

## Эффективные алгоритмы умножения и возведения в степень степенных рядов

Волкович П.Ф., Гундина М.А.

Белорусский национальный технический университет

Произведение  $m$  различных степенных рядов представляется выражением

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n \dots \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_{m \text{ рядов-смножителей}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_m^{(n)}(u_s, t_r, \dots, b_j, a_i) x^n,$$

где  $P_m^{(n)}(u_s, t_r, \dots, b_j, a_i)$  – сумма произведений коэффициентов  $u_s, t_r, \dots, b_j, a_i$  ( $s, r, \dots, j, i = 0, 1, 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots$ ) перемножаемых рядов, для которых  $s + r + \dots + j + i = n$ ; последовательность  $(s, r, \dots, j, i)$  образует различные перестановки с повторениями чисел  $n = 0, 1, 2, \dots, n$ ;  $P_m^{(n)}(u_s, t_r, \dots, b_j, a_i) = P_m^{(n)}(a_i, b_j, \dots, t_r, u_s)$ .

Для выписывания  $P_m^{(n)}$  необходимо вначале выписать различные перестановки  $(s, r, \dots, j, i)$ , для которых  $s + r + \dots + j + i = n$ ; записать соответствующие этим перестановкам коэффициенты  $u_s, t_r, \dots, b_j, a_i$  и, наконец, составить из них суммы произведений  $P_m^{(n)}$ . Значительно упрощает выписывание  $P_m^{(n)}$  использование с этой целью рекуррентного соотношения

$$P_m^{(n)} = u_0 P_{m-1}^{(n)} + u_1 P_{m-1}^{(n-1)} + \dots + u_{n-1} P_{m-1}^{(1)} + u_n P_{m-1}^{(0)}.$$

Возведение в степень  $m$  степенного ряда определяется формулами

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_m^{(n)}(a_s, a_r, \dots, a_j, a_i) x^n,$$

$$P_m^{(n)} = a_0 P_{m-1}^{(n)} + a_1 P_{m-1}^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} P_{m-1}^{(1)} + a_n P_{m-1}^{(0)}.$$