

ОСОБЕННОСТИ АЛГОРИТМИЗАЦИИ ПРОГРАММИРУЕМЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПО ЗАДАННОЙ ТРАЕКТОРИИ

¹Дайняк И.В., ¹Титко Е.А., ²Голдын Л., ³Щебёт Р.

¹УО «Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники», Минск

²«Белостокский технический университет», Белосток, Польша

³«Высшая школа информатики и предпринимательства», Ломжа, Польша

Большое количество современных технических систем основано на построении траекторий на дифференциальных многообразиях с заданной точностью. Для автоматизированного управления ими предпочтительно, чтобы задание на перемещение было записано в виде дифференциального уравнения или системы уравнений, связывающих отдельные координаты. Такие системы с поведением, заданным с точностью [1] до пересечения многообразий относятся к числу голономных систем, для которых задача синтеза (построения) предполагает синтез дифференциального анализатора в виде дифференциальных уравнений, решением которых и является воспроизводимая программа движения [2].

При задании программы движений объемы потоков информации, как поступающей от задающего устройства, так и вводимого в интерполятор, велики, что вызывает большие трудности в приготовлении этой информации, в ее хранении, проверке и вводе. При задании программных движений более целесообразным оказывается управлять системой перемещений с шестью степенями свободы непосредственно от интерполятора [3].

Оператор или программа управления верхнего уровня определяет программу движений в виде технологического задания на оборудование, представленное в виде последовательности операций над заготовкой.

Операции, которые необходимо выполнить в рамках технологического процесса, впоследствии преобразуются в программу движений, которая в свою очередь описывается в виде траекторий, принадлежащих тому или иному топологическому многообразию. В результате на выходе подсистемы, формирующей программу движений будет множество точек, последовательный проход по которым представляет собой программу перемещений.

Для построения программы перемещений в трехмерном евклидовом пространстве \mathbf{R}^3 , задаваемой прямоугольной системой координат $Oxyz$, задается некоторая кривая l , представляющая собой программу движения:

$$l: \begin{cases} x = f_1(\varphi), \\ y = f_2(\varphi), \\ z = f_3(\varphi), \end{cases} \quad (1)$$

где параметр φ пробегает некоторый отрезок $I = [\varphi_0, \varphi_1]$. Примером кривой, задаваемой таким образом, может быть полувиток спирали, выражение которого имеет вид:

$$x = \sin \varphi, \quad y = \cos \varphi, \quad z = \varphi \quad (2)$$

где $\varphi \in [0, \pi]$.

Параметр φ в выражении (1) произволен, т.е. никак не связан с возможностями и способами прохождения кривой l . Например, тот же полувиток (2) спирали может быть задан и по-другому:

$$x = 2 \sin \varphi \cos \varphi, \quad y = 2 \cos^2 \varphi - 1, \quad z = 2\varphi \quad (3)$$

где $\varphi \in [0, \pi/2]$, или в виде

$$x = \sqrt{1 - \varphi^2}, \quad y = \varphi, \quad z = \arccos \varphi \quad (4)$$

где $\varphi \in [-1, 1]$.

Таким образом, хотя параметрические представления (2), (3) и (4) различны, множества точек в пространстве \mathbf{R}^3 , определяемые ими, совпадают, т.е. (2), (3) и (4) задают в \mathbf{R}^3 одну и ту же кривую.

Для построения управляемого движения точки по кривой l , заключающегося в воспроизведении этой кривой с помощью устройства (дифференциального анализатора), управляющее воздействие которого в каждый момент времени t заключается в изменении скорости точки вдоль каждой координаты, причем это изменение – линейная функция текущих фазовых координат точки в зависимости от времени t коэффициентами; эти коэффициенты и есть предмет управления [4, 5]. Кроме того, заданы ограничения, которым должен удовлетворять максимально возможный модуль v скорости движения точки по этой кривой. Обычно, эти ограничения заданы в виде закона $v = v(t)$ зависимости модуля максимальной скорости от времени и определяются типом управляющего устройства. Как правило, график функции $v = v(t)$ является трапецией (рис. 1).

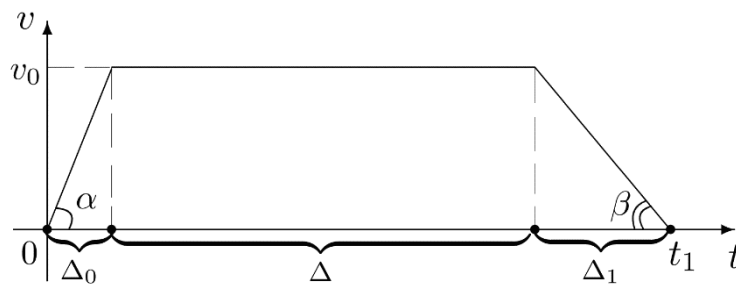


Рис. 1. Зависимость модуля максимальной скорости от времени

На рисунке 1 Δ_0, Δ_1 – участки разгона и торможения точки соответственно (их длины фиксированы), а Δ – участок постоянства скорости v_0 , который может выбираться сколь угодно большим (таким, чтобы обеспечить прохождение точкой всей кривой). Учитывая все сказанное выше, можно сформулировать следующую задачу: нужно так выбрать управление – коэффициенты $u_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, 3$, в линейной дифференциальной системе 3-го порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = u_{11}(t)x + u_{12}(t)y + u_{13}(t)z, \\ \dot{y} = u_{21}(t)x + u_{22}(t)y + u_{23}(t)z, \\ \dot{z} = u_{31}(t)x + u_{32}(t)y + u_{33}(t)z, \end{cases} \quad (5)$$

чтобы фазовая кривая этой системы, начавшись в начальный момент времени вектором $[f_1(\varphi_0), f_2(\varphi_0), f_3(\varphi_0)]^T$ за некоторый промежуток времени описала кривую l и только ее, причем чтобы в каждый момент времени t движения модуль скорости точки, воспроизводящей кривую l , не превосходил $v(t)$.

Перейдем в задании (1) кривой l от параметра φ (он произволен) к естественному, или, как его еще называют, натуральному, параметру s – длине кривой. После такого перехода (перепараметризации) параметрическое задание кривой l имеет вид:

$$l: \begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \\ z = z(s), \end{cases} \quad (6)$$

$$s \in [0, S_\ell]$$

где S_ℓ – длина кривой l .

Поскольку закон изменения модуля максимальной скорости точки при движении вдоль кривой задан в виде $v = v(t)$, то можем найти закон изменения длины пути s , пройденного точкой за время от 0 до t :

$$s = s(t) = \int_0^t v(\xi) d\xi \quad (7)$$

Остановимся подробнее на вычислении интеграла (7), поскольку функция $v(\xi)$, если говорить о рассматриваемом ее задании, дана нам только с точностью до величины Δ – длины отрезка ее постоянства. Обозначим через L величину

$$L = S_\ell - \frac{v_0}{2}(\Delta_0 + \Delta_1) \quad (8)$$

где L – разность между длиной кривой l и длиной, которую проходит точка на участках разгона и торможения.

Пусть $L > 0$. Тогда положим в задании функции $v = v(t)$ участок постоянства скорости $\Delta = L/v_0$ и вычислим интеграл (7) от теперь уже полностью заданной функции $v = v(t)$ (рис. 1).

Пусть теперь $L \leq 0$. Тогда, если требовать, чтобы кривая l была пройдена за наименьшее время, участка постоянства скорости с некоторым $v_1 \leq v_0$ быть не может и, как легко подсчитать (площадь под графиком $v = v(t)$ должна быть равна S_ℓ), функция $v = v(t)$ имеет вид, показанный на рис. 2, где

$$t_1 = \sqrt{\frac{2S_\ell(k_1 + k_2)}{k_1 \cdot k_2}}, \quad \tau = \frac{k_2 t_1}{k_1 + k_2}, \quad v_1 = \sqrt{\frac{2S_\ell k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}} \quad (9)$$

и $k_1 = \operatorname{tg} \alpha$, $k_2 = \operatorname{tg} \beta$.

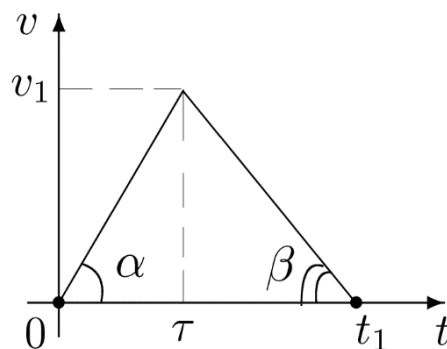


Рис. 2. График скорости изображающей точки

Это значит, в случае $L \leq 0$ интеграл (7) – это интеграл от функции, показанной на рис. 2, параметры которой задаются формулами (9).

Теперь, воспользовавшись соотношением (7), перейдем в (1) от натурального параметра s (длины) к параметру t (время):

$$l: \begin{cases} x = x(s(t)), \\ y = y(s(t)), \\ z = z(s(t)), \end{cases} \quad (10)$$

или, обозначив в (10) $x(s(t)) = X(t)$, $y(s(t)) = Y(t)$, $z(s(t)) = Z(t)$, окончательно получим:

$$l: \begin{cases} x = X(t), \\ y = Y(t), \\ z = Z(t). \end{cases} \quad (11)$$

Итак, получили равенства (11), которые задают закон движения точки по кривой l в зависимости от времени t (при заданном модуле скорости $v = v(t)$ движения точки).

Алгоритмически этот основной переход $\varphi \rightarrow s \rightarrow t$, состоящий в замене произвольного параметра φ в задании кривой l к временному параметру t можно описать с помощью следующих шагов.

Шаг 1. Взяв кривую l в форме (1), вычисляем длину $s = s(\varphi)$ кривой l как функцию параметра φ :

$$s(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{(f_1'(\varphi))^2 + (f_2'(\varphi))^2 + (f_3'(\varphi))^2} d\varphi, \quad \varphi \in [\varphi_0, \varphi_1]. \quad (12)$$

Функция $s = s(\varphi)$ – возрастающая на отрезке $[\varphi_0, \varphi_1]$, поэтому существует обратная ей функция $\varphi = \omega(s)$, $s \in [0, S_l]$ ($S_l = s(\varphi_1)$). Сделаем замену переменной:

$$l: \begin{cases} x = f_1(\omega(s)), \\ y = f_2(\omega(s)), \\ z = f_3(\omega(s)), \end{cases} \quad (13)$$

или, обозначив $f_1(\omega(s)) = x(s)$, $f_2(\omega(s)) = y(s)$, $f_3(\omega(s)) = z(s)$, получим параметризацию (6) кривой l через ее натуральный параметр s .

Шаг 2. Этот шаг аналогичен шагу 1: вычислим интеграл (7), т. е. найдем $s = s(t)$ и, сделав в (6), или, что то же, в (13), замену $s = s(t)$, получим задание (10), или задание (11) кривой l через временной параметр t .

Кривая l задана формулами (11), в которых параметр t – время (к этим формулам мы приходим с помощью шагов 1 и 2). Нужно так выбрать коэффициенты-управления $u_{ij}(t)$, $t \geq 0$, $i, j = 1, 2, 3$, чтобы у системы (5) имелось решение $[X(t), Y(t), Z(t)]^T$, где $X(t), Y(t), Z(t)$ – функции (11). Коэффициенты-управления $u_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, 3$, ищутся в классе непрерывных функций.

В такой, общей (т. е. если считать функции u_{ij} не зависящими друг от друга) постановке задача легко разрешима – можно указать бесконечное множество систем (5), реализующих любую кривую l . Поэтому мы можем заранее задаться каким-либо критерием качества управляющей системы (5) и искать коэффициенты-управления в этом классе. Например, можно считать, что коэффициенты u_{ij} не должны превосходить по абсолютной величине некоторую константу, или что матрица коэффициентов системы (5) должна иметь заранее заданный вид, или что число не тождественно нулевых коэффициентов должно быть минимальным и т.д.

Так как система (5) удовлетворяет теореме существования и единственности и имеет тождественно нулевое решение, то никакая ее фазовая кривая l не может прохо-

дуть через начало координат. Это условие считаем в дальнейшем выполненным, т. е., равносильно,

$$X^2(t) + Y^2(t) + Z^2(t) \neq 0, \forall t \quad (14)$$

где $X(t), Y(t), Z(t)$ – функции (11).

Если заранее на матрицу коэффициентов системы (5) не накладывать никаких дополнительных ограничений, то для любой кривой l , не проходящей через начало координат, можно определить коэффициенты $u_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, 3$ системы (5) сразу и в общем виде, так, чтобы l была ее фазовой кривой. Действительно, учитывая выражение (14) и обозначая

$$D = X^2(t) + Y^2(t) + Z^2(t) \quad (15)$$

положим:

$$\begin{aligned} u_{11}(t) &= \frac{X(t)\dot{X}(t)}{D}, u_{12}(t) = \frac{Y(t)\dot{X}(t)}{D}, u_{13}(t) = \frac{Z(t)\dot{X}(t)}{D}; \\ u_{21}(t) &= \frac{X(t)\dot{Y}(t)}{D}, u_{22}(t) = \frac{Y(t)\dot{Y}(t)}{D}, u_{23}(t) = \frac{Z(t)\dot{Y}(t)}{D}; \\ u_{31}(t) &= \frac{X(t)\dot{Z}(t)}{D}, u_{32}(t) = \frac{Y(t)\dot{Z}(t)}{D}, u_{33}(t) = \frac{Z(t)\dot{Z}(t)}{D}; \end{aligned} \quad (16)$$

где $X(t), Y(t), Z(t)$ – функции (11). Непосредственной подстановкой легко убедиться, что вектор-функция $[X(t), Y(t), Z(t)]^T$ – решение системы (5) с так определенными коэффициентами, а значит, l – ее фазовая кривая.

Полученные в выражениях (15) функции $u_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, 3$, могут быть реализованы в формирующем команды внешнем контроллере системы управления [6, 7] или полностью запрограммированы в задающей программе более высокого уровня на управляющем компьютере.

ЛИТЕРАТУРА

1. Системы многокоординатных перемещений и исполнительные механизмы для прецизионного технологического оборудования / В.В. Жарский [и др.] ; под ред. д-ра техн. наук, проф. С.Е. Карповича. – Минск : Бестпринт, 2013. – 208 с.
2. Карпович, С.Е. Имитационное моделирование голономных и мобильных автоматических систем / С.Е. Карпович, В.В. Жарский, И.В. Дайняк. – Минск : Белпринт, 2008. – 212 с.
3. Карпович, С.Е. Системы перемещений на основе привода прямого действия / С.Е. Карпович, В.В. Жарский, И.В. Дайняк. – Минск : БГУИР, 2008. – 239 с.
4. Heimann, B. Mechatronika. Komponenty, metody, przyklady / B. Heimann, W. Gerth, K. Popp. – Warszawa : PWN, 2001. – 351 s.
5. Shetty, D. Mechatronics System Design / D. Shetty, R. Kolk. – Cengage Learning, 2010. – 504 p.
6. Innovative Algorithms and Techniques in Automation, Industrial Electronics and Telecommunications / T. Sobh [et al]. – Springer Science & Business Media, 2007. – 552 p.
7. Zentner, J. Zur optimalen Gestaltung von Parallelkinematikmaschinen mit Planarantrieben / J. Zentner. – Illmenau : ISLE, 2006. – 123 s.

E-mail: dainiak@bsuir.by

Поступила в редакцию 21.09.2016