УДК 621.311

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ ДЛЯ РАСЧЁТА РЕЖИМА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЕТИ ПО УРАВНЕНИЯМ УЗЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ЗАДАНИИ НАГРУЗОК В ТОКАХ

Кушнер Д.А.
Научный руководитель – м.т.н., старший преподаватель Волков А.А.

Для расчета установившихся режимов электрической сети наиболее эффективными и удобными для реализации на ЭВМ являются уравнения узловых напряжений [1]:

$$\begin{cases} y_{11}\cdot U_{\Delta 1}+y_{12}\cdot U_{\Delta 2}+y_{13}\cdot U_{\Delta 3}=J_1 \\ y_{21}\cdot U_{\Delta 1}+y_{22}\cdot U_{\Delta 2}+y_{23}\cdot U_{\Delta 3}=J_2 \\ y_{31}\cdot U_{\Delta 1}+y_{32}\cdot U_{\Delta 2}+y_{33}\cdot U_{\Delta 3}=J_3 \end{cases}$$

или в матричном виде

$$Y\cdot U_{\Delta}=J.$$

Если известна обратная матрица Y^{-1}, то решение системы уравнений получается в виде:

$$U_{\Delta}=Y^{-1}\cdot J.$$

Размерность матрицы узловых проводимостей определяется числом узлов в электрической сети. Схемы реальных электрических сетей могут содержать десятки и сотни узлов. Вычисление обратной матрицы в таком случае связано со значительными трудностями.

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений делятся на две группы:

1) прямые или точные методы, позволяющие найти решение за определенное число операций. К прямым методам относятся: метод Гаусса и его модификации (в том числе метод прогонки), метод LU- разложения и др.;

2) итерационные методы, основанные на использовании повторяющегося (циклического) процесса и позволяющие получить решение в результате последовательных приближений. Операции, входящие в повторяющийся процесс, составляют итерацию. К итерационным методам относятся: метод простых итераций, метод Зейделя и др.

Метод квадратных корней относится к группе точных методов [2].

Рассмотрим применение метода квадратных корней для расчета режима электрической сети постоянного тока (рисунок 1).

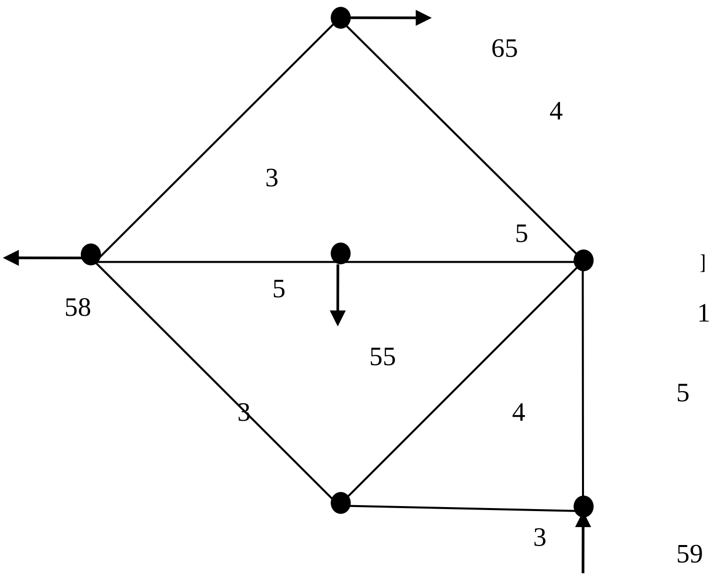

Рисунок 1 – Схема и параметры электрической сети

Принимаем номинальное напряжение электрической сети равным 110 кВ, удельное сопротивление ветвей 0,2 Ом/км. Первая матрица соединений, матрицы задающих токов в узлах, кА, и узловых проводимостей, См представлены ниже:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} -0.655 \\ 0 \\ 0.591 \\ -0.555 \\ -0.582 \end{pmatrix} \quad Yy = \begin{pmatrix} 0.292 & 0 & 0 & 0 & -0.167 \\ 0 & 0.393 & -0.135 & 0 & -0.139 \\ 0 & -0.135 & 0.229 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.192 & -0.096 \\ -0.167 & -0.139 & 0 & -0.096 & 0.402 \end{pmatrix}$$

Суть метода заключается в следующем. Пусть имеется система уравнений вида:

$$A \cdot X = B.$$

Представим матрицу A в форме:

$$A = U^T \cdot U.$$

Находя произведение $U^T \cdot U$, составим систему уравнений относительно неизвестных элементов матрицы:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ u_{12} & u_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & u_{2n} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_{11}^2 = a_{11}, \quad u_{11} \cdot u_{12} = a_{12}, \quad \dots, \quad u_{11} \cdot u_{1n} = a_{1n}; \\ \quad u_{11}^2 + u_{22}^2 = a_{22}, \ \dots, \ u_{12} \cdot u_{1n} + u_{22} \cdot u_{2n} = a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{1n}^2 + u_{2n}^2 + \dots + u_{nn}^2 = a_{nn} \end{cases}$$

Из первой строки системы находим:

$$u_{11} = \sqrt{a_{11}}, \qquad u_{1j} = \frac{a_{1j}}{u_{11}}, \qquad j = 2,3, \dots, n$$

Из второй строки определяем:

$$u_{22} = \sqrt{a_{22} - u_{12}^2}, \qquad u_{2j} = \frac{a_{2j} - u_{12} \cdot u_{1j}}{u_{22}}, \ j = 3,4, \dots, n$$

Таким образом, элементы матрицы U находятся из соотношений:

$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{n-1} u_{ki}^2}, \quad i = 1,2, \dots, n;$$

$$u_{ij} = \frac{1}{u_{ii}} \cdot \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} \cdot u_{kj} \right), \quad j = 2,3, \dots, n; j > i; \ u_{ij} = 0 (j < i).$$

Если матрица A представима в форме $U^T \cdot U$, то система $A \cdot X = B$ имеет вид $U^T \cdot U \cdot X = B$. Решение этой системы сводится к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами. В итоге процедура решения состоит из двух этапов:

1. Прямой ход. Находим элементы матрицы U

$U_{1,1} = \sqrt{Yy_{1,1}} = 0.54 \quad U_{1,2} = \frac{Yy_{1,2}}{U_{1,1}} = 0 \quad U_{1,3} = \frac{Yy_{1,3}}{U_{1,1}} = 0 \quad U_{1,4} = \frac{Yy_{1,4}}{U_{1,1}} = 0 \quad U_{1,5} = \frac{Yy_{1,5}}{U_{1,1}} = -0.309$

$U_{2,2} = \sqrt{Yy_{2,2} - (U_{1,2})^2} = 0.627 \quad U_{2,3} = \frac{Yy_{2,3} - U_{1,2} \cdot U_{1,3}}{U_{2,2}} = -0.2 \quad U_{2,4} = \frac{Yy_{2,4} - U_{1,2} \cdot U_{1,4}}{U_{2,2}} = 0 \quad U_{2,5} = \frac{Yy_{2,5} - U_{1,2} \cdot U_{1,5}}{U_{2,2}} = -0.222$

$U_{3,3} = \sqrt{Yy_{3,3} - (U_{1,3})^2 - (U_{2,3})^2} = 0.428 \quad U_{3,4} = \frac{Yy_{3,4} - U_{1,3} \cdot U_{1,4} - U_{2,3} \cdot U_{2,4}}{U_{3,3}} = 0 \quad U_{3,5} = \frac{Yy_{3,5} - U_{1,3} \cdot U_{1,5} - U_{2,3} \cdot U_{2,5}}{U_{3,3}} = -0.112$

$U_{4,4} = \sqrt{Yy_{4,4} - (U_{1,4})^2 - (U_{2,4})^2 - (U_{3,4})^2} = 0.439 \quad U_{4,5} = \frac{Yy_{4,5} - U_{1,4} \cdot U_{1,5} - U_{2,4} \cdot U_{2,5} - U_{3,4} \cdot U_{3,5}}{U_{4,4}} = -0.219$

$U_{5,5} = \sqrt{Yy_{5,5} - (U_{1,5})^2 - (U_{2,5})^2 - (U_{3,5})^2 - (U_{4,5})^2} = 0.444$

Таким образом, получаем вспомогательные матрицы

$$U = \begin{pmatrix} 0.54 & 0 & 0 & 0 & -0.309 \\ 0 & 0.627 & -0.216 & 0 & -0.222 \\ 0 & 0 & 0.428 & 0 & -0.112 \\ 0 & 0 & 0 & 0.439 & -0.219 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.444 \end{pmatrix} \qquad U^T = \begin{pmatrix} 0.54 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.627 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.216 & 0.428 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.439 & 0 \\ -0.309 & -0.222 & -0.112 & -0.219 & 0.444 \end{pmatrix}.$$

Произведение $U \cdot X$ обозначим через H. В результате решения системы $U^T \cdot H = B$ находится столбец H:

$$\begin{cases} 0{,}54 \cdot H_1 = -0{,}655 \\ 0{,}627 \cdot H_2 = 0 \\ -0{,}216 \cdot H_2 + 0{,}428 \cdot H_3 = 0{,}591 \\ 0{,}439 \cdot H_4 = -0{,}555 \\ -0{,}309 \cdot H_1 - 0{,}222 \cdot H_2 - 0{,}112 \cdot H_3 - 0{,}219 \cdot H_4 + 0{,}444 \cdot H_5 = -0{,}582 \end{cases}$$

$$H = \begin{pmatrix} -1.212 \\ 0 \\ 1.381 \\ -1.265 \\ -2.432 \end{pmatrix}.$$

2. Обратный ход. В результате решения системы $U \cdot X = H$ находится решение задачи - столбец X.

$$\begin{cases} 0{,}54 \cdot x_1 - 0{,}309 \cdot x_5 = -1{,}212 \\ 0{,}627 \cdot x_2 - 0{,}216 \cdot x_3 - 0{,}222 \cdot x_5 = 0 \\ 0{,}428 \cdot x_3 - 0{,}112 \cdot x_5 = 1{,}381 \\ 0{,}439 \cdot x_4 - 0{,}219 \cdot x_5 = -1{,}265 \\ 0{,}444 \cdot x_5 = -2{,}432 \end{cases}$$

Решив данную систему, получим искомые падения напряжения в узлах относительно напряжения в балансирующем узле, кВ, а затем узловые напряжения, кВ:

$$U\Delta = X = \begin{pmatrix} -5.376 \\ -1.318 \\ 1.799 \\ -5.624 \\ -5.481 \end{pmatrix} \qquad Uy = U\Delta + Ubu \cdot n = \begin{pmatrix} 111.624 \\ 115.682 \\ 118.799 \\ 111.376 \\ 111.519 \end{pmatrix}.$$

Выводы:

1) метод квадратных корней позволяет решить систему линейных алгебраических уравнений без нахождения обратной матрицы;

2) метод можно применять для решения систем уравнений узловых напряжений, а решив эту систему можно в дальнейшем рассчитать режим электрической сети;

3) метод легко реализовать на ЭВМ.

Литература

1. Передача и распределение электрической энергии: Учебное пособие/ А. А. Герасименко, В. Т. Федин. - Ростов-н/Д.: Феникс; Красноярск: Издательские проекты, 2006. - 720 с.

2. Численные методы. Часть первая: Учебное пособие / В.И. Мышенков, Е.В. Мышенков – М.:МГУЛ,2001. – 120 с.