

## **О ВЛИЯНИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ФОРМЫ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СЭНДВИЧ-ПАНЕЛИ, СОДЕРЖАЩЕЙ МАГНИТОРЕОЛОГИЧЕСКИЙ ЭЛАСТОМЕР**

асп. **Маевская С.С.**

*Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, Витебск*

Тонкостенные слоистые элементы (оболочки, панели, пластины, балки) широко применяются во многих инженерных сооружениях, таких как воздушные и космические транспортные средства, подводные объекты, автомобили и т.п. ([1], [2]), поскольку использование новых материалов с различными физическими свойствами позволяет конструировать «сэндвич-структуры», удовлетворяющие всем современным требованиям жесткости, безопасности и бесшумности.

На сегодняшний день одной из актуальных проблем является виброзащита тонкостенных конструкций, подвергающихся во время использования внешним колебательным нагрузкам. «Интеллектуальные» материалы (многофункциональные материалы с активными и адаптивными свойствами) открывают новые возможности для решения задачи о виброзащите. Магнитореологический эластомер (МРЭ) – это «интеллектуальный» материал, упругие свойства которого изменяются в зависимости от величины приложенного магнитного поля ([3], [4]).

Используя МРЭ в «сэндвич»-структуре в качестве наполнителя между слоями упругого материала, можно ожидать, что «сэндвич» будет обладать широким спектром реологических свойств, что дает повод говорить о возможности эффективного использования МРЭ в различных устройствах виброзащиты.

Большинство работ, рассматривающих гашение вибраций многослойных тонкостенных конструкции, сделано для случаев, когда в качестве «интеллектуальной» прослойки выступала жидкость ([5], [6], [7], [8]). Однако, по сравнению с жидкостями, эластомеры обладают значительным преимуществом: они способны сохранять геометрическую форму при низком уровне магнитного поля.

Есть достаточно много работ, посвященных изучению свойств эластомеров и МРЭ (см., например, [4], [9], [7]), но только в некоторые из них проводятся исследования динамического расчета адаптивных «сэндвич» пластин, оболочек и балок, содержащих в качестве вязкоупругого наполнителя МРЭ. Объяснить это можно тем, что реакция композитной конструкции, содержащей МРЭ существенно зависит от соотношения масштаба времени реакции МРЭ и динамических характеристик контролируемой конструкции ([10], [11]). Поэтому большинство исследований адаптивной структуры «сэндвича» проводились для случаев, когда приложенное магнитное поле было стационарным.

К настоящему моменту известно лишь небольшое количество работ, посвященных исследованиям динамического расчета «сэндвич» оболочек с наполнителем чувствительным к действию магнитного или электрического поля (см., например, [8], [12], [13]). Работы, посвященные исследованию влияния магнитного поля на собственные частоты и диссипативные свойства слоистых магнитореологических панелей на данный момент отсутствуют.

Целью данной работы является исследование возможности эффективного воздействия постоянного магнитного поля на формы вынужденных колебаний трехслойной цилиндрической панели, содержащей МРЭ.

**Постановка задачи.** Рассмотрим трехслойную цилиндрическую панель, внешние слои которой не восприимчивы к магнитному полю, а внутренний представляет собой магнитоэологический эластомер (МРЭ). Каждый из слоев сэндвича характеризуется толщиной  $h_k$ , плотностью  $\rho_k$ , модулем Юнга  $E_k$ , модулем сдвига  $G_k$  и коэффициентом Пуассона  $\nu_k$ , где нечетные индексы  $k = 1, 3$  соответствуют внешним упругим слоям, а  $k = 2$  – МРЭ-ядру. Систему координат  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  (см. рис.1) свяжем со срединной поверхностью МРЭ-слоя. Обозначим через  $L_1$  и  $L_2$  длину и ширину панели в осевом и окружном направлениях соответственно, а через  $\varphi$  – угол ее раствора.

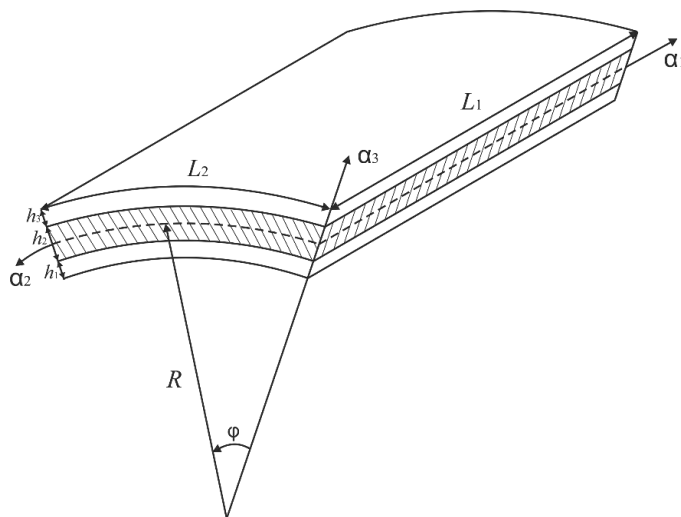


Рис. 1. Трехслойная цилиндрическая панель, содержащая магнитоэологический эластомер

Принимаем, что для панели справедливы гипотезы теории тонких слоистых оболочек, сформулированные Э.И. Григолюком и Г.М. Куликовым [14] и основанные на обобщенных кинематических гипотезах Тимошенко. Тогда для исследования ее движения может быть использована следующая система дифференциальных уравнений [14]:

$$\begin{aligned} \frac{Eh^3\eta_3}{12(1-\nu^2)} \left(1 - \frac{\theta h^2}{\beta} \Delta\right) \Delta^2 \chi + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha_1^2} + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \Delta\right) \chi &= f(\alpha_1, \alpha_2, t) \\ \Delta^2 \Phi - \frac{Eh}{R} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \Delta\right) \chi &= 0, \\ w &= \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \Delta\right) \chi, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа в криволинейной системе координат  $\alpha_1, \alpha_2$ ,  $E, \nu, \rho$  – приведенные модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность для всего пакета сэндвича,  $h = h_1 + h_2 + h_3$  – суммарная толщина панели,  $\Phi, \chi$  – функции напряжений и перемещений,  $w$  – нормальный прогиб,  $t$  – время,  $\eta_3, \theta, \beta$  – параметры, характеризующие поперечные сдвиги. Если панель собрана из упругого материала, то все физические и геометрические характеристики панели суть вещественные величины, определяемые по формулам

$$\begin{aligned} \theta &= 1 - \frac{\eta_2^2}{\eta_1 \eta_3}, \quad \beta = \frac{12(1-\nu^2)q_{44}}{Eh\eta_1}, \quad \rho = \sum_{k=1}^N \rho_k \zeta_k, \quad h = \sum_{k=1}^N h_k, \\ E &= \frac{1-\nu^2}{h} \sum_{k=1}^N \frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2}, \quad \nu = \sum_{k=1}^N \nu_k \frac{E_k h_k \nu_k}{1-\nu_k^2} \left( \sum_{k=1}^N \frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2} \right)^{-1}, \quad h \zeta_k = h_k, \end{aligned}$$

$$\eta_1 = \sum_{k=1}^N \zeta_k^{-1} \pi_{1k} \gamma_k - 3c_{12}^2, \quad \eta_2 = \sum_{k=1}^N \zeta_k^{-1} \pi_{2k} \gamma_k - 3c_{13}c_{12}, \quad (2)$$

$$\eta_3 = 4 \sum_{k=1}^N (\zeta_k^2 + 3\zeta_{k-1}\zeta_k) \gamma_k - 3c_{13}^2, \quad h\zeta_n = \delta_n, \quad \gamma_k = \frac{E_k h_k}{1 - \nu_k^2} \left( \sum_{k=1}^N \frac{E_k h_k}{1 - \nu_k^2} \right)^{-1},$$

$$c_{12} = \sum_{k=1}^N \zeta_k^{-1} \pi_{3k} \gamma_k, \quad c_{13} = \sum_{k=1}^N (\zeta_{k-1} + \zeta_k) \gamma_k, \quad q_{44} = \frac{\left[ \sum_{k=1}^N \left( \lambda_k - \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}} \right) \right]^2}{\sum_{k=1}^N \left( \lambda_k - \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}} \right) G_k^{-1}} + \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}} G_k,$$

$$G_k = \frac{E_k}{2(1 + \nu_k)}, \quad \lambda_k = \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}} \int f_0(z) dz, \quad \lambda_{kn} = \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}} \int f_k(z) f_n(z) dz, \quad \frac{1}{12} h^3 \pi_{1k} = \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}} \int g^2(z) dz,$$

$$g(z) = \int_0^z f_0(z) dz, \quad \frac{1}{12} h^3 \pi_{2k} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} z g(z) dz, \quad \frac{1}{2} h^2 \pi_{3k} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} g(z) dz, \quad f_0(z) = \frac{1}{h^2} (z - \delta_0)(\delta_N - z),$$

$$f_k(z) = \frac{1}{h_k^2} (z - \delta_{k-1})(\delta_k - z).$$

Если внутреннее ядро изготовлено из МРЭ, то  $E, \nu, \eta_3, \theta, \beta$ , зависящие от индукции  $B$  магнитного поля [12, 13], есть комплексные величины.

В качестве граничных условий рассмотрим условия шарнирного опирания:

$$\chi = \Delta\chi = \Delta^2\chi = \Phi = \Delta\Phi = 0 \quad \text{при} \quad \alpha_1 = 0, L_1, \quad \alpha_2 = 0, L_2 \quad (3)$$

В этом случае комплексная собственная частота колебаний будет иметь вид [15]:

$$\omega_{nm}^2 = \frac{E}{\rho R^2} \left[ \frac{\eta h_*^2}{12} \Delta_{nm}^2 \frac{[1 + \theta K \Delta_{nm}]}{[1 + K \Delta_{nm}]} + \frac{R^4 n^4}{L_1^4 \Delta_{nm}^2} \right], \quad (4)$$

где

$$K = \frac{\pi^2 h_*^2}{\beta}, \quad \eta = \frac{\pi^4 \eta_3}{(1 - \nu^2)}, \quad \Delta_{nm} = \left( \frac{Rn}{L_1} \right)^2 + \left( \frac{Rm}{L_2} \right)^2, \quad h_* = \frac{h}{R}.$$

Пусть на панель действует внешняя нагрузка интенсивности

$$f(\alpha_1, \alpha_2, t) = \frac{F^+(\alpha_1, \alpha_2) e^{i\Omega t} + F^-(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\Omega t}}{2}, \quad (5)$$

где  $\Omega$  – частота вынужденных колебаний.

Решение уравнения (1) с граничными условиями (2) находится в виде двойных рядов:

$$\chi(\alpha_1, \alpha_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n \alpha_1}{L_1} \sin \frac{\pi m \alpha_2}{L_2} q_{nm}(t),$$

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n \alpha_1}{L_1} \sin \frac{\pi m \alpha_2}{L_2} f_{nm}(t) \quad (6)$$

где  $q_{nm}(t), f_{nm}(t)$  – так называемые обобщенные координаты системы.

Подстановка (6) в уравнение (1) с последующим разложением функции (5) в ряд Фурье приводит к уравнению:

$$\ddot{q}_{nm}(t) + \omega_{nm}^2 q_{nm}(t) = \frac{\frac{2}{L_1} \cdot \frac{2}{L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} f(\alpha_1, \alpha_2, t) \cdot \sin \frac{\pi n \alpha_1}{L_1} \sin \frac{\pi m \alpha_2}{L_2} d\alpha_1 d\alpha_2}{\rho h \left( 1 + \frac{h^2}{\beta} \left( \left( \frac{\pi n}{L_1} \right)^2 + \left( \frac{\pi m}{L_2} \right)^2 \right) \right)} \quad (7)$$

Частное решение уравнения (7) имеет вид:

$$q_{nm}(t) = \frac{1}{\rho h \left( 1 + \frac{h^2}{\beta} \left( \left( \frac{\pi n}{L_1} \right)^2 + \left( \frac{\pi m}{L_2} \right)^2 \right) \right)} \frac{F_{nm}^+ e^{i\Omega t} + F_{nm}^- e^{-i\Omega t}}{\omega_{nm}^2 - \Omega^2}, \quad (8)$$

где  $F_{nm}^\pm = \frac{2}{L_1} \cdot \frac{2}{L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} F^\pm(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \sin \frac{\pi n \alpha_1}{L_1} \sin \frac{\pi m \alpha_2}{L_2} d\alpha_1 d\alpha_2$ ,

$\Omega \neq \omega_{nm}$  для любых  $n, m$ .

Общее решение уравнений (1), соответствующее вынужденным колебаниям при силовом воздействии (5), имеет вид:

$$\begin{aligned} \chi(\alpha_1, \alpha_2, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (C_{nm}^+ e^{-i \operatorname{Im}(\omega_{nm})t} \cos(\operatorname{Re}(\omega_{nm})t) + C_{nm}^- e^{-i \operatorname{Im}(\omega_{nm})t} \sin(\operatorname{Re}(\omega_{nm})t) + \\ & + \frac{1}{\rho h \left( 1 + \frac{h^2}{\beta} \left( \left( \frac{\pi n}{L_1} \right)^2 + \left( \frac{\pi m}{L_2} \right)^2 \right) \right)} \frac{F_{nm}^+ e^{i\Omega t} + F_{nm}^- e^{-i\Omega t}}{\omega_{nm}^2 - \Omega^2}) \cdot \sin \frac{\pi n \alpha_1}{L_1} \sin \frac{\pi m \alpha_2}{L_2} \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $C_{nm}$  – произвольные комплексные числа, которые находятся из начальных условий.

**Анализ результатов и примеры.** В качестве примера рассмотрим цилиндрическую трехслойную МРЭ-панель с параметрами  $R = 0,5$  м;  $L_1 = 1$  м,  $\varphi_1 = 180^\circ$ , внешние слои которой характеризуются параметрами  $h_1 = h_3 = 0,5$  мм;  $\nu_1 = \nu_3 = 0,4$ ;  $E_1 = E_3 = 1,5 \cdot 10^9$  Па;  $\rho_1 = \rho_3 = 1,4 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, а МРЭ-ядро параметрами:  $\rho_2 = 2,65 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu_2 = 0,42$ ,  $h_2 = 11$  мм.  $E_2$  и  $G_2$  определялись по результатам экспериментально установленных зависимостей этих параметров от индукции магнитного поля [13]. Зависимость действительной ( $G'$ ,  $E'$ ) и мнимой ( $G''$ ,  $E''$ ) частей модуля сдвига  $G_2$  и модуля Юнга  $E_2$  для МРЭ от индукции магнитного поля  $B$  представляется формулами [13]:

$$\begin{aligned} G'_{MP} &= (4,500 + 14,978 \cdot B) \text{ кПа}, \quad G''_{MP} = (17,000 + 3,680 \cdot B) \text{ кПа}, \\ E'_{MP} &= (13,230 + 45,040 \cdot B) \text{ кПа}, \quad E''_{MP} = (50,000 + 10,920 \cdot B) \text{ кПа} \end{aligned} \quad (10)$$

Чтобы оценить эффективность гашения вынужденных колебаний рассмотрим амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) МРЭ-панели под действием внешней периодической силы:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\rho h \left( 1 + \frac{h^2}{\beta} \left( \left( \frac{\pi n}{L_1} \right)^2 + \left( \frac{\pi m}{L_2} \right)^2 \right) \right)} \cdot \left( \frac{F_{nm}^+ + F_{nm}^-}{\omega^2 - \Omega^2} \right) \right) \quad (11)$$

Заменим в (11) бесконечные ряды на конечные с числом слагаемых  $N$  и  $M$  для индексов  $n$  и  $m$  соответственно.

Пусть внешняя периодическая сила задается соотношением:

$$f(\alpha_1, \alpha_2, t) = \cos \Omega t \quad (12)$$

На рисунке 2 представлена скорость сходимости действительной части усеченного ряда (11) при увеличении значений  $N$  и  $M$ . На рисунке видно, что при  $N = M = 12$  числе слагаемых, соотношение (11) дает удовлетворительный результат.

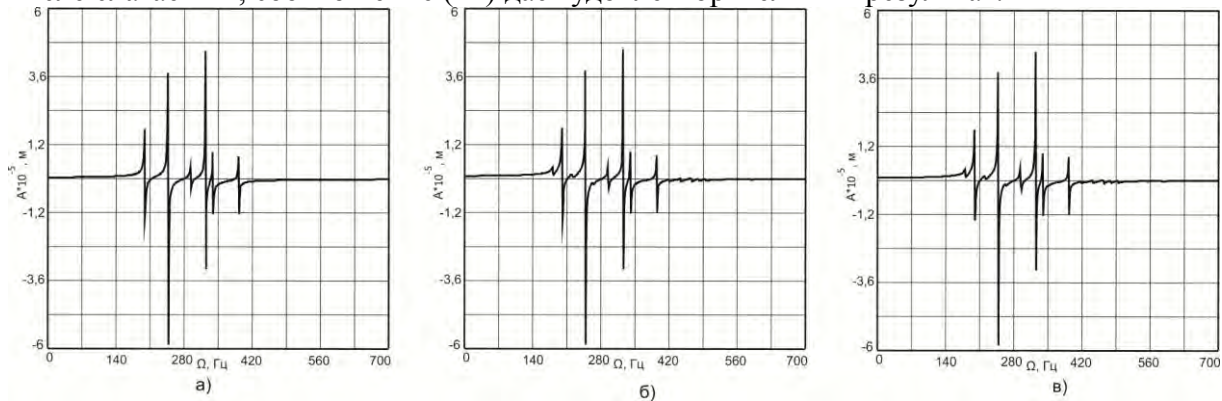


Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика для разного числа слагаемых  $N=M=4$  (а),  $N=M=10$  (б),  $N=M=12$  (в)

На рисунке 3 представлено влияние магнитного поля на АЧХ МРЭ-панели под действием внешней периодической силы (12). Можно видеть, что изменение индукции магнитного поля позволяет управлять резонансными колебаниями, путем уменьшения амплитуды и смещения АЧХ вправо.

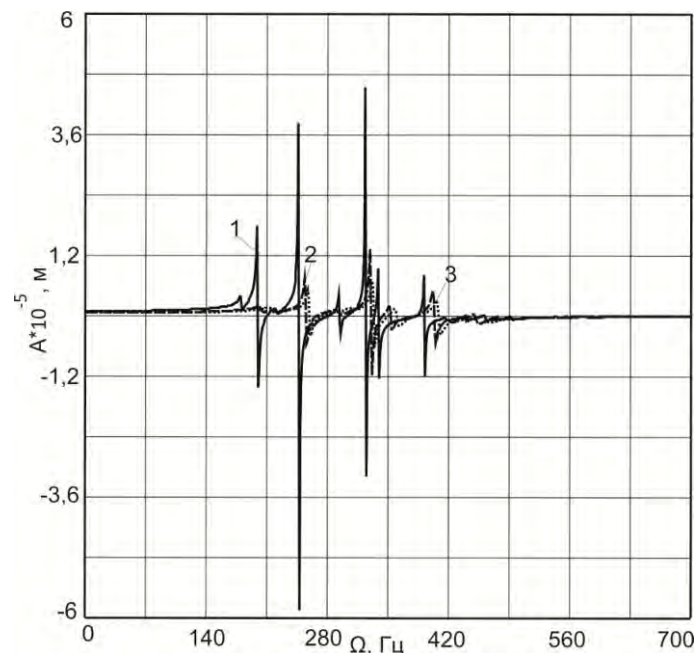


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика при уровнях магнитного поля  $B = 0$  мТл (кривая 1),  $B = 40$  мТл (кривая 2),  $B = 100$  мТл (кривая 3)

## ЛИТЕРАТУРА

1. Korjakin, A. Analysis of free damped vibrations of laminated composite conical shells. / A. Korjakin, R. Rikards, A. Chate, H. Altenbach // *Composite Structures*. – 1998. – №41. – P. 39–47.
2. Qatu, M.S. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells / M.S. Qatu // *Composite Structures*. – 2010. – № 93(1). – P. 14–31.
3. Jolly, M.R. Properties and applications of commercial magnetorheological fluids / M.R. Jolly, J.W. Bender, D.J. Carlson // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. – 1999. – №10. – P. 5–13.
4. Ginder, G.M. Rheology controlled by magnetic fields / G.M. Ginder // *Encyclopedia of Applied Physics*. – 1996. – Vol.16. – P. 487–503.
5. Park, D.W. Shape control of an electrorheological fluid based smart plate / D.W. Park, S.B. Choi, S.B. Jung // *Proc. SPIE*. 3329. – 1998. – P. 824–835.
6. Shaw, J. Hybrid control of cantilevered ER sandwich beam for vibration suppression. / J. Shaw // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. – 2000. – № 11. – P. 26–31.
7. Yalcintas, M. Magnetoreological and electroreological materials in adaptive structures and their performance comparison / M. Yalcintas, H. Dai // *Smart Materials and Structures*. – 1999. – № 8. – P. 560–573.
8. Yeh, J.-Y. Vibration and damping analysis of orthotropic cylindrical shells with electrorheological core layer / J.-Y. Yeh // *Aerospace Science and Technology*. – 2008 doi:10.1016/j.jsv.2008.02.012.
9. Korobko, E.V. Rheological properties of magneto-electrorheological fluids with complex disperse phase / E.V. Korobko, M.A. Zhuravski, Z.A. Novikova, V.A. Kuzmin // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2009. – № 149. – P. 12–65.
10. Choi, Y.T. Assessment of time response characteristics of electrorheological and magnetorheological dampers / Y.T. Choi, N.M. Wereley // *Proc. SPIE*. 4331 – 2001. P. 92–102.
11. Mikhasev, G.I., On suppression of vibrations of three-layered beam containing magnetorheological composite / G.I. Mikhasev, E.V. Korobko, Z.A. Novikova // *Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials*. – 2010 – № 4(13). – P. 49–53.
12. Mikhasev G.I. Theory of Thin Adaptive Laminated Shells Based on Magnetorheological Materials and its Application in Problems on Vibration Suppression. / G.I. Mikhasev, M.G. Botogova, E.V. Korobko // *Shelllike Structures / Advanced Structured Materials*; Eds. H. Altenbach and V. Eremeyev. – Springer, 2011. – Vol. 15, Chapter 48. – P. 727-750.
13. Mikhasev, G.I., On the influence of the magnetic field on the eigenmodes of thin laminated cylindrical shells containing magnetorheological elastomer / G.I. Mikhasev, H. Altenbach, E.A. Korchevskaya // *Composite Structures*. – July, 2014. – Vol. 113. – P. 186-196.
14. Григолюк, Э.И. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин / Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов. – М.: Машиностроение, 1988. – 288с.
15. Маевская С.С., Михасев Г.И. О влиянии магнитного поля на формы свободных колебаний трехслойной цилиндрической панели, содержащей магнито-реологический эластомер / С.С. Маевская, Г.И. Михасев // *Теоретическая и прикладная механика: между. науч.-техн. сб.* – 2016. – №31. – С. 136–142.

E-mail: [svetlanamaevskaya@yandex.ru](mailto:svetlanamaevskaya@yandex.ru)

Поступила в редакцию 12.10.2016