

УДК 621.311

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПЛАНЕТЫ НА ОРБИТЕ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ВЫВОД ЗАКОНА ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

Завистовская О.С., Таразевич А.И.

Научный руководитель - Катковская И.Н., к.ф.-м.н., доцент

Иоганн Кеплер, выдающийся немецкий ученый, один из творцов небесной механики, в течение 25 лет в условиях жесточайшей нужды и невзгод обобщал данные астрономических наблюдений за движением планет. Три закона, говорящие о том, как движутся планеты, были им получены.

Согласно, первого закона Кеплера, планеты движутся по замкнутым кривым, которые называются эллипсами, в одном из фокусов которых находится Солнце. (Образец оформления материала для проецирования на экран представлен в приложении.)

Движутся планеты с изменяющейся скоростью.

Эти законы – результат математического обобщения данных астрономических наблюдений. Но совершенно непонятно было, почему так “умно” движутся планеты. Законы Кеплера надо было объяснить, то есть вывести из какого-то другого, более общего закона.

Ньютон решил эту сложную задачу. Он доказал, что если планеты движутся вокруг Солнца в соответствии с законами Кеплера, то на них должна действовать со стороны Солнца сила тяготения.

$$\bar{F} = k \frac{mM}{|\bar{R}(t)|^2} \cdot \frac{-\bar{R}(t)}{|\bar{R}(t)|},$$

По закону всемирного тяготения где k постоянная всемирного тяготения, m масса планеты, M масса Солнца, \bar{R} вектор Солнца-планеты.

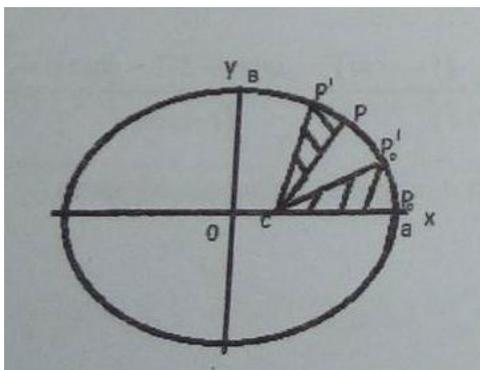
Пусть планета, к примеру Земля, движется по следующему закону $(a \cdot \cos \varphi(t); b \cdot \sin \varphi(t))$, где a - большая полуось орбиты, b - малая полуось орбиты, $\varphi(t)$ - угловая скорость планеты.

Тогда вектор Солнца-планеты будет равен $\bar{R}(t) = -(a \cos \varphi(t) - c; b \sin \varphi(t))$

Подставив данный вектор в закон всемирного тяготения получим $\vec{F}(t)$

$$= kmM \left(\frac{(c - a \cos \varphi(t))}{((a \cos \varphi(t) - c)^2 + (b \sin \varphi(t))^2)^{\frac{3}{2}}}; \frac{(b \sin \varphi(t))}{((a \cos \varphi(t) - c)^2 + (b \sin \varphi(t))^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Непосредственное использование второго закона Ньютона ведет к необходимости решения нелинейных ДУ второго порядка, что представляет достаточную трудность. Однако можно использовать второй закон Кеплера, по которому вектор Солнце-планета в равные промежутки времени «заметает» равные площади в эллипсе орбиты.



Решая эту задачу, получаем $\dot{\varphi}(t) - \varepsilon \sin \varphi(t) = \frac{\sqrt{km}}{a^{\frac{3}{2}}} t$, где $\dot{\varphi}(t)$ угловая

скорость, ε сколь угодно малое число, k постоянная всемирного тяготения, m масса планеты, a большая полуось.

Т.к. $t =$ периоду обращения планеты T получим, что $\frac{2\pi}{T} = \frac{\sqrt{km}}{a^{\frac{3}{2}}}$

$$\dot{\varphi}(t) - \varepsilon \sin \varphi(t) = \frac{2\pi}{T} t, \left(a \cos \frac{2\pi t}{T}; a \sin \frac{2\pi t}{T} \right)$$

Подставляя это во второй закон Ньютона, мы получаем силу притяжения планеты Солнцем $|\vec{F}(t)| = \frac{ma \cdot 4\pi^2}{T^2}$.

По второму закону Кеплера величина $\lambda = \frac{T^2}{a^3}$ постоянная для всех планет Солнечной системы (квадраты периодов обращения относятся как кубы больших полуосей орбит). Очевидно, что $\lambda = \frac{l}{M}$, где M масса Солнца: чем больше притягивающая масса, тем быстрее должна вращаться планета, чтобы не «упасть» на Солнце. Следовательно $T^2 = \frac{a^3 \cdot l}{M}$.

Подставляя данный период в формулу с предыдущего слайда получим, что

$$|\bar{F}| = \frac{4\pi^2 mMa}{l a^3} = \frac{4\pi^2 mM}{l a^2} = k \frac{mM}{a}$$

А это и есть закон всемирного тяготения.