

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ КОНСТРУКЦИОННЫХ ИЗДЕЛИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Василевич Ю.В., Неумержицкая Е.Ю., Язневич А.М., Чигарев В.А.

Белорусский национальный технический университет, Минск

The systematic aspects of the practical use of statistical methods with the calculation for the strength of the potentially dangerous objects are presented.

В сопротивлении материалов расчеты на прочность традиционно ведутся в детерминированной постановке по двум методам: метод расчета по допускаемым напряжениям и методу расчета по предельным состояниям (появление пластических деформаций, потеря устойчивости и др.). Расчет по предельным состояниям основан на сравнении максимально действующей нагрузки с предельной нагрузкой, соответствующей предельному состоянию, определяемому потерей работоспособности или разрушением элемента конструкции.

Независимо от метода, расчет конструкции связан с тремя группами величин: механическими свойствами материалов; геометрическими размерами поперечных сечений и наличием концентраторов напряжений; величиной действующих нагрузок. В каждой группе величины имеют рассеяние, являются случайными, что должно учитываться при оценке прочности рассчитываемого элемента конструкции [1-3]. Расчет по допускаемым напряжениям не учитывает фактора случайности величин. Считается, что свойства материалов и внешняя нагрузка постоянны. В действительности как нагрузка, так и свойства материалов, а следовательно и прочность, являются случайными величинами, определяемыми различными случайными факторами. При неблагоприятных условиях напряжения в элементах конструкции могут превышать предел прочности, что приведет к разрушению или появлению трещин.

В качестве примера рассмотрим кривые распределения механических свойств стали 15ХСНД (число случаев $n = 1358$) (рис. 1). По оси ординат откладывается относительная частота появления результата в процентах.

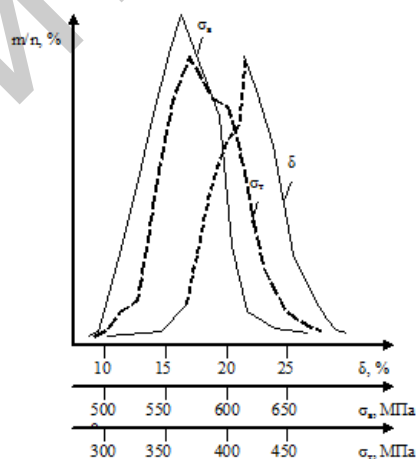


Рис. 1

Из рис. 1 видно, что такие механические характеристики металла, как предел прочности σ_B , предел текучести σ_T , относительное удлинение δ , отличаются

значительно даже в пределах одного листа, соответственно будет изменяться и несущая способность конструкции.

При расчете по предельным состояниям максимальная действующая нагрузка не должна превышать предельной нагрузки. Например, при растяжении стержня напряжения у пластичных материалов не должны превышать предела текучести $\sigma_{np} = \sigma_T$, у хрупких материалов - предела прочности $\sigma_{np} = \sigma_B$. В этом случае предельная нагрузка, определяющая несущую способность стержня будет равна $F_{np} = \sigma_{np} \cdot A$, где A – площадь поперечного сечения стержня.

Испытания металлов показывают: когда у пластичных металлов напряжения достигают предела текучести - появляются пластические деформации, когда у хрупких металлов напряжения достигают предела прочности - происходит разрушение.

Условие прочности при линейном напряженном состоянии имеет вид

$$\sigma \leq \sigma_{np}, \quad (1)$$

где σ – максимальное напряжение в элементе конструкции; σ_{np} – опасное напряжение, при котором в материале наступает предельное состояние.

Предельное напряжение σ_{np} зависит от свойств материала и определяется в результате испытания материала на растяжение и сжатие. Для пластичных материалов σ_{np} принимается равным пределу текучести σ_T , для хрупких материалов – пределу прочности σ_B . Чтобы условие (1) выполнялось при изменении нагрузки в эксплуатации при изменении свойств материала в σ_{np} вводят коэффициент безопасности n , определяющий допускаемое напряжение $\sigma \leq \frac{\sigma_{np}}{n} = [\sigma]$, где n – коэффициент безопасности; $[\sigma]$ – допускаемое напряжение.

Введение коэффициента безопасности связано с разбросом механических характеристик материала, со случайным характером внешних нагрузок, с неточностью размеров и формы деталей и т.д. Чем больше значение коэффициента безопасности, тем надежнее будет конструкция, но при этом она будет более тяжелой и более дорогой.

При назначении коэффициента безопасности учитывается опыт эксплуатации аналогичных конструкций, качества материала, проектируемая долговечность и значимость, уровень развития технологии изготовления, точность задания внешних нагрузок и т.д. На основе обобщения накопленного опыта, с учетом влияющих факторов разрабатываются нормативные значения коэффициентов безопасности для различных отраслей машиностроения и даже для отдельных машин и деталей, что приводит к значительному разбросу коэффициента безопасности даже при расчете однотипных объектов разными организациями. Дать аргументированное объяснение различию коэффициента безопасности невозможно, поэтому использование коэффициента безопасности в расчетах связано с определенной величиной неопределенности.

Научно обоснованные величины коэффициентов безопасности могут быть установлены только на основе точного знания вероятностных характеристик действующих нагрузок и прочностных характеристик материала элементов конструкций.

Трудность определения несущей способности элемента конструкции состоит в том, что механические характеристики материала, геометрические размеры элемента и действующие нагрузки являются случайными величинами.

Для представленных на рис. 2 распределений рабочих σ и предельных $\sigma_{\text{ПР}}$ напряжений определим коэффициент безопасности как отношение математических ожиданий m_σ и $m_{\sigma_{\text{ПР}}}$

$$n = \frac{m_\sigma}{m_{\sigma_{\text{ПР}}}}, \quad (2)$$

где m_σ и $m_{\sigma_{\text{ПР}}}$ – соответственно значения математических ожиданий рабочих и предельных напряжений. Из формулы (2) следует, что при одном и том же значении коэффициента безопасности вероятность разрушения элемента конструкции будет различной в зависимости от параметров распределения.

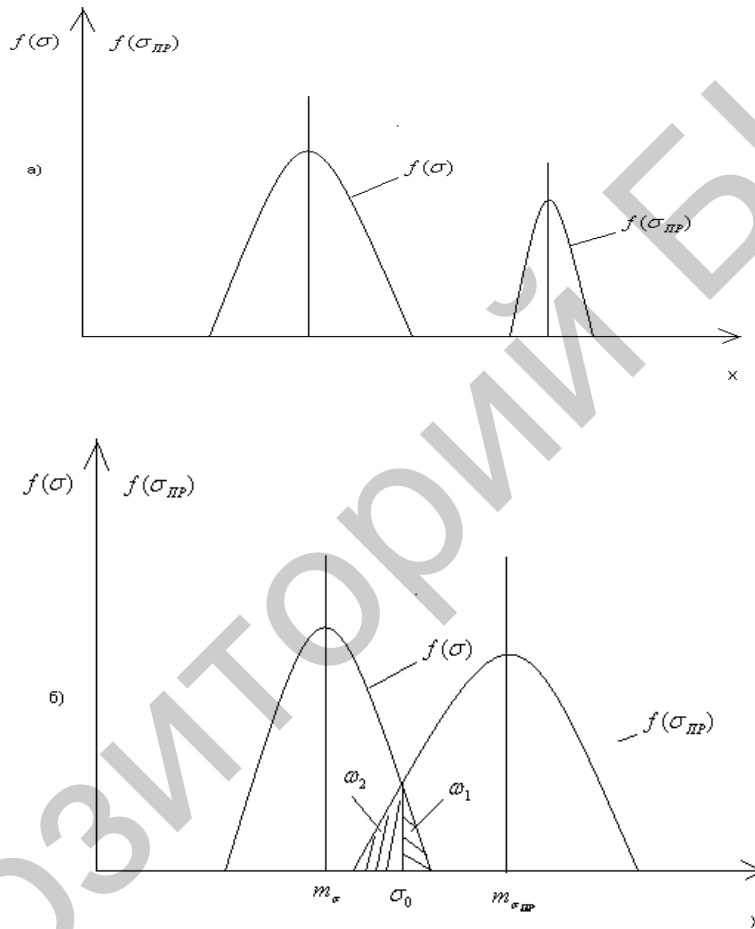


Рис. 2

В случае а, так как кривые плотности вероятности $f(\sigma)$ и $f(\sigma_{\text{ПР}})$ не пересекаются, то вероятность разрушения элемента конструкции практически исключена.

В случае б) кривые плотности вероятности пересекаются, образуя области, в которых возможны разрушения (на рис. 2, б заштрихованы).

$$\omega_1 = \int_{\sigma_0}^{\infty} f(\sigma) d\sigma, \quad \omega_2 = \int_0^{\sigma_0} f(\sigma_{\text{ПР}}) d\sigma_{\text{ПР}}.$$

Получить приближенную оценку для вероятности разрушения можно, приняв за исходную координату точку пересечения кривых распределения. Вероятность, что одновременно произойдут события $\sigma > \sigma_0$ и $\sigma_{\text{ПР}} < \sigma_0$ будет равна

произведению площадей ω_1 и ω_2 (рис. 2, б), дающих для искомой вероятности оценку снизу

$$P(\sigma > \sigma_0, \sigma_{PP} < \sigma_0) < \omega_1 \omega_2,$$

где $\omega_1 \cdot \omega_2$ – вероятность разрушения, при любом значении

$$\sigma_0 = \sigma_{PP0}. \quad (3)$$

Вероятность того, что одновременно событие $\sigma < \sigma_0, \sigma_{PP} > \sigma_0$ не произойдут, будет равна

$$1 - (1 - \omega_1) \cdot (1 - \omega_2) = \omega_1 + \omega_2 - \omega_1 \cdot \omega_2. \quad (4)$$

Формула (4) дает для искомой вероятности оценку сверху.

Двусторонняя оценка вероятности события $\sigma > \sigma_{PP}$, согласно формул (3) и (4), будет находиться в пределах

$$\omega_1 + \omega_2 - \omega_1 \cdot \omega_2 > P(\sigma > \sigma_{PP}) > \omega_1 \cdot \omega_2. \quad (5)$$

Таким образом, чтобы определить вероятность разрушения элемента конструкции требуется знать параметры плотностей распределения вероятностей, действующих σ и предельных σ_{PP} напряжений, а при назначении коэффициента безопасности необходимо учитывать разброс прочностных характеристик материала, действующих нагрузок и размеров элементов конструкции.

Путь распределения σ и σ_{PP} подчиняются нормальному закону

$$f(\sigma) = \frac{1}{S_\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\sigma - m_\sigma)^2}{2 \cdot S_\sigma^2} \right], \quad (6)$$

$$f(\sigma_{PP}) = \frac{1}{S_{\sigma_{PP}} \cdot \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\sigma_{PP} - m_{\sigma_{PP}})^2}{2 \cdot S_{\sigma_{PP}}^2} \right], \quad (7)$$

где S_σ и $S_{\sigma_{PP}}$ – средние квадратические отклонения напряжений. Так как величины σ и σ_{PP} независимы, то вероятность того, что действующие напряжения превысят предельный уровень будет:

$$P(\sigma > \sigma_{PP}) = \int_0^\infty f(\sigma_{PP}) \cdot \left\{ \int_{\sigma_{PP}}^\infty f(\sigma) d\sigma \right\} d\sigma_{PP}. \quad (8)$$

Надежность (вероятность безотказной работы) конструкции, равна

$$H = 1 - P(\sigma > \sigma_{PP}). \quad (9)$$

Подставляя (6), (7) в (8) получим

$$P(\sigma > \sigma_{PP}) = \int_0^\infty \frac{1}{S_{\sigma_{PP}} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \exp \left[-\frac{(\sigma_{PP} - m_{\sigma_{PP}})^2}{2 \cdot S_{\sigma_{PP}}^2} \right] \times \left[\int_{\sigma_{PP}}^\infty \frac{1}{S_\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \exp \left\{ -\frac{(\sigma - m_\sigma)^2}{2 S_\sigma^2} \right\} d\sigma \right] d\sigma_{PP} \quad (10)$$

Опуская довольно сложные преобразования формулы (10), приведем конечное выражение для вероятности безотказной работы элемента конструкции

$$H = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{\frac{m_{\sigma_{PP}} - m_\sigma}{S_\sigma}} e^{-\frac{\beta^2}{2}} d\beta,$$

$$\text{где } S_z = \sqrt{S_{\sigma_{\text{ПП}}}^2 + S_{\sigma}^2}; \quad \beta = \frac{(m_{\sigma_{\text{ПП}}} - m_{\sigma})}{S_z}.$$

Сравним надежность (вероятность безотказной работы) и коэффициент безопасности, являющийся в машиностроении мерой прочностной надежности.

Определим коэффициент безопасности как отношение средних значений предельных и действующих напряжений

$$n = \frac{\overline{\sigma_{\text{ПП}}}}{\overline{\sigma}}. \quad (11)$$

Подставляя (6) и (7) в (9), учитывая (11) после преобразований получим

$$H = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \Phi \left(\frac{(n-1)}{\sqrt{2(S_{\sigma}^2 + S_{\sigma_{\text{ПП}}}^2)}} \right) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \Phi \left(\frac{(n-1)}{\sqrt{2(\nu_1^2 + n^2 \nu_2^2)}} \right) \right\}, \quad (12)$$

где $\nu_1 = \frac{S_{\sigma}}{\overline{\sigma}}$; $\nu_2 = \frac{S_{\sigma_{\text{ПП}}}}{\overline{\sigma}}$ – коэффициенты вариации действующих и предельных напряжений для материала элемента конструкции.

Уравнение (12) показывает, что при одном и том же коэффициенте безопасности в зависимости от коэффициентов вариации напряжений, имеют место различные значения вероятности разрушения, т.е. получаем различные оценки надежности конструкции. Следовательно, учет рассеяния, изменчивости характеристик материала и внешних нагрузок позволяет создавать конструкции, имеющие большую надежность и ресурс.

Рассмотрим на примере растянутого стержня влияние среднего квадратического отклонения при постоянном среднем значении, на вероятность разрушения.

Прочность стержня определяется размером поперечного сечения и свойством металла, которые в общем случае имеют рассеяние $F = \sigma_B \cdot A$, где σ_B – предел прочности; A – площадь поперечного сечения.

Пусть среднее значение предела прочности равно $\overline{\sigma_B} = 45000 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2}$, а среднее значение площади $\overline{A} = 1,5 \text{ см}^2$.

Среднее значение силы будет $\overline{F} = \overline{\sigma_B} \cdot \overline{A} = 45000 \cdot 1,5 = 67500 \text{ Н}$.

Примем, что при рассеянии σ_B и A величина силы \overline{F} остается постоянной.

Положим, что в первом варианте средние квадратические отклонения были

$$S_{\sigma} = 2500 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2}; \quad S_A = 0,015 \text{ см}^2.$$

Соответственно дисперсии равны

$$D_{\sigma} = 6,25 \cdot 10^6 \left(\frac{\text{Н}}{\text{см}^2} \right)^2; \quad D_A = 2,25 \cdot 10^{-4} \text{ см}^4.$$

Так как случайные величины σ_B и A независимы, то дисперсия D_F определяется выражением

$$D_F = D_{\sigma} \cdot D_A + \overline{\sigma}^2 D_A + \overline{A}^2 D_{\sigma}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$D_F = 6,25 \cdot 10^6 \cdot 2,25 \cdot 10^{-4} + 45000^2 \cdot 2,25 \cdot 2,25 \cdot 10^{-4} + 1,5^2 \cdot 6,25 \cdot 10^6 = 145195 \cdot 10^2 \text{ Н}.$$

Среднее квадратическое отклонение силы $S_F = \sqrt{D_F} = \sqrt{145195 \cdot 10^2} = 3810 \text{ Н}$.

$$\text{Коэффициент вариации } v_F = \frac{S_F}{F} = \frac{3810}{67500} = 0.056.$$

Кривая распределения плотности вероятности $f_1(F)$ представлена на рис. 3.

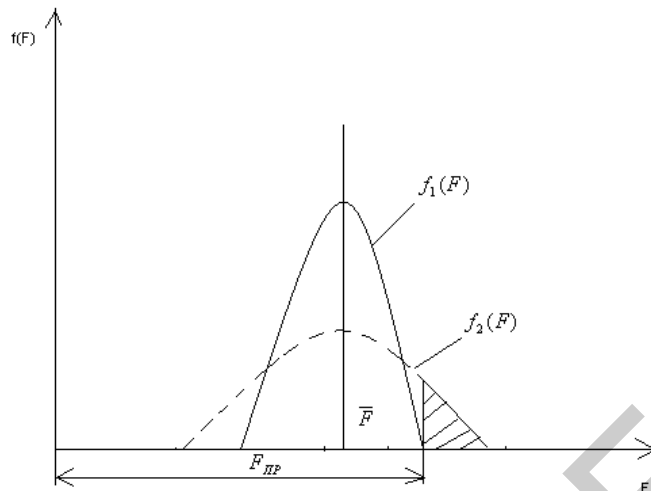


Рис. 3

Во втором варианте средние квадратические отклонения

$$S_\sigma = 4000 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2}; S_A = 0,04 \text{ см}^2.$$

Соответственно дисперсии будут $D_\sigma = 16 \cdot 10^6 \left(\frac{\text{Н}}{\text{см}^2} \right)^2$; $D_A = 16 \cdot 10^{-4} \text{ см}^4$.

Дисперсия силы равна $D_F = 392656 \cdot 10^2 \text{ Н}^2$.

Среднее квадратическое отклонение силы $S_F = 6266 \text{ Н}$.

Коэффициент вариации $v_F = \frac{6266}{67500} = 0.093$.

Коэффициент вариации во втором варианте увеличился на 66 %.

Кривая распределения плотности вероятности $f_2(F)$ представлена также на рис. 3 (пунктиром).

Из рисунка следует, что если $F_{пр}$ -предельная нагрузка, соответствующая предельному состоянию, то кривая плотности распределения вероятности $f_1(F)$ с ней не пересекается и разрушение невозможны. С увеличением рассеяния увеличивается правая ветвь кривой плотности распределения $f_2(F)$, которая пересекает $F_{пр}$, создавая вероятность разрушения, пропорциональную заштрихованной площади.

Следовательно, увеличение рассеяние при постоянном среднем значении силы \bar{F} , приводит к увеличению вероятности разрушения стержня. Аналогично можно показать влияние концентрации напряжений на вероятность разрушения элемента конструкции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Миттаг Х.-Й., Ринне Х. Статистические методы обеспечения качества. – М.: Машиностроение, 1995. – 616с.
2. Румшицкий Л.З. Элементы теории вероятностей. – М: Физматгиз, 1960.
3. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965. – 524 с.