УДК 532.526

АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Докт. техн. наук, проф. ЕСЬМАН Р. И.

Белорусский национальный технический университет

При транспортировании жидких энергоносителей в каналах и трубопроводах значительная роль отводится структуре пограничного слоя, влияющего на интенсивность процессов тепломассообмена. Как известно, при обтекании тел с достаточно большими числами Рейнольдса влияние вязкости на характер течения проявляется только в очень тонком слое, находящемся в непосредственной близости от твердых стенок. В этом тонком слое скорость течения вырастает от нуля на стенке до своего значения во внешнем потоке, в котором течение можно рассматривать в рамках идеальной жидкости. Указанный тонкий слой называют пограничным.

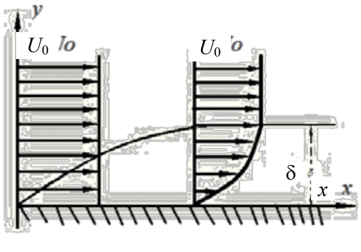

Рис. 1. Схема пограничного слоя на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении

Распределение скоростей в пограничном слое при обтекании пластины безграничным потоком показано на рис. 1. Пограничный слой зарождается у передней кромки обтекаемого тела. При удалении от передней кромки толщина пограничного слоя, которую принято обозначать через δ, постепенно растет, так как количество заторможенной жидкости увеличивается по мере удаления от передней кромки. Толщину пограничного слоя δ можно оценить из сопоставления сил инерции и сил вязкости, которые в пограничном слое имеют одинаковый порядок. Пусть x – длина, отсчитываемая вдоль пластины, тогда градиент скорости $\partial u/\partial x$ пропорционален U/x, где U – скорость внешнего течения. Сила инерции, отнесенная к единице объема, определяется значением $\rho u\,\partial u/\partial x$, следовательно, величина ее имеет порядок $\rho V^2/x$. Удельная сила трения определяется значением $\partial\tau/\partial y$, а для ламинарного течения – величиной $\mu\partial^2 u/\partial y^2$, где y – нормальная к обтекаемой поверхности координата. Поскольку на толщине пограничного слоя δ происходит изменение скорости от 0 до U, производная $\partial u/\partial y$ имеет величину порядка U/δ, а $\mu\partial^2 u/\partial y^2 \approx \mu U/\delta^2$. Приравнивая полученные оценки для сил, получим соотношение

$$\mu\frac{U}{\delta^2} \approx \rho\frac{U^2}{x}, \tag{1}$$

из которого следует оценка толщины пограничного слоя

$$\delta \approx \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U}} = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}. \tag{2}$$

Толщина пограничного слоя уменьшается с ростом скорости вешнего потока и снижением его вязкости. Из (1) также следует, что для маловязких жидкостей, таких как воздух, вода, $\delta << x$. В зависимости от характера обтекания пограничный слой бывает ламинарный и турбулентный, сжимаемый и несжимаемый.

При выводе уравнения пограничного слоя ограничимся рассмотрением плоского двумерного течения около твердого тела (рис. 2).

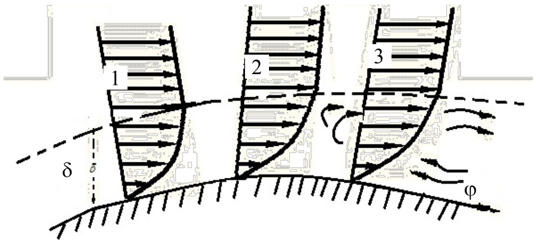

Рис. 2. Пограничный слой на криволинейной поверхности:

$1 - \frac{\partial p}{\partial \varphi} < 0;\ 2 - \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0;\ 3 - \frac{\partial p}{\partial \varphi} > 0$

Введем систему координат с осью x, направленной по течению вдоль поверхности тела, и осью y, перпендикулярной к оси x. Пусть имеет место ламинарный стационарный несжимаемый пограничный слой.

Упростим уравнения Навье-Стокса с учетом структуры пограничного слоя [1, 2]. Прежде всего выпишем уравнение неразрывности и оценим порядок отдельных его членов

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

Обозначим через L характерный линейный размер тела. Тогда $\partial u/\partial x \approx$ $\approx U/L$, и, поскольку порядок величин $\partial u/\partial x$ и $\partial v/\partial y$ одинаковой, а $y \approx \delta$, отсюда следует, что нормальная к поверхности скорость имеет порядок $v \approx \frac{\delta}{L}U$. В силу малой толщины пограничного слоя можно считать, что давление по толщине слоя не меняется $\left(\frac{\partial p}{\partial y} = 0\right)$ и распределение давления вдоль поверхности тела определяется характером обтекания тела внешним потоком (при отсутствии отрыва пограничного слоя от поверхности). Рассмотрим уравнение количества движения в проекции на ось x

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \tag{4}$$

С учетом оценок величин скоростей u и v в пограничном слое можно оценить порядок отдельных членов в данном уравнении:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}\approx\frac{U^2}{L};\quad v\frac{\partial u}{\partial y}\approx\frac{\delta}{L}U\frac{U}{\delta}\approx\frac{U^2}{L};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\approx\frac{U}{L^2};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\approx\frac{U}{\delta^2}.$$

Отсюда следует, что $\partial^2 u/\partial x^2 << \partial^2 u/\partial y^2$, а порядок остальных членов с учетом соотношения (1) одинаковый.

Продольный градиент давления определяется из уравнения количества движения для внешнего идеального потока, которое вдоль линии тока, совпадающей с внешней границей пограничного слоя, имеет вид

$$U\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

С учетом сказанного уравнение количества движения (1) в пограничном слое преобразуется к виду

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=U\frac{\partial U}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{5}$$

Уравнения (2)–(5) являются уравнениями стационарного, несжимаемого, ламинарного пограничного слоя, граничными условиями для которых являются:

$$u = 0;\ v = 0 \text{ при } y = 0;\ u = U(x) \text{ при } y = \delta(x). \tag{6}$$

Запишем уравнение энергии применительно к движению жидкости в пограничном слое при отсутствии источников теплоты. Для этого оценим порядок отдельных членов дифференциального уравнения теплопроводности, которое в случаях плоского стационарного течения с учетом структуры пограничного слоя примет вид

$$\rho c\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\Phi,$$

$$\Phi=\mu\left\{2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\}. \tag{7}$$

Нетрудно убедиться, что уравнение энергии в несжимаемом пограничном слое упрощается к виду

$$\rho c\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2. \tag{8}$$

Граничные условия для уравнения (8) ставятся на поверхности тела и на бесконечности

$$T=T_\omega \text{ при } y=0 \text{ и } T=T_0 \text{ при } y=\delta_{\text{т}},$$

где $T_\omega(x)$ и T_0 – температуры обтекаемой поверхности и внешнего потока; $\delta_т$ – толщина теплового пограничного слоя. Величина $\delta_т$ несколько отличается от толщины динамического пограничного слоя δ, и соотношение между ними определяется числом Прандтля $\mathrm{Pr} = c_p \mu / \lambda$.

Уравнение (7) определяет теплообмен твердого тела с внешним потоком. Поскольку температура поверхности тела T_ω обычно неизвестна, необходимо рассматривать сопряженную задачу теплообмена, которая сводится к решению уравнения (7) совместно с уравнением теплопроводности в твердом теле при сопряженных граничных условиях на поверхности тела.

Методами теории подобия рассмотрим теплообмен на границе твердое тело – жидкость при граничных условиях третьего рода. В безразмерных переменных эти условия перепишутся в виде:

$$\frac{\partial \Theta_f}{\partial n} = \frac{\alpha L}{\lambda_f} = \mathrm{Nu}; \quad \Theta_f = \frac{T - T_{f\infty}}{T_\omega - T_{f\infty}};$$

$$\frac{\partial \Theta_\omega}{\partial n} = \frac{\alpha L}{\lambda_\omega}\left[\Theta_\omega + \left(1 - \frac{T_{f\infty}}{T_0}\right)\right] = \mathrm{Bi}\left[\Theta_\omega + \left(1 - \frac{T_{f\infty}}{T}\right)\right], \quad \Theta_\omega = \frac{T - T_0}{T_0},$$

где T_0 – начальная температура твердого тела.

Безразмерные комплексы $\mathrm{Nu} = \dfrac{\alpha L}{\lambda_f}$ и $\mathrm{Bi} = \dfrac{\alpha L}{\lambda_\omega}$ называются соответственно числами Нуссельта и Био. Пользуясь числом Нуссельта, тепловой поток на границе жидкость – твердое тело можно представить в виде

$$q = -\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\right)_f = \frac{\lambda}{L}\mathrm{Nu}\left(T_\omega - T_{f\infty}\right). \tag{9}$$

Число Нуссельта фактически представляет собой безразмерный коэффициент теплоотдачи. Число Био характеризует относительную интенсивность нестационарного теплообмена (критерий краевого подобия).

Поскольку данные критерии Re, Pr, Gr определяют динамические и тепловые свойства потока, очевидно, существуют функциональные зависимости, определяющие поля скорости, температуры, а также числа Нуссельта. Последнюю зависимость можно записать в виде

$$\mathrm{Nu}_{\text{ср}} = f\left(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \mathrm{Gr}\right),$$

где $\mathrm{Nu}_{\text{ср}}$ – средний по граничной поверхности коэффициент теплоотдачи.

Зависимость теплоотдачи от числа Грасгофа уже при умеренных скоростях движения потока становится пренебрежимо малой, так как подъемные силы, обусловленные разностью температур, становятся малыми в сравнении с силами инерции и трения. Следовательно, для такого рода течений, называемых внутренними конвективными течениями:

$$\mathrm{Nu}_{\text{ср}} = f\left(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}\right). \tag{10}$$

Если движение жидкости обусловлено перепадом температуры, например между двумя стенками, нагретыми до разной температуры, то такое течение называется свободным и для него уравнение подобия имеет вид

$$\mathrm{Nu}_{\text{ср}} = f\left(\mathrm{Gr}, \mathrm{Pr}\right). \tag{11}$$

В Ы В О Д Ы

Выполнен анализ структурного течения жидкостей в ламинарном пограничном слое. Предложена методика решения уравнений пограничного слоя, включающих уравнение количества движения, уравнение энергии, уравнения стационарного, несжимаемого, ламинарного пограничного слоя.

Сущность метода состоит в разделении потока жидкости на две области: пограничный слой и внешний поток. Принимая ряд допущений, можно упростить уравнение движения Навье – Стокса и уравнение энергии. Полученные после упрощения уравнения представляют собой уравнение динамического пограничного слоя и уравнение энергии теплового пограничного слоя [3]. Для решения этих уравнений используются численные методы.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Е м ц е в, Б. Т. Техническая гидромеханика / Б. Т. Емцев. – М.: Машиностроение, 1987. – 440 с.

2. К у т а т е л а д з е, С. С. Основы теории теплообмена / С. С. Кутателадзе. – Новороссийск: Наука, Сибирское отд-е, 1986. – 432 с.

3. Е с ь м а н, Р. И. Научные основы организации процессов горения комбинированного многофазного органического топлива в турбулентных потоках камер сгорания сложной геометрии / Р. И. Есьман, Ю. П. Ярмольчик // Сборник научных докладов VI Международного совещания по проблемам энергоаккумулирования и экологии в машиностроении, энергетике и на транспорте. – М.: Российская академия наук, ИМАШ РАН, 2009. – С. 226–236.

Представлена кафедрой ПТЭ и Т Поступила 26.10.2011