

электродов. Оптическая апертура образцов не превышала $16 \times 16 \text{ мм}^2$. Размеры электродов исследуемых структур менялись в пределах $100 \dots 5 \text{ мкм}$. Соответственно изменялся шаг структуры. В образцах использовались различные смеси нематических ЖК ($\Delta\epsilon = 0,5 \dots 2$). Толщина жидкокристаллического слоя устанавливалась с помощью прокладок либо с помощью площадок, напыленных на рабочие поверхности оптических подложек. Регистрация контрастно-временных параметров исследуемых образцов осуществлялась в поляризованном свете по осциллографической методике, в качестве источников считывающего излучения в работе использовались ЛГ208 и ЛГ311 [1].

На рис. 1 приведены осциллограммы переключения обычной твист-ячейки и пикселя исследуемого образца ПМС при реализации режима регулируемого преднаклона ЖК-молекул.

В качестве рабочей среды в образцах ПМС использовалась нематическая смесь ДЧЖК, что позволяло получать режим изменяемого преднаклона молекул. При этом, как показывают результаты исследования, можно устранить появление кросс-эффекта.

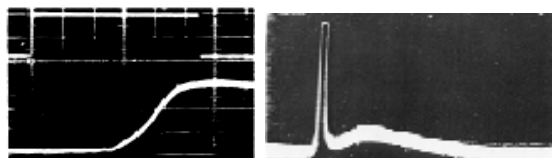


Рисунок 1 – Осциллограммы переключения твист-ячейки (сплошной модулирующий слой) и пикселя исследуемого образца ПМС (нижняя осциллограмма). Верхняя осциллограмма соответствует временной развертке управляющего импульса

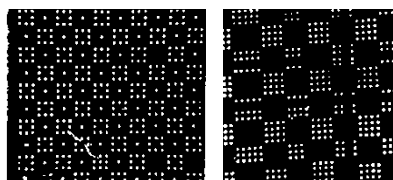


Рисунок 2 – Фотографии фрагментов ПМС

1. Развин, Ю.В. Особенности переключения жидкокристаллического слоя при комбинированном возбуждении / Ю.В. Развин, В.А. Потачиц // Наука – образованию, производству, экономике: материалы докладов 2-й междунар. науч.-техн. конф. – Минск, 2004. – Т. 2. – С. 330–334.

УДК 621

АППРОКСИМАЦИЯ СИНГУЛЯРНЫМИ ВЕЙВЛЕТАМИ

Романчак В.М., Кондратьева Н.А.

Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Компьютерное моделирование в той или иной степени решает задачу аппроксимации. Поэтому поиск и исследование новых методов аппроксимации представляет значительный интерес и является актуальной прикладной задачей.

Данной работой мы продолжаем развитие нового метода аппроксимации - метода сингулярных вейвлетов. Вначале, на нестрогом уровне, поясним отличие классического вейвлета от сингулярного. Пусть $\psi(x)$ – это базисный вейвлет («маленькая волна», «всплеск»), который должен удовлетворять условию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (1)$$

В вейвлете варьируют значения параметра масштабирования a и параметра сдвига b :

$$\frac{1}{a} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \quad (2)$$

В теории вейвлетов рассматривают скалярное произведение действительной функции $f(x)$ и вейвлета функции (2), которое называют вейвлет преобразованием:

$$Wf(b,a) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \quad (3)$$

Можно показать, что если функция $\psi(x)$ удовлетворяет условию допустимости (1), то в преобразовании (3) «малый всплеск» приводит к «маленькой волне», т.е. функция $Wf(b,a)$ для малых a будет близка к нулю. Если базисный вейвлет не удовлетворяет условию допустимости («большой всплеск»), то преобразование (3) может привести к «большой волне», т.е. функция $Wf(b,a)$ может оказаться большой. Между тем, изменив определение интегрального вейвлета преобразования можно устранить эту проблему.

Введем дельта преобразование по формуле:

$$Hf(b,a) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - f(b)) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \quad (4)$$

С учетом условия допустимости (1) дельта преобразование (4) совпадает с вейвлет преобразованием (3). Но если в преобразовании (4) выбрать вейвлет, для которого не выполняется необходимое условие допустимости (1), то «большой всплеск» по-прежнему будет приводить к «маленькой волне», т.е. функция

$Hf(b,a)$ для малых a будет близкой к нулю. В качестве вейвлета в дельта преобразовании можно использовать дельта-образные функции, которые применяют при ядерной оценке регрессии, например вейвлетом может быть функция плотности стандартного нормального распределения:

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right). \quad (5)$$

Дельта преобразование (4) с ядром Гаусса (5) можно использовать для получения уравнения регрессии. Так, если интеграл в выражении (4), заменить на промежутке длины d суммой и считать преобразование $Hf(b,a)$ достаточно малой величиной, получим:

$$\frac{d}{na} \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(b)) \psi\left(\frac{t_i - b}{a}\right) \approx 0.$$

Тогда

$$f(b) \approx \frac{\sum_{i=1}^n f(t_i) \psi\left(\frac{t_i - b}{a}\right)}{\sum_{i=1}^n \psi\left(\frac{t_i - b}{a}\right)}. \quad (6)$$

Мы пришли к непараметрической ядерной оценке Надарая – Ватсона в виде (6), используя дельта преобразование с вейвлетом Гаусса. Для ядерной оценки (6) существенно условие положительности ядра в среднем. Действительно, если в качестве ядерной функции выбрать допустимый базисный вейвлет, который равен в среднем нулю (1), то получить оценку (6) будет невозможно из-за того, что знаменатель в выражении (6) обратится в ноль. Из рассмотренных примеров следует, что ядерная функция не может быть вейвлетом, если выполняется условие допустимости (1) и вейвлет с таким условием не подходит в качестве ядерной функции. Необходима модификация вейвлета преобразования, которая позволит преодолеть ограничения по выбору базиса аппроксимации и объединит теорию вейвлетов с ядерными оценками регрессии. Назовем такой метод – аппроксимация сингулярными вейвлетами. Отметим, что в классической теории вейвлетов равенство (3) позволяет найти функцию $f(t)$, если нам известно вейвлет преобразование $Wf(b,a)$, с помощью формулы обратного вейвлета - преобразования:

$$f(t) = \frac{1}{C_0} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{a^2} Wf(b,a) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) db da,$$

где

$$C_0 = 2\pi \int_0^\infty \frac{|\Psi(u)|^2}{u} du,$$

$\Psi(u)$ – преобразование Фурье стандартного вейвлета $\psi(t)$, удовлетворяющего условию (1).

Аппроксимация сингулярными вейвлетами.

Будем считать, что в данном разделе базисный вейвлет $\psi(t)$ принадлежит L^2 и условие (1) не является обязательным. Введем необходимые определения.

Будем говорить, что для функции $\psi(t)$ выполняется условие убывания на бесконечности, если:

$$|\psi(t)| \leq \frac{c}{1+t^2}, c > 0 \quad (7)$$

Замечание. Из неравенства (7) следует, что интеграл от функции $\psi(t)$ сходится абсолютно, $\psi(t)$ принадлежат L^1 и преобразование Фурье функции $\psi(t)$ является непрерывно дифференцируемой функцией.

Определим вейвлет преобразование функции $f(t)$:

$$Wf(b,a) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^\infty f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt.$$

Определим дельта преобразования функции $f(t)$:

$$Hf(b,a) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^\infty (f(t) - f(b)) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \quad (8)$$

Определение. Базисный вейвлет называется сингулярным, если

$$\int_{-\infty}^\infty \psi(t) dt = 1. \quad (9)$$

Если вейвлет сингулярный, то дельта преобразование (8) равно разнице между вейвлет преобразованием функции и самой функцией: $Hf(b,a) = f(b) + Wf(b,a)$. Если для вейвлета выполнено условие допустимости (1), дельта преобразование совпадает с вейвлет преобразованием: $Hf(b,a) = Wf(b,a)$.

Обозначим $P(x)$, $G(x)$, $\Psi(x)$ - преобразование Фурье для функций $f(t)$, $g(t)$ и $\psi(t)$ соответственно, например:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \psi(t) e^{ixt} dt.$$

Теорема 1. Пусть ψ - базисный вейвлет, для которого выполняется условие допустимости:

$$2\pi \int_0^\infty \frac{(\Psi(-u) - \Psi(0))\Psi(u)}{u} du = 2\pi \int_0^\infty \frac{(\Psi(u) - \Psi(0))\Psi(-u)}{u} du = C, \quad (10)$$

где C – конечная постоянная, тогда для всех f и g из L^2 :

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty Hf(b,a) Wg(b,a) \frac{da}{a} db da = C(f, g), \quad (11)$$

здесь $(f, g) = \int_{-\infty}^\infty f(t)g(t)dt$.

Доказательство. На основании (8) можно записать:

$$Hf(b,a) = -S \cdot f(b) + \frac{1}{a} \int_{-\infty}^\infty f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad (12)$$

где

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u) du .$$

Функцию $f(b)$ в (12) выразим через обратное преобразование Фурье, а для функций под знаком интеграла применим равенство Парсевяля ($a>0$):

$$Hf(b,a) = -\frac{S}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-ibx} dx + \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\Psi(-ax)e^{-ibx} dx .(13)$$

Поскольку $\Psi(0) = \frac{S}{\sqrt{2\pi}}$, выражение (13) можно

записать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} Hf(b,a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)(\Psi(-ax) - \Psi(0))e^{-ibx} dx .(14)$$

Для вейвлет преобразования функции $g(x)$ аналогично:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} Wg(b,a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(y)\Psi(-ay)e^{-iyb} dy .(15)$$

В правой части выражений (14) и (15) находятся преобразования Фурье для функций $F(x)(\Psi(-ax) - \Psi(0))$ и $G(y)\Psi(-ay)$. Проинтегрируем по переменной b произведение выражений (14), (15) и применим равенство Парсевяля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Hf(b,a)Wg(b,a)db = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} F(x)(\Psi(-ax) - \Psi(0))G(-x)\Psi(ax) dx . (16).$$

Умножим теперь выражение (16) на $\frac{da}{a}$ и проин-

тегрируем на промежутке $[0,\infty]$, а затем применим равенство Парсевяля:

$$2\pi \int_0^{\infty} \frac{da}{a} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)(\Psi(-ax) - \Psi(0))G(-x)\Psi(ax) dx = C \int_{-\infty}^{\infty} F(x)G(-x)dx = C \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt ,$$

$$\text{где } C = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{(\Psi(-ax) - \Psi(0))\Psi(ax)}{a} da .$$

Чтобы C - была константной, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$C = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{(\Psi(-ax) - \Psi(0))\Psi(ax)}{a} da = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{(\Psi(ax) - \Psi(0))\Psi(-ax)}{a} da ,$$

(в противном случае C будет зависеть от знака x) из которого следует условие допустимости (10).

УДК 535:628.373.8, 535:548

УСТРОЙСТВО ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ БЕССЕЛЕВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рыжевич А.А.¹, Балыкин И.В.^{1,2}, Мащенко А.Г.¹, Лепарский В.Е.¹, Хило Н.А.¹

¹Институт физики НАН Беларуси

²Белорусский государственный университет, Минск

Республика Беларусь

В настоящее время наряду с обычными гауссовыми лазерными пучками все более широкое применение находят бесселевы световые пучки (БСП), в том числе БСП высших порядков, имеющих винтовую дислокацию волнового фронта (ВДВФ). ВДВФ обуславливает наличие минимума интенсивности на продольной оси таких пучков, что необходимо для решения ряда прикладных задач. Актуальной является задача поиска эффективных методов формирования БСП высших порядков, радиальное распределение интенсивности в поперечном сечении которых описывается квадратом функции Бесселя второго порядка ($I(\rho) \sim J_n^2(M\rho)$, где ρ - радиальная координата, M - масштабирующий коэффициент). В данной работе предлагается метод формирования бесселевых световых пучков 2-го порядка (БСП₂).

Метод формирования БСП₂ основан на поляризационном разделении двух циркулярно поляризованных в ортогональных направлениях собственных волн, возбуждаемых в одноосном кристалле, оптическая ось которого вдоль

падающего на него циркулярно поляризованного лазерного пучка [1-2]. Оптическая схема метода показана на рисунке 1.

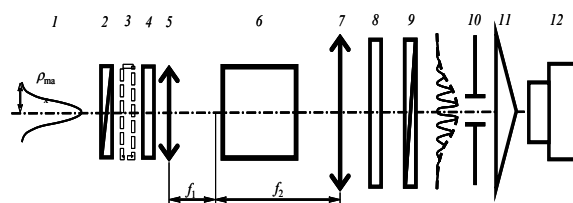


Рис. 1. Оптическая схема метода формирования БСП второго порядка

Вначале линейно поляризованный поляризатором 2 исходный лазерный гауссов пучок 1 с помощью последовательно расположенных первой четвертьволновой пластинки 4, одноосного кристалла 6, второй четвертьволновой пластинки 8 и поляризатора 9 преобразуется в линейно поляризованный многокольцевой световой пучок с ВДВФ второго порядка (ВДВФ₂), причем в этом случае можно достичь достаточно высокой (около 50%) эффективности преобразования. Затем из многокольцевого пучка круглой диа-