

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ АНАЛИЗА СЛОЖНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ПОДВЕРЖЕННОЙ НЕОДНОРОДНЫМ ПЕРЕМЕННЫМ ВОЗДЕЙСТВИЯМ

к.т.н. ¹Антуневич А.Л., к.т.н. ¹Ильёв И.Г., к.т.н. ¹Гончаренко В.П.,
к.т.н. ²Мионов Д.Н.

¹Военная академия Республики Беларусь, Минск

²Белорусский национальный технический университет, Минск

Манипуляторы, выполненные на базе автомобильных шасси, представляют собой сложные механические системы, состоящие из механизмов и приводов с учетом разнообразия связей между элементами системы, влияния внешней среды, технологических условий работы, адаптивности управления [5].

Состояние динамической системы манипулятора изменяется во времени: она подвергается внешним и внутренним возмущениям и управляющим воздействиям, кроме того изменяются ее инерционные свойства. Особый интерес для исследователей представляет случай воздействия на сложную механическую систему манипулятора сил и моментов (от ветровых нагрузок, воздействия со стороны микрорельефа и т.д.), которые следуют с периодом, меньшим, чем время затухания собственных колебаний в механической системе. При таких воздействиях манипулятор совершает движение, являющееся результатом интерференции колебаний составных частей механической системы.

Многоствольная пусковая установка (ПУ) представляет собой манипулятор на колесном шасси. В ней в качестве поворотной платформы выступает вращающаяся часть (ВЧ), а в качестве наклонного (исполнительного) механизма – качающаяся часть (КЧ). Реактивные снаряды (РС) выполняют роль груза. Основное воздействие, которое испытывает многоствольная ПУ, вызвано давлением газодинамической струи от реактивных двигателей сходящих снарядов. Данное воздействие носит неоднородный переменный характер.

Анализ динамических процессов в манипуляторах и их механизмах в общем виде сложен, поэтому целесообразным становится использование математического моделирования, которое позволяет упростить решение задач исследования динамических процессов в манипуляторах и анализа возможных аварийных ситуаций.

В статье приводятся модель и результаты, полученные при моделировании динамики многоствольной (ПУ) в процессе залповой стрельбы. Математическая модель многоствольной ПУ разработана с использованием расчетной схемы, представленной на рисунке 1. Расчетная схема включает четыре элемента: базу (шасси), качающуюся часть (КЧ), представляющую собой пакет пусковых направляющих (ПН), вращающуюся часть (ВЧ) и снаряд.

Исходными данными для построения математической модели выступили геометрические и массогабаритные характеристики элементов многоствольной ПУ и снарядов, жесткостные и демпфирующие свойства компонентов системы, сила тяги, характеристики грунта.

Для упрощения вывода системы уравнений, описывающей динамику многоствольной ПУ, были приняты следующие допущения: КЧ, ВЧ и база являются абсолютно жесткими телами, масса которых сосредоточена в точках, совпадающих с центрами масс тел; КЧ и ВЧ, ВЧ и база соединены невесомыми упругими связями, которые характеризуются линейной жесткостью и линейным неупругим сопротивлением; вели-

чины угловых перемещений различных частей ПУ в считаются малыми, тригонометрические функции синуса и косинуса линеаризуются; снаряд движется вдоль продольной оси ПН, без учета перемещений относительно других осей;

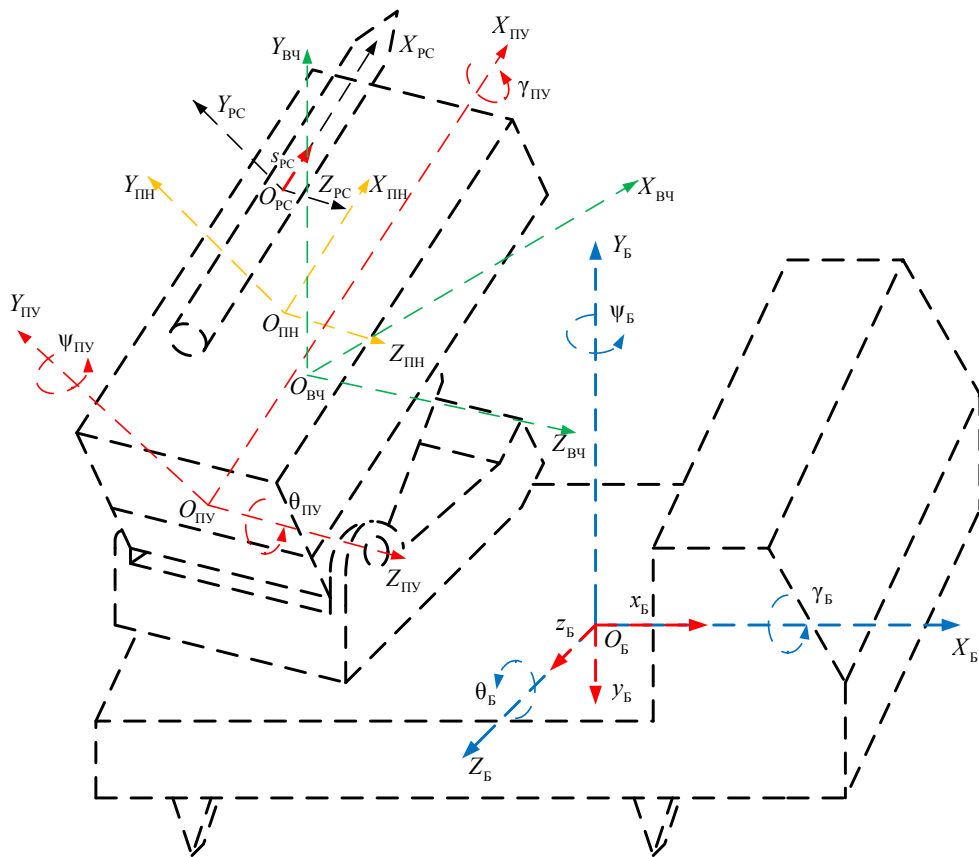


Рис. 1. Расчетная схема многоствольной ПУ

снаряд движется вдоль продольной оси ПН, без учета перемещений относительно других осей; линейные перемещения базы в продольном и поперечном направлениях x_B и z_B , а также изменение угла курса базы ψ_B и угла крена ПУ γ_B достаточно малы [1], их значения не учтены в расчетах.

Для однозначного определения положения базы, ВЧ, КЧ и снаряда, движущегося по пусковой направляющей ПН, введены следующие прямоугольные системы координат, направления осей которых показано на рисунке 1: инерциальная система координат (фиксированная): связанная с землей система отсчета $O_3X_3Y_3Z_3$; системы координат, описывающие движение элементов многоствольной ПУ, связанные: с центром масс базы система координат $O_BX_BY_BZ_B$; с центром масс пакета ПН система координат $O_{ПН}X_{ПН}Y_{ПН}Z_{ПН}$; с центром масс РС система координат $O_{РС}X_{РС}Y_{РС}Z_{РС}$; системы координат, определяющие начальное положение ПУ, связанные: с центром ВЧ система координат $O_{ВЧ}X_{ВЧ}Y_{ВЧ}Z_{ВЧ}$; с центром оси подъема ПУ система координат $O_{ПВ}X_{ПВ}Y_{ПВ}Z_{ПВ}$.

Начальное положение систем координат, связанных с центрами масс ВЧ и КЧ получено поворотом пакета ПН на углы горизонтального ψ_0 и вертикального θ_0 наведения.

Положение элементов многоствольной ПУ описывается шестью переменными: линейное перемещение базы y_B ; угловые перемещения базы вокруг осей O_BX_B и O_BY_B на угол крена γ_B и тангажа θ_B ; угловые перемещения ПУ вокруг осей $O_{ПВ}Y_{ПВ}$ и $O_{ПВ}Z_{ПВ}$ на углы курса $\psi_{ПВ}$ и тангажа $\theta_{ПВ}$; линейное перемещение снаряда вдоль ПН s .

Разработанная математическая модель основана на теории относительного движения тел, так как колебания ПУ происходят относительно базы, которая совершает собственные колебания относительно земной поверхности. Абсолютное ускорение любой материальной точки системы может быть определено как сумма относительного ускорения $\bar{a}_{\text{отн}}$, переносного ускорений $\bar{a}_{\text{пер}}$ и ускорения Кориолиса $\bar{a}_{\text{кор}}$ [2]:

$$\bar{a} = \bar{a}_{\text{отн}} + \bar{a}_{\text{пер}} + \bar{a}_{\text{кор}}, \quad (1)$$

Соответствующие выражения для определения абсолютных ускорений характерных точек колебательной системы приведены ниже:

$$\begin{aligned} \bar{a}_B &= \ddot{y}_B, \\ \bar{a}_{\text{ВЧ}} &= \ddot{y}_B + \ddot{\alpha}_B \times \bar{r}_{\text{БВЧ}} + \dot{\alpha}_B \times (\dot{\alpha}_B \times \bar{r}_{\text{БВЧ}}), \\ \bar{a}_{\text{ПУ}} &= \ddot{y}_B + \ddot{\alpha}_B \times \bar{r}_{\text{БПУ}} + \dot{\alpha}_B \times (\dot{\alpha}_B \times \bar{r}_{\text{БПУ}}), \\ \bar{a}_{\text{ПН}} &= \ddot{y}_B + \ddot{\alpha}_B \times \bar{r}_{\text{БПН}} + \ddot{\alpha}_{\text{ПУ}} \times \bar{r}_{\text{ПУПН}} + \dot{\alpha}_B \times (\dot{\alpha}_B \times \bar{r}_{\text{БПН}}) + \\ &+ \dot{\alpha}_{\text{ПУ}} \times (\dot{\alpha}_{\text{ПУ}} \times \bar{r}_{\text{ПУПН}}) + 2\dot{\alpha}_B \times (\dot{\alpha}_{\text{ПУ}} \times \bar{r}_{\text{ПУПН}}), \\ \bar{a}_{\text{РС}} &= \ddot{y}_B + \ddot{s} + \ddot{\alpha}_B \times \bar{r}_{\text{БРС}} + \ddot{\alpha}_{\text{ПУ}} \times \bar{r}_{\text{ПУРС}} + \dot{\alpha}_B \times (\dot{\alpha}_B \times \bar{r}_{\text{БРС}}) + \dot{\alpha}_{\text{ПУ}} \times \\ &\times (\dot{\alpha}_{\text{ПУ}} \times \bar{r}_{\text{ПУРС}}) + 2\dot{\alpha}_B \times (\dot{\alpha}_{\text{ПУ}} \times \bar{r}_{\text{ПУРС}}) + 2\dot{\alpha}_{\text{ПУ}} \times \dot{s} + 2\dot{\alpha}_B \times \dot{s}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\dot{\alpha}_B$, $\ddot{\alpha}_B$, $\dot{\alpha}_{\text{ПУ}}$, $\ddot{\alpha}_{\text{ПУ}}$ – векторы столбцы угловой скорости и ускорения базы и ПУ в связанных системах координат:

$$\dot{\alpha}_B = \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_B \\ 0 \\ \dot{\theta}_B \end{bmatrix}, \quad \ddot{\alpha}_B = \begin{bmatrix} \ddot{\gamma}_B \\ 0 \\ \ddot{\theta}_B \end{bmatrix}, \quad \dot{\alpha}_{\text{ПУ}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi}_{\text{ПУ}} \\ \dot{\theta}_{\text{ПУ}} \end{bmatrix}, \quad \ddot{\alpha}_{\text{ПУ}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\psi}_{\text{ПУ}} \\ \ddot{\theta}_{\text{ПУ}} \end{bmatrix}; \quad (3)$$

r_{ij} – векторы, соединяющие начала i -ой и j -ой систем координат.

Математическая модель предусматривает учет основных возмущающих сил и моментов, действующих на элементы колебательной системы многоствольной ПУ.

На снаряд действуют следующие силы и моменты: сила тяги реактивного двигателя \bar{P} , ориентированная вдоль оси $O_{\text{РС}}X_{\text{РС}}$; сила тяжести $\bar{Q}_{\text{РС}}$; силы связи (включая силу запорно-стопорного устройства $\bar{F}_{\text{ЗСУ}}$ и силу трения $\bar{F}_{\text{тр}}$) $\bar{F}_{\text{РСx}}$, $\bar{F}_{\text{РСy}}$, $\bar{F}_{\text{РСz}}$ и моменты связи между снарядом и ПН $\bar{M}_{\text{РСx}}$, $\bar{M}_{\text{РСy}}$, $\bar{M}_{\text{РСz}}$.

Силы связи (включая силы трения) действуют на всю поверхность контакта между снарядом и ПН. Чтобы уменьшить сложность вычисления, силы и моменты связи приведены к внутренним силам системы [6].

К силам и моментам действующим на пакет ПН относятся: сила тяжести $\bar{Q}_{\text{ПН}}$; сила давления газовой струи \bar{R} ; силы связи $\bar{F}_{\text{ПНx}}$, $\bar{F}_{\text{ПНy}}$, $\bar{F}_{\text{ПНz}}$ и моменты $\bar{M}_{\text{ПНx}}$, $\bar{M}_{\text{ПНy}}$, $\bar{M}_{\text{ПНz}}$ между пакетом ПН и РС; силы связи $\bar{N}_{\text{ВЧx}}$, $\bar{N}_{\text{ВЧy}}$, $\bar{N}_{\text{ВЧz}}$ и моменты $\bar{M}_{\text{ПУx}}$, $\bar{M}_{\text{ПУy}}$, $\bar{M}_{\text{ПУz}}$ между пакетом ПН и базой (рисунок 2).

База подвержена действию следующих сил и моментов: сила тяжести \bar{Q}_B ; силы связи $\bar{N}_{\text{ВЧx}}$, $\bar{N}_{\text{ВЧy}}$, $\bar{N}_{\text{ВЧz}}$ и моменты связи $\bar{M}_{\text{ПУx}}$, $\bar{M}_{\text{ПУy}}$, $\bar{M}_{\text{ПУz}}$ между базой и ПУ; силы взаимодействия базы и основания $\bar{F}_{\text{п1}}$, $\bar{F}_{\text{п2}}$ (в передней части шасси), и \bar{F}_{31} , \bar{F}_{32} (в задней части шасси) (рисунок 2).

Ряд представленных выше сил и моментов определены на основе известных параметров. К ним относятся сила тяги РДТТ, сила давления газовой струи, сила замково-стопорного устройства, силы тяжести компонентов, вертикальные компоненты соеди-

нительных сил (между базой и основанием) и компоненты момента связи ПУ и базы (моменты противовеса).

Полная система уравнений, описывающая динамику многоствольной ПУ при стрельбе состоит из трех групп, по два уравнения в каждой, одно из которых описывает движение центра масс снаряда, второе – движение снаряда вокруг центра масс.

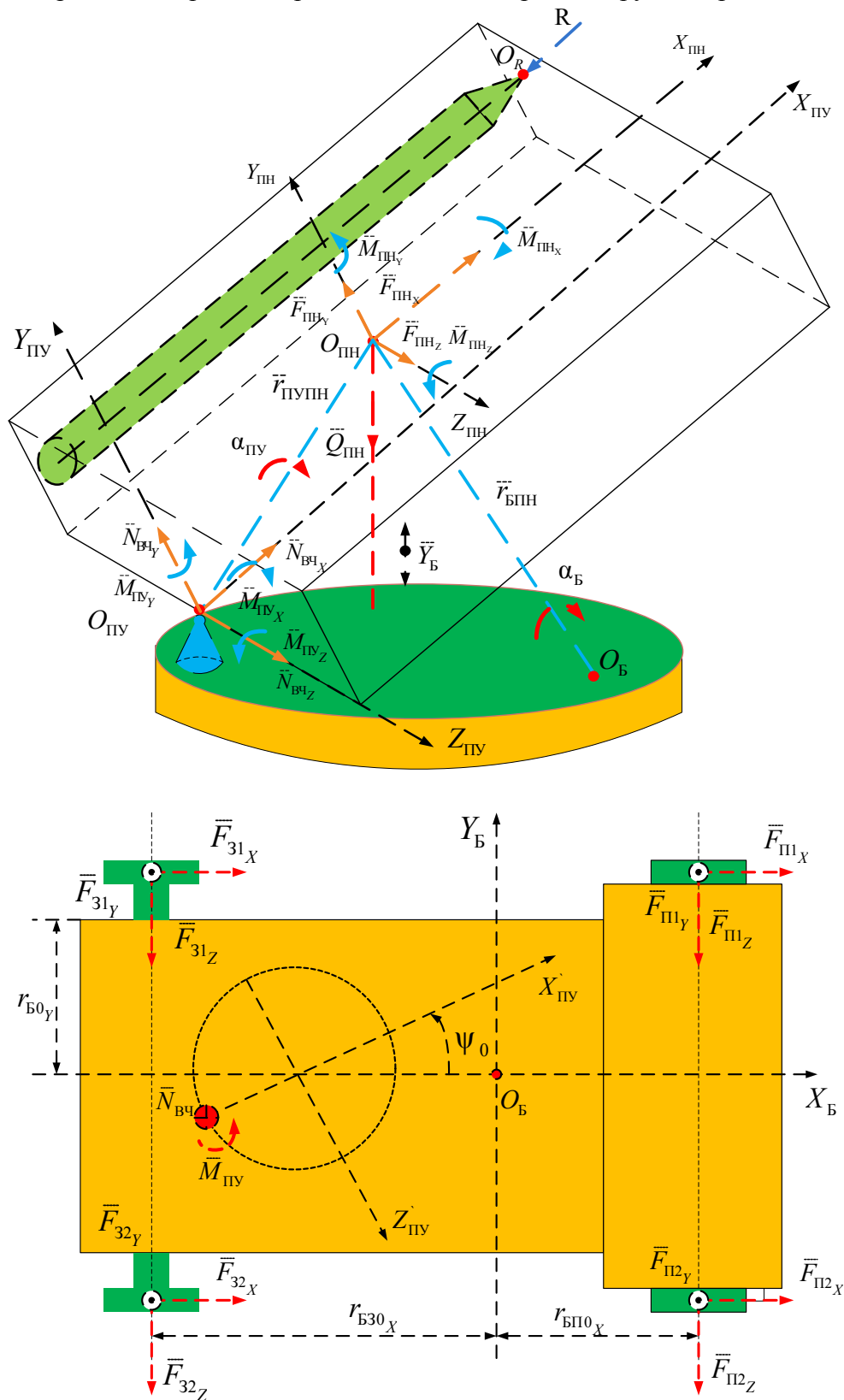


Рис. 2. Силы и моменты, действующие на пакет ПН и базу транспортного средства

Уравнение движения центра масс снаряда записанное на основе теории движения тела в неинерциальных системах отсчета [2], а также системы сил, рассмотренной выше, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{P} + \bar{Q}_{PC} + \bar{F}_{PC} &= m_{PC} \ddot{\bar{y}}_B - m_{PC} \ddot{\bar{s}} + m_{PC} \ddot{\bar{\alpha}}_B \times \bar{r}_{BPC} - m_{PC} \overline{r_{BPC}} (\dot{\bar{\alpha}}_B^2) + 2m_{PC} \dot{\bar{\alpha}}_B \times \bar{s} + \\ &+ m_{PC} \dot{\bar{\alpha}}_B (\dot{\bar{\alpha}}_B \overline{r_{BPC}}) + m_{PC} \ddot{\bar{\alpha}}_{ПУ} \times \overline{r_{ПУPC}} - m_{PC} \overline{r_{ПУPC}} (\dot{\bar{\alpha}}_{ПУ}) + 2m_{PC} \dot{\bar{\alpha}}_{ПУ} \times \bar{s} + \\ &+ m_{PC} \dot{\bar{\alpha}}_{ПУ} (\dot{\bar{\alpha}}_{ПУ} \overline{r_{ПУPC}}) - 2m_{PC} \overline{r_{ПУPC}} (\dot{\bar{\alpha}}_B \dot{\bar{\alpha}}_{ПУ}) + 2m_{PC} \dot{\bar{\alpha}}_{ПУ} (\dot{\bar{\alpha}}_B \overline{r_{ПУPC}}). \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнение вращательного движения снаряда вокруг центра масс получено на основе теоремы об изменении кинетического момента тела относительно его центра масс [4]:

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \bar{M}_0, \quad (5)$$

т.е., производная по времени от кинетического момента механической системы относительно центра масс \bar{K}_0 равна главному моменту внешних сил, действующих на точки системы относительно центра масс \bar{M}_0 .

Левую часть этого равенства можно рассматривать как абсолютную скорость точки, совпадающей с концом вектора \bar{K}_0 . Движение этой точки можно рассматривать как сложное. Оно происходит за счет изменения вектора \bar{K}_0 в подвижной системе координат, жестко связанной с твердым телом, (относительное движение) и его поворота с угловой скоростью $\bar{\omega}$ по отношению к неподвижной системе координат (переносное движение). Тогда по теореме сложения скоростей [4]:

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \left(\frac{d\bar{K}_0}{dt} \right)_{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k} = const} + \bar{\omega} \times \bar{K}_0, \quad (6)$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – орты подвижной системы координат.

Учитывая, что $\bar{K}_0 = \bar{\omega} J_0$, где J_0 – тензор инерции тела в центре масс, и подставляя выражение (6) в выражение (5), получим:

$$J_{PC} \dot{\bar{\omega}}_{PC} + \bar{\omega}_{PC} \times (J_{PC} \bar{\omega}_{PC}) = \bar{M}_{PC}, \quad (7)$$

где J_{PC} – тензор моментов инерции снаряда относительно осей системы координат $O_{PC} X_{PC} Y_{PC} Z_{PC}$,

$\bar{\omega}_{PC}$ – угловая скорость связанной со снарядом системы координат $O_{PC} X_{PC} Y_{PC} Z_{PC}$ относительно инерциальной (земной) системы координат.

Аналогичным образом представляются еще две группы уравнений, описывающие движение ПУ и базы:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{ПН} + \bar{Q}_{ПН} + \bar{N}_{ВЧ} &= m_{ПН} \ddot{\bar{y}}_B + m_{ПН} \ddot{\bar{\alpha}}_B \times \bar{r}_{БПН} - m_{ПН} \overline{r_{БПН}} (\dot{\bar{\alpha}}_B^2) + \\ &+ m_{ПН} \dot{\bar{\alpha}}_B (\dot{\bar{\alpha}}_B \overline{r_{БПН}}) + m_{ПН} \ddot{\bar{\alpha}}_{ПУ} \times \overline{r_{ПУПН}} - m_{ПН} \overline{r_{ПУПН}} (\dot{\bar{\alpha}}_{ПУ}^2) + \end{aligned} \quad (8)$$

$$+ m_{ПН} \dot{\bar{\alpha}}_{ПУ} (\dot{\bar{\alpha}}_{ПУ} \overline{r_{ПУПН}}) - 2m_{ПН} \overline{r_{ПУПН}} (\dot{\bar{\alpha}}_B \dot{\bar{\alpha}}_{ПУ}) + 2m_{ПН} \dot{\bar{\alpha}}_{ПУ} (\dot{\bar{\alpha}}_B \overline{r_{ПУПН}}), \quad (9)$$

$$J_{ПН} \dot{\bar{\omega}}_{ПН} + \bar{\omega}_{ПН} \times (J_{ПН} \bar{\omega}_{ПН}) = \overline{r_{ПНПУ}} \times \bar{N}_{ВЧ} + \bar{M}_{ПН} + \bar{M}_{ПУ}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_{П1} + \bar{F}_{П2} + \bar{F}_{31} + \bar{F}_{32} - \bar{N}_{ВЧ} &= m_B \ddot{\bar{y}}_B - \ddot{\bar{Q}}_B, \\ J_B \dot{\bar{\omega}}_B + \bar{\omega}_B \times (J_B \bar{\omega}_B) &= -\overline{r_{ПНПУ}} \times \bar{N}_{ВЧ} - \bar{M}_{ПУ} + \overline{r_{БП1}} \times \bar{F}_{П1} + \\ &+ \overline{r_{БП2}} \times \bar{F}_{П2} + \overline{r_{Б31}} \times \bar{F}_{31} + \overline{r_{Б32}} \times \bar{F}_{32}. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнения движения снаряда (4), (7) и пакета ПН (8), (9) выражаются в проекциях на оси системы координат $O_{ПУ} X_{ПУ} Y_{ПУ} Z_{ПУ}$, а уравнения движения базы (10), (11) – на оси

связанной системы координат $O_B X_B Y_B Z_B$. При этом используются матрицы преобразования координат при переходе от одной системы координат к другой. Это означает, что система уравнений (4), (7-11) может быть представлена в виде совокупности восемнадцати скалярных дифференциальных уравнений 2-го порядка.

Шесть искомым независимых скалярных переменных положения $y_B, \gamma_B, \theta_B, \psi_{ПУ}, \theta_{ПУ}$ и s могут быть найдены в результате решения первых шести скалярных дифференциальных уравнений 2-го порядка. Остальные двенадцать уравнений позволяют получить выражения для неизвестных сил и моментов взаимодействия элементов многоствольной ПУ как функций, зависящие от переменных положения.

Полученная система уравнений, описывающая динамику элементов ПУ, легко позволяет исследовать случай однократного возмущающего газодинамического воздействия. Для моделирования регулярного внешнего силового воздействия в структуру модели введена подсистема моделирования залпового огня, включающая: блок формирования положения очередного реактивного снаряда в пакете ПН, который выдает данные для расчета моментов действия возмущающих сил; блок, расчета силы давления газовой струи, действующей со стороны сходящего снаряда с учетом его местоположения и характера загруженности пакета ПН; блок учета изменения массы ПУ боевой машины в процессе залпа; блок формирования сигнала сброса модельных значений снаряда, что позволяет моделировать старт очередного снаряда с сохранением всех модельных значений базы, КЧ и ВЧ.

Для примера на рисунке 3 представлены графики функций, полученные в результате моделирования.

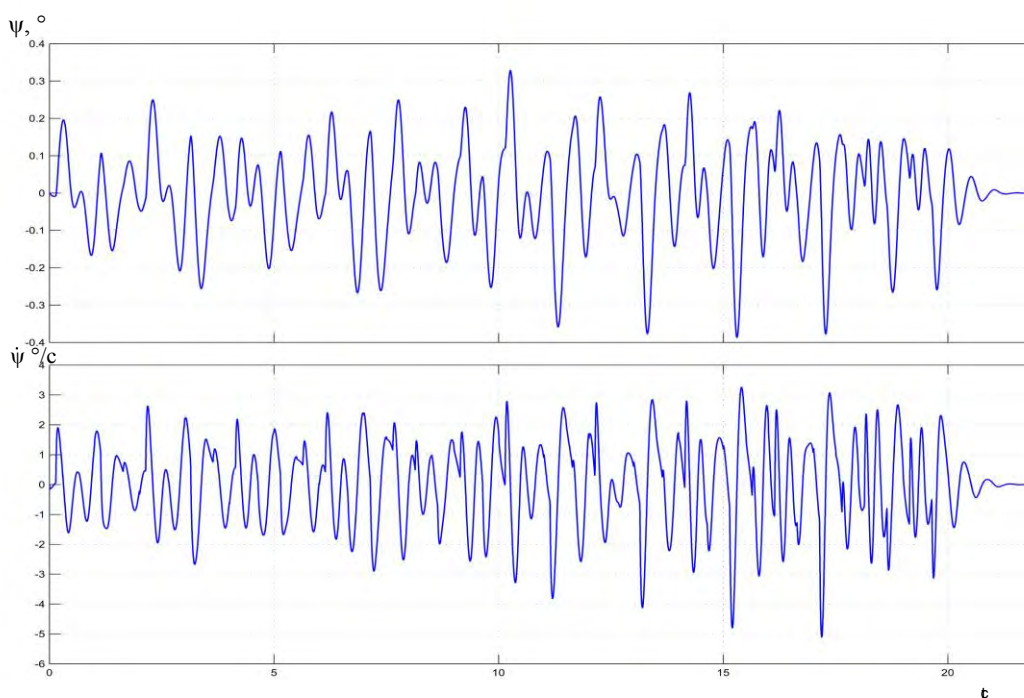


Рис. 3. Угол и угловая скорость колебаний пакета ПН относительно вертикальной оси инерциальной системы координат, полученные в результате моделирования

Графики, приведенные на рисунке 3, подтверждают имеющиеся в литературе [1] данные о том, что время затухания свободных колебаний ПУ и носителя превышают период регулярного газодинамического воздействия со стороны снарядов. Переходные процессы имеют выраженный случайный характер. Очевидно наличие причинно-следственных связей, которые проявляются в динамике и возникли в результате суперпозиции большого числа элементарных процессов взаимодействия. Частотный состав колебаний на протяжении залпа изменяется, ввиду уменьшения массы залпа. Прове-

денный спектральный анализ данных, показал наличие в энергетическом спектре двух пиков, один из которых (на частоте 1-2 Гц) соответствует собственной частоте колебаний базы, а другой (3-5 Гц) – пакета ПН. Полученные в процессе моделирования результаты для оценки адекватности сверены с данными, полученными при записи координат движения реального образца в полигонных условиях. Динамика колебаний пакета ПН, по результатам моделирования, с точностью до 15% соответствует реальным данным. Расхождение объясняется использованием ряда допущений при моделировании и шумами измерений датчиков, использованных при оценке координат движения реального образца.

Методика построения математической модели может быть использована для изучения динамики колебаний существующих и вновь разрабатываемых манипуляторов на колесных шасси под воздействием неоднородных переменных воздействий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богомолов, А.И. *Основания устройства и расчет реактивных сил* / А.И. Богомолов. – Пенза: Пензенский артиллерийский инженерный институт, 2003. – 318с.
2. Землянов, А.П., Мальцев, Ю.Ф., Неинерциальные системы отсчета: Примеры решения задач / А.П. Землянов, Ю.Ф. Мальцев. – РГУ, 2002.
3. Орлов, Б.В. *Проектирование ракетных и ствольных систем* / Б.В. Орлов. – М.: Машиностроение, 1974 г.
4. Черногоров, Е.П. *Теоретическая механика. Общие теоремы динамики* / Е.П. Черногоров. – Курс лекций, ЮУГУ, Челябинск, 2010.
5. Щербаков, В.С., Зырянова, С.А., Корытов, М.С., *Система автоматизированного моделирования стрелового грузоподъемного крана: Монография*. – Омск: СибАДИ, 2009. – 106 с.
6. Şomoiaş, P., Moraru, F., Safta, D., Moldoveanu, C., *A Mathematical Model for the Motion of a Rocket-Launching Device System on a Heavy Vehicle* / P. Şomoiaş, F. Moraru, D. Safta, C. Moldoveanu. – WSEAS TRANSACTIONS on APPLIED and THEORETICAL MECHANICS, April 2007, pp. 95-101.

E-mail: mironov-dimon@ya.ru

Поступила в редакцию 21.09.2016