения давления на поверхности обтекаемого потоком тела используется выражение для коэффициента давления

$$\bar{p} = \frac{p - p_{\infty}}{0,5\rho_{\infty}u_{\infty}^2} = 1 - \left(\frac{v}{u_{\infty}} \right)^2, \quad (1.11)$$

где p и u – давление и скорость в рассматриваемой точке;

p_{∞} и u_{∞} – то же, на достаточном удалении от тела.

Формулу (1.11) можно получить из уравнения Бернулли для несжимаемой жидкости

$$zg + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = C. \quad (1.12)$$

Для решения задачи обтекания цилиндра потоком жидкости с циркуляцией осуществляют суперпозицию комплексных потенциалов равномерного потока, диполя и плоского вихря. В этом случае суммарный комплексный потенциал течения $W(z)$ имеет вид

$$W(z) = u_0 \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z),$$

где u_0 – скорость равномерного потока;

$z = x + iy$ – комплексная переменная;

r_0 – радиус цилиндра;

Γ – циркуляция.

Потенциал скорости и функция тока данного течения в полярных и декартовых координатах

$$\varphi = u_0 r \cos \theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta = u_0 x \left(1 + \frac{r_0^2}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x};$$

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = u_0 r \sin \theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r = u_0 y \left(1 - \frac{r_0^2}{x^2 + y^2} \right) + \\ + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Для построения распределения скорости по поверхности цилиндра используем выражения для ее проекций u_r и u_θ в полярных координатах

$$u_r = u_0 \cos \theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right); \quad u_\theta = -u_0 \sin \theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

На поверхности цилиндра при $r = r_0$

$$u_{r|r=r_0} = 0 \quad \text{и} \quad u_{\theta|r=r_0} = -2u_0 \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_0}.$$

Положение критических точек, когда $u_\theta = 0$, находят из условия

$$\theta_{\text{кр}} = \arcsin \left(-\frac{\Gamma}{4\pi u_0 r_0} \right).$$

Распределение давления по поверхности цилиндра описывается коэффициентом давления \bar{p} .

$$\bar{p} = 1 - 4 \left(\sin \theta - \frac{\Gamma}{4\pi u_0 r_0} \right)^2.$$

ПРИМЕРЫ

1.1. Поле скоростей газа задано проекциями $u_x = \frac{x}{1+t}$; $u_y = \frac{2y}{1+t}$; $u_z = 0$. Найти уравнение линий тока, а также траекторию частицы, которая проходит в момент времени $t = 0$ через точку пространства с координатами $x = 2$ и $y = 4$.

Решение. Дифференциальное уравнение (1.2) траектории движения частицы для заданного поля $\frac{dx}{x}(1+t) = dt$ и

$\frac{1}{2} \frac{dy}{y}(1+t) = dt$, откуда

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{1+t} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} \frac{dy}{y} = \frac{dt}{1+t}.$$

Проинтегрировав, имеем

$$\ln x = \ln(1+t) + \ln C_1,$$

$$\frac{1}{2} \ln y = \ln(1+t) + \ln C_2$$

либо $x = C_1(1+t), \quad \sqrt{y} = C_2(1+t).$

Произвольные постоянные интегрирования находим из начальных условий ($t = 0, x = 2, y = 4$). Подставляя эти значения, получаем $C_1 = 2, C_2 = 2$.

Таким образом, $x = 2(1+t), \sqrt{y} = 2(1+t).$

Исключая время, находим уравнение траектории $x - \sqrt{y} = 0$.

Для нахождения линий тока используем уравнение (1.1).
 $\frac{dx}{x}(1+t) = \frac{1}{2} \frac{dy}{y}(1+t)$. После интегрирования и потенцирования $x = C\sqrt{y}$.

Для линии тока, проходящей через точку $x = 2, y = 4$, произвольная постоянная $C = 1$ и $x - \sqrt{y} = 0$, т. е. линия тока и траектория совпадают, хотя поле скоростей нестационарно. Это происходит потому, что с течением времени скорость изменяется только по величине, а не по направлению, т. е. единичный вектор поля скоростей не зависит от времени

$$\frac{u}{|\vec{u}|} = \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4y}}, \frac{2y}{\sqrt{x^2 + 4y}}, 0 \right\}.$$

1.2. По заданным проекциям скоростей

$$u_x = \frac{x}{t+1}, \quad u_y = \frac{2y}{t+1}, \quad u_z = \frac{3z}{t+1}$$

определить ускорение жидкой частицы в точке A с координатами $x = 2, y = 9, z = 3$ в момент времени $t = 2$ с.

Решение. Записываем выражение для компоненты ускорения

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}.$$

Имеем

$$a_x = -\frac{x}{(t+1)^2} - \frac{x}{(t+1)^2} + \frac{2x}{(t+1)^2} = 0.$$

Аналогично для a_y и a_z

$$a_y = -\frac{2y}{(t+1)^2} + \frac{4y}{(t+1)^2} = \frac{2y}{(t+1)^2};$$

$$a_z = -\frac{3z}{(t+1)^2} + \frac{9z}{(t+1)^2} = \frac{6z}{(t+1)^2}.$$

Полное ускорение частицы

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \frac{\sqrt{4y^2 + 36z^2}}{(t+1)^2}.$$

Для точки A имеем

$$a_A = \frac{\sqrt{4 \cdot 9^2 + 36 \cdot 3^2}}{(2+1)^2} = 2,85 \text{ м/с}^2.$$

1.3. Может ли поле скоростей несжимаемой жидкости обладать потенциалом $\varphi = 4(x^2 + y^2)$?

Решение. Потенциал скорости плоского потока несжимаемой жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Проверим выполнение этого уравнения для заданного потенциала: $\nabla^2 \varphi = 8 - 8 = 0$, т. е. поле скоростей несжимаемой жидкости может иметь такой потенциал.

1.4. Найти уравнение семейства линий тока для плоского течения, заданного в задаче 1.3.

Решение. Найдем проекции поля скоростей

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 8x, \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -8y.$$

Для построения линий тока определим функцию тока данного течения

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 8x, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -8y,$$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 8(ydx + xdy) = 8d(xy).$$

После интегрирования имеем $\psi = 8xy + c'$.

Уравнение линий тока получают путем придания функции тока различных постоянных значений. Следовательно, общий вид этих уравнений будет

$$xy = c \quad \text{либо} \quad y = \frac{c}{x}.$$

Таким образом, линии тока – семейство равнобоких гипербол (рис. 1.2). Направление движения в каждом квадранте устанавливается по знаку проекций скоростей.

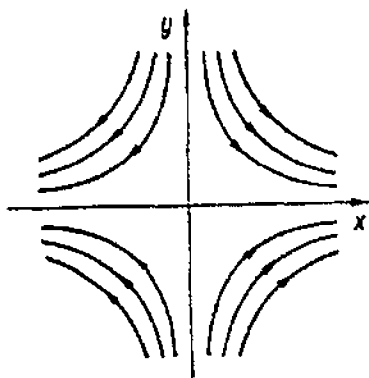


Рис. 1.2. Линии тока для потока, заданного потенциалом скорости $\varphi = 4(x^2 + y^2)$

1.5. При каком значении коэффициента a возможны течения несжимаемой жидкости со следующими проекциями поля скоростей:

$$\text{а) } u_x = ax, \quad u_y = ay;$$

$$\text{б) } u_x = 2ax, \quad u_y = -2ay.$$

Каков характер этих течений?

Решение. При движении несжимаемой жидкости должно удовлетворяться уравнение неразрывности $\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$.

В первом случае $a + a = 0$, если $a = 0$. Следовательно, $u_x = 0$, $u_y = 0$, т. е. движение отсутствует.

Во втором случае $\frac{\partial u_x}{\partial x} = 2a$, $\frac{\partial u_y}{\partial y} = -2a$, $2a - 2a = 0$. Это условие выполняется при любом значении коэффициента a .

Чтобы определить характер течения, воспользуемся соотношениями (1.8), при которых $\omega_x = \omega_y = 0$, т. е. течение потенциально

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2ax, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2ay;$$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 2a(ydx + xdy) = 2ad(xy),$$

$$\psi = 2axy; \quad u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2ax, \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2ay;$$

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 2a(xdx - ydy),$$

$$\varphi = a(x^2 - y^2), \quad x^2 - y^2 = c, \quad y = \pm \sqrt{x^2 - c}.$$

Эквипотенциальные линии – равнобокие гиперболы (асимптоты – биссектрисы углов между координатными осями). Линии тока также равнобокие гиперболы (асимптоты – осей координат).

Форму линий тока (при $a > 0$) находим, проводя кривые, которые пересекают эквипотенциальные линии под прямым углом (рис. 1.3).

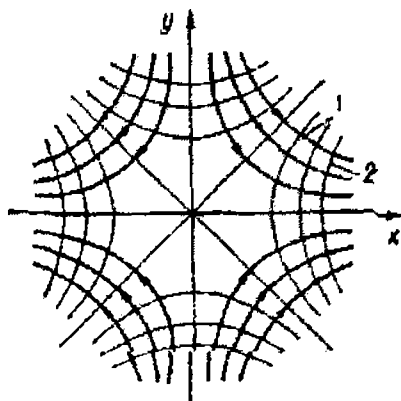


Рис. 1.3. Линии тока и эквипотенциальные линии для потока при $u_x = 2ax$ и $u_y = -2ay$

1.6. Аналитическим сложением плоских источника и стока с расходами $Q = 6\pi \text{ м}^2/\text{с}$ и прямолинейно-поступательного потока жидкости со скоростью $v_0 = 5 \text{ м/с}$, параллельной оси абсцисс, определить форму результирующего потока и его скорость в точках с координатами $x_1 = y_1 = 0,2$ и $x_2 = y_2 = 1 \text{ м}$. Расстояние между источником и стоком, расположенными на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, $a = 1 \text{ м}$ (рис. 1.4).

Решение. Для определения формы результирующего потока найдем его функцию тока, суммируя функции тока источника ψ_u , стока $\psi_{ст}$ и прямолинейно-поступательного потока $\psi_{п.п.}$

Функция тока источника и стока

$$\psi_u + \psi_{ст} = \frac{Q}{2\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x + 0,5a} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x - 0,5a} \right).$$

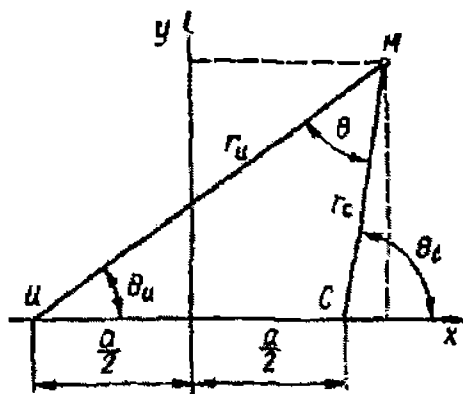


Рис.1.4. Диполь

Функция тока результирующего потока

$$\Psi_u + \Psi_{ст} + \Psi_{п.п} = \frac{Q}{2\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x+0,5a} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x-0,5a} \right) + u_0 y.$$

Для определения линий тока приравняем функцию тока ψ постоянной величине, при $a = 1$ м

$$3 \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x+0,5} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x-0,5} \right) + 5y = c,$$

откуда

$$y = \frac{c}{5} - \frac{3}{5} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x+0,5} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x-0,5} \right).$$

Определим форму нулевой линии тока ($c = 0$)

$$y = \frac{3}{5} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x+0,5} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x-0,5} \right).$$

Одно из решений этого уравнения $y = 0$ (ось абсцисс). Пользуясь известной тригонометрической формулой

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$$

видоизменим уравнение нулевой линии тока:

$$\operatorname{tg} \frac{5}{3} y = \frac{\frac{y}{x-0,5} - \frac{y}{x+0,5}}{1 + \frac{y^2}{x^2 - 0,25}} = \frac{y}{x^2 + y^2 - 0,25},$$

откуда

$$x = \pm \sqrt{\frac{y}{\operatorname{tg} \frac{5}{3} y} - y^2 + 0,25}.$$

При малых углах $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$, поэтому при $y = 0$

$$x = \pm \sqrt{\frac{3}{5} + 0,25} \text{ м} = \pm 0,922 \text{ м}.$$

Другие точки этой линии тока получим, задав различные значения y .

Для остальных линий тока

$$x = \pm \sqrt{\frac{y}{\operatorname{tg} \frac{5}{3} \left(y - \frac{c}{5} \right)} - y^2 + 0,25}.$$

Из рис. 1.5 следует, что результирующий поток состоит из потока, обтекающего овальный цилиндр (овал Ранкина) и внутреннего потока от источника к стоку. Компоненты скорости результирующего потока найдем по известной функции тока

$$u_x = \frac{\partial}{\partial y} \left[3 \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x+0,5} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x-0,5} \right) + 5y \right],$$

$$u_y = \frac{\partial}{\partial x} \left[3 \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x+0,5} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x-0,5} \right) + 5y \right].$$

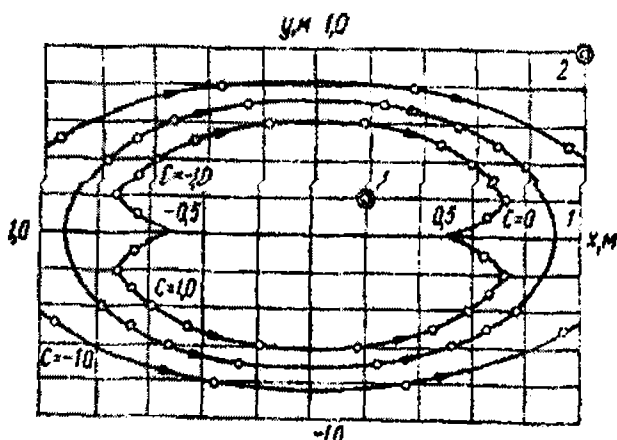


Рис. 1.5. Схема обтекания овального цилиндра:
 O – расчетные точки; ⊙ – точки, соответствующие решениям

Дифференцируя, получаем

$$u_x = 5 + 3 \left[\frac{x+0,5}{(x+0,5)^2 + y^2} - \frac{x-0,5}{(x-0,5)^2 + y^2} \right],$$

$$u_y = 3 \left[\frac{y}{(x+0,5)^2 + y^2} - \frac{y}{(x-0,5)^2 + y^2} \right],$$

а) при $x_1 = y_1 = 0,2$ м

$$u_{x_1} = 15,9 \text{ м/с}, \quad u_{y_1} = -3,48 \text{ м/с}, \quad v_1 = \sqrt{u_{x_1}^2 + u_{y_1}^2} = 16,3 \text{ м/с};$$

б) при $x_2 = y_2 = 1$ м

$$u_{x_2} = 5,18 \text{ м/с}, \quad u_{y_2} = -1,48 \text{ м/с}, \quad v_2 = 5,39 \text{ м/с}.$$

1.7. Графическим сложением плоских источника и стока с расходами $Q = 6\pi \text{ м}^2/\text{с}$ и прямолинейно-поступательного потока жидкости со скоростью $v_0 = 5 \text{ м/с}$, параллельной оси абсцисс, определить форму результирующего потока и его скорость в точках с координатами $x_1 = y_1 = 0,2$ и $x_2 = y_2 = 1$ м. Расстояние между источником и стоком, расположенными на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, $a = 1$ м (рис. 1.4).

Решение. Начнем со сложения источника и стока. Для этого проведем несколько линий тока, соблюдая условие

$$\Delta\psi_u = \Delta\psi_{ст} = \text{const}. \text{ Поскольку } \psi_u = \frac{Q}{2\pi}\theta_u \text{ и } \psi_{ст} = \frac{Q}{2\pi}\theta_{ст}, \text{ то}$$

$\Delta\theta_u = \Delta\theta_{ст} = \text{const}$, т. е. линии тока источника и стока (прямые лучи, исходящие из источника и стока) должны быть проведены на одинаковом угловом расстоянии друг от друга. Для удобства построения разделим 360° на 32 части. Тогда

для источника и стока $\Delta\psi = \Delta Q = \frac{\pm 6\pi}{32} = \pm 0,589 \text{ м}^2/\text{с}$. Следова-

тельно, линии тока прямолинейно-поступательного потока должны быть проведены на расстоянии $\Delta y = \frac{\Delta Q}{v_0} = \frac{0,589}{5} \text{ м}$

друг от друга.

Построив линии тока источника и стока в каждом из четырехугольников, образованных пересечением линий тока, проведем диагональ, являющуюся одновременно вектором скорости и приближенно отрезком линии тока результирующего течения (рис. 1.6).

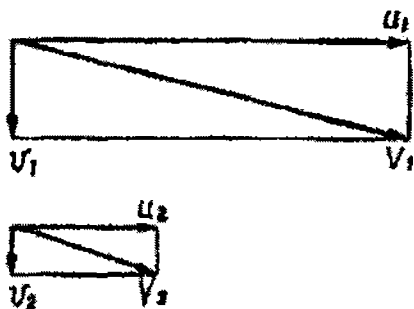


Рис. 1.6. Схема графического сложения скоростей

Последовательности этих отрезков соответствуют линиям тока результирующего потока, представляющим собой окружности, проходящие через источник и сток. Далее пересечем их линиями тока прямолинейно-поступательного потока, проведенными на расстоянии Δu друг от друга, и проведем диагонали четырехугольников, образованные пересечением линий тока результирующего потока с линиями тока прямолинейно-поступательного потока. При сложении источника, стока и прямолинейно-поступательного потока получим течение вокруг и внутри овального цилиндра.

На рис. 1.7 построение приведено только для верхней половины рисунка, причем те участки линий тока, которые не могли быть получены непосредственно из построения, изображены штриховыми линиями. Для нахождения скорости результирующего потока в заданных точках $x_1 = y_1 = 0,2$ м, $x_2 = y_2 = 1$ м рассмотрим ближайшие к ним диагонали четырехугольников, полученных при построении. Длины диагоналей, в соответствующем масштабе, равны искомым скоростям. Для определения масштаба найдем среднее арифметическое из длин горизонтальных сторон соответствующего четырехугольника (эта величина соответствует скорости прямолинейно-поступательного потока $v_0 = 5$ м/с).

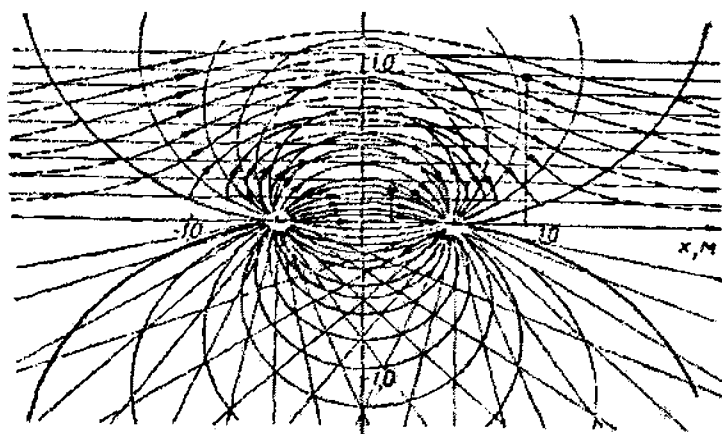


Рис. 1.7. Линии тока от сложения источника, стока и прямолинейно-поступательного потока:
 • – точки, соответствующие решениям

Таким образом, для заданных точек получаем

$$\text{а) при } x_1 = y_1 = 0,2 \text{ м} \quad v_1 = \frac{5}{6+2} 13 = 16,3 \text{ м/с};$$

$$\text{б) при } x_2 = y_2 = 1 \text{ м} \quad v_2 = \frac{5}{22+20} 22,5 = 5,36 \text{ м/с},$$

что достаточно близко к результатам, полученным аналитически для тех же данных в задаче 1.6.

1.8. Выяснить, какие из движений жидкости, компоненты скоростей которых приведены ниже, являются вихревыми.

Для вихревых движений построить зависимость $\omega_z = f(y)$:

$$\text{а) } u_x = a\sqrt{y}, \quad u_y = 0 \quad (a > 0);$$

$$\text{б) } u_x = ax^2, \quad u_y = -2axy \quad (a > 0);$$

$$\text{в) } u_x = ay, \quad u_y = 0 \quad (a > 0);$$

$$\text{г) } u_x = 3(x^2 - y^2), \quad u_y = -6xy,$$

$$\begin{array}{lll} \text{д) } u_x = ay, & u_y = bx & (b > 0); \\ \text{е) } u_x = 2xy, & u_y = 2xy, & u_z = 2xz. \end{array}$$

Решение. Для выяснения характера движения воспользуемся выражениями (1.6)

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right), \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right),$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right).$$

Для случая а)

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(0 - \frac{1}{2} ay^{-\frac{1}{2}} \right) = -\frac{a}{4\sqrt{y}},$$

т. е. движение вихревое.

Зависимость $\omega_z = f(y)$ для этого и других случаев приведена на рис. 1.8.

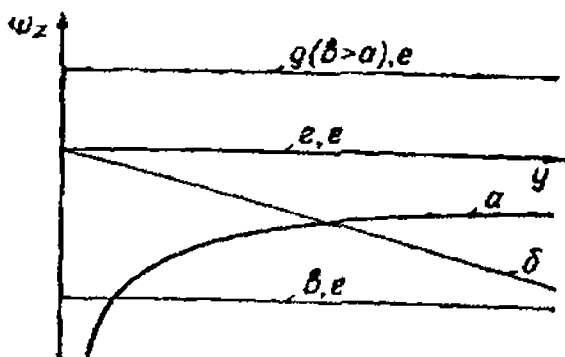


Рис. 1.8. Зависимости $\omega_z = f(y)$ для движений, заданных в задаче 1.8

1.9. Получить и изобразить графически закон изменения угловой скорости вращения вихря в зависимости от радиуса $\omega_z = f(r)$, если его окружная скорость изменяется по закону

а) $v = \frac{c}{r^2}$ ($c > 0$); б) $v = \frac{c}{\sqrt{r}}$ ($c > 0$).

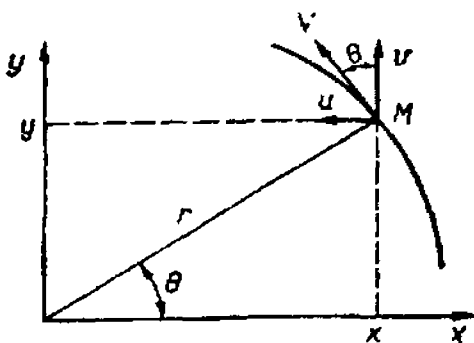


Рис. 1.9. Схема к выводу соотношения $\omega_z = f(r)$

Решение. Для произвольной точки пространства M (рис. 1.9), декартовы координаты которой x и y и полярные r, θ ,

$$u_x = -v \sin \theta, \quad u_y = v \cos \theta,$$

так как $r^2 = x^2 + y^2$, $\sin \theta = \frac{y}{r}$, $\cos \theta = \frac{x}{r}$, то для случая а)

$$u_x = -\frac{c}{x^2 + y^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{cy}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

$$u_y = \frac{c}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{cx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Тогда $\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right),$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{cx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right] = \frac{c(x^2 + y^2)^{3/2} - 3cx^2(x^2 + y^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{c(r^2 - 3x^2)}{r^5}.$$

Аналогично $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{c(3y^2 - r^2)}{r^5}.$

Кривые $\omega_z = f(r)$ проведены на рис. 1.10.

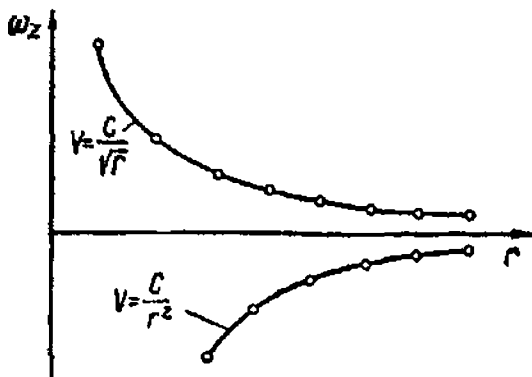


Рис. 1.10. График зависимости $\omega_z = f(r)$

а) при $v = \frac{c}{r^2}$; б) при $v = \frac{c}{\sqrt{r}}.$

о – расчетные точки.

1.10. Пренебрегая сжимаемостью, определить на каком расстоянии от оси факела абсолютное давление газа должно стать равным $p = 0,98p_a$, если окружная скорость на внешней границе на выходе из горелки $v_0 = 20$ м/с, разрежение в топке $p_T = 98$ Па, плотность газа $\rho_T = 0,9$ кг/м³, выходной диаметр горелки $d = 0,5$ м, атмосферное давление p_a – нормальное.

Решение. Определим величину циркуляции скорости при заданных условиях

$$\Gamma = v_0 \pi d = 20 \cdot 3,14 \cdot 0,5 \text{ м}^2/\text{с} = 31,4 \text{ м}^2/\text{с}.$$

Запишем уравнение Бернулли (1.12) для двух положений частицы газа на расстояниях r_0 и r от центра вихря (изменением геометрической высоты пренебрегаем)

$$\frac{p_0}{\rho_r} + \frac{v_0^2}{2} = \frac{p}{\rho_r} + \frac{v^2}{2},$$

где

$$p_0 = p_a - p_r = (1,013 \cdot 10^5 - 98) \text{ Па} \approx 1,012 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

По условию задачи

$$v = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho_r} + v_0^2} = \sqrt{\frac{2(1,012 - 0,993) \cdot 10^5}{0,9} + 20^2} \text{ м/с} = 68,5 \text{ м/с}.$$

Определим, на каком расстоянии от оси факела скорость достигает величины $v = 68,5 \text{ м/с}$.

$$r = \frac{\Gamma}{2\pi v} = \frac{31,4}{2 \cdot 3,14 \cdot 68,5} = 0,073 \text{ м}.$$

1.11. Найти выражение для комплексного потенциала плоского источника, расположенного в начале координат. Определить скорость в точке $z = 3 + 4i$.

Решение. Записываем выражение для потенциала скорости и функции тока плоского источника

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r, \quad \psi = \frac{Q}{2\pi} \theta.$$

Комплексный потенциал

$$W = \varphi + i\psi = \frac{Q}{2\pi} (\ln r + i\theta) = \frac{Q}{2\pi} \ln(re^{i\theta}) = \frac{Q}{2\pi} \ln z.$$

Комплексная скорость по формуле (1.10)

$$\bar{v} = \frac{dW}{dz} = \frac{r}{z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + i \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{r}{z} (v_r - i v_\theta).$$

Проекция скорости на радиус-вектор

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}.$$

Проекция скорости на перпендикуляр к радиус-вектору

$$v_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0.$$

Комплексная скорость

$$\bar{v} = \frac{r}{z} \left(\frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} + 0 \right) = \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{1}{z}.$$

Из полученного соотношения в частности следует, что начало координат ($z = 0$) является особой точкой.

Вычислим скорость в точке $z = 3 + 4i$.

Имеем

$$|\bar{v}| = \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{1}{|z|} = \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{1}{r};$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5; \quad |\bar{v}| = \frac{Q}{10\pi}.$$

1.12. Учитывая, что линии тока плоского вихря – концентрические окружности, получить выражение для комплексной скорости этого течения.

Решение. Используем полярную систему координат

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

По условию $v_r = 0$, из чего следует, что $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$, т. е.

$$\varphi = \varphi(\theta) \text{ и } \psi = \psi(r),$$

при этом
$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

либо
$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -r \frac{\partial \psi}{\partial r} = C, \quad \text{а)}$$

где C – постоянная.

Интегрирование а) дает $\varphi = C\theta$, $\psi = -C \ln r$.

Определим компоненты скорости v_θ

$$v_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (C\theta) = \frac{C}{r}.$$

Для нахождения постоянной C определим циркуляцию скорости по окружности произвольного радиуса R .

Подставляя значение v_θ , получим

$$\Gamma = \int \frac{C}{r} dS = \int_0^{2\pi} \frac{C}{r} r d\theta = 2\pi C, \quad C = \frac{\Gamma}{2\pi}.$$

Следовательно,

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r, \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}.$$

Комплексный потенциал течения

$$W = \varphi + i\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} (\theta - i \ln r) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} (\ln r + i\theta) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z.$$

Найдем выражение для комплексной скорости из (1.10)

$$|\vec{v}| = \frac{r}{z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + i \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{r}{z} (v_r - i v_\theta) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z}.$$

1.13. Проанализировать характер течения, получаемого суперпозицией (наложением) плоских вихря и источника.

Решение. Комплексный потенциал нового течения

$$W = W_{\text{в}} + W_{\text{и}},$$

где $W_{\text{в}}$ – комплексный потенциал плоского вихря;

$W_{\text{и}}$ – то же источника.

По правилу суперпозиции

$$W = W_{\text{в}} + W_{\text{и}} = (\varphi_{\text{в}} + \varphi_{\text{и}}) + i(\psi_{\text{в}} + \psi_{\text{и}}),$$

$$\varphi_{\text{в}} = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad \varphi_{\text{и}} = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r,$$

$$\psi_{\text{в}} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r, \quad \psi_{\text{и}} = \frac{Q}{2\pi} \theta.$$

Имеем $\varphi = \frac{1}{2\pi} (\Gamma\theta + \theta \ln r)$; $\psi = \frac{1}{2\pi} (Q\theta - \Gamma \ln r)$ (см. задачи 1.11 и 1.12).

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2\pi} [(\theta \ln r + \Gamma\theta) + i(Q\theta - \Gamma \ln r)] = \frac{1}{2\pi} (Q \ln r + \Gamma\theta + iQ\theta - i\Gamma \ln r) = \\ &= \frac{1}{2\pi} [\ln(Q - i\Gamma) + \theta(\Gamma + iQ)] = \frac{1}{2\pi} [\ln r(Q - i\Gamma) + i\theta(Q - i\Gamma)] = \\ &= \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} (\ln r + \theta) = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \ln z. \end{aligned}$$

Этот же результат можно записать сразу, если использовать выражения для W_v и W_u , полученные в задачах 1.11 и 1.12.

Получим выражение для семейств линий тока и эквипотенциальных линий нового течения.

Для эквипотенциальных линий ($\varphi = \text{const}$) в цилиндрической системе координат можем записать следующие:

$$\varphi = \int \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} - r \frac{\partial \psi}{\partial r} d\theta;$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{Q}{2\pi}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\ln r) = -\frac{\Gamma}{2\pi r};$$

$$\varphi = \int \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{\partial r}{r} + \frac{\Gamma}{2\pi} d\theta, \quad \varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r + \frac{r}{2\pi} \theta + C_1.$$

Включая 2π в произвольную постоянную, получим

$$Q \ln r + \Gamma \theta = C_1$$

либо

$$\ln r = \frac{\Gamma}{Q} \theta \quad \text{и} \quad r = C_1 e^{-\frac{\Gamma}{Q} \theta}.$$

Аналогично для линий тока

$$r = C_2 e^{\frac{Q}{\Gamma} \theta}.$$

Последние соотношения показывают, что линии тока и эквипотенциальные линии представляют собой семейства взаимно ортогональных логарифмических спиралей. При $Q > 0$ течение направлено к началу координат, при $Q < 0$ – из начала. Полученное течение носит название вихресточника (вихресточка).

1.14. С помощью функции $z = a \left(k_1 \zeta + k_2 + \frac{k_3}{\zeta} \right)$ отобразить отрезок прямой, совпадающей с осью x в плоскости z на плоскость ζ . Построить результирующий контур, изобразить законы распределения скорости и коэффициента давления по контуру при движении жидкости вдоль оси x , если $k_1 = 0,547$, $k_2 = 0,015$, $k_3 = 0,453$.

Решение. Преобразующая функция $\frac{z}{a} \zeta = k_1 \zeta^2 + k_2 \zeta + k_3$, так как по условию задачи $z = x$, то

$$k_1 \zeta^2 + \left(k_2 - \frac{x}{a} \right) \zeta + k_3 = 0.$$

Отсюда

$$\zeta = \frac{\frac{x}{a} - k_2 \pm \sqrt{\left(\frac{x}{a} - k_2 \right)^2 - 4k_1 k_3}}{2k_1} = \frac{\frac{x}{a} - k_2}{2k_1} \pm i \sqrt{\frac{4k_1 k_3}{4k_1^2} - \frac{\left(\frac{x}{a} - k_2 \right)^2}{4k_1^2}}.$$

Так как $\zeta = \xi + i\eta$, то из предыдущего выражения находим

$$\xi = \frac{\frac{x}{a} - k_2}{2k_1}, \quad \eta = \pm \sqrt{\frac{k_3}{k_1} - \frac{\left(\frac{x}{a} - k_2 \right)^2}{4k_1^2}}.$$

Нетрудно убедиться, что $\xi^2 + \eta^2 = \frac{k_3}{k_1} = \text{const}$. Из этого следует, что заданная функция преобразует отрезок прямой, совпадающей с осью x в плоскости z , в окружность с центром в начале координат плоскости ζ и радиусом

$$r_0 = \sqrt{\frac{k}{k}} = \sqrt{\frac{0,453}{0,547}} = 0,91.$$

Точки пересечения окружности с осью абсцисс ξ соответствуют точкам пересечения прямой оси x в плоскости z с абсциссами, определяемыми из условия

$$\xi = \pm r_0 = \pm \sqrt{\frac{k_3}{k_1}}.$$

При этом

$$\pm \sqrt{\frac{k_3}{k_1}} = \frac{\frac{x}{a} - k_2}{2k_1}, \quad \frac{x}{a} = k_2 \pm \sqrt{k_1 k_3},$$

$$x = a(k_2 \pm 2\sqrt{k_1 k_3}) = a(0,015 \pm 0,996),$$

так что $\xi = r_0$ соответствует $x_2 = 1,011a$, а $\xi = -r_0$ соответствует $x_2 = -0,981a$.

Точка пересечения окружности с осью η соответствует точке пересечения прямой с абсциссой, определяемой из условия $\xi = 0$. При этом $\frac{x}{a} = k_2$, так что $x = ak_2 = 0,015a$. Длина

отрезка прямой $l = x_1 - x_2 \approx 2a$.

Потенциал скорости и функция тока при обтекании данного отрезка прямой совпадают с потенциалом скорости и функцией тока прямолинейно-поступательного потока жидкости параллельному оси x . Поэтому $W = W_{01z}$. Подставив это выражение для преобразующей функции, найдем комплексный потенциал результирующего течения

$$\begin{aligned}
 W_2 &= v_{01}a \left(k_1 \zeta + k_2 + \frac{k_3}{\zeta} \right) = \\
 &= v_{01}a \left[k_1 r (\cos \theta + i \sin \theta) + k_2 + \frac{k_3}{r (\cos \theta + i \sin \theta)} \right] = \\
 &= v_{01}a \left[k_1 r \cos \theta + k_2 + \frac{k_3}{r} \cos \theta + i \left(k_1 r \sin \theta - \frac{k_3}{r} \sin \theta \right) \right].
 \end{aligned}$$

Отделив действительную часть от мнимой, получим потенциал скорости и функцию тока результирующего течения

$$\varphi = v_{01}a \left(k_1 r \cos \theta + k_2 + \frac{k_3}{r} \cos \theta \right),$$

$$\psi = v_{01}a \left(k_1 r - \frac{k_3}{r} \right) \sin \theta.$$

Дифференцируя эти функции, находим законы распределения радиальной и тангенциальной составляющих скорости результирующего течения

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_{01}a \left(k_1 - \frac{k_3}{r^2} \right) \cos \theta;$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -v_{01}a \left(k_1 + \frac{k_3}{r^2} \right) \sin \theta.$$

Вдоль результирующего контура $r = r_0 = \sqrt{\frac{k_3}{k_1}}$. Следовательно, для точек этого контура $v_r = 0$.

$$v_\theta = -2ak_1 v_{01} \sin \theta = -1,094a v_{01} \sin \theta = v.$$

Найдем соответствующее выражение для коэффициента давления:

$$p = \frac{p - p_0}{\frac{\rho v_{01}^2}{2}} = 1 - \frac{v^2}{v_{02}^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta,$$

где $v_{02} = ak_1 v_{01}$ – скорость в точке, достаточно удаленной от результирующего контура.

Эту скорость можно получить, подставив в выражения для v_r и v_θ значения $r = \infty$ и $\theta = \pi$. Тогда $v_r = -ak_1 v_{01} = -0,54av_{01}$.

Законы распределения скорости и коэффициента давления по результирующему контуру при $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ изображены на рис. 1.11.

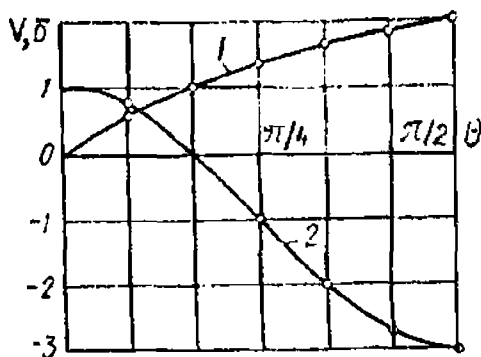


Рис.1.11. Закон распределения скорости:

1 – по результирующему контуру; 2 – то же для коэффициента давления;
о – расчетные точки

ЗАДАЧИ

1.15. Показать, что для движения, задаваемого проекциями скоростей $u_x = at - by$, $u_y = bx - at$, $u_z = 0$, линии тока – это окружности.

1.16. Получить выражение для проекций локальных ускорений жидкой частицы, если уравнения движения имеют вид

$$x = \ln \sin t, \quad y = \sin^2 t, \quad z = 0.$$

1.17. Определить ускорение жидкой частицы, если поле задано проекциями скоростей: $u_x = b \cdot \cos bt$, $u_y = b \cdot \sin bt$, $u_z = 0$.

1.18. Определить ускорение жидкой частицы в точке пространства с координатами $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$, если поле задано проекциями скоростей $u_x = 2x$, $u_y = y^2 + 2$, $u_z = z^3 + 1$.

1.19. Движение несжимаемой жидкости задано проекциями скоростей $u_x = -3y + 2$, $u_z = 2z + 1$. Установить вид выражения для проекции скорости на ось x , если в начале координат $u_x = 2$.

1.20. Движение задано проекциями скоростей $u_x = -a \sin t$, $u_y = b \cos t$. Найти уравнение линии тока, а также траекторию частицы, проходящую в момент времени $t = 0$ через точку пространства с координатами $x = a$, $y = b$.

1.21. Показать, что если поле задано проекциями скоростей $u_x = x + t$, $u_y = -y + t$, то линии тока представляют семейство гипербол. Получить уравнение траектории, проходящей в момент $t = 0$ через точку с координатами $x = -1$, $y = -1$. Построить линию тока и траекторию.

1.22. Определить расход жидкости, вытекающей через боковую поверхность цилиндра единичной толщины ($z = 1$), ось которого проходит через начало координат, если радиус цилиндра $R = 0,1$ м. Радиальную скорость течения считать постоянной и равной $u = 3$ м/с.

1.23. Проверить возможность существования движения несжимаемой жидкости для поля, заданного проекциями скоростей

$$u_x = -6(x + y)^2, \quad u_y = 2y + z^3, \quad u_z = x^2 + y^2 + 4z.$$

1.24. Доказать, что для поля, заданного проекциями скоростей $u_x = y(x^2 + y^2)$, $u_y = -x(x^2 + y^2)$, $u_z = 0$, линии тока представляют собой окружности.

1.25. Определить скорость вращения жидкой частицы в точке пространства с координатами $x = 3$, $y = 2$, $z = 0$, если поле задано проекциями скоростей $u_x = 2xy$, $u_y = 4yz$, $u_z = 2xz$.

1.26. Получить выражение для линий тока, если проекции скоростей $u_x = xy$, $u_y = -2x(x - 1)$.

1.27. Найти уравнение для линии тока, проходящей через точку с координатами $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$, если проекции скоростей $u_x = x$, $u_y = -y$, $u_z = -2z$.

1.28. Может ли поле скоростей несжимаемой жидкости обладать потенциалами, если

$$\text{а) } \varphi = \frac{2x}{x^2 + y^2}; \quad \text{б) } \varphi = 2xy; \quad \text{в) } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Если движение не потенциальное, найти выражения проекций скорости и построить соответствующие линии тока.

1.29. При каких значениях постоянных a , b , c возможны движения несжимаемой жидкости, если поля скоростей заданы выражениями: а) $u_x = ax$, $u_y = by$; б) $u_x = ax + by$, $u_y = cx + dy$, $u_z = 0$? Каков характер этих движений?

1.30. Исследовать плоские течения жидкости с заданными проекциями скоростей

$$\text{а) } u_x = \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad u_y = \frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$\text{б) } u_x = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad u_y = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2};$$

$$\text{в) } u_x = ax^2, \quad u_y = -2axy;$$

$$\text{г) } u_x = 3(x^2 - y^2), \quad u_y = -6xy;$$

$$\text{д) } u_x = ay, \quad u_y = bx.$$

1.31. Аналитическим сложением плоского источника с расходом $Q = 4\pi \text{ м}^2/\text{с}$ и потенциального вихря с циркуляцией

$\Gamma = 2\pi \text{ м}^2/\text{с}$ определить форму результирующего течения жидкости и его скорость в точках с координатами: а) $x_1 = 0,5 \text{ м}$; $y_1 = 0,2 \text{ м}$; б) $x_2 = 1,5 \text{ м}$; $y_2 = 1,0 \text{ м}$.

1.32. Аналитическим сложением плоского источника с расходом $Q = 10\pi \text{ м}^2/\text{с}$ и прямолинейно-поступательного потока со скоростью $u_0 = 5 \text{ м/с}$ определить форму результирующего потока и его скорость в точках с координатами $x_1 = y_1 = 0,2 \text{ м}$ и $x_2 = 0, y_2 = 2,0 \text{ м}$.

1.33. Исследовать течение жидкости, заданное комплексным потенциалом $W = z^2$. Определить расход жидкости ΔQ , протскающей между точками $z_1 = 5 + i$ и $z_2 = 5 + 2i$, и разность давлений Δp между этими точками.

1.34. Комплексный потенциал течения задан выражением $W = \frac{1}{z}$. Найти линии тока и эквипотенциальные линии, определить комплексную скорость и скорость в точке $z = 4 + 3i$.

1.35. Показать, что конформное преобразование плоскости z в плоскость ζ вида $\zeta = c \left(z + \frac{1}{z} \right)$, где c – постоянная, переводит окружность радиуса R на плоскости z в эллипс на плоскости ζ .

1.36. В табл. 1.5 представлены условия задач. Необходимо построить графики линий тока и линий равного потенциала.

Входящие в задачи постоянные a, b, c, a_1 и n могут быть как вещественными, так и мнимыми, и их значение определяется преподавателем.

1.37. Комплексный потенциал при обтекании с циркуляцией имеет вид

$$W(z) = u_\infty \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi \cdot i} \ln z$$

Требуется:

– определить тип обтекания;

- вычислить и построить функцию тока для трех характерных значений постоянных;
- рассчитать распределение окружной скорости на поверхности цилиндра;
- построить графики зависимости коэффициента давления от угла Θ ;
- рассчитать коэффициент подъемной силы, если заданы функции из табл. 1.6.

Таблица 1.5

Условия задач 1.36

№	$W(z)$
1	$az + b$
2	$az^2 + b$
3	$az^3 + b$
4	$a(z+c)^n + b$
5	$\frac{a}{z+a_1} + b$
6	$\frac{a}{(z+a_1)^2} + b$
7	$\frac{a}{(z+a_1)^3} + b$
8	$\frac{a}{(z+a_1)^n} + b$
9	$\exp(az) + b$
10	$a \ln(z+a_1) + b$
11	$a \ln(z+a_1) + b \ln(z-a_1)$
12	$az + b + b_1 \ln(z-a_1)$

№	$W(z)$
13	$az^n + b + b_1 \ln(z-a_1)$
14	$\frac{b}{z+a} + \frac{b_1}{z-a_1}$
15	$az + b \ln(z+a_1) - b \ln(z-a_1)$
16	$az + \frac{b}{z} + c \ln(z-a_1)$
17	$az^n + b \ln(z+a_1)$
18	$a \exp(z) + b \ln z$
19	$a \exp(z) + bz$
20	$\sin(z+a)$
21	$\cos(z+a)$
22	$\operatorname{tg}(z+a)$
23	$az + b \sin(z+a_1)$
24	$az + b \cos(z+a_1)$

Условия задач 1.37 при обтекании с циркуляцией

№	Радиус цилиндра r_0 , м	Скорость потока u_∞ , м/с	Циркуляция скорости Γ , м ² /с
1	0,25	2	$\pm 1,0$
2	0,50	5	$\pm 2,5$
3	0,75	10	$\pm 2,0$

1.38. Свободный вихрь с циркуляцией Γ находится в точке с координатами $x_1 = 0$, $y_1 = h$. Верхняя полуплоскость занята идеальной несжимаемой жидкостью, а ось абсцисс является непроницаемой границей.

Определить траекторию движения вихря и скорость его перемещения.

1.39. Вне окружности с центром в начале координат и радиусом r_0 (которая является сечением бесконечно длинного цилиндра) в точке с координатами $x = -R$, $y = 0$ в момент времени $t = 0$ находится свободный вихрь с циркуляцией Γ . По какой траектории будет перемещаться вихрь в идеальной несжимаемой жидкости и в какой точке он будет в момент времени $t = \tau$?

1.40. Плоское потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости образовано сложением двух потоков: плоскопараллельного с комплексной скоростью $W_0 = u_0 - i v_0$ и потока, вызванного цепочкой вихрей, расположенных вдоль оси ординат с шагом l .

Определить W_0 и циркуляцию вихрей Γ , если заданы комплексные скорости потока в бесконечности слева $W_1 = u_1 - i v_1$ перед цепочкой вихрей и в бесконечности справа $W_2 = u_2 - i v_2$ за цепочкой вихрей.

1.41. Канал прямоугольного сечения вращается вокруг вертикальной оси z , перпендикулярной продольной оси канала, с угловой скоростью ω . Вдоль канала движется потенциальный поток идеальной несжимаемой жидкости.

Найти законы распределения скорости и давления в канале, если плотность жидкости ρ .

1.42. Определить подъемную силу Жуковского F_y и момент M относительно центра, действующие на бесконечно тонкую пластину хордой b , обтекаемую под углом атаки α плоскопараллельным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Скорость жидкости u_∞ в бесконечности, плотность жидкости ρ .

Задачу решить методом дискретных вихрей.

1.43. Задана решетка плоских пластин с хордой $b = 50$ мм и шагом $t = 80$ мм. Угол установки пластин $\beta_y = 0^\circ$ (пластины перпендикулярны оси решетки – ось ординат). Скорость в бесконечности слева перед решеткой пластин $u_1 = 20$ м/с и угол направления скорости (относительно оси абсцисс) $\alpha = 10^\circ$. Найти подъемную силу Жуковского при безотрывном обтекании пластин потоком идеальной несжимаемой жидкости плотностью $\rho = 1,2$ кг/м³.

2. ОДНОМЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ГАЗА

При скоростях потока, не превышающих 70 м/с, сжимаемостью газа можно пренебречь и производить расчет по уравнениям для капельной жидкости. Относительная погрешность расчета при этом не превышает 1 %.

При изоэнтропическом процессе параметры газа (давление и плотность) связаны соотношением

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const} . \quad (2.1)$$

Здесь

$$k = \frac{c_p}{c_v} ,$$

где c_p – теплоемкость при постоянном давлении;

c_v – теплоемкость при постоянном объеме.

Для воздуха $k = 1,405$.

В этих условиях при установившемся движении для струйки невязкой сжимаемой жидкости уравнение Бернулли имеет вид

$$gz + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const} . \quad (2.2)$$

Воспользовавшись уравнением (2.1), уравнение (2.2) запишем в следующем виде:

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \frac{RT}{k-1} = \text{const} \quad (2.3)$$

либо

$$gz + \frac{u^2}{2} + \frac{k}{k-1} RT = \text{const} , \quad (2.4)$$

где R – газовая постоянная

В большинстве случаев слагаемым gz можно пренебречь и уравнения (2.2), (2.3), (2.4) принимают вид

$$\frac{u^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \text{const}; \quad (2.5)$$

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \frac{RT}{k-1} = \text{const}. \quad (2.6)$$

$$\frac{u^2}{2} + \frac{k}{k-1} RT = \text{const}. \quad (2.7)$$

При расчетах используют одно из уравнений (2.5)–(2.7) в зависимости от характера решаемой задачи.

Одним из основных параметров газового потока является *скорость звука*

$$a = \sqrt{kRT}.$$

Отношение скорости течения газа u к скорости звука в данной точке a называется числом Маха

$$M = \frac{u}{a}.$$

Используя уравнение сплошности

$$Q_m = \rho u A,$$

уравнение состояния

$$\frac{p}{\rho} = RT$$

и уравнение энергии (2.5), получаем

$$\frac{dA}{A} = \frac{du}{u} (M^2 - 1)$$

либо

$$\frac{dA}{A} + (1 - M^2) \frac{du}{u} = 0. \quad (2.8)$$

Если $1 - M^2 > 0$, то знаки при $\frac{dA}{A}$ и $\frac{du}{u}$ противоположны. Следовательно, при $M < 1$ скорость потока с уменьшением сечения увеличивается. Если $1 - M^2 < 0$, то знаки при $\frac{dA}{A}$ и $\frac{du}{u}$ одинаковы. Тогда при $M > 1$ (сверхзвуковые скорости) скорость потока увеличивается с увеличением сечения.

Уравнение (2.8) является частным случаем закона обращения воздействия. Важным следствием этого закона является то, что для придания дозвуковому потоку сверхзвуковой скорости необходимо пропустить его через сопло Лаваля, состоящее из конфузорной части, на выходе которой устанавливается звуковая скорость, и диффузорной части, где происходит ускорение потока.

При изэнтропическом истечении скорость на выходе из сопла может быть найдена по формуле

$$u_2 = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_1}{\rho} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}.$$

Массовый расход газа при изэнтропическом истечении через сопло можно определить по формуле Сен-Венана-Ванцеля

$$Q_m = A \sqrt{\frac{2k}{k-1} p_0 \rho_0 \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]},$$

где p_0 и ρ_0 – давление и плотность газа в резервуаре, из которого происходит истечение;

p – давление на выходе из сопла.

При истечении через сужающееся сопло максимум расхода газа имеет место при критическом отношении давлений

$$\beta_{кр} = \left(\frac{p}{p_0} \right)_{кр} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

Для воздуха $k = 1,405$, $\beta_{кр} = 0,528$.

При критическом и сверхкритическом режимах истечения, т. е. при $\beta < \beta_{кр}$, приближенно массовый расход может быть определен по формуле

$$Q_m = A \sqrt{k p_0 \rho_0 \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}}.$$

Сверхзвуковая скорость может возникнуть и при истечении через отверстие. Однако этот процесс сопровождается мощным вихреобразованием, и потери энергии будут значительно больше, чем при истечении газа через сопло Лавала.

При обтекании твердого тела около- или сверхзвуковым газовым потоком возникает аэродинамический нагрев. Оценить этот нагрев можно по температуре торможения газового потока

$$T^* = T \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right),$$

где T – температура набегающего газового потока.

Температура торможения наблюдается только в передней критической точке или линии обтекаемого тела, где происходит полное торможение газа. Средняя температура поверхности обтекаемого тела

$$T = \beta' T \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right),$$

где β' – коэффициент, зависящий от формы тела (при поперечном обтекании цилиндра $\beta' \approx 0,85$).

В теплоэнергетике аэродинамический нагрев обязательно должен учитываться при измерении температуры газового потока, так как температурные датчики, обтекаемые потоком, нагреваются до температуры большей, чем температура неза торможенного газа. Аэродинамический нагрев необходимо учитывать также при расчете на прочность лопаток турбин и компрессоров.

В отличие от дозвуковых в сверхзвуковых газовых потоках возникает концентрация возмущений при обтекании твердых препятствий (тел).

При обтекании малых препятствий в сверхзвуковых газовых потоках возникают слабые волны (волны Маха), которые отходят от препятствий под углом φ к направлению потока. Угол может быть определен по формуле

$$\sin \varphi = \frac{1}{M}.$$

Следовательно, по углу наклона слабой волны, зная скорость звука, можно определить скорость газового потока.

При обтекании сверхзвуковым газовым потоком препятствий сравнительно больших размеров в этом потоке возникают более значительные возмущения – скачки уплотнения или ударные волны. При прохождении через эти зоны сильного возмущения в газе возникают потери механической энергии.

Потери энергии при сверхзвуковом обтекании твердого тела связывают с дополнительным сопротивлением движению — волновым сопротивлением.

Для расчета газовых потоков часто используют газодинамические функции. Основные соотношения, устанавливающие связь газодинамических функций имеют следующий вид:

$$\tau = T/T_0 = 1 - \lambda^2(\kappa - 1) / (\kappa + 1);$$

$$\pi = P/P_0 = \left[1 - \lambda^2(\kappa - 1) / (\kappa + 1) \right]^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}};$$

$$\varepsilon = \rho/\rho_0 = \left[1 - \lambda^2(\kappa - 1) / (\kappa + 1) \right]^{\frac{1}{\kappa - 1}};$$

$$q = [0,5(\kappa + 1)]^{\frac{1}{\kappa - 1}} \lambda \left[1 - \lambda^2(\kappa - 1) / (\kappa + 1) \right]^{\frac{1}{\kappa - 1}};$$

$$f_0 = \frac{\kappa \lambda^2}{\kappa - 1} \left[1 - \lambda^2(\kappa - 1) / (\kappa + 1) \right]^{\frac{1}{\kappa - 1}};$$

$$\sigma = [0,5(\kappa + 1)]^{\frac{1}{\kappa + 1}} \lambda \left[1 - \lambda^2(\kappa - 1) / (\kappa + 1) \right]^{-1};$$

$$M^2 = 2(\kappa + 1)^{-1} \lambda^2 \left[1 - \lambda^2(\kappa - 1) / (\kappa + 1) \right]^{-1}$$

Удельный расход q служит для связи безразмерных параметров потока с формой канала, где движется газ. Эта величина представляет собой расход на единицу площади, выраженный в долях максимального возможного удельного расхода и связывает относительную площадь канала с безразмерными скоростями. Использование газодинамических функций существенно облегчает решение задач одномерного потока газа.

Используя газодинамические функции массовый расход газа можно определять по формуле

$$Q_m = AqFp_0 / \sqrt{T_0}, \quad (2.9)$$

где $A = \sqrt{\frac{k}{R} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}}$ – коэффициент, значение которого для воздуха составляет $0,0404 \text{ (кг К / Дж)}^{0,5}$.

Формула (2.9) справедлива и для определения массового расхода при движении реального газа в каналах, когда поле скоростей в поперечном сечении имеет произвольную форму. В этом случае нарушение условий одномерного потока учитывается коэффициентом расхода μ .

$$Q_m = \mu q F p_0 / \sqrt{T_0}.$$

При решении задач с использованием газодинамических функций необходимо помнить, что значения их отличаются для газов с различным значением показателя адиабаты k .

При моделировании гидрогазодинамических процессов используют основные числа и критерии подобия, которые выбираются в зависимости от типа задач и приведены в табл. 2.1.

Основные числа и критерии подобия
гидрогазодинамических процессов

Критерий	Сим-вол	Наименование	Пояснение
1	2	3	4
ul/ν	Re	Число Рейнольдса	Характеризует режим движения потока, являясь мерой соотношения в потоке сил инерции и молекулярного трения (вязкости)
u/a	M	Число Маха	Мера соотношения между скоростями течения среды и распространения в ней упругих деформаций
l/ut	Sh	Число Струхала	Мера соотношения сил инерции стационарного течения и сил инерции нестационарного движения
u^2/gl	Fr	Число Фруда	Мера соотношения сил инерции и тяжести в однородном потоке
$\sqrt{\frac{u^2}{u_0^2}}$	Et	Степень турбулентности	Мера соотношения сил турбулентного трения и сил инерции
$\rho u^2/E$	C	Критерий Коши	Мера соотношения аэродинамических сил потока и сил упругости обтекаемого тела
$\Delta p/\rho u^2$	Eu	Число Эйлера	Критерий подобия полей давления является мерой отношения сил давления и инерции в потоке
gl^3/ν^2	Ga	Число Галилея	Мера соотношения сил молекулярного трения и сил тяжести в потоке
$\frac{\sigma}{g(\rho - \rho^*)l^2}$	We	Критерий Вебера	Мера влияния давления, создаваемого поверхностным слоем молекул

1	2	3	4
ul/a	Re	Число Пекле	Мера соотношения интенсивности переноса теплоты конвекцией и интенсивности переноса теплоты теплопроводностью
$v/a = Pe/Re$	Pr	Число Прандтля	Мера подобия температурных полей и скоростных в потоке (при $Pr = 1$ и $\text{град } p = 0$ поля подобны)

ПРИМЕРЫ

2.1. Определить необходимый внутренний диаметр вытяжной трубы $H = 120$ м для удаления горячих газов при массовом расходе $Q_m = 100$ кг/с. Температура наружного воздуха $t = 20$ °С, барометрическое давление у поверхности земли $p_a = 1,026 \cdot 10^5$ Па. Температура горячих газов $t_r = 250$ °С, начальное их давление $p_1 = 0,997 \cdot p_a$, плотность газов $\rho_r = 1,603$ кг/м³ при $t = 0$ и $p_r = 100$ кПа. Шероховатость внутренней поверхности трубы $\Delta = 2$ мм.

Решение. Учитывая незначительность изменения давления и плотности газов на входе и выходе из трубы, воспользуемся уравнением Бернулли без учета сжимаемости.

Давление на выходе из трубы

$$p_2 = p_a - \rho_a g H,$$

где ρ_a и p_a – параметры воздуха у поверхности земли.

$$\rho_a = 1,293 \frac{p_a T_0}{p_2 T} = \frac{1,293 \cdot 1,026 \cdot 10^5}{100 \cdot 10^3} \frac{273}{293} \text{ кг/м}^3 = 1,24 \text{ кг/м}^3,$$

$$p_a = (1,026 \cdot 10^5 - 1,24 \cdot 9,8 \cdot 120) \text{ Па} = 1,011 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Начальная плотность горячих газов

$$\rho_1 = \rho_r \frac{p_1 T_0}{p_r T} = 1,603 \frac{0,997 \cdot 1,026 \cdot 10^5}{100 \cdot 10^3} \frac{273}{523} \text{ кг/м}^3 = 0,856 \text{ кг/м}^3.$$

Из-за отсутствия данных по составу горячих газов примем, что их динамическая вязкость такая же, как и у воздуха. Тогда при $t_1 = 250^\circ\text{C}$ и $\rho'_1 = 0,653 \text{ кг/м}^3$ (атмосферное давление) $\nu' = 43,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; при $t_1 = 250^\circ\text{C}$ и $\rho = 0,856 \text{ кг/м}^3$

$$\nu_1 = \nu'_1 \frac{\rho'_1}{\rho} = 43,5 \cdot 10^{-6} \frac{0,653}{0,856} \text{ м}^2/\text{с} = 33,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Далее используем метод подбора, приняв три значения диаметра вытяжной трубы: $d_1 = 3 \text{ м}$, $d_2 = 4 \text{ м}$, $d_3 = 5 \text{ м}$.

Для этих значений средняя скорость горячих газов в трубе, считая $\rho_1 = 0,856 \text{ кг/м}^3$ на всем протяжении трубы,

$$\nu_1 = \frac{4Q_m}{\rho_1 \pi d_1^2} = \frac{4 \cdot 100}{0,856 \cdot 3,14 \cdot 3^2} \text{ м/с} = 16,5 \text{ м/с},$$

аналогично $\nu_2 = 9,3 \text{ м/с}$, $\nu_3 = 5,95 \text{ м/с}$.

Соответствующие числа Рейнольдса

$$\text{Re}_1 = \frac{\nu_1 d_1}{\nu_1} = \frac{16,5 \cdot 3}{33,2 \cdot 10^{-6}} = 15,2 \cdot 10^5,$$

$$\text{Re}_2 = 11,5 \cdot 10^5, \quad \text{Re}_3 = 9,18 \cdot 10^5.$$

На границе между областями смешанного и шероховатого трения

$$\text{Re}_{\text{гр}}^1 = \left(120 \frac{d_1}{\Delta}\right)^{1,125} = \left(120 \frac{3}{2 \cdot 10^{-3}}\right)^{1,125} = 8,32 \cdot 10^5,$$

$$\text{Re}_{\text{гр}}^2 = \left(120 \frac{d_2}{\Delta}\right)^{1,125} = \left(120 \frac{4}{2 \cdot 10^{-3}}\right)^{1,125} = 11,2 \cdot 10^5,$$

$$\text{Re}_{\text{гр}}^3 = \left(120 \frac{d_3}{\Delta}\right)^{1,125} = \left(120 \frac{5}{2 \cdot 10^{-3}}\right)^{1,125} = 14,8 \cdot 10^5$$

В двух первых случаях $\text{Re} > \text{Re}_{\text{гр}}$ и для определения гидравлического коэффициента трения λ воспользуемся формулой Мурина

$$\lambda_1 = \frac{1}{\left(1,14 + 2 \lg \frac{d_1}{\Delta}\right)^2} = \frac{1}{\left(1,14 + 2 \lg \frac{3}{2 \cdot 10^{-3}}\right)^2} = 0,0178;$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\left(1,14 + 2 \lg \frac{d_2}{\Delta}\right)^2} = \frac{1}{\left(1,14 + 2 \lg \frac{4}{2 \cdot 10^{-3}}\right)^2} = 0,0167.$$

Поскольку $10^5 < \text{Re}_3 < \text{Re}_{\text{гр}}^3$ при $d_3 = 5$ м, то используем формулу Альтшуля

$$\lambda_3 = 0,11 \left(\frac{\Delta}{d_3} + \frac{68}{\text{Re}_3}\right)^{0,25} = 0,11 \left(\frac{2 \cdot 10^{-3}}{5} + \frac{68}{9,18 \cdot 10^5}\right)^{0,25} = 0,0162.$$

Учитывая, что при начальном давлении $p_1 = 1,021 \cdot 10^6$ Па скорость газов $v = 0$, запишем уравнение Бернулли для начального и конечного сечений газового потока.

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho_1 g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho_1 g} + \frac{\alpha v_2^2}{2g} + \lambda \frac{H}{d} \cdot \frac{v_2^2}{2g}.$$

Поскольку $z_1 - z_2 = H$, то

$$\frac{p_1}{\rho_1 g} = H + \frac{p_a}{\rho_1 g} - \frac{p_a}{\rho_1} H + \frac{\alpha v_2^2}{2g} + \lambda \frac{H}{d} \cdot \frac{v_2^2}{2g}$$

Отсюда

$$H = \frac{\frac{p_a - p_1}{\rho_1 g} + \frac{\alpha v_2^2}{2g}}{\frac{p_a}{\rho_1} - 1 - \frac{\lambda}{d} \frac{v_2^2}{2g}}$$

Подставив в это уравнение данные, соответствующие трем выбранным значениям d , найдем высоты H бимовой трубы.

$$H_1 = 150 \text{ м}, \quad H_2 = 99,5 \text{ м}, \quad H_3 = 90,3 \text{ м}.$$

Строим график зависимости $H = f(d)$ и находим $d = 3,5 \text{ м}$ (рис. 2.1).

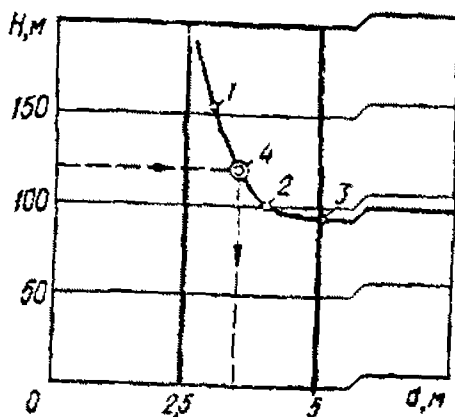


Рис.2.1. График зависимости $H = f(d)$:
1, 2, 3 – расчетные точки; 4 – точка, соответствующая решению

2.2. При истечении кислорода из сосуда термометр, установленный в некотором сечении газовой струи, показывает температуру $t' = 200$ °С. Угол Маха в этом же сечении $\varphi = 45^\circ$. Температура газа в сосуде $t_0 = 250$ °С. Определить коэффициент неполноты торможения чувствительной части термометра, скорость и истинную температуру газовой струи в данном сечении.

Решение. Температура торможения газовой струи равна температуре газа в сосуде. Коэффициент неполноты торможения

$$\beta_1 = \frac{273 + t'}{273 + t_0} = \frac{273 + 200}{273 + 250} = 0,904.$$

Температура, показываемая термометром, связана с истинной температурой газовой струи соотношением

$$T' = \beta_1 T \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right),$$

где
$$M = \frac{1}{\sin \varphi} = \frac{1}{\sin 45^\circ} = 1,414.$$

Для кислорода при $t = 200$ °С коэффициент $k = \frac{c_p}{c_v} = 1,37$,

тогда

$$T = \frac{T'}{\beta_1 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)} = \frac{473}{0,904 \left(1 + \frac{1,37-1}{2} 1,414^2 \right)} \text{ К} = 382 \text{ К}$$

При этой температуре скорость распространения звука $a = \sqrt{kRT} = \sqrt{1,37 \cdot 260 \cdot 382} \text{ м/с} = 369 \text{ м/с}$, а скорость газовой струи

$$v = aM = 369 \cdot 1,414 \text{ м/с} = 522 \text{ м/с}.$$

2.3. Определить, при каком значении числа Маха набегающего потока наступит волновой кризис при поперечном потенциальном обтекании круглого цилиндра потоком воздуха температурой $t_0 = 100^\circ\text{C}$ и вычислить температуру, до которой нагревается цилиндр в передней критической точке. Считать, что распределение скорости аналогично распределению ее в несжимаемой жидкости.

Решение. При обтекании круглого цилиндра наибольшая скорость воздушного потока наблюдается в точках $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$.

При потенциальном обтекании круглого цилиндра и у его поверхности $u = u_\infty = -2u_0 \sin \theta$. В рассматриваемых точках $|u| = 2u_0$. Здесь, по мере увеличения скорости потока, в первую очередь она становится равной скорости звука $a = \sqrt{kRT}$. Температуру потока в этом месте найдем из уравнения энергии, записанного для двух сечений элементарной струйки газа, протекающей вдоль поверхности цилиндра: перед цилиндром и в месте, где скорость струйки максимальна, т. е. из уравнения

$$\frac{k}{k-1} RT_0 + \frac{u_0^2}{2} = \frac{k}{k-1} RT + \frac{Au_0^2}{2}.$$

Отсюда $T = T_0 - \frac{3(k-1)}{2kR} u_0^2$, а при $2u_0 = c = \sqrt{kRT}$ имеем

$$T = T_0 - \frac{3(k-1)kRT_0}{2kR \cdot 4}, \text{ откуда } T = \frac{T_0}{1 + \frac{3}{8}(k-1)} = \frac{373}{1 + \frac{3}{8}(1,4-1)} \text{ К} = 324 \text{ К}.$$

Тогда скорость набегающего потока

$$u_0 = \frac{1}{2} \sqrt{kRT} = \frac{1}{2} \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 324} \text{ м/с} = 180 \text{ м/с}.$$

При $T_0 = 373$ К скорость звука

$$a = \sqrt{kRT_0} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 373} \text{ м/с} = 387 \text{ м/с.}$$

Число Маха, при котором наступает волновой кризис:

$$M_0 = \frac{u_0}{a_0} = \frac{180}{387} = 0,465.$$

В передней критической точке цилиндр нагревается до температуры торможения потока

$$T^* = T_0 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_0^2 \right) = 373 \left(1 + \frac{1,4-1}{2} 0,465^2 \right) \text{ К} = 389 \text{ К.}$$

ЗАДАЧИ

2.4. Определить, какую высоту должна иметь дымовая труба для удаления горячих газов при массовом расходе $Q_m = 60$ кг/с с начальной температурой $t_1 = 200$ °С, начальным давлением $p_1 = 0,998$ кПа и плотностью $\rho_0 = 1,5$ кг/м³ при $t_0 = 0$ °С, диаметром трубы $d = 2$ м, барометрическим давлением у поверхности земли $p_a = 0,986 \cdot 10^5$ Па.

2.5. Определить необходимый диаметр хорошо изолированного воздухопровода для массового расхода воздуха $Q_m = 278$ кг/с, если $p_1 = 0,3$ МПа, $t_1 = 100$ °С, $p_1 = p_2 = 0,986 \cdot 10^5$ Па, $l = 500$ м, $\Delta = 0,5$ мм. Определить также скорость и температуру воздуха на выходе из воздухопровода.

2.6. Рассчитать и построить график зависимости (рис. 2.2) давления в начале воздухопровода от шероховатости его внутренней поверхности, если $d = 1$ м, $t_1 = 100$ °С, $l = 10$ км, $Q_m = 200$ кг/с. Абсолютное давление в конце воздухопровода $p_2 = 10$ кПа.

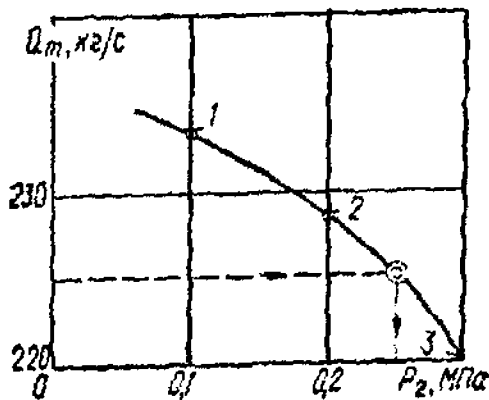


Рис. 2.2. График зависимости $Q_m = f(p_2)$:

1, 2, 3 – расчетные точки; 4 – точка, соответствующая решению

2.7. По воздухопроводу воздух движется со сверхзвуковой скоростью u . Показание ртутного термометра $t' = 150^\circ\text{C}$, коэффициент неполноты торможения чувствительной части термометра $\beta' = 0,8$. Определить истинную температуру и скорость потока воздуха при таких углах Маха φ : а) 25° ; б) 27° ; в) 30° ; е) 32° ; д) 35° .

2.8. Определить минимально необходимый верхний предел измерения термометра для определения температуры газового потока при максимальной скорости $u = 1000$ м/с, если при этой скорости угол Маха $\varphi = 30^\circ$. Коэффициент неполноты торможения чувствительной части термометра $\beta' = 0,7$. Состав газа: O_2 , H_2 , N_2 , воздух, CO_2 , CO . Определить также истинную температуру газового потока.

2.9. Определить до какой температуры t^* нагревается передняя часть трубы, обтекаемой сверхзвуковым потоком воздуха температурой $t = 300^\circ\text{C}$, если вдали от трубы угол Маха равен: а) 30° ; б) 28° ; в) 25° ; г) 22° ; д) 20° .

2.10. Определить, во сколько раз максимальная скорость воздуха у поверхности обтекаемого тела превышает скорость набегающего потока, если в момент наступления волнового

кризиса скорость набегающего потока $u_0 = 200$ м/с, а температура в передней критической точке тела t^* равна: а) 162; б) 180; в) 190; г) 200; д) 210 °С.

2.11. Определить температуру потока углекислого газа вдали от поверхности круглого цилиндра, если при наступлении волнового кризиса температура в передней критической точке цилиндра t^* равна: а) 218°; б) 230°; в) 250°; г) 270°; д) 300 °С.

2.12. На воздухопроводе диаметром 100 мм установлен расходомер типа труба Вентури с диаметром узкого сечения 70 мм. Считая течение идеальным, определить расход воздуха по трубопроводу, если известно, что перепад давлений в расходомере составляет 50 мм водяного столба, а давление и температура на входе в расходомер $p = 0,147$ МПа; $T = 293$ К.

2.13. Температура газа в камере сгорания двигателя 2800 К, газовая постоянная $R = 343$ Дж/(кг К), показатель адиабаты $k = 1,30$. Определить критическую скорость звука и скорость звука заторможенного газа. С какой скоростью распространяются слабые возмущения в камере сгорания двигателя.

2.14. На входе в цилиндрический участок трубы поток имеет температуру $T_1 = 600$ К и $\lambda_1 = 0,4$. На последующем участке трубы того же диаметра газ нагревается до $T_2 = 1200$ К. Определить, пренебрегая трением, коэффициент скорости λ_2 после отвода тепла к газу.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Емцев, Б. Т. Техническая гидромеханика: учебник для вузов по специальности «Гидравлические машины и средства гидроавтоматики» / Б. Т. Емцев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1987. – 420 с.
2. Аэродинамика в вопросах и задачах: учебное пособие для вузов / Н. Ф. Краснов [и др.]; под ред. Н. Ф. Краснова. – М.: Высш. шк., 1985. – 759 с.
3. Самойлович, Г. С. Сборник задач по гидроаэродинамике: учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности «Турбиностроение» / Г. С. Самойлович, В. В. Нитусов. – М.: Машиностроение, 1986. – 152 с.
4. Зарянкин, А. Е. Сборник задач по гидрогазодинамике / А. Е. Зарянкин, В. Ф. Касилов. – М.: Издательство МЭИ, 1995. – 336 с.
5. Грабовский, А. М. Гидромеханика и газовая динамика: сборник задач / А. М. Грабовский, К. Ф. Иванов, Г. М. Дунчевский. – Киев: Вища шк.; Головное изд-во, 1987. – 64 с.
6. Кудинов, А.А. Техническая гидродинамика: учебное пособие для вузов по направлению «Теплоэнергетика» / А.А. Кудинов. – М.: Машиностроение, 2008. – 367 с.

Учебное издание

ВЕРЕНИЧ Иван Андреевич

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
(Кинематика жидкости.
Одномерное течение газа)

Учебно-методическое пособие к практическим занятиям
для студентов специальности 1-36 01 07
«Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин»

Редактор И.Ю. Никитенко
Технический редактор О.В. Дубовик
Компьютерная верстка О.В. Дубовик

Подписано в печать 07.10.2008.

Формат 60×84¹/₁₆. Бумага офсетная.

Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 3,78. Уч.-изд. л. 2,95. Тираж 100. Заказ 843.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Белорусский национальный технический университет.

ЛИ № 02330/0131627 от 01.04.2004.

Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.