УДК 530.182

Решение системы уравнений для составляющих двухсолитонного решения уравнения Кортевега-де Фриза

Блинкова Н.Г., Князев М.А.
Белорусский национальный технический университет

При изучении задачи о взаимосвязи уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ) и уравнения Фридмана для предельных значений времени, значительно отстоящих в прошлое или будущее относительно момента взаимодействия составляющих двухсолитонного решения уравнения КдФ, построена система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$\frac{(y_1^2)'''}{(y_1^2)'} - 3(y_1^2 + y_2^2) = \lambda_1^2 + 3\lambda_2^2, \ \frac{(y_2^2)'''}{(y_2^2)'} - 3(y_1^2 + y_2^2) = \lambda_2^2 + 3\lambda_1^2. \quad (1)$$

Здесь y_1 и y_2 – искомые функции, а λ_1 и λ_2 – некоторые константы. Для частного случая, когда $b = \lambda_1^2 + 3\lambda_2^2 = \lambda_2^2 + 3\lambda_1^2$, можно ввести новую функцию $z = y_1 + y_2$, для которой приведенная выше система уравнений (1) сводится к одному уравнению

$$z''' - (3z + b)z' = 0. \quad (2)$$

Общий интеграл последнего уравнения можно построить в виде:

$$C_3 \pm x = \int \frac{dz}{(C_1 + C_2 z + bz^2 + z^3)^{1/2}}. \quad (3)$$

Здесь C_1, C_2, C_3 – постоянные интегрирования

В общем случае вычисление интеграла в правой части соотношения (3) достаточно сложно и связано с использованием эллиптического интеграла первого рода. Если выражение в знаменателе соотношения (3) допускает представление вида

$$C_1 + C_2 z + bz^2 + z^3 = (z - p)(z - q)(z - s),$$

где p, q и s - некоторые числа, то тогда это соотношение может быть преобразовано к виду

$$C_3 \pm x = \frac{2}{\sqrt{p-s}} F(\varphi, k).$$

Здесь $k = \sqrt{\frac{q-s}{p-s}}$, $\varphi = \arcsin\sqrt{\frac{p-s}{z-s}}$, $F(\varphi, k)$ - эллиптический интеграл 1-го рода.

Для частного случая, когда $C_1 = 1, C_2 = b = 3$, вычисление достаточно просто и результат имеет вид

$$C_3 \pm x = -\frac{2}{(y_1^2 + y_2^2 + 1)^{1/2}}.$$