УДК 536.2+512.8

Уравнение теплопроводности в двойных и дуальных числах

Логвинов М.Д.
Белорусский национальный технический университет

Дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие физические процессы переноса, обычно записывают в действительных (вещественных) числах и реже в комплексной форме.

В последнее время в различных исследованиях по физике и механике стали использовать аппарат гиперкомплексных чисел. В частности, к гиперкомплексным наряду с комплексными (эллиптическими) числами относятся также двойные (гиперболические) числа $z = a + bj$, $j^2 = 1$ (a , b – вещественные) и дуальные (параболические) числа $z = a + b\varepsilon$, $\varepsilon^2 = 0$. дуальные и двойные числа реже используют в прикладных науках ввиду наличия у них делителей нуля (не всегда определена операция деления).

Рассмотрим одномерное параболическое уравнение теплопроводности без источников для температуры T: $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ в дуальных и двойных числах. Трехмерный случай требует использования поличисел.

Пусть $z = x + t\varepsilon$ дуальное число, где x – координата, t – время. Рассмотрим цилиндр с площадью поперечного сечения S, расположенный вдоль оси X, с координатами x, $x + dx$ в среде с плотностью ρ, удельной теплоемкостью C и коэффициентом теплопроводности λ. Для нагревания среды в цилиндре на величину dT необходимо количество теплоты $dQ_1 = C\rho SdxdT = C\rho SdxT'(z)dz$. Это тепло возникает за счет разности тепловых потоков через основание цилиндра за время εdt:

$$dQ_2 = \left(-\lambda S\frac{\partial T}{\partial x} - \lambda S\left(-\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}dx \right) \right)\varepsilon dt\,.$$

Приравнивая $dQ_1 = dQ_2$ и учитывая соотношения $\dfrac{\partial T}{\partial x} = T'(z)$, $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = T''(z)$, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение $T' = aT''$, $a = \lambda/C\rho$ вместо исходного уравнения теплопроводности в частных производных. Аналогичное легко интегрируемое уравнение получается для двойной переменной $z = x + tj$. Этот результат обобщается на случай постоянных источников тепла.

Работа выполнена под руководством канд. физ.-мат. наук, доц. Баранова А.А.