УДК 624.131+539.215

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧИ КОНСОЛИДАЦИИ НЕОДНОРОДНОГО ГРУНТА И ЕЕ РЕШЕНИЯ

к.ф.-м.н. **Алтынбеков Ш.**, к.ф.-м.н.**Ниязымбетов А.Д.**, к.ф.-м.н. **Курмыш Е.К.**, к.ф.-м.н. **Джаманкараева М.А.**, **Алимкулова Б.Т.**

Южно-Казахстанский государственный педагогический институт Шымкента

1.Введение

Решение дифференциального уравнения фильтрационной теории консолидации с коэффициентами и краевыми условиями зависящими от давления связано с большими трудностями. Поэтому точное аналитическое решение удалось получить в настоящее время для весьма ограниченного круга задач. В этой связи первостепенной задачей, стоящей перед аналитической теорией консолидации, является разработка приближенных методов решения нелинейных краевых задач.

2. Постановка задачи и методика ее решения.

Рассмотрим методику решения трехмерного дифференциального уравнения процесса консолидации неоднородных грунтов

$$\frac{\partial H}{\partial t} = C_{vn} \frac{1+(n-1)\xi(x)}{\alpha_1 + \alpha_2 \eta(x)} \widetilde{L}(H) \tag{1}$$

при следующих краевых условиях:

$$H(x,\tau_1) = \frac{\theta_0^*}{n\gamma} + H_0^* \tag{2}$$

$$\left. \begin{aligned} K_1^{(1)}(H)\frac{\partial H}{\partial x_1} - \int_0^H K_1^{(2)}(\widetilde{H})d\widetilde{H}\Big|_{x_1=-1} &= \psi_1(x_2,x_3,t), \\ K_1^{(3)}(H)\frac{\partial H}{\partial x_1} + \int_0^H K_1^{(4)}(\widetilde{H})d\widetilde{H}\Big|_{x_1=+1} &= \psi_2(x_2,x_3,t), \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

$$\left. \begin{aligned} K_2^{(1)}(H)\frac{\partial H}{\partial x_2} - \int_0^H K_2^{(2)}(\widetilde{H})d\widetilde{H}\Big|_{x_2=-1} &= \psi_3(x_1,x_3,t), \\ K_2^{(3)}(H)\frac{\partial H}{\partial x_2} + \int_0^H K_2^{(4)}(\widetilde{H})d\widetilde{H}\Big|_{x_2=+1} &= \psi_4(x_1,x_3,t), \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

$$\left. \begin{aligned} K_3^{(1)}(H)\frac{\partial H}{\partial x_3} - \int_0^H K_3^{(2)}(\widetilde{H})d\widetilde{H}\Big|_{x_3=0} &= \psi_5(x_1,x_2,t), \\ K_3^{(3)}(H)\frac{\partial H}{\partial x_3} + \int_0^H K_3^{(4)}(\widetilde{H})d\widetilde{H}\Big|_{x_3=1} &= \psi_6(x_1,x_2,t), \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

где $\widetilde{L} = \sum_{S=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_S}\left(K_{\Phi S} \frac{\partial}{\partial x_S} \right)$,

$$K_{\Phi S} = K_{\Phi SO} \cdot K(H), C_{vn} = \frac{1}{n\gamma a_0}$$

$$K_1^{(1)}(H) = h_1^{(1)} K(H), \quad K_1^{(2)}(H) = h_1^{(2)} K(H), \quad K_3^{(4)}(H) = h_3^{(4)} K(H) .$$

Здесь смысл функций

$$H(x,t), H_0^*, \theta_0^*, K_{\Phi S}(H), \xi(x), \eta(x)$$

а также параметров

$$\alpha_0, \gamma, h_n^{(\alpha)}$$

и

$$h_n^{(\alpha+1)} \quad (\alpha = 1,2,3; n = 1,2,3)$$

общепринятый.

В дальнейшем в качестве функций $\xi(x), \eta(x)$, воспользуемся следующими зависимостями

$$\xi(x) = \xi_0 e^{\alpha_3 x_n}, \qquad \eta(x) = e^{-\alpha_4 x_n} .$$

Задача типа (1) – (5) может быть решена различными методами численного анализа. Здесь предпочтение отдали методам Кирхгофа и итерации. Согласно преобразованию Кирхгофа

$$U = \int_0^H K(\widetilde{H}) d\widetilde{H} \tag{6}$$

Перепишем задачу (1) - (5) в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} = C_{vn} f(U) \frac{1 + (n-1)\xi(x)}{\alpha_1 + \alpha_2 \eta(x)} L(U) \tag{7}$$

$$U(x, \tau_1) = U\left[\frac{\theta_0^*}{n\gamma} + H_0^*\right] , \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} h_1^{(1)} \frac{\partial U}{\partial x_1} - h_1^{(2)} U\Big|_{x_1=-1} &= \psi_1(x_2, x_2, t), \\ h_1^{(3)} \frac{\partial U}{\partial x_1} + h_1^{(4)} U\Big|_{x_1=+1} &= \psi_2(x_2, x_3, t), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} h_2^{(1)} \frac{\partial U}{\partial x_2} - h_2^{(2)} U\Big|_{x_2=-1} &= \psi_3(x_1, x_3, t), \\ h_2^{(3)} \frac{\partial U}{\partial x_2} + h_2^{(4)} U\Big|_{x_2=+1} &= \psi_4(x_1, x_3, t), \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} h_3^{(1)} \frac{\partial U}{\partial x_3} - h_3^{(2)} U\Big|_{x_3=0} &= \psi_5(x_1, x_2, t), \\ h_3^{(3)} \frac{\partial U}{\partial x_3} + h_3^{(4)} U\Big|_{x_3=1} &= \psi_6(x_1, x_2, t), \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где $L = \sum_{S=1}^{n} K_{\Phi SO} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad f(U) = 1/\frac{\partial H}{\partial U}$.

При этом полагаем, что функция $U=U(H)$ имеет обратную $H=H(U)$.

Уравнение (7) имеет точное аналитическое решение при стационарном поле избыточных напоров $\frac{\partial U}{\partial t}=0$.В случае нестационарной задачи часто полагают $\frac{\partial H}{\partial U}=const$. Этоусловие соответствует предположению,что некоторый участок кривой $U=U(H)$ заменяются соответствующим образом проведенной хордой.

Существуют и другие способы линеаризации уравнения (7), среди них-метод итерации. Согласно этому методу (разложив функции $f(U)$ в ряд Тейлора), перепишем задачу (7) – (11) в виде

$$\frac{\partial U_k}{\partial t}=C_{vn}f(C_0)\frac{1+(n-1)\xi_0 e^{\alpha_3 x_n}}{\alpha_1+\alpha_2 e^{-\alpha_4 x_n}}L(U_k)+\Phi_n(x,t,U_{k-1}), \quad (12)$$

$$U_k(x,\tau_1)=U_k\left[\frac{\theta_0^*}{n\gamma}+H_0^*\right] \quad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} h_1^{(1)}\frac{\partial U_k}{\partial x_1}-h_1^{(2)}U_k\Big|_{x_1=-1}&=\psi_1(x_2,x_2,t),\\ h_1^{(3)}\frac{\partial U_k}{\partial x_1}+h_1^{(2)}U_k\Big|_{x_1=+1}&=\psi_2(x_2,x_3,t),\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

$$\left.\begin{aligned} h_2^{(1)}\frac{\partial U_k}{\partial x_2}-h_2^{(2)}U_k\Big|_{x_2=-1}&=\psi_3(x_1,x_3,t),\\ h_2^{(3)}\frac{\partial U_k}{\partial x_2}+h_2^{(4)}U_k\Big|_{x_2=+1}&=\psi_4(x_1,x_2,t),\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

$$\left.\begin{aligned} h_3^{(1)}\frac{\partial U_k}{\partial x_3}-h_3^{(2)}U_k\Big|_{x_3=0}&=\psi_5(x_1,x_2,t),\\ h_3^{(3)}\frac{\partial U_k}{\partial x_3}+h_3^{(4)}U_k\Big|_{x_3=k}&=\psi_6(x_1,x_2,t),\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Введем новую неизвестную функцию $W_k(x,t)$

$$U_k(x,t)=\psi(x,t)+W_k(x,t) \quad (17)$$

представляющую собой отклонение от известной функции $\psi(x,t)$. Эта функция будет определяться как решение уравнения

$$\frac{\partial W_k}{\partial t}=C_{vn}f(C_0)\frac{1+(n-1)\xi_0 e^{\alpha_3 x_n}}{\alpha_1+\alpha_2 e^{-\alpha_4 x_n}}L(W_k)+D_n(x,t,W_{k-1}), \quad (18)$$

с однородными и граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} h_1^{(1)}\frac{\partial W_k}{\partial x_1}-h_1^{(2)}W_k\Big|_{x_1=-1}&=0,\\ h_1^{(3)}\frac{\partial W_k}{\partial x_1}+h_1^{(4)}W_k\Big|_{x_1=+1}&=0,\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} h_2^{(1)}\frac{\partial W_k}{\partial x_2}-h_2^{(2)}W_k\Big|_{x_2=-1}&=0,\\ h_2^{(3)}\frac{\partial W_k}{\partial x_2}+h_2^{(4)}W_k\Big|_{x_2=+1}&=0,\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} h_3^{(1)}\frac{\partial W_k}{\partial x_3}-h_3^{(2)}W_k\Big|_{x_3=0}&=0,\\ h_3^{(3)}\frac{\partial W_k}{\partial x_3}+h_3^{(4)}W_k\Big|_{x_3=1}&=0,\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

При этом начальное условие (8) будет выглядеть следующим образом

$$W_k(x,\tau_1)=U_k\left[\frac{\theta_0^*}{n\gamma}+H_0^*\right]-\psi(x,\tau_1)\tag{22}$$

Затем, согласно методу аппроксимации [1, с.7], функцию

$$f_1(x_n)=\frac{1+(n-1)\xi_0e^{\alpha_3x_n}}{\alpha_1+\alpha_2e^{-\alpha_4x_n}}$$

приближенно заменяем функцией

$$\tilde{f}_1(x_n)=\frac{1+(n-1)\xi_0}{\alpha_1+\alpha_2}\times\exp\left(\left(\ln\frac{(1+(n-1)\xi_0e^{\alpha_3})(\alpha_1+\alpha_2)}{(1+(n-1)\xi_0)(\alpha_1+\alpha_2e^{-\alpha_4})}\right)x_n\right),$$

т.е

$$\begin{aligned}\frac{1+(n-1)\xi_0e^{\alpha_3x_n}}{\alpha_1+\alpha_2e^{-\alpha_4x_n}}&\approx\frac{1+(n-1)\xi_0}{\alpha_1+\alpha_2}\times\\ &\times\exp\left(\left(\ln\frac{(1+(n-1)\xi_0e^{\alpha_3})(\alpha_1+\alpha_2)}{(1+(n-1)\xi_0)(\alpha_1+\alpha_2e^{-\alpha_4})}\right)x_n\right),\end{aligned}\tag{23}$$

Аппроксимация вида (23) для малых значений α_3 и α_4 вполне приемлема в практических расчетах. Соответствующие результаты, вычисленные на ПЭВМ при различных значениях этих параметров, показывают, что функция $f_1(x_n)$ с высокой точностью $10^{-4}\div10^{-9}$ аппроксимирована функцией $\tilde{f}_1(x_n)$.

Далее, предполагая, что функция $D_n(x,t,W_{k-1})$ может быть разложена в ряд Фурье-Бесселя и используя метод аппроксимации [1,с. 8], решение задачи (18) -(22) представим

$$W_k(x,t)=\sum_{t_1=1}^{\infty}\sum_{t_2=1}^{\infty}\sum_{t_3=1}^{\infty}T_{kt_1t_2t_3}(t)\times\times\left(\cos\mu_{t_1}x_1+A_{t_1}\sin\mu_{t_1}x_1\right)\times$$

$$\times\left(\cos\mu_{t_2}x_2+B_{t_2}\sin\mu_{t_2}x_2\right)\times V_{V_{t_1t_2}}\left(\frac{2\lambda_{t_1t_2t_3}}{\alpha_5\sqrt{K_{\Phi30}}}e^{-\frac{\alpha_5}{2}x_n}\right), \tag{24}$$

$$T_{ki_1i_2i_3}(t)=\left\{\int\widetilde{D}_{ni_1i_2i_3}^{(k-1)}(t)e^{\lambda_{i_1i_2i_3}^2c_{vn}f(C_0)t}dt+C_{i_1i_2i_3}^{(k-1)}\right\}\times e^{-\lambda_{i_1i_2i_3}^2c_{vn}f(C_0)t} \tag{25}$$

$$k=1,2,3,...$$

Здесь $A_{i_1}, B_{i_2}, \alpha_5, C_{i_1i_2i_3}^{(k-1)}, \widetilde{D}_{ni_1i_2i_3}^{(k-1)}(t)$ – известные константы и функции: $V_{V_{t_1t_2}}(x_n)$ - функция из комбинации функций Бесселя первого и второго рода индекса $v_{i_1i_2i_3}$;$\lambda_{i_1i_2i_3}$ - положительные корни уравнения составленного из комбинации этих функций; μ_{i_1} и μ_{i_2} -положительные корни уравнения, составленного из комбинации тригонометрических функций.

Подставив (24) в (17), а затем (17) в (6), нетрудно получить решение поставленной задачи (1) - (5) относительно напорной функции H(x,t).

Ряд (24) быстро сходится, так как $\mu_{i_1}\prec\mu_{i_1+1}$ и $\mu_{i_2}\prec\mu_{i_2+1}$, $\lambda_{i_1i_2i_3}\prec\lambda_{i_1+1i_2+1i_3+1}$. Значение функции $T_{ki_1i_2i_3}(t)$ $(k=1,2,3,...)$,определяемое по формуле (25), резко уменьшается как с увеличением μ_{i_1}, μ_{i_2} и $\lambda_{i_1i_2i_3}$, так и с течением времени. Следовательно, последовательность $\{U_k\}$ $k=1,2,3,...$ сходится к решению $H(x,t)$ задачи (1) – (5) при $k\to\infty$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алтынбеков Ш.А. Об одном методе аппроксимации // Проблемы механики. №3-4, 1995.- С. 7-9.*

E-mail: sh.altynbekov@mail.ru

Поступила в редакцию 25.09.2016