УДК 51. (07.07)

Критерий разрешимости циркулем и линейкой конструктивных задач

Ковалёнок Н.В., Пинчукова С.П.
Белорусский национальный технический университет

Известно, что всякий отрезок может быть построен циркулем и линейкой, если он выражается положительной функцией от длин данных отрезков через конечное число основных операций (сложение, вычитание, умножение, деление и извлечение квадратичного корня). Т.е., конструктивная задача решается циркулем и линейкой, если длина некоторого искомого отрезка выражается только рациональными операциями и операцией извлечения квадратного корня, иными словами, если число, выражающее длину этого отрезка, является корнем некоторого многочлена с рациональными коэффициентами.

Основой для исследования некоторых классических конструктивных задач служит следующая теорема: если какой-либо корень приведенного кубического уравнения с рациональными коэффициентами может быть построен посредством циркуля и линейки, то он рационален.

Задача №1. Зная ребро данного куба, построить ребро такого куба, объем которого был бы в пять раз больше объема данного куба.

Решение. Пусть ребро искомого куба x . Получим уравнение $x^3 = 5a^3$. Принимая длину ребра данного куба за единицу, получим $x^3 - 5 = 0$ (*)

Если это уравнение имеет рациональные корни, то они являются делителями свободного члена. Делителями числа 5 служат числа 1, -1, 5 и -5. Но ни одно из них не удовлетворяет данному уравнению. Значит, уравнение (*) рациональных корней не имеет, и, следовательно, на основании сформулированной выше теоремы, задача (1) не может быть решена циркулем и линейкой.

Задача №2. Построить квадрат, равновеликий данному кругу.

Решение. Пусть x – сторона искомого квадрата, а R – радиус данного круга. Значит,$x^2 = \pi R^2$, или $x = R\sqrt{\pi}$.

Отрезок x построить циркулем и линейкой нельзя согласно критерию построения отрезка с помощью циркуля и линейки, так как число π (отсюда и $\sqrt{\pi}$) не является рациональными.

Значит, задача(2) неразрешима с помощью циркуля и линейки.