УДК 621.311

КАКОЙ ДОЛЖНА БЫТЬ ТРАССА БОБСЛЕЯ. ЗАДАЧА НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

Зубарев А. А.
Научный руководитель – Катковская И. Н., к.ф.-м.н., доцент

В настоящее время продольный профиль оси дна желоба трассы состоит из короткого стартового участка, выполненного в виде отрезка брахистохроны (кривой наискорейшего спуска), последующего самого длинного участка, состоящего из нескольких виражей и нескольких прямолинейных отрезков, и последнего финишного участка, расположенного за пределами финишного створа и выполненного также в виде отрезка брахистохроны с обратным уклоном (контруклоном) и с обратными уступами, плавно сопряженного с выпуклым вверх отрезком гладкой кривой, переходящей в прямолинейный горизонтальный отрезок, причем сопряжения всех отрезков друг с другом в продольном направлении выполняются с соблюдением условий не ниже второго порядка.

Кроме того, продольный профиль середины дна желоба трассы выполнен в форме кривой, рассчитанной из условия, чтобы расчетная скорость движения болида, набранная в конце стартового участка, оставалась постоянной до самого финиша и уменьшалась до нуля после прохождения финишной черты.

Для нахождения вида брахистохроны в 1696 году швейцарский математик Иоганн Бернулли (1667-1748) опубликовал эту задачу на конкурс в Acta Eruditorum, на который пришли 3 решения, все верные: от Лопиталя, Якоба Бернулли и (анонимно опубликовано в Лондоне без доказательства) от Ньютона.

Задача заключалась в следующем: найти форму кривой в вертикальной плоскости, двигаясь по которой под действием только силы тяжести без трения, материальная точка скатывается от начальной до конечной точки за кратчайшее время.

Рассмотрим математическую формулировку (модель) этой задачи.

Пусть из начальной точки O(0,0) до конечной К (x_0, y_0) (К’$(x_0‘, y_0‘)$) с положительными координатами под действием силы тяжести точка массы m без трения скатывается по желобу, уравнение которого $y = y(x)$.

Скорость в точке $(x, y(x))$ определяется из закона сохранения энергии:

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2, \tag{1}$$

где m – масса тела, g – ускорение свободного падения, y – ордината, v – скорость движения тела.

Время движения от О до К по кривой y = y(x) составляет

$$T_{OK} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_0}\sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}}\,dx \qquad (2)$$

При этом должны выполняться следующие краевые условия

$$y(0) = 0,\ y(x_0) = y_0 \qquad (3)$$

Требуется найти функцию y = y(x), удовлетворяющую этим краевым условиям, для которой время будет минимальным.

Введем замену

$$\sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}} = F(y, y') \qquad (4)$$

$y = y + \delta y$, *где* δ *(дельта)* – дифференциал (вариация в вариационном исчислении) для функционалов – функции, областью определения которой служит некое множество или пространство функций, а значения лежат в множестве вещественных, либо комплексных чисел.

Введя замену (4), подставив в *F(y,y')* $y = y + \delta y$ и используя формулу конечных приращений, мы получаем формулу Эйлера – Лагранжа

$$F_y(y, y') - \frac{d}{dx}F'_{y'}(y, y') = 0, \quad при\ 0<x<x_0 \qquad (5)$$

Далее, подставляя обратно замену (4), то получаем дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$2y'' + (y')^2 + 1 = 0, \quad y>0 \qquad (6)$$

Сделаем новую подстановку и подставим в уравнение (6)

$$2yz\frac{dz}{dy} + (z^2 + 1) = 0, \quad y' = z$$

Далее сделаем еще одну подстановку и получаем дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$z^2 + 1 = u \quad => \quad y\frac{du}{dy} + u = 0 \qquad (7)$$

Решаем уравнение (7) и выражаем *y*

$$u = \frac{c_1}{y}(c_1 > 0), \quad y = \sqrt{\frac{c_1}{y} - 1} \qquad (8)$$

Пусть $y = c_1 sin^2\frac{t}{2}$, тогда, подставляя в (8) и дифференцируя по *dt,* получаем

$$dx = c_1 sin^2\frac{t}{2}dt$$

В результате которых мы получаем параметрическое уравнение циклоиды, где $c_1/2$ – радиус вращающейся окружности.

$$\begin{cases} x = \frac{c_1}{2}(t - \sin t) \\ y = \frac{c_1}{2}(1 - \cos t) \end{cases} \tag{9}$$

Отсюда мы делаем вывод, что искомая брахистохрона – не что иное как часть арки циклоиды.

Рассчитав время спуска по прямой, по окружности и по циклоиде, получилось, что спуск по циклоиде на 23% быстрее, чем по прямой и на 8% быстрее, чем по окружности.

Учитывая свойство таутохронности циклоиды (тяжёлое тело, помещённое в любую точку арки циклоиды, достигает горизонтали за одно и то же время), брахистохрона также применяется в авиации для расчета наилучшего пути, чтобы один военный самолет догнал другой на наикратчайшее время.

Литература

1. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. − М.: Айрис-пресс, 2006.
2. Рябушко А. П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. − Мн.: Вышэйшая школа, 2007.