

СТАТЫЧНЫ І ДЫНАМІЧНЫ АНАЛІЗ КАЧЭННЯ КОЛА ПА ПЛОСКАСЦІ З ПЕРАМЕННЫМ КАЭФІЦЫЕНТАМ ТРЭННЯ СЛІЗГАННЯ

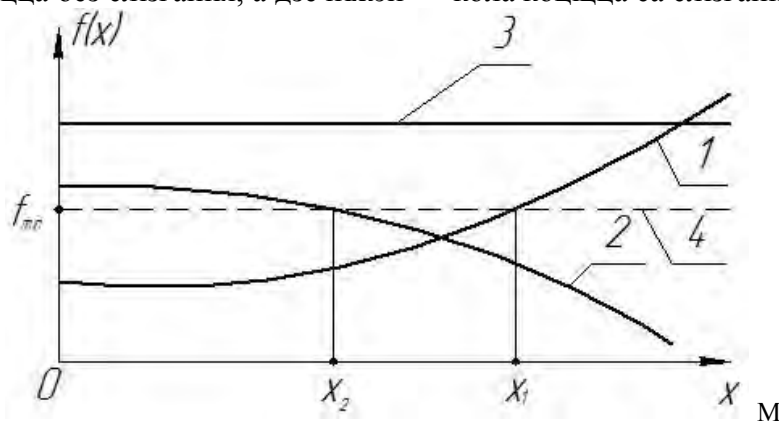
к.т.н. Русан С. І., студ. Стэцкі Я.С.

УА “Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт”

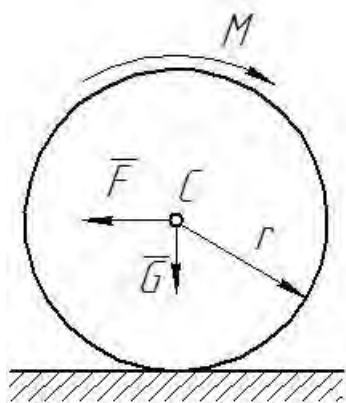
Уводзіны. Даследаванне руху аб’екта выконваецца на падставе гіпотэз і ўраўненняў, выкладзеных у курсе тэарэтычнай механікі. Мэта аналізу — паглыбленае вывучэнне руху аднаго з найбольш распаўсюджаных аб’ектаў тэхнікі — кола (альбо любога цыліндрычнага цела з кругавой накіравальнай). Кінематычны аналіз яго качэння выкананы ў работах [1,2]. Асаблівасць разглядаемай тут задачы заключаецца ва ўліку зменнасці механічнай характарыстыкі паверхні качэння — яе шурпатасці. Апошняя апісваецца пераменным каэфіцыентам трэння слізгання $f(x)$. На рысунку 1 прадстаўлены тры графікі функцыі $f(x)$: 1 — $f(x)$ узрастае; 2 — $f(x)$ змяншаецца; 3 — $f(x)$ застаецца нязменнай. Пункцірнай лініяй 4 паказана мінімальнае значэнне каэфіцыента трэння f_{\min} , неабходнае для качэння кола без слізгання. Велічыня f_{\min} не залежыць ад механічных уласцівасцей паверхні качэння; яе вызначэнне прыведзена ніжэй.

Пастаноўка задачы. Набліжаны якасны аналіз качэння. Кола ў агульным выпадку пераменнай уздоўж радыуса таўшчыні $h = f(\rho)$ (ці ступеньчатае) масы m коціцца па гарызантальнай шурпатай плоскасці пад дзеяннем пары сіл з момантам M . Да восі кола прыкладзена сіла F , што мадэліруе карыснае супраціўленне (рыс.2). Зададзены каэфіцыент трэння слізгання $f(x)$ і трэння качэння $\delta = const$. Патрэбна вызначыць неабходную для качэння без слізгання сілу шчаплення $F_{шч}$ і характар руху кола.

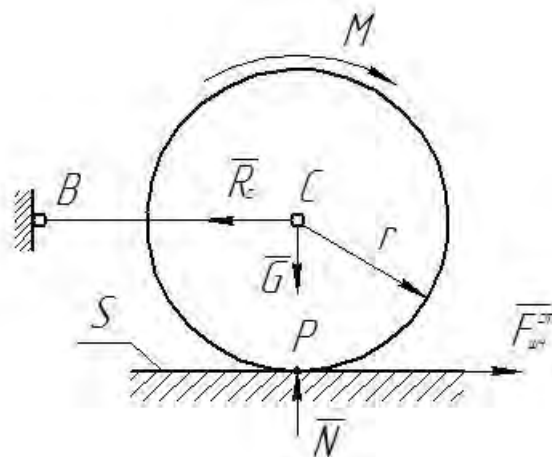
Наяўнасць графікаў 1 — 4 (рыс.1) дазваляе скласці папярэднюю ўяву аб характары руху кола. На ўчастках шляху, для якіх розніца $\Delta f(x) = f(x) - f_{\min} > 0$, кола коціцца без слізгання, а пры $\Delta f(x) < 0$ — са слізганнем. Так, калі $f(x)$ змяншаецца паводле графіка 1, то на ўчастку шляху $x < x_1$ кола рухаецца са слізганнем; пры $x > x_1$ яго качэнне працягваецца без слізгання. Пры змяненні каэфіцыента $f(x)$ паводле графіка 2 качэнне без слізгання мае месца на ўчастку шляху $x < x_2$; далей кола рухаецца са слізганнем. Графіку 3 на ўсім шляху адпавядае качэнне без слізгання. Характар качэння можна вызначыць па рысунку 1 візуальна без вылічэння $\Delta f(x)$: на тым участку, дзе графік функцыі $f(x)$ знаходзіцца вышэй пункцірнай лініі f_{\min} , качэнне адбываецца без слізгання, а дзе ніжэй — кола коціцца са слізганнем.



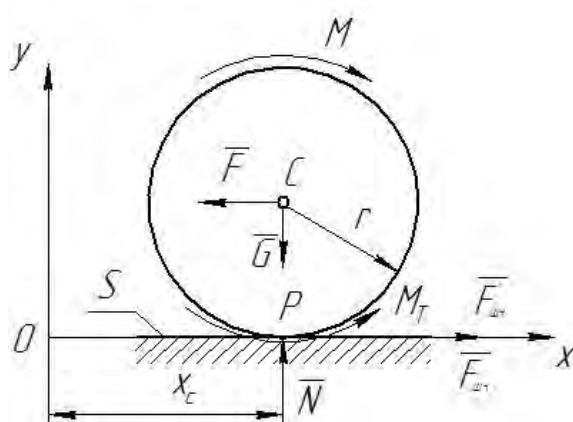
Мал. 1. Графікі змянення каэфіцыента трэння $f(x)$



Мал. 2. Кола на шурпатай плоскасці



Мал. 3. Кола ў раўнавазе



Мал. 4. Паскоранае качэнне кола

Статычная і дынамічная сілы шчаплення. Калі на кола дзейнічае момант M , то яно можа знаходзіцца на шурпатай паверхні ў раўнавазе, можа каціцца па ёй без слізгання раўнамерна ці паскорана толькі пры пэўных значэннях сілы шчаплення. Разгледзім прыватныя выпадкі.

Кола не рухаецца. Каб забяспечыць такі стан кола, замацуем яго цэнтр з дапамогай стрыжня BC (рыс.3). Рэактыўную сілу, што ўзнікае ў плоскасці кантакта кола з паверхняй S будзем называць *статычнай сілай шчаплення* і абазначым літарай $F_{шч}^{ст}$. Для яе вызначэння складаем умову раўнавагі: $\sum M_C(\vec{F}_i) = F_{шч}^{ст} \cdot r - M = 0$. Адсюль $F_{шч}^{ст} = M/r$. Далей выкарыстоўваем ураўненні дынамікі плоскага руху цэла (захоўваем агульнапрынятыя ў курсе тэарэтычнай механікі абазначэнні):

$$m\ddot{x}_C = \sum X_i, \quad m\ddot{y}_C = \sum Y_i, \quad I_z\ddot{\varphi} = \sum M_C(F_i) \quad (1)$$

Кола коціцца без слізгання раўнамерна. Пры такім руху паскарэнне цэнтра кола $a_C = \ddot{x}_C$ і яго вуглавое паскарэнне $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ роўны нулю. Гэта дазваляе запісаць першае і трэцяе ўраўненні ў выглядзе: $\sum X_i = 0$; $\sum M_P(\vec{F}_i) = 0$. Улічваючы момант трэння M_T і сілу супраціўлення F паводле рысунка 4 атрымліваем:

$$F'_{шч} - F = 0; \quad M - M_T - F \cdot r = 0 \quad (2)$$

З другога ўраўнення (2) знаходзім неабходную для раўнамернага качэння кола сілу супраціўлення: $F = (M - M_T)/r$. Затым з першага ўраўнення (2) вызначаем: $F'_{шч} = F = (M - M_T)/r$. Як бачым, патрэбная для раўнамернага качэння без слізгання сіла $F'_{шч}$ пры $M_T = 0$ не адрозніваецца ад $F_{шч}^{ст}$; яе таксама будзем называць *статычнай*. Варта звярнуць увагу, што наяўнасць моманта трэння качэння вядзе да змяншэння неабходнай для раўнамернага качэння сілы $F'_{шч}$.

Кола коціцца без слізгання паскорана, г. зн. знаходзіцца ў пераходным рэжыме руху. Адапаведную сілу шчаплення назавём *дынамічнай* і абазначым літарай $F_{шч}$. Для яе вызначэння выкарыстаем першае і другое ўраўненні сістэмы (1) з правымі часткамі, адапаведнымі рысунку 4:

$$m\ddot{x}_C = F_{шч} - F; \quad I_Z\ddot{\phi} = M - M_T - F_{шч} \cdot r \quad (3)$$

Далей улічваем, што тут пры качэнні без слізгання $x_C = \phi r$, $\ddot{x}_C = \ddot{\phi}r$. Гэта дазваляе выключыць з сістэмы (3) \ddot{x}_C , $\ddot{\phi}$ і з атрыманага алгебраічнага ўраўнення вызначыць дынамічную сілу шчаплення; пры $I_Z = mi_Z^2$ яна роўна:

$$F_{шч} = \left(\frac{(M-M_T) \cdot r}{i_Z^2} \right) / \left(1 - \frac{r^2}{i_Z^2} \right), \quad \text{дзе } i_Z \text{ — радыус інерцыі кола. Для параўнання велічыні } F_{шч} \text{ са}$$

значэннямі $F'_{шч}$ (ці $F_{шч}^{ст}$) апошняю формулу прывядзем да выгляду $F_{шч} = \left[\frac{r^2}{r^2 + i_Z^2} \right] \cdot$

$\left[\frac{M-M_T}{r} \right]$ ці карацей: $F_{шч} = \gamma F'_{шч}$. Тут велічыня $\gamma = r^2 / (r^2 + i_Z^2) < 1$; назавем яе *каэфіцыентам змяншэння статычнай сілы шчаплення*. Значыць, каб знайсці дынамічную сілу шчаплення, неабходна адапаведную статычную сілу памножыць на каэфіцыент змяншэння γ . Каб мець уяву, наколькі істотна ўплывае паскораны рух кола на сілу шчаплення, вылічым каэфіцыент γ для кола пастаяннай таўшчыні. Для яго радыус інерцыі $i_Z^2 = r^2/2$. Тады $\gamma = \frac{r^2}{r^2 + \frac{r^2}{2}} = \frac{2}{3}$.

Ведаючы для качэння без слізгання сілу $F_{шч}$, можам знайсці адапаведны ёй мінімальны каэфіцыент трэння слізгання f_{min} з формулы $F_{шч} = f_{min}N$. Рэакцыю плоскасці N вызначаем з другога ўраўнення (1) пры $\ddot{y}_C = 0$: $m\ddot{y}_C = G - N$. Атрымліваем: $N = G = mg$. Графік велічыні f_{min} паказаны на рысунку 1.

Кола коціцца са слізганнем. Такі працэс качэння мае месца на ўчастках шляху, дзе графік змянення каэфіцыента $f(x)$ знаходзіцца ніжэй графіка f_{min} (рыс.1). У гэтым выпадку сіла шчаплення пераходзіць у сілу трэння, г. зн. $F_{шч} = F_T = f(x)G \neq const$. З першай формулы (3) знаходзім паскарэнне цэнтра мас кола: $a_c = \ddot{x}_C = (F_T - F)/m \neq 0$. Як бачым, на ўчастку шляху, дзе кола коціцца са слізганнем, паскарэнне цэнтра мас не можа быць роўным нулю; і таму *раўнамерны рух яго не магчымы*.

Заклучэнне. У даследаванні выкладзена метадыка рашэння прыкладной задачы качэння кола, што засталася па-за ўвагай аўтараў падручнікаў па тэарэтычнай механіцы. Знаёмства з ёй назапашвае і ўзбагачае досвед рашэння нетыповых праблем. Атрыманы вынік у выглядзе формулы для вылічэння сілы шчаплення кола з плоскасцю качэння дазваляе прагназаваць магчымасць качэння кола і характар яго руху. Даследаванне зацікавіць дапытлівых студэнтаў і спецыялістаў у галіне транспартных машын і тэхналагічнага абсталявання.

ЛІТАРАТУРА

1. Русан С.І., Стэцкі Я.С. *Альтэрнатывы ў аналіз скорасцей пунктаў кола пры качэнні па плоскасці са слізганнем*/С.І. Русан, Я.С. Стэцкі//*Технологии, экономика и право: актуальные проблемы и инновации: материалы Междунар. науч.-практ. конф., Барановичи, 20 ноября 2014 г.* — Барановичи: РИО БарГУ, 2014. — с.39 — 41.
2. Русан С.І., Наліўка А.І. *Выкарыстанне палёў у даследаванні паскарэнняў кола пры качэнні па плоскасці са слізганнем*/С.І. Русан, А.І. Наліўка// *Технологии, экономика и право: актуальные проблемы и инновации: материалы Междунар. науч.-практ. конф., Барановичи, 20 ноября 2014 г.* — Барановичи: РИО БарГУ, 2014. — с.36 — 39.

E-mail: stetskiy93@mail.ru

Поступила в редакцию 11.11.2015